Rapport : Transducteurs et machines de Moore et Mealy

19 décembre 2024

Table des matières

1 Généralités sur les transducteurs finis

Un transducteur fini est une généralisation des automates finis, implémentant non pas des langages mais plutôt des relations entre des ensembles de mots. Cela se fait à l'aide d'étiquettes supplémentaires sur chaque transition entre deux états.

1.1 Définition des transducteurs

Définition 1. *Un transducteur fini est un 6-uplet $T = (\Sigma, \Gamma, Q, I, F, \delta)$ où*
— Σ *est l'alphabet d'entrée (fini)*
— Γ *l'alphabet de sortie (fini)*
— Q *l'ensemble des états (fini)*
— $I \subset Q$ *l'ensemble des états initiaux*
— $F \subset Q$ *l'ensemble des états finaux*
— $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ *est la fonction de transition non déterministe*

En d'autres termes, T est un automate fini non déterministe sur l'alphabet $\Sigma_\varepsilon \times \Gamma \cup \Sigma \times \Gamma_\varepsilon$

On peut comme pour les automates définir $\delta^* : Q \times \Sigma^* \times \Gamma^* \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ par induction :

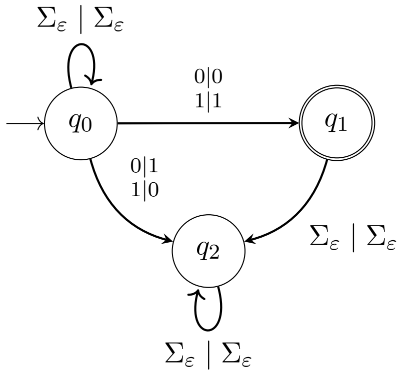
$$\delta^*_{|Q\times\Sigma_\varepsilon\times\Gamma_\varepsilon} = \delta$$
$$\forall (a,b) \in \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon, \forall (w,v) \in \Sigma^* \times \Gamma^*, \forall q \in Q, \delta^*(q, wa, vb) = \bigcup_{p \in \delta^*(q,w,v)} \delta(p,a,b)$$

On définit ici la relation reconnue par un transducteur fini, de manière similaire que les langages reconnus par les automates.

Définition 2. *On défini $[T]$ la relation reconnue par un transducteur fini T, définie comme suit :*

$$\forall (u,v) \in \Sigma^* \times \Gamma^*, u[T]v \Leftrightarrow \exists q \in I, \exists r \in F, r \in \delta^*(q,u,v)$$

FIGURE 1 – Un exemple de transducteur fini reconaissant la relation de congruence modulo 2
Ici $\Sigma = \Gamma = \{0,1\}$ et les transitions sont étiquettées par lettre d'entrée, lettre de sortie



1.2 Relations rationnelles

Soient Σ et Γ des alphabets finis. Nous allons ici étudier une classe particulière de relations entre Σ^* et Γ^*, que l'on peut voir comme des parties de $\Sigma^* \times \Gamma^*$, les relations rationnelles. Généralisons pour cela les opérations usuelles sur les langages :

Définition 3. *Soient $R, R' \subset \Sigma^* \times \Gamma^*$ des relations. On pose*
- $R \cdot R' = \{(xx', yy') \mid (x,y) \in R, (x',y') \in R'\}$, *la concaténation ou produit*
- $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$ *où R^n est la concaténation répétée, et $R^0 = \{(\varepsilon, \varepsilon)\}$*

Définition 4. *L'ensemble des relations rationelles est défini comme le plus petit ensemble de relations stable par étoile, concaténation et union, et contenant $\varnothing$ et les singletons.*

Pour être plus général, une relation rationnelle est une partie rationnelle du monoïde produit $\Sigma^* \times \Gamma^*$. Comme pour les automates on a bien équivalence entre les relations reconnues par des transducteurs finis et les relations rationelles.

Proposition 1 (Généralisation)**.** *On peut s'autoriser des fonctions de transition $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^* \longrightarrow P(Q)$ tant qu'il n'y a qu'un nombre fini de triplets $(q,w,v) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ tels que $\delta(q,v,w) \neq \emptyset$. En effet, ajouter cette transition correspond à ajouter les états $q = q_0, q_1, \ldots q_{|w|} = q'_0, q'_1, \ldots, q'_{|v|-1}$ avec les transitions $\delta(q_i, w_i, \varepsilon) = \{q_{i+1}\}$, les $\delta(q'_i, \varepsilon, v_i) = \{q'_{i+1}\}$, et enfin $\delta(q_{|v|-1}, \varepsilon, v_{-1}) = \delta(q,w,v)$.*

1.3 Propriétés des relations rationnelles et transducteurs finis

De manière analogue au cas des automates finis et des langages rationnels, on dispose du théorème suivant reliant les transducteurs finis aux relations rationelles :

Théorème 1. *Une relation R est rationelle si et seulement si elle est reconnue par un transducteur fini T*

Démonstration. La preuve est exactement du même acabi que celle pour les automates finis et langages rationnels. □

Cette équivalence permet de voir plus simplement certaines propriété de stabilité des transducteurs finis ou des relations rationnelles.

Proposition 2. *Les relations rationnelles sont stables par inverse et union. De plus les projections d'une relation rationelle sont des langages rationnels.*

Démonstration. Si R est une relation rationnelle sur $\Sigma^* \times \Gamma^*$, on note R^{-1} la relation inverse et

$$R_\Sigma = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Gamma^*, (w,u) \in R\}$$

et de même manière R_Γ, les projections à droite et à gauche de R. Soit T un transducteur fini reconaissant R.
Si l'on considère le transducteur où les étiquettes d'entrée et de sorties sont inversées, ce dernier reconnait bien la relation R^{-1}.
Pour obtenir l'union de relations rationnelles, on crée le transducteur ayant pour état initial q_0 et des transitions depuis q_0 étiquetées par $(\varepsilon \mid \varepsilon)$ vers des copies des transducteurs reconnaissant ces relations.
Enfin, si l'on considère l'automate obtenu en ne gardant que les étiquettes d'entrée sur les transitions, cet automate reconnait bien R_Σ. On procède de même manière pour R_Γ. □

Proposition 3. *Soit $L \subset \Sigma^*$ rationnel. L'image par R une relation rationnelle de L est également régulière.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q_L, I_L, F_L, \delta_L)$ un automate reconaissant L. On en fait un transducteur $T_L = (\Sigma, \Gamma, Q_L, I_L, F_L, \delta'_L)$ où

$$\forall q \in Q_L, \forall a \in \Sigma, \forall b \in \Gamma_\varepsilon, \delta'_L(q,a,b) = \delta_L(q,a)$$

(cela revient à coller Γ_ε en étiquette de sortie de chaque transition de $\mathcal{A}$). Si on considère maintenant T_R un transducteur fini reconaissant R, et que l'on considère le transducteur produit de T_R et T_L, ayant pour états finaux les produits des états finaux, ce dernier reconait la relation

$$R' = \{(u,v) \in R \mid u \in L\}$$

En considérant la projection à droite, on obtient alors le langage $R(L) = \{v \in \Gamma^* \mid \exists u \in L, (u,v) \in R\}$ qui est bien l'image de L par R. Donc par la proposition 2, $R(L)$ est rationel. □

Proposition 4 (Composition)**.** *La composition de deux relations rationnelles est rationnelle.*

Démonstration. Si $T_1 = (\Sigma, \Gamma, Q_1, I_1, F_1, \delta_1)$ et $T_2 = (\Gamma, \Lambda, Q_2, I_2, F_2, \delta_2)$ sont des transducteurs implémentant ces deux relations, on construit un transducteur
$T = (\Sigma_\varepsilon \times \Gamma \cup \Sigma \times \Gamma_\varepsilon, \Lambda, Q_1 \times Q_2, I_1 \times I_2, F_1 \times F_2, \delta_3)$ où δ_3 est définie pour $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$:

$$\begin{aligned}
&\forall c \in \Lambda_\varepsilon, \forall q'_2 \in \delta_2(q_2, \varepsilon, c), (q_1, q'_2) \in \delta_3((q_1,q_2),(\varepsilon,\varepsilon),c)\\
&\forall a \in \Sigma, \forall q'_1 \in \delta_1(q_1, a, \varepsilon), (q'_1, q_2) \in \delta_3((q_1,q_2),(a,\varepsilon),\varepsilon)\\
&\forall a \in \Sigma_\varepsilon, \forall b \in \Gamma, \forall c \in \Lambda_\varepsilon, \forall q'_1 \in \delta_1(q_1,a,b), \forall q'_2 \in \delta_2(q_2,b,c), (q'_1,q'_2) \in \delta_3(q_1,q_2,(a,b),c)
\end{aligned}$$

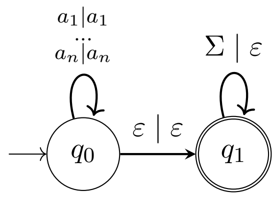
L'idée derrière T est d'effectuer le calcul de T_1, et à chaque fois qu'une lettre est produite en sortie, on donne cette dernière en entrée à T_2 et l'on fait ainsi avancer le calcul de T_2

Notons que, si l'on regarde uniquement le premier élément du couple des états, on retrouve exactement le comportement de T_1. Si on regarde uniquement les deuxièmes éléments des couples des états, on trouve le deuxième transducteur, qui lit chaque lettre du deuxième élément du couple de sortie au moment de la transition étiquetée en sortie par cette lettre.

Cet automate implémente donc la relation binaire $[T]$ qui contient $((u, v), w)$ si et seulement si (u, v) est dans la première relation, et (v, w) dans la deuxième. De la même manière que dans la proposition 3, on peut en intersectant $[T]$ avec $(\Sigma^* \times \{\varepsilon\}) \times \Lambda^*$ obtenir la relation de $\Sigma^* \times \Lambda^*$ en identifiant $\Sigma^* \times \{\varepsilon\}$ à Σ^* (rationelle par la construction de la proposition précedente) $[T_1] \circ [T_2]$. $\square$

Un exemple d'application de ces propriétés de stabilité est une preuve rapide de la rationnalité de $\text{Pref}(L)$, l'ensemble des préfixes d'un langage rationnel L : la relation Pref sur $\Sigma^* \times \Sigma^*$ qui met en relation w avec l'ensemble de ses préfixes est rationnelle, reconnue par le transducteur figure 2. Par la propriété 3, on obtient immédiatement la rationnalité de $\text{Pref}(L)$

FIGURE 2 – L'automate reconaissant la relation Pref avec $\Sigma = \{a_1, ..., a_n\}$



Notons toutefois que certaines propriétés de stabilité des automates finis ne se transmettent pas aux relations rationelles : c'est le cas par exemple de l'intersection et du complémentaire. On se place sur les alphabets $\Sigma = \{a\}$ et $\Gamma = \{a, b\}$. On se donne les relations rationelles suivantes :

$$R_l = \{(a^n, w) \mid w \in \Gamma^*, n \in \mathbb{N}, |w| = 2n\}$$
$$R_b = \{(a^n, w) \mid w \in \Gamma^*, n \in \mathbb{N}, |w|_b = n\}$$

R_l étant reconnue par l'automate figure 3, et R_b par 4.
On a alors que

$$\begin{aligned} R &= \{(a^n, a^n b^n) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= R_l \cap R_b \cap (\text{Pref})^{-1} \end{aligned}$$

alors que R n'est clairement pas rationelle par la proposition 2 car la projection droite de R n'est pas rationelle.

On en déduit également que des passages au complémentaires de relations ne sont généralement pas rationnelles. En effet, si c'était le cas, $(R_1^C \cup R_2^C)^C = R_1 \cap R_2$ serait rationnelle puisque l'union l'est (proposition 2).

FIGURE 3 – Le transducteur reconaissant la relation R_l

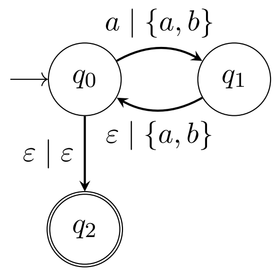
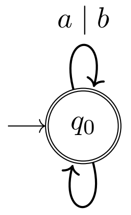


FIGURE 4 – Le transducteur reconaissant la relation R_b



1.4 Quelques problèmes associés aux transducteurs finis

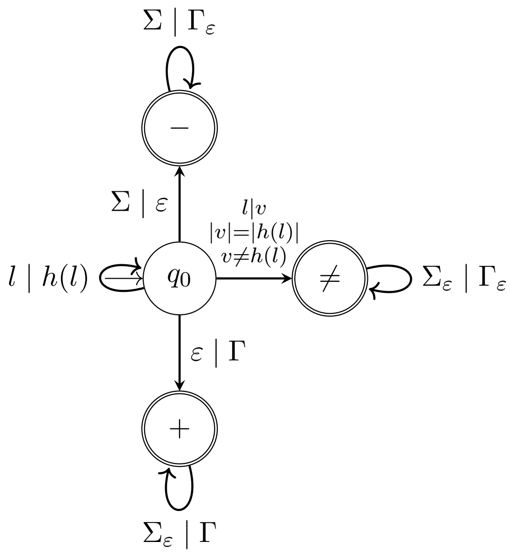
Théorème 2. *Le problème de l'équivalence de deux transducteurs est indécidable.*

Démonstration. Cette preuve réduit le problème d'équivalence de Post vers l'équivalence de deux transducteurs.
On rappelle l'énoncé du problème d'équivalence de Post, indécidable :

Définition 5 (Problème d'équivalence de Post)**.** *Étant donné deux listes finies de mots dans* $\Gamma^*\backslash\{\varepsilon\}$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$*, existe-t-il une suite* $(i_k)_{1\leq k\leq N}$ *telle que* $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_N} = \beta_{i_1}\beta_{i_2}\ldots\beta_{i_N}$ *?*

En posant $g(x_i) = \alpha_i$ et similairement $h(x_i) = \beta_i$ sur un alphabet $\Sigma = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $h(ab) = h(a)h(b)$, le problème devient : existe-t-il un mot $w \in \Sigma^*\backslash\{\varepsilon\}$ tel que $g(w) = h(w)$?
On construit le transducteur de la figure 5 qui à un mot x associe $\Gamma^*\backslash\{h(x)\}$.
Ici, l'état marqué $-$ reçoit les mots qui ont moins de lettre que $h(x)$, $+$ ceux qui ont plus de lettres que $h(x)$, et $\neq$ ceux qui ont au moins un caractère différent.
Similairement, on construit le transducteur qui à x associe tous les mots sauf $g(x)$. Enfin, par la propriété 2, on peut construire l'automate qui reconnaît l'union. L'union de ces deux ensembles est d'ailleurs $\Sigma^* \times \Gamma^*$ sauf s'il existe un x tel que $f(x) = g(x)$: l'équivalence de ce transducteur avec le transducteur reconnaissant tout $\Sigma^* \times \Gamma^*$ permet donc de conclure.

FIGURE 5 – Le transducteur qui à un mot x associe $\Gamma^*\backslash\{h(x)\}$



□

2 Machines de Moore

Une machine de Moore est un cas particulier d'un transducteur fini : d'abord une telle machine est déterministe et implémente donc non pas une relation rationelle mais une fonction, qui sera appelée rationelle. La contrainte supplémentaire sur ces machines est que la lettre de sortie lue ne dépend que de l'état actuel de l'automate.

2.1 Définition et exemple

On peut évidemment définir une machine de Moore en partant de la définition de transducteur et en posant des contraintes sur la fonction de transition. Il est toutefois plus commode de la définir ainsi

Définition 6. *Une machine de Moore* $\mathcal{M}$ *est un* 7*-uplet* $(\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \delta, \lambda)$ *où*
- Σ *est l'alphabet d'entrée*
- Γ *l'alphabet de sortie*
- Q *l'ensemble fini des états*
- q_0 *l'état initial*
- $F \subset Q$ *les états finaux*
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ *la fonction de transition déterministe*
- $\lambda : Q \to \Gamma$ *la fonction de sortie*

Un calcul de $\mathcal{M}$ sur un mot w est défini de la même manière que pour un automate déterministe. On ajoute toutefois la notion de mot produit par ce calcul, qui est le mot obtenu en concaténant les lettres obtenues par application de λ sur chaque état pris lors du calcul de $\mathcal{M}$ sur w. Plus formellement

Définition 7. *On définit pour* $q \in Q$ *et* $w \in \Sigma^*$ $q \star w$ *récursivement :*

$$\forall a \in \Sigma, q \star a = \lambda(\delta(q, a)) \text{ et } \forall u \in \Sigma^*, q \star ua = (q \star u)(\delta^*(q, u) \star a)$$

Le mot produit par le calcul de $\mathcal{M}$ *sur* w *est défini comme* $q_0 \star w$*. Notons* $L \subset \Sigma^*$ *le langage reconnu par l'automate déterministe contenu dans la définition de* $\mathcal{M}$*. La fonction rationelle réalisée par* $\mathcal{M}$ *est alors définie par*

$$f : \begin{array}{ll} L & \longrightarrow \Gamma^* \\ w & \longmapsto q_0 \star w \end{array}$$

On peut généraliser la fonction réalisée par $\mathcal{M}$ en la définissant non pas sur L mais sur tout Σ^*. Cela revient à rendre tout les états acceptants

3 Machines de Mealy

3.1 Définition

Une machine de Mealy est également un cas particulier de transducteur fini, moins restrictive à première vue que les machines de Moore. Il s'agit d'un transducteur déterministe sans ε-transition.

Du point de vue du formalisme, elles sont définies de la même manière qu'un automate de Moore, à l'exception de la fonction de sortie λ qui est cette fois $\lambda : Q \times \Sigma \to \Gamma$. La fonction rationelle réalisée par une machine de Mealy est définie de manière très similaire à celle pour les machines de Moore (il suffit juste de tenir comptre de la lettre de Σ lue à chaque étape du calcul)

3.2 Equivalence avec Moore

3.3 Propriétés algébriques

Figure 6 – Un exemple de machine de Moore implémentant le xor chiffre à chiffre entre deux entiers en binaire

Si l'on souhaite faire le xor de 101 et 100, on donne à notre machine l'entrée 110010 et cette dernière renvoie 000001 (un 0 puis le résultat du xor pour chaque chiffre). On ne précise $\lambda(q_0)$ car cette valeur n'est pas utilisée pour définir la fonction de cette machine.