Transducteurs et machines de Moore et Mealy

José et Aimeric

8 janvier 2025

Table des matières

Table des matières

Définition des transducteurs

Definition

Un transducteur fini est un 6-uplet $T = (\Sigma, \Gamma, Q, I, F, \delta)$ où

- Σ est l'alphabet d'entrée (fini)
- Γ l'alphabet de sortie (fini)
- Q l'ensemble des états (fini)
- $I \subset Q$ l'ensemble des états initiaux
- $F \subset Q$ l'ensemble des états finaux
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ est la fonction de transition non déterministe

Définition des transducteurs

Definition

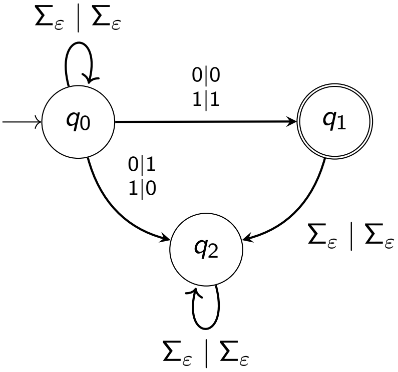
On définit $[T]$ la relation reconnue par un transducteur fini T, définie comme suit :

$$\forall (u, v) \in \Sigma^* \times \Gamma^*, u[T]v \Leftrightarrow \exists q \in I, \exists r \in F, r \in \delta^*(q, u, v)$$

δ^* est la fonction de transition itérée

Définition des transducteurs

Figure – Un exemple de transducteur fini reconaissant la relation de congruence modulo 2



Relations rationnelles

Definition

Soient $R, R' \subset \Sigma^* \times \Gamma^*$ des relations. On pose

- $R \cdot R' = \{(xx', yy') \mid (x, y) \in R, (x', y') \in R'\}$, la concaténation ou produit
- $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$ où R^n est la concaténation répétée, et $R^0 = \{(\varepsilon, \varepsilon)\}$

Definition

L'ensemble des relations rationelles est défini comme le plus petit ensemble de relations stable par étoile, concaténation et union, et contenant $\varnothing$ et les singletons.

Equivalence

Théorème

Une relation R est rationelle si et seulement si elle est reconnue par un transducteur fini T

Démonstration.

Exactement le même type de preuve que pour les automates finis et langages rationnels □

Quelques propriétés de stabilité

Proposition

L'inverse d'une relation rationnelle est rationnel. Les projections à droite et à gauche d'une relation rationnelle sont des langages rationnels

Démonstration.

Pour le premier, on inverse les étiquettes du transducteur reconaissant la relation. Pour le deuxième, on "oublie" les étiquettes de sortie pour en faire un automate. □

Quelques propriétés de stabilité

Proposition

L'image d'un langage rationnel par une relation rationnelle est rationnel.

Proposition

La composition de relations rationelles est rationelle

Démonstration.

On peut prouver la première propriété à partir de la deuxième, en considérant l'image de la composition de $\{\varepsilon\} \times \mathcal{L}$ et R. $\square$

Composition de deux relations

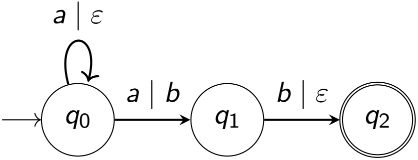


Figure – Premier transducteur

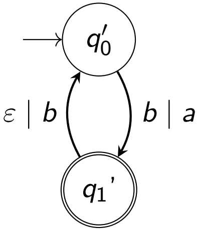
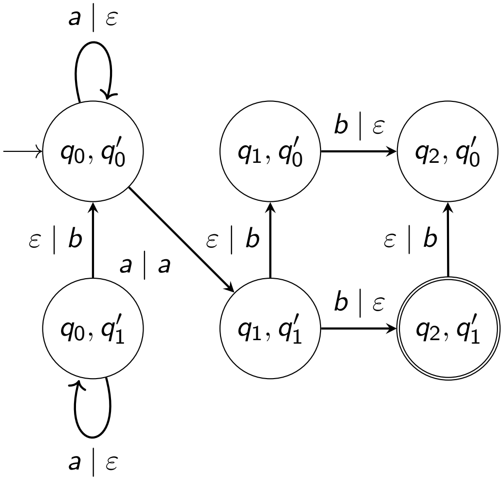


Figure – Deuxième transducteur

Composition de deux relations

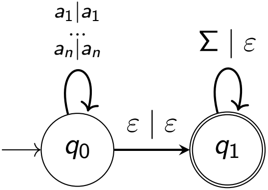
Figure – Le transducteur composition des deux relations



Une application

Si L est un langage rationnel, alors $\mathrm{Pref}(L)$ l'est également. On retrouve ce résultat très rapidement grâce aux transducteurs.

Figure – Le transducteur reconaissant la relation Pref avec $\Sigma = \{a_1, ..., a_n\}$



Ainsi $\mathrm{Pref}(L)$ est simplement l'image de L par une relation rationelle, donc rationnel

Non stabilité de l'intersection

Les relations suivantes sur $\{a\}^* \times \{a, b\}^*$

$$R_l = \{(a^n, w) \mid w \in \Gamma^*, n \in \mathbb{N}, |w| = 2n\}$$
$$R_b = \{(a^n, w) \mid w \in \Gamma^*, n \in \mathbb{N}, |w|_b = n\}$$

sont rationelles. Pourtant

$$\{(a^n, a^n b^n) \mid n \in \mathbb{N}\} = R_l \cap R_b \cap (\mathrm{Pref})^{-1}$$

n'est pas rationelle

Indécidabilité de l'équivalence

Théorème

Le problème d'équivalence entre deux transducteurs finis est indécidable

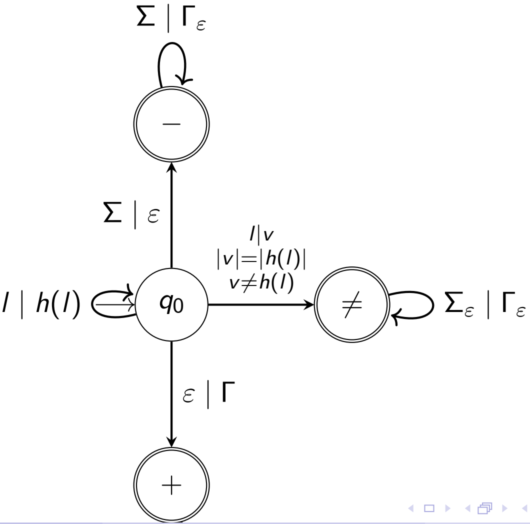
Démonstration.

On peut reformuler Post ainsi : étant donné deux morphismes $g, h : \Sigma^* \to \Gamma^*$, existe-t-il un mot $w \in \Sigma^* \neq \varepsilon$ tel que $g(w) = h(w)$?
On peut ensuite construire le transducteur qui implémente la relation $(x, (\Gamma^* \backslash \{g(x)\}) \cup (\Gamma^* \backslash \{h(x)\}))$, qui implémente la relation $\Sigma^* \times \Gamma^*$ si et seulement si il n'y a pas de solution.

$\square$

Construction du transducteur.

Figure – Le transducteur qui à un mot x associe $\Gamma^* \setminus \{h(x)\}$



Décider de la fonctionnalité

Théorème

Le problème de savoir si un transducteur implémente une fonction (chaque élement n'a qu'une image) est décidable.

Démonstration.

Il suffit de tester toutes les images à moins de $O(n^2)$ transitions : s'il existe un mot avec deux images différentes, on peut montrer qu'il existe un couple d'images différentes à moins de $O(n^2)$ transitions. $\square$

Table des matières

Définition

Il s'agit d'un cas particulier de transducteurs finis, ou l'étiquette de sortie ne dépend que de l'état courant et où les étiquettes d'entrée sont déterministes

Definition

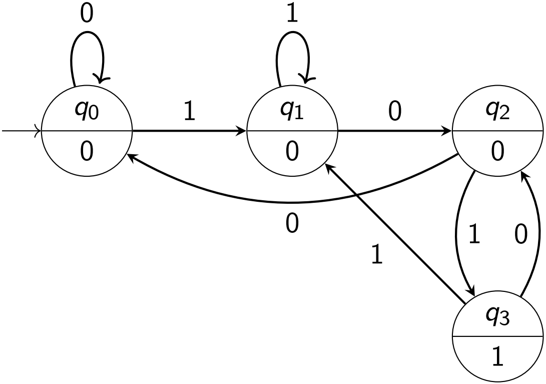
Une machine de Moore $\mathcal{M}$ est un 7-uplet $(\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \delta, \lambda)$ où

- Σ est l'alphabet d'entrée
- Γ l'alphabet de sortie
- Q l'ensemble fini des états
- q_0 l'état initial
- $F \subset Q$ les états finaux
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ la fonction de transition déterministe
- $\lambda : Q \to \Gamma$ la fonction de sortie

Définition

Figure – Un exemple de machine de Moore

Machine de Moore qui note chaque occurrence de la séquence 101 (tout les états sont acceptants)



Algorithmes de Pattern Matching

On peut reformuler certains algorithmes de pattern matching comme le calcul d'une machine de Moore. C'est le cas par exemple de l'algorithme d'Aho Corasick, ou KMP.

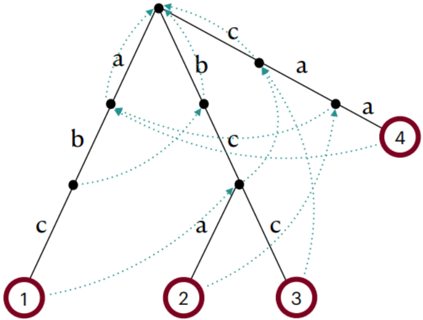


Image volée du cours de Tatiana

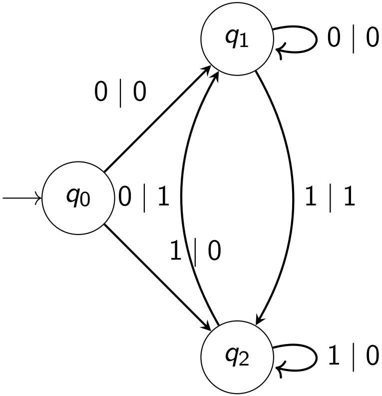
Définitions

Definition

Une machine de Mealy est un transducteur déterministe sans ε transition. Il s'agit de la même définition que pour les machines de Moore mais où $\lambda : Q \times \Sigma \to \Gamma$

Exemple

Figure – Un exemple de machine de Mealy réalisant le ou exclusif de deux entiers



Equivalence

Théorème

Pour toute machine de Mealy il existe une machine de Moore équivalente et réciproquement

Démonstration.

Pour le sens réciproque, il suffit d'ajouter en étiquette de sortie les étiquettes de l'état vers lequel la transition est faite. Pour le sens direct : on clone chaque état $|\Gamma|$ fois (on se place sur $Q \times \Gamma$). Puis pour chaque transition $p \to q$ d'étiquette de sortie b, on crée la transition $(p, c) \to (q, b)$ pour $c \in \Gamma$. De plus on pose $\lambda(q, c) = c$ □

Semi-groupes

Definition

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\cdot$. Si $\cdot$ est associative, on appelle G un demi-groupe.

Definition

Si $(G, \cdot)$ est un demi-groupe et $A \subset G$ un ensemble fini de générateurs, on peut définir son taux de croissance $\gamma : \mathbb{N} \backslash \{0, 1\} \to \mathbb{N}$ de la façon suivante : pour $n \geq 2$, $\gamma(n)$ est le nombre d'élements de G étant produits de n générateurs mais n'étant pas soi même un générateur. En d'autres termes

$$\gamma(n) = |\{g_1 ... g_n \mid g_1, ..., g_n \in A\} \backslash A|$$

Exemples de taux de croissance

Le semi groupe Σ^* avec Σ un alphabet fini a un taux de croissance exponentiel (le nombre de mots à n lettres est exponentiel en n).

Le demi groupe libre $\mathbb{N}^k \backslash \{0\}$ a un taux de croissance polynômial lui

Fin