Transducteurs et machines de Moore et Mealy

José et Aimeric

5 janvier 2025

Table des matières

Table des matières

Définition des transducteurs

Definition

Un transducteur fini est un 6-uplet $T = (\Sigma, \Gamma, Q, I, F, \delta)$ où

- Σ est l'alphabet d'entrée (fini)
- Γ l'alphabet de sortie (fini)
- Q l'ensemble des états (fini)
- $I \subset Q$ l'ensemble des états initiaux
- $F \subset Q$ l'ensemble des états finaux
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ est la fonction de transition non déterministe

Définition des transducteurs

Definition

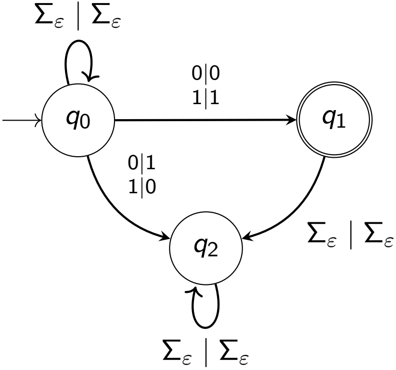
On définit $[T]$ la relation reconnue par un transducteur fini T, définie comme suit :

$$\forall (u, v) \in \Sigma^* \times \Gamma^*, u[T]v \Leftrightarrow \exists q \in I, \exists r \in F, r \in \delta^*(q, u, v)$$

δ^* est la fonction de transition itérée

Définition des transducteurs

Figure – Un exemple de transducteur fini reconaissant la relation de congruence modulo 2



Relations rationnelles

Definition

Soient $R, R' \subset \Sigma^* \times \Gamma^*$ des relations. On pose

- $R \cdot R' = \{(xx', yy') \mid (x, y) \in R, (x', y') \in R'\}$, la concaténation ou produit
- $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$ où R^n est la concaténation répétée, et $R^0 = \{(\varepsilon, \varepsilon)\}$

Definition

L'ensemble des relations rationelles est défini comme le plus petit ensemble de relations stable par étoile, concaténation et union, et contenant $\varnothing$ et les singletons.

Equivalence

Théorème

Une relation R est rationelle si et seulement si elle est reconnue par un transducteur fini T

Démonstration.

Exactement le même type de preuve que pour les automates finis et langages rationnels $\square$

Quelques propriétés de stabilité

Proposition

L'inverse d'une relation rationnelle est rationnel. Les projections à droite et à gauche d'une relation rationnelle sont des langages rationnels

Démonstration.

Pour le premier, on inverse les étiquettes du transducteur reconaissant la relation. Pour le deuxième, on "oublie" soit les étiquettes d'entrée soit de sortie. □

Peut être une figure pour illustrer ?

Quelques propriétés de stabilité

Proposition

L'image d'un langage rationnel par une relation rationnelle est rationnel.

Proposition

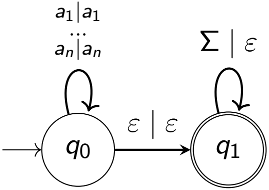
La composition de relations rationelles est rationelle

Là honnêtement faut voir si on présente les preuves ou pas en fonction du temps que ça prend

Une application

Si L est un langage rationnel, alors Pref(L) l'est également. On retrouve ce résultat très rapidement grâce aux transducteurs.

Figure – Le transducteur reconaissant la relation Pref avec $\Sigma = \{a_1, ..., a_n\}$



Ainsi Pref(L) est simplement l'image de L par une relation rationelle, donc rationnel

Non stabilité de l'intersection

Les relations suivantes sur $\{a\}^* \times \{a, b\}^*$

$$R_l = \{(a^n, w) \mid w \in \Gamma^*, n \in \mathbb{N}, |w| = 2n\}$$
$$R_b = \{(a^n, w) \mid w \in \Gamma^*, n \in \mathbb{N}, |w|_b = n\}$$

sont rationelles. Pourtant

$$\{(a^n, a^n b^n) \mid n \in \mathbb{N}\} = R_l \cap R_b \cap (\mathrm{Pref})^{-1}$$

n'est pas rationelle

Indécidabilité de l'équivalence

Théorème

Le problème d'équivalence entre deux transducteurs finis est indécidable

Démonstration.

L'idée est de faire une réduction à Post : on construit un transducteur dont l'équivalence avec la relation $\Sigma^* \times \Gamma^*$ équivaut à l'existence d'une solution de Post. $\square$

Tu vois si tu détaille plus

Décider de la fonctionnalité

Théorème

On peut décider si un transducteur implémente une fonction (chaque élement n'a qu'une image) en temps $O(n^2)$ où n est le nombre d'états du transducteur

Démonstration.

De la big combinatoire hein $\square$

Table des matières

Définition

Il s'agit d'un cas particulier de transducteurs finis, ou l'étiquette de sortie ne dépend que de l'état courant et où les étiquettes d'entrée sont déterministes

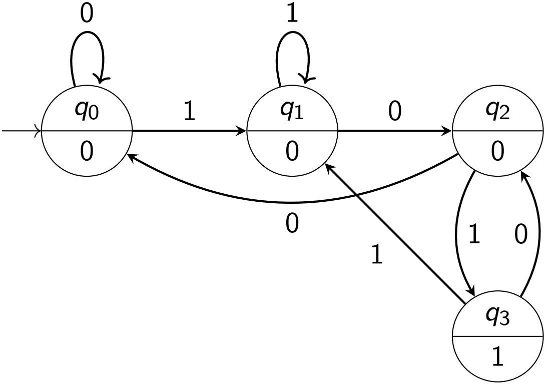
Definition

Une machine de Moore $\mathcal{M}$ est un 7-uplet $(\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \delta, \lambda)$ où

- Σ est l'alphabet d'entrée
- Γ l'alphabet de sortie
- Q l'ensemble fini des états
- q_0 l'état initial
- $F \subset Q$ les états finaux
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ la fonction de transition déterministe
- $\lambda : Q \to \Gamma$ la fonction de sortie

Figure – Un exemple de machine de Moore

Machine de Moore qui note chaque occurrence de la séquence 101 (tout les états sont acceptants)



Algorithmes de Pattern Matching

On peut reformuler certains algorithmes de pattern matching comme le calcul d'une machine de Moore. C'est le cas par exemple de l'algorithme d'Aho Corasick, ou KMP.

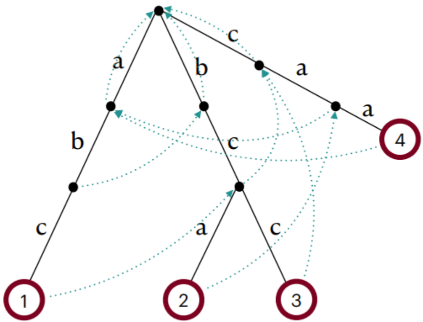


Image volée du cours de Tatiana

Fin