

# Transducteurs et machines de Moore et Mealy

José et Aimeric

8 janvier 2025

# Table des matières

## 1 Transducteurs finis

- Définitions
- Premières propriétés
- Quelques problèmes liés aux transducteurs

## 2 Machines de Moore et Mealy

- Machines de Moore
- Machines de Mealy
- Equivalence Moore/Mealy
- Propriétés algébriques

# Table des matières

## 1 Transducteurs finis

- Définitions
- Premières propriétés
- Quelques problèmes liés aux transducteurs

## 2 Machines de Moore et Mealy

- Machines de Moore
- Machines de Mealy
- Equivalence Moore/Mealy
- Propriétés algébriques

# Définition des transducteurs

## Définition

Un transducteur fini est un 6-uplet  $T = (\Sigma, \Gamma, Q, I, F, \delta)$  où

- $\Sigma$  est l'alphabet d'entrée (fini)
- $\Gamma$  l'alphabet de sortie (fini)
- $Q$  l'ensemble des états (fini)
- $I \subset Q$  l'ensemble des états initiaux
- $F \subset Q$  l'ensemble des états finaux
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$  est la fonction de transition non déterministe

# Définition des transducteurs

## Définition

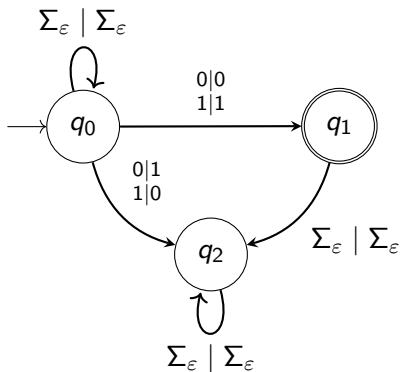
On définit  $[T]$  la relation reconnue par un transducteur fini  $T$ , définie comme suit :

$$\forall (u, v) \in \Sigma^* \times \Gamma^*, u[T]v \Leftrightarrow \exists q \in I, \exists r \in F, r \in \delta^*(q, u, v)$$

$\delta^*$  est la fonction de transition itérée

# Définition des transducteurs

Figure – Un exemple de transducteur fini reconnaissant la relation de congruence modulo 2



# Relations rationnelles

## Definition

Soient  $R, R' \subset \Sigma^* \times \Gamma^*$  des relations. On pose

- $R \cdot R' = \{(xx', yy') \mid (x, y) \in R, (x', y') \in R'\}$ , la concaténation ou produit
- $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$  où  $R^n$  est la concaténation répétée, et  $R^0 = \{(\varepsilon, \varepsilon)\}$

## Definition

L'ensemble des relations rationnelles est défini comme le plus petit ensemble de relations stable par étoile, concaténation et union, et contenant  $\emptyset$  et les singletons.

## Théorème

*Une relation  $R$  est rationnelle si et seulement si elle est reconnue par un transducteur fini  $T$*

## Démonstration.

Exactement le même type de preuve que pour les automates finis et langages rationnels □



# Quelques propriétés de stabilité

## Proposition

*L'inverse d'une relation rationnelle est rationnel. Les projections à droite et à gauche d'une relation rationnelle sont des langages rationnels*

## Démonstration.

Pour le premier, on inverse les étiquettes du transducteur reconnaissant la relation. Pour le deuxième, on "oublie" les étiquettes de sortie pour en faire un automate. □

# Quelques propriétés de stabilité

## Proposition

*L'image d'un langage rationnel par une relation rationnelle est rationnel.*

## Proposition

*La composition de relations rationnelles est rationnelle*

## Démonstration.

On peut prouver la première propriété à partir de la deuxième, en considérant l'image de la composition de  $\{\varepsilon\} \times \mathcal{L}$  et  $R$ .



# Composition de deux relations

Figure – Premier transducteur

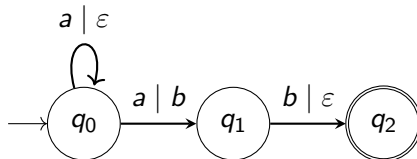
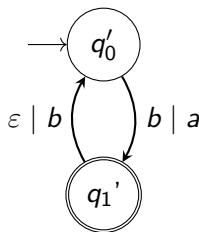
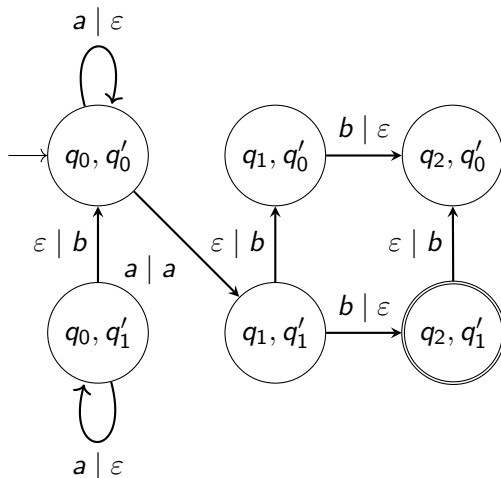


Figure – Deuxième transducteur



# Composition de deux relations

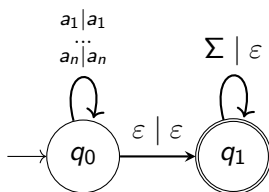
Figure – Le transducteur composition des deux relations



# Une application

Si  $L$  est un langage rationnel, alors  $\text{Pref}(L)$  l'est également. On retrouve ce résultat très rapidement grâce aux transducteurs.

Figure – Le transducteur reconnaissant la relation  $\text{Pref}$  avec  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$



Ainsi  $\text{Pref}(L)$  est simplement l'image de  $L$  par une relation rationnelle, donc rationnel

# Non stabilité de l'intersection

Les relations suivantes sur  $\{a\}^* \times \{a, b\}^*$

$$R_I = \{(a^n, w) \mid w \in \Gamma^*, n \in \mathbb{N}, |w| = 2n\}$$

$$R_b = \{(a^n, w) \mid w \in \Gamma^*, n \in \mathbb{N}, |w|_b = n\}$$

sont rationnelles. Pourtant

$$\{(a^n, a^n b^n) \mid n \in \mathbb{N}\} = R_I \cap R_b \cap (\text{Pref})^{-1}$$

n'est pas rationnelle

# Indécidabilité de l'équivalence

## Théorème

*Le problème d'équivalence entre deux transducteurs finis est indécidable*

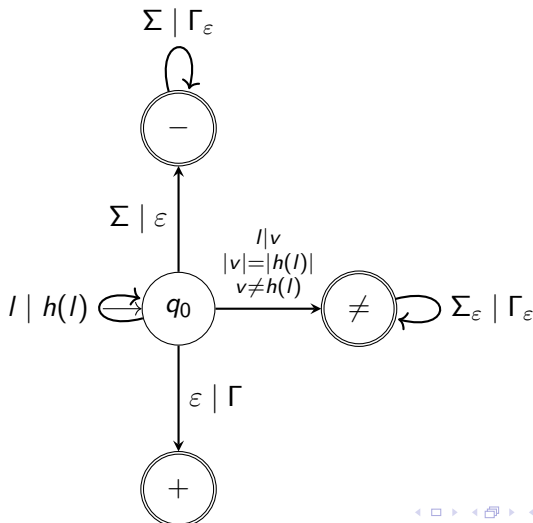
## Démonstration.

On peut reformuler Post ainsi : étant donné deux morphismes  $g, h : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ , existe-t-il un mot  $w \in \Sigma^* \neq \varepsilon$  tel que  $g(w) = h(w)$  ?  
On peut ensuite construire le transducteur qui implémente la relation  $(x, (\Gamma^* \setminus \{g(x)\}) \cup (\Gamma^* \setminus \{h(x)\}))$ , qui implémente la relation  $\Sigma^* \times \Gamma^*$  si et seulement si il n'y a pas de solution.



# Construction du transducteur.

Figure – Le transducteur qui à un mot  $x$  associe  $\Gamma^* \setminus \{h(x)\}$





# Décider de la fonctionnalité

## Théorème

*Le problème de savoir si un transducteur implémente une fonction (chaque élément  $n$  a qu'une image) est décidable.*

## Démonstration.

Il suffit de tester toutes les images à moins de  $O(n^2)$  transitions : s'il existe un mot avec deux images différentes, on peut montrer qu'il existe un couple d'images différentes à moins de  $O(n^2)$  transitions. □

# Table des matières

## 1 Transducteurs finis

- Définitions
- Premières propriétés
- Quelques problèmes liés aux transducteurs

## 2 Machines de Moore et Mealy

- Machines de Moore
- Machines de Mealy
- Equivalence Moore/Mealy
- Propriétés algébriques

# Définition

Il s'agit d'un cas particulier de transducteurs finis, où l'étiquette de sortie ne dépend que de l'état courant et où les étiquettes d'entrée sont déterministes

## Definition

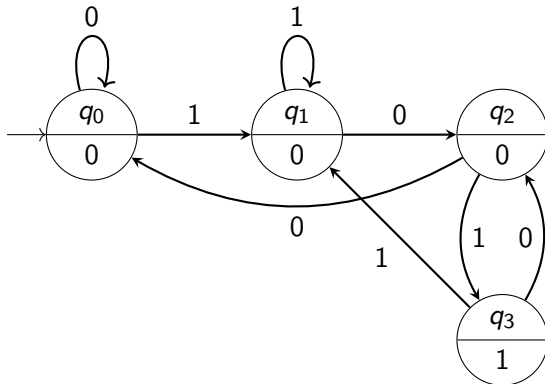
Une machine de Moore  $\mathcal{M}$  est un 7-uplet  $(\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \delta, \lambda)$  où

- $\Sigma$  est l'alphabet d'entrée
- $\Gamma$  l'alphabet de sortie
- $Q$  l'ensemble fini des états
- $q_0$  l'état initial
- $F \subset Q$  les états finaux
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  la fonction de transition déterministe
- $\lambda : Q \rightarrow \Gamma$  la fonction de sortie

# Définition

Figure – Un exemple de machine de Moore

Machine de Moore qui note chaque occurrence de la séquence 101 (tout les états sont acceptants)



# Algorithmes de Pattern Matching

On peut reformuler certains algorithmes de pattern matching comme le calcul d'une machine de Moore. C'est le cas par exemple de l'algorithme d'Aho Corasick, ou KMP.

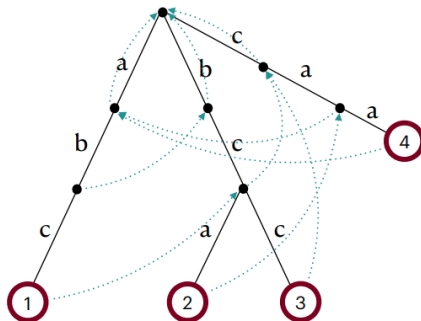
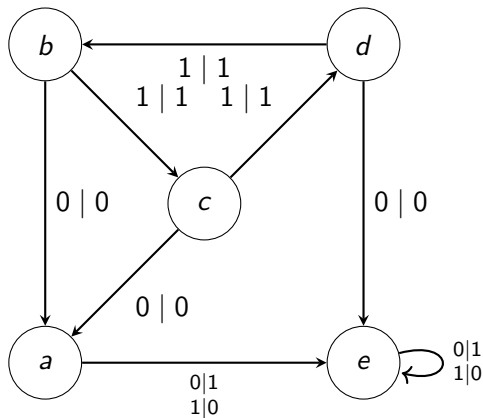


Image volée du cours de Tatiana

# Définition

Figure – Une machine de Mealy totalement innocente



# Equivalence Moore/Mealy

Figure – Exemple de construction d'une machine de Mealy équivalente à une machine de Moore

Une machine de Moore à gauche et à droite la machine de Mealy correspondante.

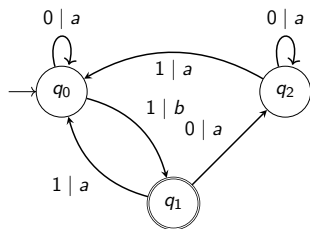
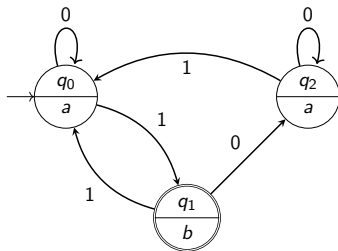


Figure – Machine de Mealy

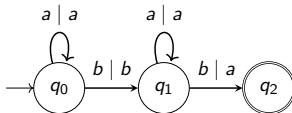
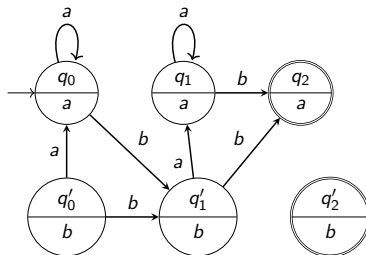


Figure – Machine de Moore équivalente





## Definition (Demi-groupe)

Soit  $G$  un ensemble muni d'une loi de composition interne  $\cdot$ . Si  $\cdot$  est associative, on appelle  $G$  un demi-groupe.

## Definition (Taux de croissance)

Si  $(G, \cdot)$  est un demi-groupe et  $A \subset G$  un ensemble fini de générateurs, on peut définir son taux de croissance  $\gamma : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}$  de la façon suivante : pour  $n \geq 2$ ,  $\gamma(n)$  est le nombre d'éléments de  $G$  étant produits de  $n$  générateurs mais n'étant pas soi même un générateur. En d'autres termes

$$\gamma(n) = |\{g_1 \dots g_n \mid g_1, \dots, g_n \in A\} \setminus A|$$

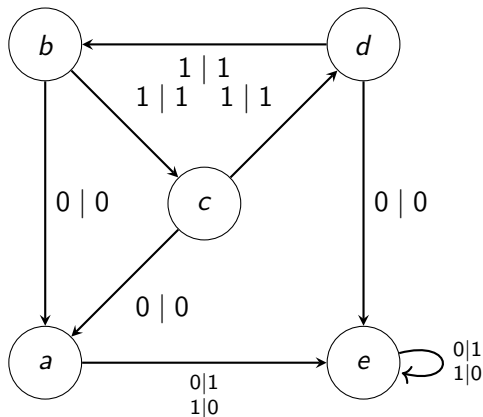
## Definition

Demi-groupe engendré par une machine de Mealy On se fixe une machine de Mealy  $\mathcal{M} = (\{0, 1\}, \{0, 1\}, Q, \delta, \lambda)$  (on ignore ici les états finaux et initiaux) pour la suite de cette section. Pour tout  $q \in Q$ , on définit

$$\rho_q : \begin{array}{ll} \{0, 1\}^* & \longrightarrow \{0, 1\}^* \\ w & \longmapsto q \star w \end{array}$$

On notera  $G_{\mathcal{M}}$  le demi-groupe engendré par les  $(\rho_q)_{q \in Q}$  avec l'opération de composition.

Figure – L'automate de Mealy engendrant le groupe de Grigorchuk



# Fin