Rapport : Transducteurs et machines de Moore et Mealy

15 décembre 2024

Table des matières

1 Généralités sur les transducteurs finis

Un transducteur fini est une généralisation des automates finis, implémentant non pas des langages mais plutôt des relations entre des ensembles de mots. Cela se fait à l'aide d'étiquettes supplémentaires sur chaque transition entre deux états.

1.1 Définition des transducteurs

Définition 1. *Un transducteur fini est un 6-uplet* $T = (\Sigma, \Gamma, Q, I, F, \delta)$ *où*
- Σ *est l'alphabet d'entrée (fini)*
- Γ *l'alphabet de sortie (fini)*
- Q *l'ensemble des états (fini)*
- $I \subset Q$ *l'ensemble des états initiaux*
- $F \subset Q$ *l'ensemble des états finaux*
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ *est la fonction de transition non déterministe*

En d'autres termes, T est un automate fini non déterministe sur l'alphabet $\Sigma_\varepsilon \times \Gamma \cup \Sigma \times \Gamma_\varepsilon$

On peut comme pour les automates définir $\delta^* : Q \times \Sigma^* \times \Gamma^* \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ par induction :

$$\delta^*_{|Q\times\Sigma_\varepsilon\times\Gamma_\varepsilon} = \delta$$

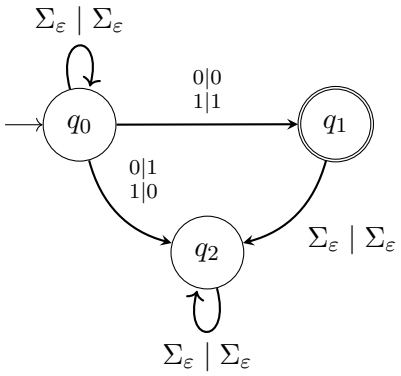
$$\forall (a,b) \in \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon, \forall (w,v) \in \Sigma^* \times \Gamma^*, \forall q \in Q, \delta^*(q, wa, vb) = \bigcup_{p\in\delta^*(q,w,v)} \delta(p,a,b)$$

On définit ici la relation reconnue par un transducteur fini, de manière similaire que les langages reconnus par les automates.

Définition 2. *On défini $[T]$ la relation reconnue par un transducteur fini T, définie comme suit :*

$$\forall (u,v) \in \Sigma^* \times \Gamma^*, u[T]v \Leftrightarrow \exists q \in I, \exists r \in F, r \in \delta^*(q,u,v)$$

FIGURE 1 – Un exemple de transducteur fini reconaissant la relation de congruence modulo 2
Ici $\Sigma = \Gamma = \{0,1\}$ et les transitions sont étiquettées par lettre d'entrée, lettre de sortie



1.2 Relations rationnelles

Soient Σ et Γ des alphabets finis. Nous allons ici étudier une classe particulière de relations entre Σ^* et Γ^*, que l'on peut voir comme des parties de $\Sigma^* \times \Gamma^*$, les relations rationelles. Généralisons pour cela les opérations usuelles sur les langages

Définition 3. *Soient $R, R' \subset \Sigma^* \times \Gamma^*$ des relations. On pose*
- *$R \cdot R' = \{(xx', yy') \mid (x,y) \in R, (x',y') \in R'\}$, la concaténation ou produit*
- *$R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$ où R^n est la concaténation répétée, et $R^0 = \{(\varepsilon, \varepsilon)\}$*

Définition 4. *L'ensemble des relations rationelles est défini comme le plus petit ensemble de relations stable par étoile, concaténation et union, et contenant $\varnothing$ et les singletons.*

Pour être plus général, une relation rationelle est une partie rationnelle du monoïde produit $\Sigma^* \times \Gamma^*$. Comme pour les automates on a bien équivalence entre les relations reconnues par des transducteurs finis et les relations rationelles, ce qui est le sujet de la prochaine section

1.3 Equivalence entre transducteurs finis et relations rationelles

Théorème 1. *Une relation R est rationelle si et seulement si elle est reconnue par un transducteur fini T*

Démonstration. La preuve est exactement du même acabi que celle pour les automates finis et langages rationnels □

Cette équivalence permet de voir plus simplement certaines propriétés des transducteurs finis ou des relations rationelles.

Proposition 1. *Les relations rationnelles sont stables par intersection, complémentaire et inverse. De plus les projections d'une relation rationelle sont des langages rationnels. Enfin, la projection sur un langage rationnel est rationnelle.*

Démonstration. On obtient la clôture par intersection et complémentaire en exploitant les propriétés de clôture des automates finis.
Pour les autres : si R est une relation rationelle sur $\Sigma^* \times \Gamma^*$, on note R^{-1} la relation inverse et

$$R_\Sigma = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Gamma^*, (w, u) \in R\}$$

et de même manière R_Γ. Soit T un transducteur fini reconaissant R.
Si l'on considère le transducteur où les étiquettes d'entrée et de sorties sont inversées, ce dernier reconnait bien la relation R^{-1}.
Si l'on considère l'automate obtenu en ne gardant que les étiquettes d'entrée sur les transitions, cet automate reconnait bien R_Σ. On procède de même manière pour R_Γ.
Enfin, pour les projections $R_L = \{y \in \Gamma^* | \exists x, (x, y) \in R, x \in L\}$ où L est rationnel, la relation $L \times \Gamma^*$ est rationnelle, donc l'instersection projetée à droite l'est aussi. □

Proposition 2 (Composition de relations rationnelles)**.** *La composition de deux relations rationnelles est rationnelle.*

Démonstration. Si $(Q_1, \Sigma, \Gamma, I_1, F_1, \delta_1)$ et $(Q_2, \Gamma, \Lambda, I_2, F_2, \delta_2)$ sont des transducteurs implémentant ces deux relations, on construit un automate $Q_1 \times Q_2, \Sigma, \Gamma \times \Lambda, I_1 \times I_2, F_1 \times F_2, \delta_3)$ avec les transitions $((q_1, q_2), \epsilon, (\epsilon, l), (q_1, q_2'))$ pour chaque transition (q_2, ϵ, l, q_2') avec $l \in \Lambda_\epsilon$, les $((q_1, q_2), l, (m, n), (q_1', q_2'))$ pour chaque transition (q_1, l, m, q_1') du premier transducteur et (q_2, m, n, q_2') du deuxième, avec $l \in \Sigma_\epsilon, m \in \Gamma, n \in \Lambda_\epsilon$, et enfin les $((q_1, q_2), l, (\epsilon, \epsilon), (q_1', q_2))$ pour chaque transition $(q_1, l, \epsilon, q_1'), l \in \Sigma$.
En effet, si on regarde uniquement le premier élément du couple des états et de la sortie, on retrouve exactement le premier transducteur. Si on regarde uniquement les deuxièmes éléments des couples des états, on trouve le deuxième transducteur, qui lit chaque lettre du premier élément du couple de sortie au moment de la transition étiquetée en sortie par cette lettre.
Cet automate implémente donc la relation ternaire qui contient (u, v, w) si et seulement si (u, v) est dans la première relation, et (v, w) dans la deuxième. En ayant seulement le deuxième élément du couple en sortie, on a bien la composition des deux relations. □

Ajouter la preuve de composition qd mm, à trouver dans le livre de Sakarovitch + propriété des projections et transformation des réguliers en régulier

1.4 Quelques problèmes associés aux transducteurs finis

Déterminer si un transducteur est fonctionnel, si deux transducteurs implémentent la même relation

2 Machines de Moore

Une machine de Moore est un cas particulier d'un transducteur fini : d'abord une telle machine est déterministe et implémente donc non pas une relation rationelle mais une fonction, qui sera appelée rationelle. La contrainte supplémentaire sur ces machines est que la lettre de sortie lue ne dépend que de l'état actuel de l'automate.

2.1 Définition et exemple

On peut évidemment définir une machine de Moore en partant de la définition de transducteur et en posant des contraintes sur la fonction de transition. Il est toutefois plus commode de la définir ainsi

Définition 5. *Une machine de Moore $\mathcal{M}$ est un 7-uplet $(\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \delta, \lambda)$ où*
- *Σ est l'alphabet d'entrée*
- *Γ l'alphabet de sortie*
- *Q l'ensemble fini des états*
- *q_0 l'état initial*
- *$F \subset Q$ les états finaux*

— $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ *la fonction de transition déterministe*
— $\lambda : Q \to \Gamma$ *la fonction de sortie*

Un calcul de $\mathcal{M}$ sur un mot w est défini de la même manière que pour un automate déterministe. On ajoute toutefois la notion de mot produit par ce calcul, qui est le mot obtenu en concaténant les lettres obtenues par application de λ sur chaque état pris lors du calcul de $\mathcal{M}$ sur w. Plus formellement

Définition 6. *On définit pour $q \in Q$ et $w \in \Sigma^*$ $q \star w$ récursivement :*

$$\forall a \in \Sigma, q \star a = \lambda(\delta(q, a)) \text{ et } \forall u \in \Sigma^*, q \star ua = (q \star u)(\delta^*(q, u) \star a)$$

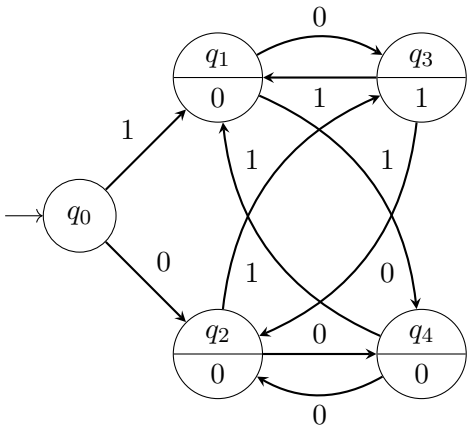
Le mot produit par le calcul de $\mathcal{M}$ sur w est défini comme $q_0 \star w$. Notons $L \subset \Sigma^*$ le langage reconnu par l'automate déterministe contenu dans la définition de $\mathcal{M}$. La fonction rationelle réalisée par $\mathcal{M}$ est alors définie par

$$f : \begin{array}{ll} L & \longrightarrow \Gamma^* \\ w & \longmapsto q_0 \star w \end{array}$$

On peut généraliser la fonction réalisée par $\mathcal{M}$ en la définissant non pas sur L mais sur tout Σ^*. Cela revient à rendre tout les états acceptants (ça reste une fonction rationelle ? ? ?)

FIGURE 2 – Un exemple de machine de Moore implémentant le xor chiffre à chiffre entre deux entiers en binaires

Si l'on souhaite faire le xor de 101 et 100, on donne à notre machine l'entrée 110010 et cette dernière renvoie 000001 (un 0 puis le résultat du xor pour chaque chiffre). On ne précise $\lambda(q_0)$ car cette valeur n'est pas utilisée pour définir la fonction de cette machine



3 Machines de Mealy

3.1 Définiton

3.2 Equivalence avec Moore

3.3 Propriétés algébriques