

Transducteurs et machines de Moore et Mealy

José et Aimeric

8 janvier 2025

Table des matières

1 Transducteurs finis

- Définitions
- Premières propriétés
- Quelques problèmes liés aux transducteurs

2 Machines de Moore et Mealy

- Machines de Moore
- Machines de Mealy
- Equivalence Moore/Mealy
- Propriétés algébriques

Table des matières

1 Transducteurs finis

- Définitions
- Premières propriétés
- Quelques problèmes liés aux transducteurs

2 Machines de Moore et Mealy

- Machines de Moore
- Machines de Mealy
- Equivalence Moore/Mealy
- Propriétés algébriques

Définition des transducteurs

Définition

Un transducteur fini est un 6-uplet $T = (\Sigma, \Gamma, Q, I, F, \delta)$ où

- Σ est l'alphabet d'entrée (fini)
- Γ l'alphabet de sortie (fini)
- Q l'ensemble des états (fini)
- $I \subset Q$ l'ensemble des états initiaux
- $F \subset Q$ l'ensemble des états finaux
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ est la fonction de transition non déterministe

Définition des transducteurs

Définition

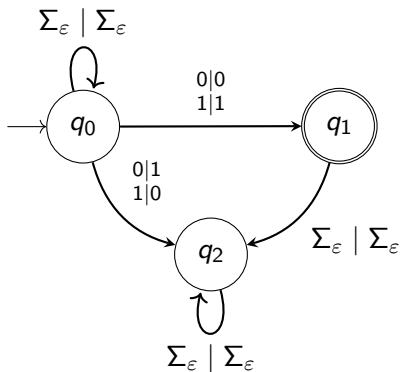
On définit $[T]$ la relation reconnue par un transducteur fini T , définie comme suit :

$$\forall (u, v) \in \Sigma^* \times \Gamma^*, u[T]v \Leftrightarrow \exists q \in I, \exists r \in F, r \in \delta^*(q, u, v)$$

δ^* est la fonction de transition itérée

Définition des transducteurs

Figure – Un exemple de transducteur fini reconnaissant la relation de congruence modulo 2



Relations rationnelles

Definition

Soient $R, R' \subset \Sigma^* \times \Gamma^*$ des relations. On pose

- $R \cdot R' = \{(xx', yy') \mid (x, y) \in R, (x', y') \in R'\}$, la concaténation ou produit
- $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$ où R^n est la concaténation répétée, et $R^0 = \{(\varepsilon, \varepsilon)\}$

Definition

L'ensemble des relations rationnelles est défini comme le plus petit ensemble de relations stable par étoile, concaténation et union, et contenant \emptyset et les singletons.

Théorème

Une relation R est rationnelle si et seulement si elle est reconnue par un transducteur fini T

Démonstration.

Exactement le même type de preuve que pour les automates finis et langages rationnels



Quelques propriétés de stabilité

Proposition

L'inverse d'une relation rationnelle est rationnel. Les projections à droite et à gauche d'une relation rationnelle sont des langages rationnels

Démonstration.

Pour le premier, on inverse les étiquettes du transducteur reconnaissant la relation. Pour le deuxième, on "oublie" les étiquettes de sortie pour en faire un automate. □

Quelques propriétés de stabilité

Proposition

L'image d'un langage rationnel par une relation rationnelle est rationnel.

Proposition

La composition de relations rationnelles est rationnelle

Démonstration.

On peut prouver la première propriété à partir de la deuxième, en considérant l'image de la composition de $\{\varepsilon\} \times \mathcal{L}$ et R .



Composition de deux relations

Figure – Premier transducteur

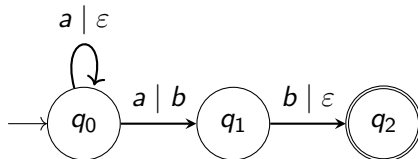
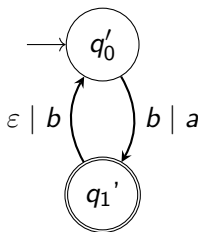
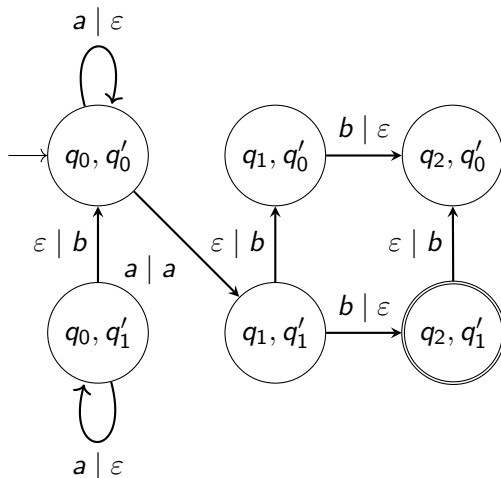


Figure – Deuxième transducteur



Composition de deux relations

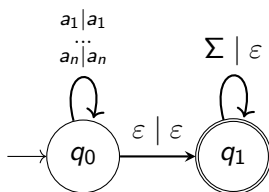
Figure – Le transducteur composition des deux relations



Une application

Si L est un langage rationnel, alors $\text{Pref}(L)$ l'est également. On retrouve ce résultat très rapidement grâce aux transducteurs.

Figure – Le transducteur reconnaissant la relation Pref avec $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$



Ainsi $\text{Pref}(L)$ est simplement l'image de L par une relation rationnelle, donc rationnel

Non stabilité de l'intersection

Les relations suivantes sur $\{a\}^* \times \{a, b\}^*$

$$R_I = \{(a^n, w) \mid w \in \Gamma^*, n \in \mathbb{N}, |w| = 2n\}$$

$$R_b = \{(a^n, w) \mid w \in \Gamma^*, n \in \mathbb{N}, |w|_b = n\}$$

sont rationnelles. Pourtant

$$\{(a^n, a^n b^n) \mid n \in \mathbb{N}\} = R_I \cap R_b \cap (\text{Pref})^{-1}$$

n'est pas rationnelle

Indécidabilité de l'équivalence

Théorème

Le problème d'équivalence entre deux transducteurs finis est indécidable

Démonstration.

On peut reformuler Post ainsi : étant donné deux morphismes

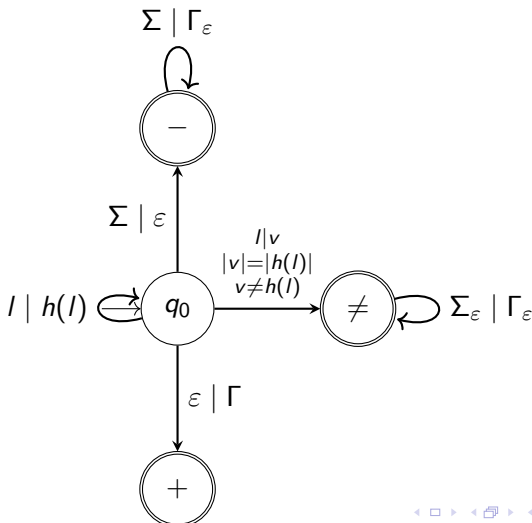
$g, h : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$, existe-t-il un mot $w \in \Sigma^* \neq \varepsilon$ tel que $g(w) = h(w)$?

On peut ensuite construire le transducteur qui implémente la relation $(x, (\Gamma^* \setminus \{g(x)\}) \cup (\Gamma^* \setminus \{h(x)\}))$, qui implémente la relation $\Sigma^* \times \Gamma^*$ si et seulement si il n'y a pas de solution.



Construction du transducteur.

Figure – Le transducteur qui à un mot x associe $\Gamma^* \setminus \{h(x)\}$



Décider de la fonctionnalité

Théorème

Le problème de savoir si un transducteur implémente une fonction (chaque élément n'a qu'une image) est décidable.

Démonstration.

Il suffit de tester toutes les images à moins de $O(n^2)$ transitions : s'il existe un mot avec deux images différentes, on peut montrer qu'il existe un couple d'images différentes à moins de $O(n^2)$ transitions. □

Table des matières

1 Transducteurs finis

- Définitions
- Premières propriétés
- Quelques problèmes liés aux transducteurs

2 Machines de Moore et Mealy

- Machines de Moore
- Machines de Mealy
- Equivalence Moore/Mealy
- Propriétés algébriques

Définition

Il s'agit d'un cas particulier de transducteurs finis, où l'étiquette de sortie ne dépend que de l'état courant et où les étiquettes d'entrée sont déterministes

Definition

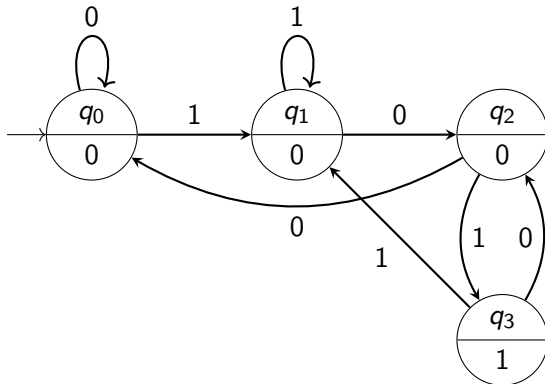
Une machine de Moore \mathcal{M} est un 7-uplet $(\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \delta, \lambda)$ où

- Σ est l'alphabet d'entrée
- Γ l'alphabet de sortie
- Q l'ensemble fini des états
- q_0 l'état initial
- $F \subset Q$ les états finaux
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ la fonction de transition déterministe
- $\lambda : Q \rightarrow \Gamma$ la fonction de sortie

Définition

Figure – Un exemple de machine de Moore

Machine de Moore qui note chaque occurrence de la séquence 101 (tout les états sont acceptants)



Algorithmes de Pattern Matching

On peut reformuler certains algorithmes de pattern matching comme le calcul d'une machine de Moore. C'est le cas par exemple de l'algorithme d'Aho Corasick, ou KMP.

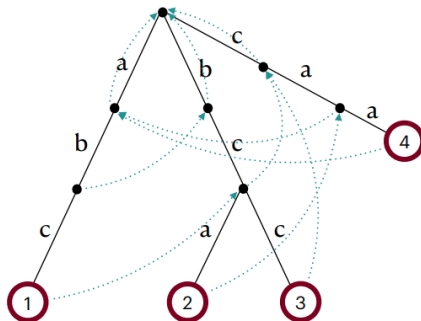
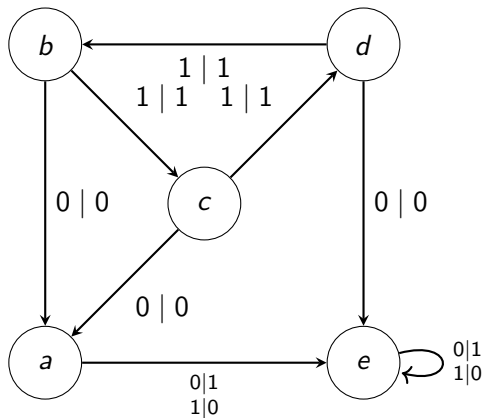


Image volée du cours de Tatiana

Définition

Une machine de Mealy est un transducteur aux étiquettes d'entrée déterministes, sans ε transition. Il s'agit de la même définition formelle que les machines de Moore, mais où $\lambda : Q \times \Sigma \rightarrow \Gamma$

Figure – Une machine de Mealy totalement innocente



Théorème

Pour toute machine de Mealy il existe une machine de Moore équivalente et réciproquement

Démonstration.

Pour le sens réciproque, il suffit de prendre le même automate en posant
 $\lambda'(q, a) = \lambda(\delta(q, a))$

Pour le sens direct, on se place sur les états $Q \times \Gamma$ et pour chaque transition $p \rightarrow q$ d'étiquette $a \mid b$, on ajoute aux transitions de la machine de Moore : $(p, c) \rightarrow (q, b)$ d'étiquette a pour $c \in \Gamma$ et on pose
 $\lambda(q, b) = b$



Equivalence Moore/Mealy

Figure – Exemple de construction d'une machine de Mealy équivalente à une machine de Moore

Une machine de Moore à gauche et à droite la machine de Mealy correspondante.

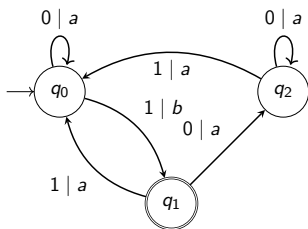
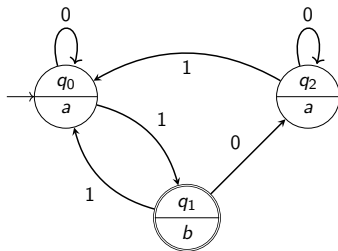


Figure – Machine de Mealy

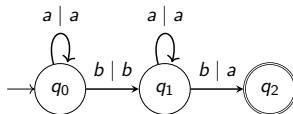
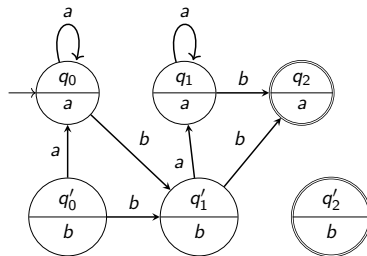


Figure – Machine de Moore équivalente



Definition (Demi-groupe)

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne \cdot . Si \cdot est associative, on appelle G un demi-groupe.

Definition (Taux de croissance)

Si (G, \cdot) est un demi-groupe et $A \subset G$ un ensemble fini de générateurs, on peut définir son taux de croissance $\gamma : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}$ de la façon suivante : pour $n \geq 2$, $\gamma(n)$ est le nombre d'éléments de G étant produits de n générateurs mais n'étant pas soi même un générateur. En d'autres termes

$$\gamma(n) = |\{g_1 \dots g_n \mid g_1, \dots, g_n \in A\} \setminus A|$$

Exemple de taux de croissance

Le demi groupe Σ^* a un taux de croissance exponentiel (on ne peut jamais simplifier l'écriture d'un élément de Σ^*).

Le groupe libre engendré par Σ (on ajoute a^{-1} pour $a \in \Sigma$) est également à taux de croissance exponentiel.

Le demi groupe libre \mathbb{N}^k est à croissance polynômiale

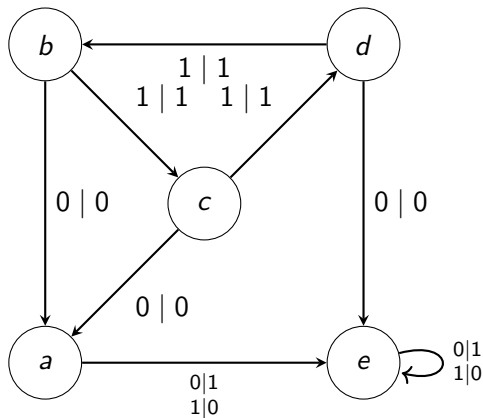
Definition

Demi-groupe engendré par une machine de Mealy On se fixe une machine de Mealy $\mathcal{M} = (\{0, 1\}, \{0, 1\}, Q, \delta, \lambda)$ (on ignore ici les états finaux et initiaux) pour la suite de cette section. Pour tout $q \in Q$, on définit

$$\rho_q : \begin{array}{ll} \{0, 1\}^* & \longrightarrow \{0, 1\}^* \\ w & \longmapsto q \star w \end{array}$$

On notera $G_{\mathcal{M}}$ le demi-groupe engendré par les $(\rho_q)_{q \in Q}$ avec l'opération de composition.

Figure – L'automate de Mealy engendrant le groupe de Grigorchuk



Fin

C'est fini