TIPE - Autour du théorème de Jordan

15 Juin 2023

1 Définitions usuelles et notations

Dans tout le document, on notera $\sqcup$ les unions disjointes

Définition

Un chemin de x à y est une application $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

Si γ est un chemin, on dénotera également son image par γ

Définition

Un lacet est un chemin γ de $\gamma(0)$ à $\gamma(0)$

Définition

Une courbe de Jordan est un lacet injectif sur $[0,1[$

Le théorème de Jordan s'énonce alors comme

Théorème de Jordan

Soit γ une courbe de Jordan
Alors $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ a deux composantes connexes par arcs ouvertes, l'une bornée, l'autre non, ayant toutes deux pour frontière γ

On parlera par la suite de composante connexe interne, ou externe, pour parler de la composante bornée, ou non bornée
On se demande alors : que se passerait il en affaiblissant l'hypothèse d'injectivité ?

2 Problème

Définition 1

Soit γ un chemin
On note
$$I_\gamma = \{x \in \gamma \mid \exists t_1 \neq t_2 \in [0,1], x = \gamma(t_1) = \gamma(t_2)\}$$
l'ensemble des intersections de γ

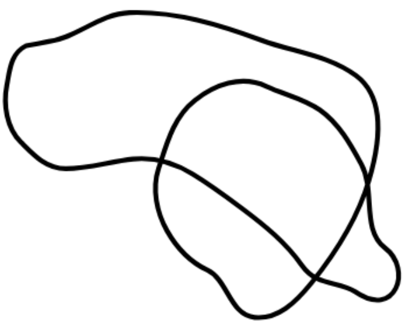
Définition 2

Soit $x \in I_\gamma$
Sous réserve d'existence, on note $S(x)$ le "nombre de sorties" de x l'entier suivant
$$S(x) = |\gamma^{-1}(\{x\})|$$

Définition 3

Soit γ un chemin
Si I_γ est fini et pour tout $x \in I_\gamma$, $S(x)$ est défini, on dira que γ est à retours finis et on note le nombre de retours
$$r(\gamma) = \sum_{x \in I_\gamma} (S(x) - 1)$$

Figure 1 – Un exemple de lacet à retours finis



On cherche alors à montrer que

Théorème des retours

Soit γ un lacet à retours finis
γ délimite $r(\gamma)$ composantes connexes par arcs bornées

Pour cela, on s'intéresse à ce qu'il se passe lorsque l'on trace un lacet à la main
On remarque intuitivement ou empiriquement que chaque fois que le tracé croise une portion de courbe déjà dessinée, il apparaît une nouvelle composante connexe
C'est cette intuition qui nous conduit à introduire les définitions suivantes

Définition 4

Soit γ un lacet à retours finis
On définit pour $t \in [0,1]$ le nombre de sorties à l'instant t

$$\forall x \in I_\gamma, S(x,t) = |\gamma^{-1}(\{x\}) \cap [0,t]|$$

et, en notant $I_\gamma(t) = I_\gamma \cap \gamma([0,t])$

$$r_\gamma(t) = \sum_{x \in I_\gamma(t)} S(x,t) - 1$$

Définition 5

Soit γ un lacet à retours finis et $t \in [0,1]$
On note $C_\gamma(t)$ l'ensemble des composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,t])$

L'idée de la démonstration sera de procéder par récurrence sur les instants en lesquels le nombre de retour augmente afin de montrer que $|C_\gamma(1)| = r_\gamma(1) = r(\gamma)$
Pour cela on commence par déterminer certaines propriétés de la fonction r_γ et des cas d'augmentation de r_γ

3 Premières propriétés

3.1 Une propriété utile des connexes par arcs

Propriété 1

Soit A un connexe par arcs et $B \subset \mathbb{R}^2$ tel que $A \cap B \neq \varnothing$ et $A \backslash B \neq \varnothing$
Alors $A \cap \mathrm{Fr}(B) \neq \varnothing$

Démonstration. Soient $x \in A \backslash B$, $y \in A \cap B$
Soit c un chemin de x à y dans A par connexité par arcs
Donc $c(0) \in A \backslash B$, on peut alors considérer

$$t_0 = \sup\{t \in [0,1] \mid c(t) \in A \backslash B\}$$

Si $t_0 \neq 0$ et $t_0 \neq 1$:
Alors :

$$\forall \varepsilon \in]0, t_0[, \exists t \in]t_0 - \varepsilon, t_0[, c(t_0 - \varepsilon) \in A \backslash B \tag{1}$$

et

$$\forall \varepsilon \in]0, t_1 - t_0[, c(t_0 + \varepsilon) \in A \cap B \tag{2}$$

Par continuité de c et (2) et (3) toute boule ouverte centrée en $c(t_0)$ rencontre $A \cap B$ et $A \backslash B$
On obtient alors que $c(t_0) \in \mathrm{Fr}(A \cap B) \subset \mathrm{Fr}(B)$

Si $t_0 = 0$, on a juste (3) et le fait que toute boule centrée en $c(0)$ contient $c(0)$ et rencontre donc $A \backslash B$.
On aboutit alors au même résultat
Si $t_0 = 1$ même chose, mais avec (2)

□

3.2 Caractérisation des composantes connexes

Propriété 2

Soit $t \in [0,1]$, et V un ouvert de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,t])$, connexe par arcs borné
On a

$$V \in C_\gamma(t) \Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0,t])$$

Démonstration. Sens direct :
Si $V \in C_\gamma(t)$
Soit $x \in \mathrm{Fr}(V)$ et $n \in \mathbb{N}^*$
Par définition de la frontière il existe

$$y_n \in \mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap V \text{ et } z_n \in \mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (\mathbb{R}^2 \backslash V)$$

Comme $\mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$ est connexe par arcs, il existe $c_n \in \mathcal{C}([0,1], \mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right))$ tel que $c_n(0) = y_n$ et $c(1) = z_n$

Or $\mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \backslash \gamma([0,t])$ ne peut être connexe par arcs, sinon V aurait accès à une autre composante connexe par arcs de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,t])$

Donc c_n rencontre $\gamma([0,t])$, on choisit donc $i_n \in \mathcal{B}\left(0, \frac{1}{n}\right) \cap \gamma([0,t])$

On a que $i_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

(i_n) est à valeurs dans $\gamma([0,t])$ un fermé, donc $x \in \gamma([0,t])$

Sens réciproque :

On raisonne par contraposée

Si $V \notin C_\gamma(t)$

Comme $V \subset \mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,t])$, il existe $U \in C_\gamma(t)$ tel que $V \cap U \neq \varnothing$

Comme V est connexe par arcs, $V \subsetneq U$ (sinon V rencontrerais Fr(U) $\subset \gamma([0,t])$)

Puis comme V est un ouvert strictement inclus dans U, on a que $U \backslash \overline{V} \neq \varnothing$

$V \sqcup U \backslash \overline{V}$ n'est donc pas connexe par arcs comme réunion disjointe d'ouverts

Comme U est connexe, il existe un chemin de V à $U \backslash \overline{V}$ dans U

Ce chemin rencontre nécessairement $U \backslash (V \sqcup (U \backslash \overline{V})) = \mathrm{Fr}(V)$

Donc $\mathrm{Fr}(V)$ rencontre U, car le chemin est à valeurs dans U

Or $U \subset \mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,t])$, donc $\mathrm{Fr}(V) \not\subset \gamma([0,t])$

□

3.3 Propriétés de r_γ

Propriété 3

Soit γ un lacet à retours finis

r_γ est une fonction en escalier. De plus, la subidivision minimale associée à r_γ, $(t_n)_{0 \le n \le r(\gamma)}$ vérifie

$$\forall n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!], r_\gamma(t_{n+1}) = 1 + r_\gamma(t_n)$$

et

$$\forall n \in [\![0, r(\gamma)]\!], \gamma(t_n) \in I_\gamma(t_n)$$

Démonstration. Notons que pour tout $x \in I_\gamma$, $t \longmapsto S(x,t)$ est croissante

Donc r_γ est croissante

De plus elle ne prend que des valeurs entières et est bornée, elle est alors en escalier

Supposons qu'elle ne le soit pas, alors pour toute subdivision $(t_n)_{0\leq n\leq p}$ de $[0,1]$, il existe $n \in [\![0, p-1]\!]$ tel que r_γ ne soit pas constante sur $]t_n, t_{n+1}[$
Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, r_γ prend k valeurs distinctes
C'est évident pour $k = 1$
Supposons la propriété vraie au rang $k \in \mathbb{N}$
Notons $v_0 < ... < v_{k-1} \in \mathbb{N}$ les k premières valeurs prises par r_γ (bien défini car r_γ est à valeurs entières)
On pose alors $(t_n)_{0\leq n\leq k}$ telle que

$$\forall n \in [\![0, k-1]\!], t_n = \inf\{t \in [0,1] \mid r_\gamma(t) = v_n\}$$

et $t_k = 1$

Comme r_γ est croissante on a $t_0 \leq t_1 < ... < t_k$ (on peut si $t_0 = t_1$ remplacer la subdivision en n'en gardant qu'un)
On a alors, par croissance que r_γ est constante sur les $]t_n, t_{n+1}[$ pour $n \in [\![0, k-2]\!]$, en effet si elle y prenait d'autres valeurs, il s'agirait nécessairement par définition des (t_n) d'une valeur strictement supérieure à v_{k-1}, mais cela contredirait la croissance
On a de plus $r_\gamma(t_0) \leq r_\gamma(t_1) < r_\gamma(t_2) < ... < r_\gamma(t_{k-1}) < r_\gamma(t_k)$:
Les inégalités strictes de 1 à $k-1$ viennent de la définition des (t_n) comme borne inférieure et de la croissance de r_γ
La dernière inégalité stricte vient du fait que r_γ est nécessairement non constante sur $]t_{k-1}, t_k[$ par ce qui précède
Donc r_γ prend k valeurs distinctes

On a bien montré la propriété par récurrence
Mais alors, comme ces valeurs sont entières, r_γ est non bornée, absurde

Considérons alors $(t_n)_{0\leq n\leq p}$ la subdivision minimale associée à r_γ
Montrons d'abord que

$$\forall n \in [\![0, p]\!], \forall t < t_n, r_\gamma(t) < r_\gamma(t_n) \tag{3}$$

Supposons que non
Donc il existe $n \in [\![0, p]\!]$ et $t < t_n$ tel que $r_\gamma(t_n) \leq r_\gamma(t)$
Comme r_γ est croissante on a

$$\forall t' \in [t, t_n[, r_\gamma(t') = r_\gamma(t_n)$$

Puis on utilise la minimalité de (t_n) :
- Si $n = p$, c'est absurde car $r_\gamma(t) < r(\gamma)$ pour $t \in [0,1[$
- Sinon, alors par minimalité, r_γ doit prendre une valeurs strictement plus grande que $r_\gamma(t_n)$ sur $]t_n, t_{n+1}[$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $r_\gamma(t_n + \varepsilon) > r_\gamma(t_n)$, donc par définition de r_γ, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in I_\gamma \cap \gamma(]t_n, t_n + \varepsilon[)$ tel que $S(x, t_n + \varepsilon) > 2$
On a donc trouvé une infinité d'intersections, absurde car γ est à retours finis
On a bien la propriété annoncée
Cela implique en particulier que r_γ est constante sur les $[t_n, t_{n+1}[$

Montrons ensuite qu'il existe $t \in [t_n, t_{n+1}[$ tel que

$$\sum_{x \in I_\gamma(t_{n+1}) \setminus \gamma([0,t])} S(x, t_{n+1}) - 1 = 0$$

Il suffit de remarquer que $I_\gamma(t_{n+1})$ étant fini, il existe $t \in [t_n, t_{n+1}[$ tel que $|I_\gamma(t_{n+1}) \setminus \gamma([0,t])| \leq 1$
Si l'ensemble est vide, c'est terminé
Sinon, $\gamma(t_{n+1}) \notin \gamma([0, t_{n+1}[)$, donc $S(\gamma(t_{n+1}, t_{n+1})) = 1$
Donc la somme vaut bien 0

Enfin, on considère un tel $t \in [t_n, t_{n+1}[$
On a donc d'après ce qui précède

$$r_\gamma(t_{n+1}) - r_\gamma(t) = \sum_{x \in I_\gamma(t)} S(x, t_{n+1}) - S(x, t) \geq 1$$

Il existe donc un $x \in I_\gamma(t)$ tel que $S(x, t_{n+1}) > S(x, t)$
Par minimalité de la subdivision, on a que $S(x, t') = S(x, t)$ pour $t \leq t' < t_{n+1}$ (le cas contraire le nombre de retours aurait augmenté entre t_n et t_{n+1})
Donc nécessairement $x = \gamma(t_{n+1})$, ce qui montre que ce x est unique
De plus il vient que

$$|\gamma^{-1}\{x\} \cap [0, t_{n+1}]| = 1 + |\gamma^{-1}\{x\} \cap [0, t_{n+1}[|$$

Donc

$$\forall t' \in [t, t_{n+1}[, S(x, t_{n+1}) = 1 + S(x, t')$$

Donc comme ce x est unique, on a

$$\forall t' \in [t, t_{n+1}[, r_\gamma(t_{n+1}) = 1 + r_\gamma(t)$$

Or r_γ est constante sur $[t_n, t_{n+1}[$ par les résultats précédents on a $r_\gamma(t_{n+1}) = 1 + r_\gamma(t_n)$
Puisque r_γ prends des valeurs de $r_\gamma(0) = 0$ à $r_\gamma(t_p) = r(\gamma)$, on en déduit que $p = r(\gamma)$

$\square$

3.4 Les 4 cas d'augmentation

On se fixe γ un lacet à retours finis
On se donne (t_n) la subdivision minimale adaptée à r_γ

On notera pour la suite $\gamma_n^m = \gamma(]t_n, t_{m+1}[)$ pour $n \leq m \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$ On distingue 4 cas d'augmentation du nombre de retours de t_n à t_{n+1} de la subdivision minimale

Le 2 premiers sont des cas "intérieurs", c'est à dire que le lacet découpe une composante connexe déjà présente en 2 nouvelles.
Dans le premier de ces cas, l'intersection a lieu sur une "vieille" partie de γ (tracée avant que le lacet ne rentre dans la composante connexe)

FIGURE 2 – Cas intérieurs

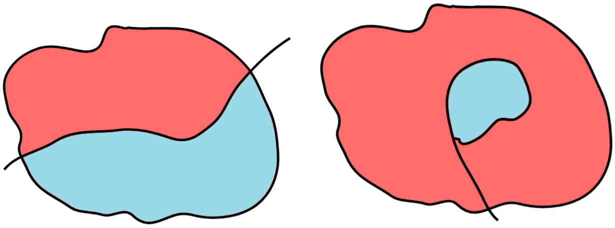
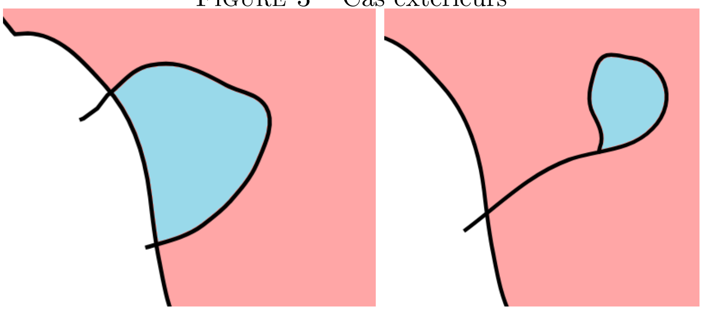


FIGURE 3 – Cas extérieurs



Dans le deuxième, l'intersection se produit sur une nouvelle partie de γ tracée après l'entrée dans la composante

Les 2 derniers cas sont "extérieurs", le lacet crée une toute nouvelle composante bornée à partir de la composante connexe non bornée. Les cas sont distingués de la même manière que pour l'intérieur

Plus formellement, soit $n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$
On a :
— Cas intérieurs : Soit
$$\gamma_n^n \subset \bigcup_{V \in C_\gamma(t_n)} V$$
et alors
— Soit $\gamma(t_{n+1}) \in \gamma_0^{n-1}$

— Soit $\gamma(t_{n+1}) \notin \gamma_0^{n-1}$
On a donc $\gamma(t_{n+1}) \in \gamma_n^n \cup \{\gamma(t_n)\}$ comme $\gamma(t_{n+1}) \in I_\gamma(t_{n+1})$

— Cas extérieurs : Soit
$$\gamma_n^n \nsubseteq \bigcup_{V \in C_\gamma(t_n)} V$$
et alors on a la même disjonction de cas

3.5 Paramétrage standard

Définition 6

Soit L image d'une application $f : I \to \mathbb{R}^2$, où $I \subset \mathbb{R}$
Un paramétrage de L est une fonction $g : I \to L$ surjective

Soit γ un lacet d'image L
On remarque que L possède une multitude de paramétrages, en particulier pour tout $a \in [0,1]$, $t \longmapsto \gamma(t+a \mod 1)$ est un paramétrage de L
Pour montrer que $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ possède les propriétés desirées par la méthode annoncée, une récurrence sur les instants (t'_n), certains paramétrages de γ sont plus utiles que d'autres
On construit alors pour tout lacet à retours finis un paramétrage standard, défini comme suit :

On se donne α un lacet à retours finis et sa subdivision minimale associée $(t_n)_{0 \leq n \leq r(\gamma)}$
Posons $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \alpha$, le prolongement 1-périodique de α
Comme $\alpha(0) = \alpha(1)$, $\tilde{\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}$
On se donne ensuite a minimal tel que $\alpha(a) = \alpha(t_1)$
Le paramétrage standard de α est alors
$$\gamma : \begin{array}{cl} [0,1] & \longrightarrow \alpha \\ t & \longmapsto \tilde{\alpha}(t+a) \end{array}$$
qui est bien continue et un lacet à retours finis
Notons également que la subdivision minimale associée à r_γ possède $r(\gamma)+1$ élements par la propriété 3, donc elle en possède $r(\alpha)+1$
Ainsi les raisonnements par récurrence sur $n \in [\![0, r(\gamma)-1]\!]$ et cette subdivision seront inchangés que l'on travaille sur α ou sur son paramétrage standard

4 Lemmes

Lemme 1

Soit V un ouvert
Ses composantes connexes par arcs sont ouvertes

Démonstration. Si V est connexe par arcs, on a déjà le résultat

Si V ne l'est pas, notons $\mathcal{C}$ l'ensemble de ses composantes et prenons $U \in \mathcal{C}$
Supposons par l'absurde que U n'est pas ouvert, soit $U \cap \mathrm{Fr}(U) \neq \varnothing$
Soit $x \in U \cap \mathrm{Fr}(U)$
Comme $U \subset V$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \subset V$, et on a également comme $\mathcal{B}(x,r) \backslash U \neq \varnothing$
Comme

$$V = \bigcup_{U' \in \mathcal{C}} U'$$

il existe donc $U' \in \mathcal{C} \backslash \{U\}$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \cap U' \neq \varnothing$
$\mathcal{B}(x,r)$ étant connexe par arcs inclus dans V et rencontrant U et U', il existe un chemin dans V de U à U', ce qui est absurde car ces deux composantes connexes par arcs sont distinctes

Donc U est ouvert □

Lemme 2

Soit V un ouvert et $x \in \mathrm{Fr}(V)$ tel qu'il existe $r > 0$ tel que pour $\varepsilon \in]0, r[$, $\mathcal{B}(x,\varepsilon) \cap V$ ait un nombre fini de composantes connexe
Pour $\varepsilon \in]0, r[$, il existe U une composante connexe par arcs de $\mathcal{B}(x,\varepsilon) \cap V$ telle que $x \in \mathrm{Fr}(U)$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$
Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des composantes connexe de $\mathcal{B}(x,\varepsilon) \cap V$
Montrons d'abord que

$$\mathrm{Fr}(\mathcal{B}(x,\varepsilon) \cap V) = \bigcup_{U \in \mathcal{C}} \mathrm{Fr}(U)$$

Notons d'abord que pour $U, U' \in \mathcal{C}$, $U \neq U'$, on a $\overline{U} \subset \mathbb{R}^2 \backslash U'$
En effet, on a $U \cap U' = \varnothing$ car ce sont deux composantes connexes distinctes, puis, si il existait $y \in \overline{U} \cap U'$, alors comme tout voisinage de y rencontre U et qu'il existe un voisinage de y inclus dans U', car ouvert, il vient que $U \cap U' \neq \varnothing$ ce qui est absurde

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}(\mathcal{B}(x,\varepsilon)\cap V) &= \mathrm{Fr}\left(\bigsqcup_{U\in\mathcal{C}} U\right)\\
&= \left(\overline{\bigsqcup_{U\in\mathcal{C}} U}\right)\setminus\left(\bigsqcup_{U\in\mathcal{C}} U\right)\\
&= \left(\bigcup_{U\in\mathcal{C}} \overline{U}\right)\cap\left(\bigcap_{U\in\mathcal{C}} \mathbb{R}^2\backslash U\right)\\
&= \bigcup_{U\in\mathcal{C}}\left(\overline{U}\cap\bigcap_{U'\in\mathcal{C}} \mathbb{R}^2\backslash U\right)\\
&= \bigcup_{U\in\mathcal{C}} \overline{U}\backslash U\\
&= \bigcup_{U\in\mathcal{C}} \mathrm{Fr}(U)
\end{aligned}$$

Puis $x\in\mathrm{Fr}(V)$, donc pour tout $\delta\in]0,\varepsilon[$, $\mathcal{B}(x,\delta)\cap V\neq\varnothing$, donc $x\in\mathrm{Fr}(\mathcal{B}(x,\varepsilon)\cap V)$, donc par ce qui précède, il existe un $U\in\mathcal{C}$ tel que $x\in\mathrm{Fr}(U)$ □

Lemme 3

Soit V un ouvert connexe par arcs tel que pour tout point $x\in\mathrm{Fr}(V)$ il existe $r>0$ tel que pour $\varepsilon\in]0,r[$, $\mathcal{B}(x,\varepsilon)\cap V$ ait un nombre fini de composantes connexes
$\overline{V}$ est connexe

Démonstration. Soit $x\in\mathrm{Fr}(V)$
On suppose pour abréger la rédaction, que $r=2$
On construit une suite $(x_n)\in V^{\mathbb{N}}$ et des chemins (c_n) de x_n à x_{n+1} dans $\mathcal{B}(x,\frac{1}{n+1})$
Soit U_0 une composante connexe de $\mathcal{B}(x,1)\cap V$ telle que $x\in\mathrm{Fr}(U_0)$ par le Lemme 1
On choisit alors $x_0\in U_0$. On posera également $U_{-1}=V$

On suppose les termes $x_0,...,x_n$ construits pour $n\in\mathbb{N}$ tels que $x_k\in U_k$ où U_k est une composante connexe par arcs de $\mathcal{B}(x,\frac{1}{k+1})\cap U_{k-1}$ telle que $x\in\mathrm{Fr}(U_k)$, $k\in[\![0,n]\!]$
Comme $x\in\mathrm{Fr}(U_n)$, on se donne $x_{n+1}\in\mathcal{B}(x,\frac{1}{n+2})\cap U_n$
Puis comme U_n est ouvert par le Lemme 1, car il s'agit d'une composante de $\mathcal{B}(x,\frac{1}{n+1})\cap U_n$ un ouvert, et $x\in\mathrm{Fr}(U_n)$ et $\mathcal{B}(x,\frac{1}{n+2})\cap U_n$ a un nombre fini de composantes connexes par arcs, il existe U_{n+1} une composante connexe par arcs de $\mathcal{B}(x,\frac{1}{n+1})\cap U_n$ telle que $x\in\mathrm{Fr}(U_{n+1})$ par le Lemme 2
On choisit alors $x_{n+1}\in U_{n+1}$, qui vérifie bien les propriétés annoncées

Puis on pose pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, c_n un chemin de x_n à x_{n+1} dans U_n, car $x_{n+1}\in U_n$ par construction

On pose alors

$$d: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow V \\ t & \longmapsto c_{\lfloor t \rfloor}(t - \lfloor t \rfloor) \end{array}$$

qui est continue car continue sur tout les intervalles $]n, n+1[$ et que $c_n(1) = c_{n+1}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$
Par construction pour $t \geq 0$, $d(t) \in \mathcal{B}(x, \frac{1}{\lfloor t \rfloor + 1})$, et on en déduit que

$$\lim_{t \to \infty} d(t) = x$$

Puis en posant

$$c: \begin{array}{ll} [0,1] & \longrightarrow \overline{V} \\ t & \longmapsto \begin{cases} d(\frac{t}{1-t}) & \text{si } t \in [0,1[\\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

on obtient bien un chemin de $x_0 \in V$ à x : c est continue sur $[0,1[$ par composition, puis elle l'est en 1 par la limite déterminée précedemment
Ainsi $\overline{V}$ est connexe par arcs □

Lemme 4

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné
Soit $c \in \mathcal{C}([0,1], \overline{A})$ injective, et U une composante connexe par arcs de $A \backslash c$
On a $\mathrm{Fr}(U) \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$

Démonstration :

Soit $U \subset A$ une composante connexe par arcs
Supposons par l'absurde que $\mathrm{Fr}(U) \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing$
Montrons d'abord que $\mathrm{Fr}(U) \subset c$

Par l'absurde, on se donne $x \in \mathrm{Fr}(U) \backslash c$
Notons d'abord que $x \in A$: sinon, alors comme $x \notin \mathrm{Fr}(A)$, il existerait un voisinage de x inclus dans $\mathbb{R}^2 \backslash A$
Or ce dernier rencontre U car $x \in \mathrm{Fr}(U)$, donc on aurait $U \not\subset A$
Donc $x \in A \backslash c$ qui est un ouvert, il existe donc $\delta > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, \delta) \subset A \backslash c$
Comme $\mathcal{B}(x, \delta)$ est connexe et rencontre U, il existe un chemin dans $A \backslash c$ de U à $x \notin \mathrm{Fr}(U)$
Absurde, donc $\mathrm{Fr}(U) \subset c$

Soit $x \in U$
Posons

$$f: \begin{array}{ll} \mathrm{Fr}(U) & \longrightarrow \mathcal{S}(0,1) \\ u & \longmapsto \frac{u-x}{\|u-x\|} \end{array}$$

f est continue et bien définie car $\mathrm{Fr}(U) \cap U = \varnothing$
Montrons qu'elle est surjective :

Soit $y \in S(0,1)$
La droite $x + \text{Vect}(y)$ rencontre U et son complémentaire, car U est bornée et la droite non
Donc puisque les deux ensembles sont connexes, il existe $u = x + \lambda y \in \text{Fr}(U)$
On a bien $f(u) = y$

Soit $J \subset \text{Fr}(U)$ telle que $f_{|J}$ soit bijective
Soit $I = c^{-1}(J)$, $c_{|I}$ est alors une bijection continue de I dans J car $\text{Fr}(U) \subset c$
Soit γ une courbe de Jordan décrivant exactement $\mathcal{S}(0,1)$
Par surjection de $f_{|J} \circ c_{|I}$, on choisit $\Gamma : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telle que $\gamma = f_{|J} \circ c_{|I} \circ \Gamma$
On montre ensuite que Γ est une bijection continue ce qui fournira la contradiction souhaitée

Soit $t \in [0,1]$
Montrons que Γ est continue en t
Supposons que non, il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0, \exists t' \in]t-\delta, t+\delta[\cap [0,1], |\Gamma(t) - \Gamma(t')| > \varepsilon$$

On considère

$$m = \inf\{\|f_{|J} \circ c_{|I}(t) - f_{|J} \circ c_{|I}(t')\| \mid t' \in [0,1] \backslash [t-\varepsilon, t+\varepsilon]\}$$

On a $m \neq 0$: en effet $f_{|J} \circ c_{|I}$ est une bijection
On en déduit, comme $\gamma = f_{|J} \circ c_{|I} \circ \Gamma$, que γ est discontinue en t
Absurde, donc Γ est continue sur $[0,1]$
On a que Γ est surjective, et injective sur $[0,1[$ car $\Gamma = c_{|I}^{-1} \circ f_{|J}^{-1} \circ \gamma$
Donc elle y est strictement monotone car continue
Par le théorème de la limite monotone et continuité en 1, on a $\Gamma(1) > \Gamma(t)$ (on suppose la croissance sans perte de généralité) pour $t \in [0,1[$
Au total Γ est bijective

Or γ n'est pas bijective, et s'écrit comme une composée de bijections
Absurde, donc $\text{Fr}(U) \cap \text{Fr}(A) \neq \varnothing$

Lemme de la ficelle

Soit $c \in \mathcal{C}([0,1], \mathcal{B}_f(0,1))$ injective
Si $\mathcal{B}(0,1) \backslash c$ n'est pas connexe par arcs alors c rencontre $\mathcal{S}(0,1)$ en au moins deux points

Démonstration. On identifiera dans la preuve $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ pour simplifier l'écriture
Soient U_1, U_2 deux composante connexes par arcs distinctes de $\mathcal{B}(0,1) \backslash c$
Par le Lemme 4, leur frontières rencontrent $\mathcal{S}(0,1)$
Soient donc $x, y \in \mathcal{S}(0,1)$, $x \in \text{Fr}(U_1)$ et $y \in \text{Fr}(U_2)$
Notons que l'on peut choisir $x \neq y$: en effet $\mathcal{B}(x,\varepsilon) \backslash \mathcal{S}(0,1)$ n'est pas connexe

Si $\mathrm{Fr}(U_1) \cap \mathcal{S}(0,1)$ ne possédait qu'un élement, alors

Supposons $x, y \notin c$
On écrit $x = \exp(i\theta)$ et $y = \exp(i\phi)$, avec $\theta, \phi \in [0, 2\pi[$
On suppose sans perte de géneralité que $0 < \theta \leq \phi$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne alors $x_n \in \mathcal{B}(x, \frac{1}{n})$ et $y_n \in \mathcal{B}(y, \frac{1}{n})$
Donc à partir d'un certain rang, par continuité de l'argument sur $\mathcal{S}(0,1)\backslash\{1\}$, on a en notant θ_n, ϕ_n les arguments de x_n et y_n, $0 < \theta_n \leq \phi_n$
On considère alors le chemin suivant de x_n à y_n

$$c_n : \begin{array}{ll} [0,1] & \longrightarrow \mathcal{B}(0,1)\backslash\mathcal{B}(0, 1-\frac{1}{n}) \\ t & \longmapsto (|x_n|t + (1-t)|y_n|)\exp(i(t\theta_n + (1-t)\phi_n)) \end{array}$$

Comme $U_1 \neq U_2$ et que ce chemin est à valeurs dans $\mathcal{B}(0,1)$, il rencontre c en un point $z_n \in \mathcal{B}(0,1)\backslash\mathcal{B}(0, 1-\frac{1}{n})$
(z_n) possède une valeur d'adhérence car bornée, et par ce qui précède cette dernière notée z, vérifie $z \in \mathcal{S}(0,1)$
Comme (z_n) est à valeurs dans c, un compact, on a que $z \in c \cap \mathcal{S}(0,1)$
Les conditions précédentes imposent également que $\arg(z) \in]\theta, \phi[$

On trouve de manière similaire un deuxième point dans $c \cap \mathcal{S}(0,1)$ en considérant un chemin similaire mais en tournant dans l'autre sens
Les deux sont distincts car l'argument du deuxième point appartient, comme le chemin tourne dans le sens inverse au premier, à $[0, \theta[\cup]\phi, 2\pi[$

Si x ou y appartiennent à c, alors soit ils appartient tous deux à c $\square$

Lemme 5

Soit γ une courbe de Jordan, $x, y \in \gamma$ distincts, et c un chemin injectif de x à y tel que, en notant V la composante interne délimitée par γ

$$c(]0,1[) \subset V$$

Alors $V\backslash c$ a deux composantes connexes par arcs, qui sont les composantes internes de courbes de Jordan

Démonstration. On pose $\tilde{\gamma}$ le prolongement 1-périodique de γ, qui est également continue car γ est un lacet
On se donne $a, b \in [0,1]$ tels que $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$
γ étant une courbe de Jordan, $a \neq b$
On pose alors

$$c_1 : \begin{array}{ll} [0,1] & \longrightarrow \gamma \\ t & \longmapsto \tilde{\gamma}(bt + (1-t)a) \end{array}$$

et

$$c_2 : \begin{array}{cl} [0,1] & \longrightarrow \gamma \\ t & \longmapsto \tilde{\gamma}(bt + (1-t)(a-1)) \end{array}$$

On a alors que $c_1 \cup c_2 = \gamma$ et $c_1 \cap c_2 = \{x, y\}$, et c_1 et c_2 continues et injectives
On pose alors γ_1 et γ_2 les courbes de Jordan obtenues en concaténant c à c_1 et c_2
Notons V_1 et V_2 leurs composantes connexes internes

Montrons d'abord $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ Supposons que non
Comme $c_1(]0,1[)$ est à valeur dans la composante externe délimitée par γ_2, il existe un voisinage d'un point de $\mathrm{Fr}(V_1)$ inclus dans cette composante
Comme ce voisinage rencontre un point de V_1, ce point n'appartient donc pas à V_2
De manière symétrique, il vient que $V_1 \backslash V_2 \neq \varnothing$ et $V_2 \backslash V_1 \neq \varnothing$

Donc comme les deux sont connexes il vient par la propriété 1 que $V_1 \cap \mathrm{Fr}(V_2) \neq \varnothing$ et $V_2 \cap \mathrm{Fr}(V_1) \neq \varnothing$
Donc par les propriétés de c_1 et c_2, $V_2 \cap c_1 \neq \varnothing$ et $V_1 \cap c_2 \neq \varnothing$
On se donne alors $t \in [0,1]$ tel que $c_2(t)$
Comme $x, y \in \mathrm{Fr}(V_1)$, $t \in]0,1[$
Si il existait un $t' \in]t, 1[$ tel que $c_2(t') \notin V_1$, comme $c_2([t,t'])$ est connexe par arcs par continuité, par la propriété 1, $c_2([t,t']) \cap \gamma_1 \neq \varnothing$, donc $c_2([t,t']) \cap c \neq \varnothing$ ce qui est absurde
On en déduit en géneralisant que $c_2(]0,1[) \subset V_1$ et de même pour V_2

On a établi précedemment que $E_1 \cap V_2 \neq \varnothing$ ou E_1 est la composante externe délimitée par γ_1
Or $E_1 \backslash V_2 \neq \varnothing$ car l'un est non borné et l'autre non
Donc $E_1 \cap \mathrm{Fr}(V_2) \neq \varnothing$ car E_1 est connexe par arcs
Or $E_1 \cap \mathrm{Fr}(V_2) = c_2(]0,1[) \cap E_1$
Donc $c_2(]0,1[) \nsubseteq V_1$, absurde
Donc $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

Montrons ensuite que $V_1 \subset V$
Sinon, V_1 rencontre V et son complémentaire (il rencontre V car $c \subset \mathrm{Fr}(V_1)$ et $c(]0,1[) \subset V$)
Donc $V_1 \cap \mathrm{Fr}(V) \neq \varnothing$, donc $V_1 \cap c_2 \neq \varnothing$
Mais cela impliquerait que $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$, car il existe un point de c_2 et un voisinage de ce dernier inclus dans V_1, or ce voisinage rencontre un point de V_2
Donc $V_1 \subset V$ et de même pour V_2

Enfin, montrons que V_1 et V_2 sont bien les composantes connexes par arcs de $V \backslash c$
Par le Lemme 4, les composantes connexes U de $V \backslash c$ vérifient $\mathrm{Fr}(U) \cap \mathrm{Fr}(V) \neq \varnothing$
Comme $\gamma = c_1 \cup c_2$, on suppose dans un premier temps $\mathrm{Fr}(U) \cap c_1 \neq \varnothing$
Donc $U \cap V_1 \neq \varnothing$
Comme V_1 est connexe et inclus dans $V \backslash c$, tout point de U a accès aux points de V_1 par des chemins dans $V \backslash c$

Donc $U \subset V_1$
L'inclusion réciproque est vérifiée par maximalité des composantes connexes, donc $U = V_1$
Sinon $\mathrm{Fr}(U) \cap c_2 \neq \varnothing$ et l'on raisonne de même manière

$V \backslash c$ a bien deux composantes connexes par arcs, qui sont elles mêmes les composantes internes de courbes de Jordan $\square$

Théorème 1

Soit γ un lacet à retours finis et $a \in [0,1]$
Soit V une composante connexe de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,a])$
$\overline{V}$ est connexe par arcs

Démonstration. Montrons que pour tout $x \in \mathrm{Fr}(V)$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, r[$, $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap V$ a un nombre fini de composantes connexes

Soit $x \in \mathrm{Fr}(V)$
Donc par le Lemme 2, on écrit $x = \gamma(t)$ avec $t \in [0, a]$
Supposons la propriété fausse par l'absurde, donc pour tout $r > 0$, il existe $\varepsilon \in]0, r[$ tel que $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap V$ ait une infinité de composantes connexe par arcs
Cela implique que $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \backslash \mathrm{Fr}(V)$ ait une infinité de composantes connexes par arcs
Supposons $t < a$
Comme γ est à retours finis, I_γ est fini et pour tout $y \in I_\gamma$, $S(y, a)$ est fini
Donc il existe $b \in]t, a]$ tel que $\gamma_{|[t,b]}$ soit injective

Puis, il existe $r_0 > 0$ tel que pour $\varepsilon \in]0, r[$ $\gamma^{-1}(\mathcal{B}(x, \varepsilon)) \cap [t, b]$ soit connexe par arcs : en effet si ce n'était pas le cas alors pour tout $r_0 > 0$ il existe $\varepsilon \in]0, r_0[$ tel que l'ensemble ne soit pas connexe par arcs
On se donne alors $(t_n) \in [t, b]^{\mathbb{N}}$ telle que $\gamma(t_n) \in \mathcal{B}(x, \frac{1}{n+1})$ et tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, t_n ne soit pas dans la composante connexe de t
Quitte à en extraire une suite convergente, on suppose que (t_n) converge vers t'
Par continuité, on a $\gamma(t') = x$
De plus $t' > t$: en effet comme b n'est pas dans la composante de t, et que les composantes connexes par arcs de $\gamma^{-1}(\mathcal{B}(x, r_0)) \cap [t, b]$ sont des ouverts de $[t, b]$ en adaptant le Lemme 1, on a $t < b$
Puis comme $\gamma^{-1}(\mathcal{B}(x, \frac{1}{n+1})) \cap [t, b] \subset \gamma^{-1}(\mathcal{B}(x, \frac{1}{n+2})) \cap [t, b]$, l'union des composantes connexes ne contenant pas t à l'étape $n+1$ est incluse dans celle de l'étape n
Donc $t < b \leq t_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $t < t'$
Or $t' \in [t, b]$ et $\gamma_{|[t,b]}$ est injective, absurde
Donc un tel r_0 existe

On se donne alors ce $r_0 > 0$ et on écrit pour $\varepsilon \in]0, r_0[$, $\overline{\gamma^{-1}(\mathcal{B}(x, \varepsilon)) \cap [t, b]} = [t, t(\varepsilon)]$
On a alors que $\gamma_{|[t,t(\varepsilon)]}$ est injective et ne rencontre $\mathcal{S}(x, \varepsilon)$ qu'en au plus un point, $t(\varepsilon)$
Donc par le Lemme de la Ficelle, $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \backslash \gamma([t, t(\varepsilon)]) = \mathcal{B}(x, \varepsilon) \backslash \gamma([t, b])$ est connexe par arcs

Or il existe des $\varepsilon \in]0, r[$ aussi petits que souhaités tels que $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \backslash \operatorname{Fr}(V)$ ne soit pas connexe par arcs
Comme $\operatorname{Fr}(V) \subset \gamma([0, a])$, cela signifie qu'il existe pour ces $\varepsilon > 0$, $t'(\varepsilon) \in [0, a] \backslash [t, b]$ tels que $\gamma(t'(\varepsilon)) \in \mathcal{B}(x, \varepsilon)$
On déduit de manière similaire à ce qui précède, l'existence d'un $t_0 \in \overline{[0, a] \backslash [t, b]}$ tel que $x = \gamma(t_0)$

On itère le processus suivant : fixons $\varepsilon \in]0, r_0[$
Notons $I_0 = [t, b]$
Comme t' est une limite telle d'élements dont l'image appartient à $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ à valeur dans $[0, a] \backslash [t, b]$, il existe une deuxième portion de courbe de γ dans $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ distincte de $\gamma_{|[t,b]}$
On se donne alors $I_1 \subset \overline{[0, a] \backslash I_0}$ un intervalle fermé ayant à une des ses extrémités t' : si $t' = t$, t' est à droite, sinon peu importe
Par les mêmes arguments qu'avançés précedemment, on peut choisir I_1 tel que $\gamma_{|I_1}$ soit injective et dont l'image réciproque de boules centrées en x est connexe, en dessous d'un certain rayon $r_0 \geq r_1 > 0$
On impose une contrainte supplémentaire sur r_1, $\gamma(I_0)$ et $\gamma(I_1)$ doivent rencontrer $\mathcal{S}(x, r_1)$
Comme pour $\varepsilon \in]0, r_1[$, $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap I_\gamma \backslash \{x\} = \varnothing$, la concaténation des deux courbes forme un chemin injectif, qui va par la condition sur r_1 d'un point de $\mathcal{S}(x, \varepsilon)$ à un autre
Donc par le Lemme 5 $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \backslash (\gamma(I_0) \cup \gamma(I_1))$ a deux composantes connexes
Notons les U et U'
On se refixe $\varepsilon \in]0, r_1[$
Comme $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \backslash \operatorname{Fr}(V)$ a une infinité de composantes connexes par arcs, et que $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \backslash (\gamma(I_0) \cup \gamma(I_1))$ n'en a qu'un nombre fini, et que $\operatorname{Fr}(V) \subset \gamma([0, a])$, U ou U' contient une infinité de composantes connexes par arcs de $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \backslash \operatorname{Fr}(V)$
Donc par les mêmes arguments de limite que ceux utilisés pour t_0, il existe $t_1 \in [0, a]$ limite d'une suite d'élements telle que leur image par γ appartienne à U (ou U') pour des ε tendant vers 0
Comme $(\gamma(I_0) \cup \gamma(I_1)) \cap (U \cup U') = \varnothing$, il vient que $t_1 \in \overline{[0, a] \backslash (I_0 \cup I_1)}$

Comme U et U' sont des composantes internes de courbes de Jordan, on peut réitérer le découpage utilisant le Lemme 5, et ainsi montrer qu'à l'étape n, on a n composantes connexes et donc un nombre fini
On construit ainsi une suite (I_n) d'intervalles fermés de $[0, a]$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subset \overline{[0, a] \backslash \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} I_k \right)}$$

et vérifiant que l'une de leurs extremités notée t'_n vérifie $\gamma(t'_n) = x$
La première condition implique que (t'_n) prend une infinité de valeurs distinctes car un t'_n ne peut être commun qu'à au plus deux intervalles, donc le nombre de sorties de x est infini, c'est absurde car γ est à retours finis

Donc il existe $r > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, r[$, $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap V$ ait un nombre fini de

composantes connexes
Par le Lemme 3, $\overline{V}$ est alors connexe

$\square$

Définition 7

Soit $r > 0$ et $F \subset \mathbb{R}^2$
On note $T_r(F)$ le "tube en F de rayon r", défini par

$$T_r(F) = \bigcup_{x \in F} \mathcal{B}(x, r)$$

Propriété 2

Soit A un ouvert possédant un contour de Jordan
Soit $F \subset \mathrm{Fr}(A)$ connexe par arcs
On a alors pour $r > 0$, $T_r(F) \cap A$ est connexe par arcs

Démo :

Comme A a un contour de Jordan, on se ramène par l'homéomorphisme de Jordan-Schönflies à l'étude sur la boule
On suppose alors $A = \mathcal{B}(0, 1)$

Soit $r > 0$, $x, y \in T_r(F)$
Notons $f, g \in F$, tels que $x \in \mathcal{B}(f, r)$, $y \in \mathcal{B}(g, r)$
Soit γ un chemin de f à g dans F
Quitte à identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on écrit $\gamma = e^{i\Gamma(t)}$
On pose

$$c: \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & T_r(F) \cap \mathcal{B}(0,1) \\ t & \longmapsto & e^{i(\Gamma(t) - \Gamma(0))} x \end{array}$$

puis, comme $c(1) \in \mathcal{B}(g, r)$ et que cette boule et $\mathcal{B}(0, 1)$ sont convexes, alors le chemin en ligne droite de $c(1)$ à y reste bien dans $T_r(F) \cap \mathcal{B}(0, 1)$
La concaténation de ces deux chemins convient

Lemme 6

Soit γ un lacet à retours finis
Soit $V \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert tel que $\mathrm{Fr}(V) \subset \gamma$
Soit $n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$ tel que $\gamma(]t_n, t_{n+1}[) \subset \mathrm{Fr}(V)$

Alors on a

$$\forall U \in C_\gamma(t_{n+1}) \backslash C_\gamma(t_n), U \subset V$$

Démonstration :

Soit $U \in C_\gamma(t_{n+1}) \backslash C_\gamma(t_n)$
On a en appliquant le Lemme 2 que $\mathrm{Fr}(U) \cap \gamma(]t_n, t_{n+1}[) \neq \varnothing$
On peut donc trouver un voisinage autour de ce point d'inteserction, rencontrant à la fois V et U, car $\gamma(]t_n, t_{n+1}[) \subset \mathrm{Fr}(V)$
Donc $U \cap V \neq \varnothing$

Supposons $U \not\subseteq V$
Alors on a $U \cap (\mathbb{R}^2 \backslash V) \neq \varnothing$
Or U est connexe, donc on a $U \cap \mathrm{Fr}(V) \neq \varnothing$
Or $\mathrm{Fr}(V) \subset \gamma$
Donc c'est absurde, par définition $U \subset \mathbb{R}^2 \backslash \gamma$

Donc $U \subset V$

Lemme ?

Soit γ un lacet à retours finis
Soit $(t'_n)_{0 \leq n \leq p}$ la subdivision adaptée à la récurrence
Supposons qu'en $n \in [\![0, p-1]\!]$ on se trouve en le cas éxterieur 1
On se donne alors $t \in [t'_n, t'_{n+1}[$
L'ensemble $E_n \backslash \gamma(]t'_n, t])$ est connexe par arcs

Démonstration. Si $t = t'_n$, alors le résultat est immédiat
Sinon, supposons cet ensemble non connexe et soit U une composante connexe par arcs de $E_n \backslash \gamma(]t'_n, t])$
Comme E_n est connexe par arcs, il existe des chemins à valeur dans E_n de U à d'autres composantes connexes
Ces derniers rencontrent nécessairement $\mathrm{Fr}(U)$ par la propriété 1
Or $\mathrm{Fr}(U) \subset \mathrm{Fr}(E_n \backslash \gamma(]t'_n, t])) \subset \mathrm{Fr}(E_n) \cup \gamma(]t'_n, t])$
On a donc $\mathrm{Fr}(U) \cap \gamma(]t'_n, t]) \neq \varnothing$
On se donne donc pour tout $\varepsilon > 0$, $x(\varepsilon) \in \mathcal{B}(\gamma(a), \varepsilon)$ ou $a \in]t'_n, t]$ tel que $\gamma(a) \in \mathrm{Fr}(U)$

Comme $\gamma_{|[t'_n, t]}$ est continue et injective, il existe par le Lemme ?, $\varepsilon > 0$ tel que pour $0 < r < \varepsilon$ $\gamma^{-1}(\mathcal{B}(\gamma(t), r))$ soit connexe par arcs, et donc de la forme $]t_r, t]$
Cela implique que $\gamma_{|[t_r, t]}$ ne rencontre qu'une fois la $S(\gamma(t), r$
Par le Lemme de la ficelle, $\mathcal{B}(\gamma(t), r) \backslash \gamma$ est donc connexe par arcs

On admettra qu'il existe une courbe de Jordan construite en concaténant $\gamma_{|[t'_n, t]}$ à un chemin dans $\overline{E_n}$ dont la composante connexe interne contient x (car E_n est connexe et γ à retours finis)
Notons V sa composante interne

On pose $\delta = d(\gamma([t', t]), \mathbb{R}^2 \backslash E_n) \neq 0$ car $\gamma([t', t]) \subset E_n$, et E_n est ouvert et $\gamma([t', t])$ compact
Posons $0 < r < \min(\varepsilon, \delta)$
$T_r(\gamma([a, t])) \cap V$ est connexe par la propriété ? et ne rencontre ni $\gamma(]t'_n, t])$ ni $\mathbb{R}^2 \backslash E_n$ par construction
Comme $\mathcal{B}(\gamma(a), \varepsilon) \cap V$ est connexe par arcs et contient $\mathcal{B}(\gamma(a), r) \cap V$, il existe un chemin de x à $T_r(\gamma([a, t])) \cap V$ et conséquemment à $\mathcal{B}(\gamma(t), r) \cap V \subset \mathcal{B}(\gamma(t), r) \backslash \gamma$

Par connexité par arcs de $\mathcal{B}(\gamma(t), r) \backslash \gamma$, on en déduit que $E_n \backslash \gamma(]t'_n, t])$ est connexe par arcs, ce qui contredit l'hypothèse de départ
Donc $E_n \backslash \gamma(]t'_n, t])$ est connexe par arcs

□

5 Le théorème

Théorème des retours

Un lacet γ à retours finis délimite $r(\gamma)$ composantes connexes bornées

Démonstration. Soit γ un lacet à retours finis, que l'on suppose sous paramétrage standard
Montrons la propriété suivante par récurrence finie sur $n \in [\![0, r(\gamma)]\!]$

$$\mathcal{H}(n) : r_\gamma(t_n) = |C_\gamma(t_n)|$$

Le cas $n = 0$ est évident

Supposons $\mathcal{H}(n)$ pour un $n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$
On montre d'abord que $|C_\gamma(t_{n+1})| \geq r_\gamma(t_{n+1})$
Notons $x = \gamma(t_n)$ et $y = \gamma(t_{n+1})$
Par construction de (t_n), on a la disjonction de cas suivante

— Cas extérieurs : si
$$\gamma_n^n \not\subseteq \bigcup_{V \in C_\gamma(t_n)}$$
Notons que comme il s'agit d'un cas extérieur, t_{n+1} est le prochain élement de la subdivision minimale après t_n par la propriété ?
Donc par définition de la subdivision minimale et la propriété ?, r_γ est constant sur $[t_n, t_{n+1}[$, donc
  — Cas extérieur 1 : si $y \in \gamma_n^n \cup \{\gamma(t_n)\}$
  Soit $t \in]t_n, t_{n+1}[$ tel que $y = \gamma(t)$
  $\gamma_{|[t, t_{n+1}]}$ est une courbe de Jordan par ce qui précède
  Notons V sa composante connexe interne. Cette dernière vérifie
  $\mathrm{Fr}(V) = \gamma([t, t_{n+1}])$ par le théorème de Jordan

On a également $V \cap \gamma([0, t_{n+1}]) = \varnothing$: supposons l'inverse par l'absurde
On se donne alors $b \in [0, t[$ tel que $\gamma(b) \in V$ (si $b \in [t, t_{n+1}]$, $\gamma(b) \in \mathrm{Fr}(V)$)
On utilise alors le Lemme ? : si $n = 0$, alors $\gamma(0) \in V$, or $\gamma(0)$ devrait valoir $\gamma(t) \notin V$ par construction
Si $n \geq 1$, alors $a_- \in [0, b[\subset [0, t[$, donc $S(\gamma(a_-), t_{n+1}) \geq S(y, t_{n+1}) = 2$, ce qui implique que $r_\gamma(t_{n+1}) > r_\gamma(t_n) + 1$ ce qui est absurde car t_{n+1} est le prochain élement de la subdivision minimale après t_n car on se trouve en un cas extérieur
Au total, c'est bien absurde

Donc $V \in C_\gamma(t_{n+1}) \backslash C_\gamma(t_n)$ par le Lemme ?
Le Lemme ?, garantit la préservation des autres composantes connexes internes, car γ_n^n ne rencontre aucune composante interne
Donc $|C_\gamma(t_{n+1})| \geq |C_\gamma(t_n)| + 1$

— Cas extérieur 2 : si $y \in \gamma_0^{n-1} \cup \{\gamma(0)\}$
Par le Lemme ?, il existe un chemin c à retours finis de $\gamma(t_{n+1})$ à $\gamma(t_n)$ dans $\gamma_0^{n-1} \cup \{\gamma(0)\}$ tel que les composantes connexes par arcs internes délimitées par le lacet à retours finis α, construit en concaténant les chemins $\gamma_{|[t_n, t_{n+1}]}$ et c, ne rencontrent pas $\gamma([0, t_{n+1}])$
Ce même Lemme garantit l'existence d'une composante interne V telle que $\mathrm{Fr}(V) \cap \gamma_n^n \neq \varnothing$, donc comme $\mathrm{Fr}(V) \subset \alpha \subset \gamma([0, t_{n+1}])$, on a par le Lemme ? que $V \in C_\gamma(t_{n+1}) \backslash C_\gamma(t_n)$
Le Lemme ?, garantit encore une fois que $|C_\gamma(t_{n+1})| \geq |C_\gamma(t_n)| + 1$

— Cas intérieurs : si il existe $U \in C_\gamma(t_n)$ tel que $\gamma_n^n \subset U$ et $\gamma(t_{n+1}) \in \gamma_0^{n-1} \cup \{\gamma(0)\}$
— Cas intérieur 1 : l'existence de la composante connexe $V_1 \in C_\gamma(t_{n+1}) \backslash C_\gamma(t_n)$ interne délimitée par courbe de Jordan est quasiment identique au cas extérieur 1
On note toutefois que $U \notin C_\gamma(t_{n+1})$, car $U \cap \gamma([0, t_{n+1}]) \neq \varnothing$, et qu'il existe $V_2 \in C_\gamma(t_{n+1}) \backslash C_\gamma(t_n)$ une autre composante connexe par arcs : en effet pour $z \in \mathrm{Fr}(V_1)$, on a $z \in U$ et également que z est dans la frontière de la composante non bornée délimitée par la courbe de Jordan
Donc il existe un point dans U (car c'est un ouvert) ne pouvant pas accéder à V_1 dans $U \backslash \gamma_n^n$, ce qui montre l'existence de V_2
Donc par le Lemme ?, comme on a préservation des autres composantes, au total on a $|C_\gamma(t_{n+1})| \geq |C_\gamma(t_n)| + 1$

— Cas intérieur 2 :

$\square$

Ouais alors, il faut : rassembler les cas int et ext en regardant plutôt $C_\gamma(t)$ défini comme l'ensemble des composantes connexes
La preuve sera alors 100 pourcent cas int, et on utilise en partie le lemme de la ficelle 2