# TIPE - Connexité et lacets à intersection dans le plan

José Lorgeré

3 janvier 2025

Le théorème de Jordan est un théorème phare en topologie, connu notamment pour son énoncé intuitif, contrastant avec les outils nécessaires pour aboutir à une démonstration de ce dernier. Dans ce TIPE, on définit formellement la notion d'autointersection pour des chemins, et on aboutit à un théorème généralisant celui de Jordan, permettant de quantifier le nombre de composantes connexe par arcss du complémentaire dans le plan de certains lacets

## 1 Définitions usuelles et notations

Dans tout le document, on notera $\sqcup$ les unions disjointes

**Définition.** *Un chemin de* $x$ *à* $y$ *est une application* $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *continue telle que* $\gamma(0) = x$ *et* $\gamma(1) = y$

Si $\gamma$ est un chemin, on dénotera également son image par $\gamma$

**Définition.** *Un lacet est un chemin* $\gamma$ *tel que* $\gamma(0) = \gamma(1)$

**Définition.** *Une courbe de Jordan est un lacet injectif sur* $[0,1[$

Le théorème de Jordan s'énonce alors comme

**Théorème.** *Soit* $\gamma$ *une courbe de Jordan. Alors* $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ *a deux composantes connexes par arcs ouvertes, l'une bornée, l'autre non, ayant toutes deux pour frontière* $\gamma$

Si $\gamma$ est une courbe de Jordan, on notera $\mathrm{Int}(\gamma)$ et $\mathrm{Ext}(\gamma)$ ses composantes bornées et non bornées délimitées. Le théorème suivant vient compléter l'information donnée par le théorème de Jordan

**Théorème.** *Soit* $\gamma$ *une courbe de Jordan. Il existe un homéomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *dans lui même, tel que l'image de* $\mathrm{Int}(\gamma)$ *par ce dernier soit* $\mathcal{B}(0,1)$ *et celle de* $\gamma$ *soit* $\mathcal{S}(0,1)$

Ces résultats portant uniquement sur des courbes de Jordan, on se demande alors : que se passerait-il si on affaiblissait l'hypothèse d'injectivité ?

## 2 Problème

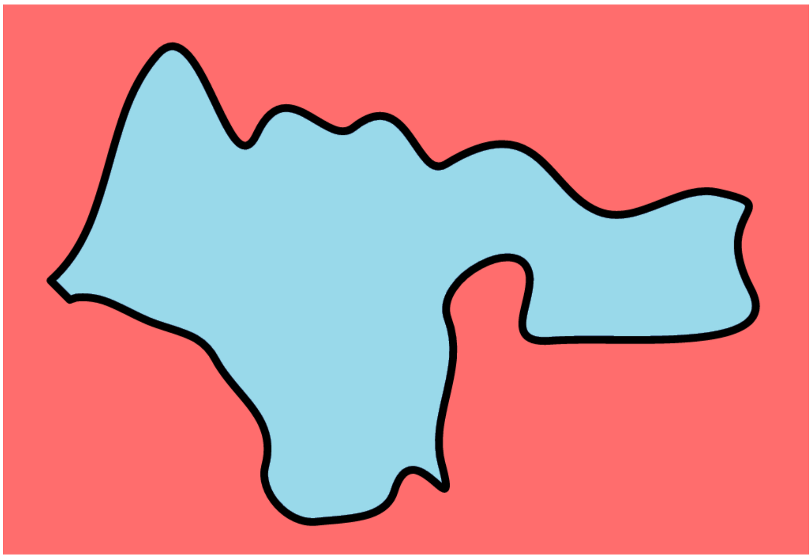
On va ici développer des outils pour quantifier à quel point un lacet "s'autointersecte", et définir un ensemble de lacets particuliers

**Définition 1.** *Soit* $\gamma$ *un chemin. On note*

$$I_\gamma = \{x \in \gamma \mid \exists t_1 \neq t_2 \in [0,1], x = \gamma(t_1) = \gamma(t_2)\}$$

*l'ensemble des intersections de* $\gamma$

FIGURE 1 – Illustration du théorème de Jordan
La zone en rouge est la composante non bornée, celle en bleu la bornée



**Définition 2.** *Soit $x \in I_\gamma$. Si $\gamma^{-1}(\{x\})$ est fini, on note $S(x)$ le "nombre de sorties" de $x$ l'entier suivant*

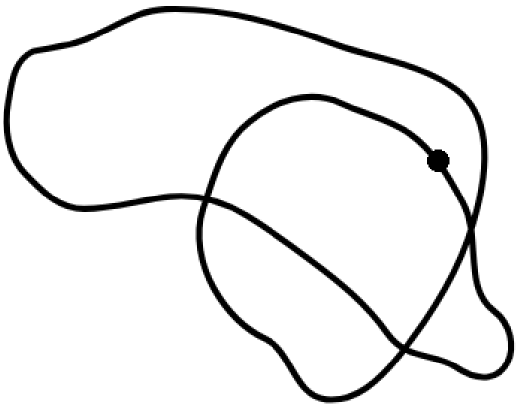
$$S(x) = |\gamma^{-1}(\{x\})|$$

**Définition 3.** *Soit $\gamma$ un chemin. Si $I_\gamma$ est fini et pour tout $x \in I_\gamma$, $S(x)$ est défini, on dira que $\gamma$ est à retours finis et on note le nombre de retours*

$$r(\gamma) = \sum_{x \in I_\gamma} (S(x) - 1)$$

Notons que selon ces définitions, $\gamma(0)$, le point ou le lacet se referme, compte comme une intersection, donc $\gamma(0) \in I_\gamma$
Le nombre de lacets du lacet Figure 2 est alors de 4

FIGURE 2 – Un exemple de lacet à retours finis
Le point noir représente $\gamma(0)$



Notons que le lacet Figure 2 délimite 4 composantes connexes par arc bornées
On cherchera alors à montrer le théorème suivant

**Théorème** (des retours)**.** *Soit $\gamma$ un lacet à retours finis. $\gamma$ délimite $r(\gamma)$ composantes connexes par arcs bornées*

L'idée générale de la démonstration sera basée sur le constat suivant : lorsque l'on trace le lacet, à la main par exemple, chaque fois que le nombre de retours augmente, une nouvelle composante connexe par arcs est créée. On formalisera par la suite ce constat

# 3 Connexité par arcs dans le plan

Avant de démontrer le théorème, on se dote d'abord de quelques propriétés utiles des connexes par arc de $\mathbb{R}^2$

**Proposition 1.** *Soit $A$ un connexe et $B \subset \mathbb{R}^2$ tel que $A \cap B \neq \varnothing$ et $A \backslash B \neq \varnothing$. Alors $A \cap \operatorname{Fr}(B) \neq \varnothing$*

## 3.1 Composantes connexes par arcs d'un ouvert

**Proposition 2.** *Soit $V$ un ouvert. Ses composantes connexes par arcs sont ouvertes*

*Démonstration.* Si $V$ est connexe par arcs, on a déjà le résultat

Si $V$ ne l'est pas, notons $\mathcal{C}$ l'ensemble de ses composantes et prenons $U \in \mathcal{C}$
Supposons par l'absurde que $U$ n'est pas ouvert, soit $U \cap \operatorname{Fr}(U) \neq \varnothing$
Soit $x \in U \cap \operatorname{Fr}(U)$
Comme $U \subset V$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset V$, et on a également comme $\mathcal{B}(x, r) \backslash U \neq \varnothing$
Comme

$$V = \bigcup_{U' \in \mathcal{C}} U'$$

il existe donc $U' \in \mathcal{C} \backslash \{U\}$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \cap U' \neq \varnothing$
$\mathcal{B}(x, r)$ étant connexe par arcs inclus dans $V$ et rencontrant $U$ et $U'$, il existe un chemin dans $V$ de $U$ à $U'$, ce qui est absurde car ces deux composantes connexes par arcs sont distinctes

Donc $U$ est ouvert $\square$

Après cette proposition, on considèrera que toutes les composantes connexes par arc manipulées seront des ouverts

**Proposition 3.** *Soit $U$ un ouvert et $(V_i)_{i \in I}$ ses composantes connexes par arc. On a*

$$\bigcup_{i \in I} \operatorname{Fr}(V_i) \subset \operatorname{Fr}(U)$$

*On a l'égalité si $I$ est fini*

*Démonstration.* Soit $i \neq j \in I$
Notons que $\overline{V_i} \subset \mathbb{R}^2 \backslash V_j$
En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait un point dans $\overline{V_i}$ et $V_j$
$V_j$ est un voisinage de ce point, étant un ouvert, et ainsi rencontre $V_i$
Or ce sont des composantes distinctes, ce qui justifie l'inclusion

Puis, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}(U) &= \overline{U}\backslash U \\
&= \left(\overline{\bigsqcup_{i\in I} V_i}\right)\backslash U \\
&\supset \left(\bigcup_{i\in I} \overline{V_i}\right) \backslash \left(\bigsqcup_{i\in I} V_i\right) \\
&= \bigcup_{i\in I} \left(\overline{V_i} \bigcap_{j\in I} \mathbb{R}^2\backslash V_j\right) \\
&= \bigcup_{i\in I} \overline{V_i} \cap \mathbb{R}^2\backslash V_i \\
&= \bigcup_{i\in I} \mathrm{Fr}(V_i)
\end{aligned}$$

Si $I$ est fini l'inclusion se transforme en égalité □

**Proposition 4.** *Soit $U$ un ouvert et $V$ une composante connexe par arcs de $U$*
*Soit $A$ un connexe par arcs tel que $A \subset U$ et $A \cap V \neq \varnothing$*
*Alors $A \subset V$*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que ce soit faux
Ainsi $A$ rencontre $V$ et son complémentaire
Par connexité et la proposition 1, $A$ rencontre $\mathrm{Fr}(V)$
Par la Proposition 3, $\mathrm{Fr}(V) \subset \mathrm{Fr}(U) \subset \mathbb{R}^2\backslash U$ car $U$ est ouvert
Donc $A$ rencontre le complémentaire de $U$, absurde par inclusion

Donc $A \subset V$ □

**Proposition 5.** *Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ tel que*

$$A = \bigsqcup_{i\in I} V_i$$

*où les $(V_i)_{i\in I}$ sont des ouverts connexes par arcs*
*Les composantes connexes par arcs de $A$ sont les $(V_i)_{i\in I}$*

*Démonstration.* Soit $i \in I$
Comme $A$ s'écrit comme union de ses composantes connexes par arcs, il existe $U$ une composante connexe par arcs de $A$ tel que $U \cap V_i \neq \varnothing$
Par la Proposition 4, $V_i \subset U$

Supposons que $U \neq V_i$, donc $U$ rencontre le complémentaire de $V_i$ dans $A$
Donc $U$ rencontre $\mathrm{Fr}(V_i)$
Donc il existe $x \in A \cap \mathrm{Fr}(V_i)$
Comme $V_i$ est ouvert et par partition, $x \notin V_i$ et donc il existe $j \in I$, $j \neq i$ tel que $x \in V_j$
$V_j$ étant ouvert, il s'agit d'un voisinage de $x$
Or tout voisinage de $x$ rencontre $V_i$, donc $V_i \cap V_j \neq \varnothing$, absurde

Donc $U = V_i$ □

### 3.2 Lemme de la ficelle

**Lemme**

Soit $V$ un ouvert borné et $c$ un chemin à valeur dans $\overline{A}$
Pour toute composante connexe par arcs $U$ de $V \backslash c$, on a

$$\mathrm{Fr}(U) \cap \mathrm{Fr}(V) \neq \varnothing \text{ et } \mathrm{Fr}(U) \not\subseteq c$$

*Démonstration.* Soit $U$ une telle composante
Supposons par l'absurde que $\mathrm{Fr}(U) \cap \mathrm{Fr}(V) = \varnothing$
On montre dans un premier temps que $\mathrm{Fr}(U) \subset c$

Comme $\overline{U} \subset \overline{V}$ et par hypothèse, on a $\mathrm{Fr}(U) \subset V$
Puis, on a par la Proposition 3

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(U) &\subset \mathrm{Fr}(V \backslash c) \\ &= \overline{V \cap \mathbb{R}^2 \backslash c} \cap (\mathbb{R}^2 \backslash V \cup c) \\ &\subset \overline{V} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \backslash c} \cap (\mathbb{R}^2 \backslash V \cup c) \\ &\subset \overline{V} \cap (\mathbb{R}^2 \backslash V \cup c) \\ &= \mathrm{Fr}(V) \cup (c \cap \overline{V})\end{aligned}$$

Or $\mathrm{Fr}(U) \subset V$, donc $\mathrm{Fr}(U) \subset c \cap \overline{V} \cap V \subset c$

Soit $x \in U$. On pose :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathrm{Fr}(U) & \longrightarrow & \mathcal{S}(0,1) \\ u & \longmapsto & \frac{u-x}{\|u-x\|} \end{array}$$

$f$ est continue et bien définie car $x \notin \mathrm{Fr}(U)$
Montrons qu'elle est surjective
Soit $v \in \mathcal{S}(0,1)$
La droite $x + \mathrm{Vect}(v)$ rencontre $U$ et son complémentaire, car $U$ est borné et la droite non
Comme la droite est connexe par arcs, par la Proposition 1, elle recontre $\mathrm{Fr}(U)$ en un point $u$
On a alors que $f(u) = v$
$f$ étant surjective, on se donne $J \subset \mathrm{Fr}(U)$ tel que $f_{|J}$ soit une bijection

Comme $\mathrm{Fr}(U) \subset c$, il existe $I = c^{-1}(\mathrm{Fr}(U))$ tel que $c_{|I}$ soit une bijection continue vers $\mathrm{Fr}(U)$
Ainsi, $g = f_{|J} \circ c_{|I}$ est une bijection continue de $I$ vers $\mathcal{S}(0,1)$
Soit $\gamma$ une courbe de Jordan surjective dans $\mathcal{S}(0,1)$
Il existe alors $\Gamma : [0,1] \to I$ telle que $g \circ \Gamma = \gamma$
Montrons que $\Gamma$ est continue

Supposons qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\Gamma$ y soit discontinue
Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0, \exists t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[, |\Gamma(t) - \Gamma(t_0)| > \varepsilon$$

et tel que $I \not\subseteq [\Gamma(t_0) - \varepsilon, \Gamma(t_0) + \varepsilon]$
Notons

$$m = \inf\{\|g(\Gamma(t_0)) - g(t)\| \mid t \in I \backslash [\Gamma(t_0) - \varepsilon, \Gamma(t_0) + \varepsilon]\}$$

Comme $g$ est injective, on a $m > 0$
On a

$$\forall \delta > 0, \exists t \in [0,1], \|g \circ \Gamma(t_0) - g \circ \Gamma(t)\| \geq m > 0$$

Or $g \circ \Gamma = \gamma$ et $\gamma$ est continue en $t_0$
Absurde, donc $\Gamma$ est bien continue

Notons que $\Gamma = g^{-1} \circ \gamma$ et est donc injective sur $[0, 1[$
Comme elle est continue, $\Gamma$ est injective
Or $\gamma(0) = \gamma(1)$, donc $\Gamma(0) = \Gamma(1)$, absurde

Donc $\mathrm{Fr}(U) \cap \mathrm{Fr}(V) \neq \varnothing$ □

**Lemme de la ficelle**

Soit $c : [0, 1] \to \mathcal{B}_f(0, 1)$ un chemin injectif tel que $c(0) \in \mathcal{S}(0, 1)$, et

$$c(]0, 1]) \subset \mathcal{B}(0, 1)$$

$\mathcal{B}(0, 1)\backslash c$ est connexe par arcs

*Démonstration.* Soient $C_1, C_2$ deux composantes connexes par arcs de $\mathcal{B}(0, 1)\backslash c$
Par le Lemme ?, on se donne $u \in \mathrm{Fr}(C_1) \cap \mathcal{S}(0, 1)$ et $v \in \mathrm{Fr}(C_2) \cap \mathcal{S}(0, 1)$
Montrons que l'on peut choisir $u$ et $v$ tels que $u, v \notin c$

On a, comme $\overline{C_1} \subset \mathcal{B}_f(0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(C_1) &= (\mathrm{Fr}(C_1) \cap \mathcal{B}(0, 1)) \sqcup (\mathrm{Fr}(C_1) \cap \mathcal{S}(0, 1)) \\ &\subset c \cup (\mathrm{Fr}(C_1) \cap \mathcal{S}(0, 1)) \end{aligned}$$

Si $\mathrm{Fr}(C_1) \cap \mathcal{S}(0, 1) = \{c(0)\}$, on a donc $\mathrm{Fr}(C_1) \subset c$
D'après le Lemme ?, c'est absurde

On se donne $A$ un arc de cercle de $u$ à $v$ ne contenant pas $\{c(0)\}$
On pose $r = d(A, c)$ et on note

$$T = \left( \bigcup_{x \in A} \mathcal{B}(x, r) \right) \cap \mathcal{B}(0, 1)$$

Notons que $T$ est connexe par arcs, et est voisinage de $u$ et $v$ dans $\mathcal{B}(0, 1)$
Donc $T$ rencontre $C_1$ et $C_2$ et est connexe par arcs
Donc $C_1 = C_2$

$\mathcal{B}(0, 1)\backslash c$ est donc connexe par arcs □

### 3.3 Construction de chemins particuliers

**Définition 4**

Soit $V \subset \mathbb{R}^2$ ouvert
$V$ est d'adhérence intraconnexe si pour tout $x, y \in \overline{V}$ il existe un chemin $c$ de $x$ à $y$ tel que $c(]0, 1[) \subset V$

**Proposition 6**

Soit $V \subset \mathbb{R}^2$ ouvert connexe par arcs, tel que pour tout $x \in \mathrm{Fr}(V)$ et $\varepsilon > 0$, $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap V$ a un nombre fini de composantes connexes par arcs
$V$ est alors d'adhérence intraconnexe

*Démonstration.* Soient $x, y \in V$
Il est clair qu'il existe un chemin $c$ de $x$ à $y$ vérifiant la propriété donnée par la définition 4

On se contentera d'examiner le cas où $x \in \mathrm{Fr}(V)$ et $y \in V$

Posons $x_0 = y$
On suppose pour $n \in \mathbb{N}$, $x_0, ..., x_n \in V$ et $c_0, ..., c_{n-1}$ construits tels que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $c_k$ est un chemin de $x_{k-1}$ à $x_k$ dans $\mathcal{B}(x, \frac{1}{k}) \cap V$ (si $k-1=0$ on remplace $\frac{1}{k-1}$ par $+\infty$) et $x_n \in \mathcal{B}(x, \frac{1}{n})$
On suppose également, avec la même convention, que $U_n$ la composante connexe par arcs de $x_n$ dans $\mathcal{B}(x, \frac{1}{n}) \cap V$ vérifie $x \in \mathrm{Fr}(U_n)$

Notons que $\mathcal{B}(x, \frac{1}{n+1}) \cap U_n$ a un nombre fini de composantes connexes par arcs : en effet, toute composante connexe par arcs de cet ensemble est une composante connexe par arcs de $\mathcal{B}(x, \frac{1}{n+1}) \cap V$. En effet on peut écrire, en notant $\mathcal{C}$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de $\mathcal{B}(x, \frac{1}{n+1}) \cap U_n$ et $U_n^c$ le complémentaire dans $\mathcal{B}(x, \frac{1}{n}) \cap V$ de $U_n$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap V &= \mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap \left(\mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap V\right) \\
&= \left(\mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap U_n\right) \sqcup \left(\mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap U_n^c\right) \\
&= \bigsqcup_{U \in \mathcal{C}} U \sqcup \left(\mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap U_n^c\right)
\end{aligned}$$

et utiliser la Proposition 5 pour conclure. Ainsi l'ensemble $\mathcal{C}$ est nécessairement fini car $\mathcal{B}(x, \frac{1}{n+1}) \cap V$ a un nombre fini de composantes connexes par arcs par hypothèse

Comme $x \in \mathrm{Fr}(U_n)$ et par le cas d'égalité de la Proposition 3, car le nombre de composantes considéré est fini, il existe $U_{n+1}$ une composante connexe par arcs de $\mathcal{B}(x, \frac{1}{n+1}) \cap U_n$ telle que $x \in \mathrm{Fr}(U_{n+1})$
On se donne alors $x_{n+1} \in U_{n+1}$ et comme $U_{n+1} \subset U_n$ et que cet ensemble est connexe par arcs, on se donne $c_{n+1}$ un chemin de $x_n$ à $x_{n+1}$ dans $U_n$

On a ainsi construit une suite points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $x$ et des chemins $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les reliant entre eux, respectivement dans $\mathcal{B}(x, \frac{1}{n})$
On pose alors

$$c : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow V \\ t & \longmapsto c_{\lfloor t \rfloor}(t - \lfloor t \rfloor) \end{array}$$

On pour tout $t \geq 0$, $c(t) \in \mathcal{B}(x, \frac{1}{\lfloor t \rfloor})$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} c(t) = x$

On pose alors

$$d : \begin{array}{rl} [0,1] & \longrightarrow \overline{V} \\ t & \longmapsto \begin{cases} c\left(\frac{t}{1-t}\right) & \text{si } t \in [0,1[ \\ x & \text{si } t = 1 \end{cases} \end{array}$$

Par composition et par le calcul de limite précédent, $d$ est continue
On a bien, comme $c \subset V$ que $d([0,1[) \subset V$
Ainsi $d$ vérifie la propriété donnée par la Définition 4 et est un chemin de $y$ à $x$
Au total, on a bien que $V$ est d'adhérence intraconnexe $\square$

Proposition 7

Soit $\gamma$ une courbe de Jordan, $x, y \in \gamma$
On écrit $x = \gamma(t_0)$ et $y = \gamma(t_1)$ et on suppose $t_0 < t_1$
Soit $V$ une des composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$
Pour tout $R > 0$, il existe $r \in ]0, R[$ tel que pour tout $u \in \mathcal{B}(x, r) \cap V$ et $v \in \mathcal{B}(y, r) \cap V$, il existe un chemin $c$ de $u$ à $v$ dans $V$ vérifiant

$$\forall t \in [0,1], d(c(t), \gamma([t_0, t_1])) < R$$

*Démonstration.* On étudie d'abord le cas où $V$ est soit égal à $\mathcal{B}(0,1)$, soit le complémentaire de $\mathcal{B}_f(0,1)$
Dans les deux cas un chemin en arc de cercle puis ligne droite pour ajuster la norme convient, pour tout points $u, v$ choisis
Notons que ce chemin existe existe pour tout $R > 0$ et est bien à une distance inférieure à $R$ de l'arc de cercle allant de $x$ à $y$

On se donne par le Théorème de Jordan-Schönflies $\varphi$ un homéomorphisme vérifiant les hypothèses du théorème relatives à $\gamma$, c'est à dire envoyant la composante bornée de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ sur $\mathcal{B}(0,1)$
On se donne $x, y$ définis comme dans l'énoncé de la proposition et $R > 0$
Enfin, l'ensemble $\bigcup_{t \in [t_0, t_1]} \mathcal{B}(\gamma(t), R)$ étant borné, on se donne $K$ un compact le contenant

$\varphi(K)$ étant compact et $\varphi^{-1}$ étant continue, on se donne par uniforme continuité $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x', y') \in K^2, \|\varphi(x') - \varphi(y')\| < \delta \Longrightarrow \|x' - y'\| < R$$

Puis, on se donne par compacité de $K$ et continuité de $\varphi$, $r > 0$ tel que

$$\forall (x', y') \in K^2, \|x' - y'\| < r \Longrightarrow \|\varphi(x') - \varphi(y')\| < \delta$$

Soient $u \in \mathcal{B}(x, r) \cap V$ et $v \in \mathcal{B}(y, r) \cap V$
Donc par ce qui précède, $\varphi(u) \in \mathcal{B}(\varphi(x), \delta) \cap \varphi(V)$ et de même pour $v$
Comme on s'est ramené au cas de la boule, on se donne un $c$ vérifiant les hypothèses par ce qui précède, soit

$$\forall t \in [0,1], d(c(t), \varphi \circ \gamma([t_0, t_1])) < \delta$$

car un des deux arcs de cercles reliant $\varphi(x)$ à $\varphi(y)$ correspond à l'image de $\gamma([t_0, t_1])$ par définition de $\varphi$
Comme pour $t \in [0,1]$, $d(c(t), \varphi \circ \gamma([t_0, t_1]))) = \inf_{t' \in [t_0, t_1]} \|c(t) - \varphi \circ \gamma(t')\|$, que $\varphi \circ \gamma$ est continue, et $[t_0, t_1]$ est compact, il existe $z(t) \in \varphi \circ \gamma([t_0, t_1])$ tel que $d(c(t), \varphi \circ \gamma([t_0, t_1])) = \|c(t) - z(t)\| < \delta$
Donc, en revenant à $V$, on obtient par ce qui précède,

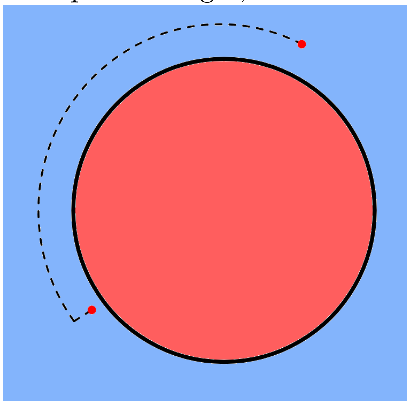
$$d(\varphi^{-1} \circ c(t), \gamma([t_0, t_1])) \leq \|\varphi^{-1}(c(t)) - \varphi^{-1}(z(t))\| < R$$

□

## 4 Etude des lacets à retours finis

On formalise enfin l'intution qu'on a en tracant le lacet
On se fixe dans cette partie $\gamma$ un lacet à retours finis

Figure 3 – Le chemin entre $u$ et $v$ dans $V$
$u$ et $v$ sont les points rouges, le chemin en pointillé



### 4.1 Définitions

**Définition 4**

On définit pour $t \in [0,1]$ le nombre de sorties à l'instant $t$

$$\forall x \in I_\gamma, S(x,t) = |\gamma^{-1}(\{x\}) \cap [0,t]|$$

et, en notant $I_\gamma(t) = I_\gamma \cap \gamma([0,t])$

$$r_\gamma(t) = \sum_{x \in I_\gamma(t)} S(x,t) - 1$$

Notons qu'il s'agit des définitions précedemment données, appliquées au chemin $\gamma_{|[0,t]}$ pour $t \in [0,1]$

**Définition 5**

Soit $t \in [0,1]$
On note $C_\gamma(t)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,t])$

On a donc par cette définition que $|C_\gamma(1)|$ correspond à l'ensemble des composantes connexes par arc du complémentaire de $\gamma$ dans le plan

### 4.2 Subdivision minimale

On montre ici une propriété essentielle à la formalisation de notre intuition concernant le tracé des lacets à retours finis

**Proposition 9**

$r_\gamma$ est une fonction en escalier. De plus, la subdivision minimale associée à $r_\gamma$, $(t_n)_{0 \leq n \leq r(\gamma)}$ vérifie

$$\forall n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!], r_\gamma(t_{n+1}) = 1 + r_\gamma(t_n)$$

et

$$\forall n \in [\![1, r(\gamma)]\!], \gamma(t_n) \in I_\gamma(t_n)$$

*Démonstration.* Notons que pour tout $x \in I_\gamma$, $t \longmapsto S(x,t)$ est croissante
Donc $r_\gamma$ est croissante
De plus elle ne prend que des valeurs entières et est bornée, elle est alors en escalier

Supposons qu'elle ne le soit pas, alors pour toute subdivision $(t_n)_{0\leq n\leq p}$ de $[0,1]$, il existe $n \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $r_\gamma$ ne soit pas constante sur $]t_n, t_{n+1}[$
Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $r_\gamma$ prend $k$ valeurs distinctes
C'est évident pour $k = 1$
Supposons la propriété vraie au rang $k \in \mathbb{N}$
Notons $v_0 < ... < v_{k-1} \in \mathbb{N}$ les $k$ premières valeurs prises par $r_\gamma$ (bien défini car $r_\gamma$ est à valeurs entières)
On pose alors $(t_n)_{0\leq n\leq k}$ telle que

$$\forall n \in [\![0, k-1]\!], t_n = \inf\{t \in [0,1] \mid r_\gamma(t) = v_n\}$$

et $t_k = 1$

Comme $r_\gamma$ est croissante on a $t_0 \leq t_1 < ... < t_k$ (on peut si $t_0 = t_1$ remplacer la subdivision en n'en gardant qu'un)
On a alors, par croissance que $r_\gamma$ est constante sur les $]t_n, t_{n+1}[$ pour $n \in [\![0, k-2]\!]$, en effet si elle y prenait d'autres valeurs, il s'agirait nécessairement par définition des $(t_n)$ d'une valeur strictement supérieure à $v_{k-1}$, mais cela contredirait la croissance
On a de plus $r_\gamma(t_0) \leq r_\gamma(t_1) < r_\gamma(t_2) < ... < r_\gamma(t_{k-1}) < r_\gamma(t_k)$ :
Les inégalités strictes de 1 à $k-1$ viennent de la définition des $(t_n)$ comme borne inférieure et de la croissance de $r_\gamma$
La dernière inégalité stricte vient du fait que $r_\gamma$ est nécessairement non constante sur $]t_{k-1}, t_k[$ par ce qui précède
Donc $r_\gamma$ prend $k$ valeurs distinctes

On a bien montré la propriété par récurrence
Mais alors, comme ces valeurs sont entières, $r_\gamma$ est non bornée, absurde

Considérons alors $(t_n)_{0\leq n\leq p}$ la subdivision minimale associée à $r_\gamma$
Montrons d'abord que

$$\forall n \in [\![0, p]\!], \forall t < t_n, r_\gamma(t) < r_\gamma(t_n) \tag{1}$$

Supposons que non
Donc il existe $n \in [\![0, p]\!]$ et $t < t_n$ tel que $r_\gamma(t_n) \leq r_\gamma(t)$
Comme $r_\gamma$ est croissante on a

$$\forall t' \in [t, t_n[, r_\gamma(t') = r_\gamma(t_n)$$

Puis on utilise la minimalité de $(t_n)$ :
- Si $n = p$, c'est absurde car $r_\gamma(t) < r(\gamma)$ pour $t \in [0, 1[$
- Sinon, alors par minimalité, $r_\gamma$ doit prendre une valeur strictement plus grande que $r_\gamma(t_n)$ sur $]t_n, t_{n+1}[$
Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $r_\gamma(t_n + \varepsilon) > r_\gamma(t_n)$, donc par définition de $r_\gamma$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in I_\gamma \cap \gamma(]t_n, t_n + \varepsilon[)$ tel que $S(x, t_n + \varepsilon) > 2$
On a donc trouvé une infinité d'intersections, absurde car $\gamma$ est à retours finis
On a bien la propriété annoncée
Cela implique en particulier que $r_\gamma$ est constante sur les $[t_n, t_{n+1}[$

Montrons ensuite qu'il existe $t \in [t_n, t_{n+1}[$ tel que

$$\sum_{x \in I_\gamma(t_{n+1}) \setminus \gamma([0,t])} S(x, t_{n+1}) - 1 = 0$$

Il suffit de remarquer que $I_\gamma(t_{n+1})$ étant fini, il existe $t \in [t_n, t_{n+1}[$ tel que $|I_\gamma(t_{n+1}) \setminus \gamma([0,t])| \leq 1$

Si l'ensemble est vide, c'est terminé
Sinon, $\gamma(t_{n+1}) \notin \gamma([0, t_{n+1}[)$, donc $S(\gamma(t_{n+1}, t_{n+1})) = 1$
Donc la somme vaut bien 0

Enfin, on considère un tel $t \in [t_n, t_{n+1}[$
On a donc d'après ce qui précède

$$r_\gamma(t_{n+1}) - r_\gamma(t) = \sum_{x \in I_\gamma(t)} S(x, t_{n+1}) - S(x, t) \geq 1$$

Il existe donc un $x \in I_\gamma(t)$ tel que $S(x, t_{n+1}) > S(x, t)$
Par minimalité de la subdivision, on a que $S(x, t') = S(x, t)$ pour $t \leq t' < t_{n+1}$ ( le cas contraire le nombre de retours aurait augmenté entre $t_n$ et $t_{n+1}$ )
Donc nécessairement $x = \gamma(t_{n+1})$, ce qui montre que ce $x$ est unique
De plus il vient que

$$|\gamma^{-1}\{x\} \cap [0, t_{n+1}]| = 1 + |\gamma^{-1}\{x\} \cap [0, t_{n+1}[|$$

Donc

$$\forall t' \in [t, t_{n+1}[, S(x, t_{n+1}) = 1 + S(x, t')$$

Donc comme ce $x$ est unique, on a

$$\forall t' \in [t, t_{n+1}[, r_\gamma(t_{n+1}) = 1 + r_\gamma(t)$$

Or $r_\gamma$ est constante sur $[t_n, t_{n+1}[$ par les résultats précédents on a $r_\gamma(t_{n+1}) = 1 + r_\gamma(t_n)$
Puisque $r_\gamma$ prends des valeurs de $r_\gamma(0) = 0$ à $r_\gamma(t_p) = r(\gamma)$, on en déduit que $p = r(\gamma)$

□

**Corollaire 1**

Pour tout $n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$, $\gamma(]t_n, t_{n+1}[)$ ne rencontre pas $\gamma([0, t_n])$

*Démonstration.* Soit $t \in ]t_n, t_{n+1}[$
Supposons par l'absurde que $\gamma(t) \in \gamma([0, t_n])$
Alors $S(\gamma(t), t_{n+1}) - S(\gamma(t), t_n) \geq 1$, et par la Proposition 9, comme $\gamma(t_{n+1}) \in I_\gamma(t_{n+1})$, $S(\gamma(t_{n+1}), t_{n+1}) \geq 2$, donc $r_\gamma(t_{n+1}) \geq 2 + r_\gamma(t_n)$, absurde

□

**Corollaire 2**

Pour tout $n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$, $\gamma$ est injective sur $]t_n, t_{n+1}[$

*Démonstration.* Soit $x \in \gamma$
Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \neq t_2 \in ]t_n, t_{n+1}[$ tels que $x = \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$
Donc $S(x, t_{n+1}) \geq 2$ et par la Proposition 9, $S(\gamma(t_{n+1}), t_{n+1}) \geq 2$
Au total on a $r_\gamma(t_{n+1}) \geq 2 + r_\gamma(t_n)$, absurde □

### 4.3 Résultats sur $C_\gamma$

**Proposition 10**

Soit $t \in [0, 1]$, et $V$ un ouvert de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0, t])$, connexe par arcs
On a

$$V \in C_\gamma(t) \iff \mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0, t])$$

*Démonstration.* Sens direct :
On a, comme $\gamma([0,t])$ est fermé par continuité :

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(\mathbb{R}^2\backslash\gamma([0,t])) &= \overline{\mathbb{R}^2\backslash\gamma([0,t])} \cap \gamma([0,t]) \\ &\subset \gamma([0,t])\end{aligned}$$

Puis par la Proposition 3, on pour $V \in C_\gamma(t)$, comme $\gamma([0,t])$ est fermé,
$\mathrm{Fr}(V) \subset \mathrm{Fr}(\mathbb{R}^2\backslash\gamma([0,t])) \subset \gamma([0,t])$

Sens réciproque :
On raisonne par contraposée

Si $V \notin C_\gamma(t)$
Comme $V \subset \mathbb{R}^2\backslash\gamma([0,t])$, il existe $U \in C_\gamma(t)$ tel que $V \cap U \neq \varnothing$
Donc $V \subsetneq U$ par la Proposition 4, et donc $U$ rencontre $V$ et son complémentaire
Donc par connexité par arcs et la Proposition 1 de $U$, $U \cap \mathrm{Fr}(V) \neq \varnothing$, et donc $\mathrm{Fr}(V) \not\subset \gamma([0,t])$ car $U \cap \gamma([0,t]) = \varnothing$

□

**Proposition 11**

Pour tout $t \in [0,1]$, il n'existe qu'un seul $V \in C_\gamma(t)$ non borné

*Démonstration.* Comme $[0,t]$ est compact et $\gamma$ continue, $\gamma([0,t])$ est borné
Soit $r > 0$ tel que $\gamma([0,t]) \subset \mathcal{B}(0,r)$
$\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{B}(0,r)$ est ainsi une partie connexe non bornée de $\mathbb{R}^2\backslash\gamma$
Donc il existe $V \in C_\gamma(t)$ contenant cet ensemble, et donc non borné

Soit $U \in C_\gamma(t)$ non bornée
$U$ rencontre alors $\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{B}(0,r)$, donc $U \cap V \neq \varnothing$, donc $U = V$
On a bien l'unicité □

On se fixe pour les trois prochains lemmes $a, b \in [0,1]$ tels que $a < b$, et on suppose qu'il existe $V \in C_\gamma(a)$ tel que $\gamma(]a,b[) \subset V$

**Lemme de préservation**

Les composantes connexes par arcs du complémentaire dans le plan de $\gamma([0,a])$ distinctes de $V$, sont également des composantes connexes par arcs du compléementaire de $\gamma([0,b])$, et réciproquement.
En d'autres termes

$$C_\gamma(a) \cap C_\gamma(b) = C_\gamma(a)\backslash\{V\}$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que $C_\gamma(a)\backslash\{V\} \subset C_\gamma(b) \cap C_\gamma(a)$

Notons d'abord que $\gamma(b) \in \overline{V}$ : en effet par continuité, on a $\gamma(b) = \lim_{t\to b^-} \gamma(t)$
Soit $U \in C_\gamma(a)\backslash\{V\}$
On a $\overline{V} \cap U = \varnothing$ : si ce n'était pas le cas, il existerait un point de $\overline{V}$ dans $U$. Comme $U$ est ouvert, il est voisinage de ce point, or tout voisinage de ce point rencontre $U$
Or $V \cap U = \varnothing$ et donc $\overline{V} \cap U = \varnothing$

Enfin, $U$ est connexe par arcs, $\mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0,b])$, et

$$\gamma([0,b]) \cap U = (\gamma([0,a]) \cap U) \cup (\gamma(]a,b]) \cap U) = \varnothing$$

car $\gamma(]a,b]) \subset \overline{V}$
Par la Proposition 10, $U \in C_\gamma(b)$, donc $C_\gamma(a)\backslash\{V\} \subset C_\gamma(b) \cap C_\gamma(a)$

Réciproquement, si $U \in C_\gamma(a) \cap C_\gamma(b)$, alors $U \neq V$ :
En effet, $V \notin C_\gamma(b)$ car $V \cap \gamma(]a,b[) \neq \varnothing$
On a bien $C_\gamma(a) \cap C_\gamma(b) = C_\gamma(a)\backslash\{V\}$ □

**Lemme 1**

Soit $\gamma$ un lacet à retours finis, et $a < b \in [0,1]$
On suppose qu'il existe $V \in C_\gamma(a)$ tel que $\gamma(]a,b[) \subset V$ et $\gamma(b) \notin V$
Pour tout $U \in C_\gamma(b)\backslash C_\gamma(a)$, on a
$$\mathrm{Fr}(U) \cap \gamma(]a,b[) \neq \varnothing$$

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que $\mathrm{Fr}(U) \cap \gamma(]a,b[) = \varnothing$
$\gamma(b)$ est l'unique point de $\mathrm{Fr}(U)$ dans $\gamma(]a,b])$
Comme $\gamma(]a,b[) \subset V$ et par continuité de $\gamma$, $\gamma(b) \in \mathrm{Fr}(V)$
Par la Proposition 10, $\gamma(b) \in \gamma([0,a])$

Par cette même propriété, $\mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0,b])$
Or par hypothèse et ce qui précède, on a donc $\mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0,a])$
Donc, comme $U$ est connexe et $U \cap \gamma([0,a]) \subset U \cap \gamma([0,b]) = \varnothing$, on a $U \in C_\gamma(a)$
Absurde □

**Lemme d'apparition**

Soit $\gamma$ un lacet à retours finis, et $a < b \in [0,1]$
On suppose qu'il existe $V \in C_\gamma(a)$ tel que $\gamma(]a,b[) \subset V$
Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des composantes connexes par arc de $V\backslash\gamma([a,b])$
On a
$$C_\gamma(b)\backslash C_\gamma(a) = \mathcal{C}$$

*Démonstration.* Montrons d'abord $C_\gamma(b)\backslash C_\gamma(a) \subset \mathcal{C}$

Soit $U \in C_\gamma(b)\backslash C_\gamma(a)$
Donc par la Proposition 10, $\mathrm{Fr}(U) \cap \gamma(]a,b]) \neq \varnothing$
Si $\gamma(b) \in V$, alors $\overline{U} \cap V \neq \varnothing$
Si $\gamma(b) \notin V$, $\mathrm{Fr}(U) \cap \gamma(]a,b[) \neq \varnothing$ par le Lemme 1

Donc au total $\overline{U} \cap V \neq \varnothing$
Comme $V$ est un voisinage de tout ses points, et que tout voisinage d'un point de $\overline{U}$ rencontre $U$, on a $U \cap V \neq \varnothing$
Donc $U \subset V$ par la Proposition 4, car $U \in C_\gamma(b)$

Donc $U \subset V\backslash\gamma([a,b])$ car $U \cap \gamma([a,b]) = \varnothing$
Comme $U$ est connexe par arcs, par la Proposition 4 il existe $U' \in \mathcal{C}$ tel que $U \subset U'$
Si $U'\backslash U \neq \varnothing$ par la Proposition 1, par connexité de $U'$, $U'$ rencontre $\mathrm{Fr}(U)$ donc $\gamma([0,b])$
Or $U' \subset V\backslash\gamma([a,b])$ et $V \cap \gamma([0,a]) = \varnothing$, donc c'est absurde
Donc $U' = U$
On a bien $C_\gamma(b)\backslash C_\gamma(a) \subset \mathcal{C}$

Réciproquement, soit $U \in \mathcal{C}$
Donc $U$ est connexe par arcs, $U \subset V\backslash\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^2\backslash\gamma([0,b])$, et Montrons que $\mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0,b])$

On a d'abord

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(V\backslash\gamma([a,b])) &= \overline{V\backslash\gamma([a,b])}\backslash(V\backslash\gamma([a,b]))\\ &= \overline{V\backslash\gamma([a,b])}\cap(\mathbb{R}^2\backslash V\cup\gamma([a,b]))\\ &\subset (\mathrm{Fr}(V)\cap\overline{\mathbb{R}^2\backslash\gamma([a,b])})\cup(\gamma([a,b])\cap\overline{V\backslash\gamma([a,b])})\\ &\subset \gamma([0,b])\end{aligned}$$

Puis, par la Proposition 3, on a $\mathrm{Fr}(U)\subset\mathrm{Fr}(V\backslash\gamma([a,b]))$
Donc $\mathrm{Fr}(U)\subset\gamma([0,b])$
Donc $U\in C_\gamma(b)$ par la Proposition 10
Puis, $U\notin C_\gamma(a)$, car $U\subsetneq V$ et $V\in C_\gamma(a)$
Donc $U\in C_\gamma(b)\backslash C_\gamma(a)$

On a bien $\mathcal{C}=C_\gamma(a)\backslash C_\gamma(b)$ □

On montre ensuite que dans le cas de la subdivision minimale, un tel $V$ existe toujours

**Proposition 12**

Soit $\gamma$ un lacet à retours finis et $(t_n)$ la subdivision minimale associée à $r_\gamma$
Soit $n\in[\![0,r(\gamma)-1]\!]$
Il existe $V\in C_\gamma(t_n)$ tel que $\gamma(]t_n,t_{n+1}[)\subset V$

*Démonstration.* Comme $C_\gamma(t_n)$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs délimitées par $\gamma([0,t_n])$ on a

$$\bigcup_{V\in C_\gamma(t_n)} V=\mathbb{R}^2\backslash\gamma([0,t_n])$$

Donc par ce qui précède il existe $V\in C_\gamma(t_n)$ tel que $\gamma(t)\in V$

Donc $\gamma(]t_n,t_{n+1}[)$ est connexe par arcs, et rencontre $V\in C_\gamma(t_n)$
De plus $\gamma(]t_n,t_{n+1}[)\cap\gamma([0,t_n])=\varnothing$ par ce qui précède
Donc par la Proposition 4, on a $\gamma(]t_n,t_{n+1}[)\subset V$ □

# 5 Le théorème

Nous avons à présent tout les outils pour démontrer le théorème

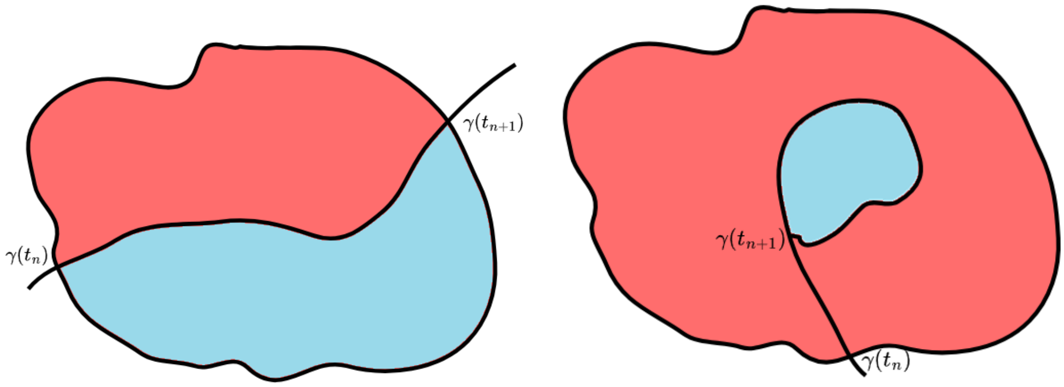
## 5.1 Les cas d'augmentation

On se fixe $\gamma$ un lacet à retours finis
On se donne $(t_n)$ la subdivision minimale adaptée à $r_\gamma$
On distingue 2 cas d'augmentation du nombre de retours de $t_n$ à $t_{n+1}$ de la subdivision minimale

Dans le premier cas, le lacet "traverse" une composante connexe par arcs déjà présente
Dans le second, le lacet forme une boucle à l'intérieur d'une autre composante connexe par arcs
Ils sont ici représentés par des composantes bornées, mais cette disjonction s'applique aussi lorsque le lacet traverse une composante non bornée

Plus formellement, pour $n\in[\![0,r(\gamma)-1]\!]$ on a :
- Cas 1 : Soit $\gamma(t_{n+1})\notin\gamma(]t_n,t_{n+1}[)$
- Cas 2 : Soit $\gamma(t_{n+1})\in\gamma(]t_n,t_{n+1}[])$

FIGURE 4 – Les différents cas




## 5.2 La démonstration

**Théorème des retours**

Un lacet $\gamma$ à retours finis délimite $r(\gamma)$ composantes connexes par arcs bornées

*Démonstration.* Soit $\gamma$ un lacet à retours finis
Montrons la propriété suivante par récurrence finie sur $n \in [\![0, r(\gamma)]\!]$

$$\mathcal{H}(n) : r_\gamma(t_n) + 1 = |C_\gamma(t_n)|$$

Le cas $n = 0$ est évident car $\mathbb{R}^2 \backslash \{\gamma(0)\}$ est connexe par arcs et non borné

Supposons $\mathcal{H}(n)$ pour un $n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$
Notons $x = \gamma(t_n)$ et $y = \gamma(t_{n+1})$
Par la Proposition 12, on se donne $V \in C_\gamma(t_n)$ tel que $\gamma(]t_n, t_{n+1}[) \subset V$

Montrons alors que $V \backslash \gamma([t_n, t_{n+1}])$ a exactement 2 composantes connexes par arc

— Cas 1 : Si $y \notin \gamma(]t_n, t_{n+1}[)$
On a donc $y \in \gamma([0, t_n])$
Il existe alors un chemin à retours finis de $y$ à $x$ dans $\gamma([0, t_n])$, obtenu en suivant le tracé du lacet
On se donne alors $c$ un chemin injectif de $y$ à $x$ par la Proposition 6
On construit alors une courbe de Jordan $\alpha$ en concaténant $c$ à $\gamma_{|[t_n, t_{n+1}]}$, par les Corollaires 1 et 2

Montrons que $V \cap U$ et $V \cap U'$ sont les composantes connexes par arcs de $V \backslash \gamma([t_n, t_{n+1}])$
Montrons d'abord que $V \cap U$ est connexe par arcs

Pour cela, considérons $C_1$ et $C_2$ deux composantes connexes par arcs de $V \cap U$ et montrons qu'elles appartiennent à $C_\gamma(t_{n+1}) \backslash C_\gamma(t_n)$
On mène pour cela une démonstration très similaire au Lemme d'apparition, en exploitant le fait que $\mathrm{Fr}(V \cap U) \cap V = \gamma(]t_n, t_{n+1}[)$ par construction

Par la Proposition 10, $\mathrm{Fr}(C_1) \cap \gamma(]t_n, t_{n+1}[) \neq \varnothing$ et de même pour $C_2$
On se donne alors $t \leq t' \in ]t_n, t_{n+1}[$ tels que $\gamma(t)$ et $\gamma(t')$ appartiennent respectivement à ces intersections
Comme $\gamma([t, t']) \subset V$ et est compact, on se donne $r > 0$ tel que pour tout point de $\gamma([t, t'])$, la boule centrée en ce point de rayon $r$ est incluse dans $V$
Comme $\gamma(t)$ et $\gamma(t')$ sont des points frontière, il existe dans tout voisinage de ces points respectivement des points de $C_1$ ou $C_2$
Par ce qui precède et la Proposition 7, il existe donc un chemin dans $V \cap U$ de $C_1$ à $C_2$ et donc $C_1 = C_2$
$V \cap U$ est bien connexe par arcs et par le même raisonnement $V \cap U'$ également

Par la Proposition 5, comme ce sont des ouverts connexes par arc formant une partition de $V \backslash \gamma([t_n, t_{n+1}])$, il s'agit de ses composantes connexes par arc

— Cas 2 : si $y \in \gamma(]t_n, t_{n+1}[)$
On se donne $t' \in [t_n, t_{n+1}]$ tel que $\gamma(t') = y$
Comme $\gamma_{|[t_n, t_{n+1}[}$ est injective par le Corollaire 2, $\gamma_{|[t', t_{n+1}]}$ est une courbe de Jordan
On note $U$ sa composante bornée et $U'$ celle non bornée

Notons que dans ce cas, $n \neq r(\gamma) - 1$ : en effet, si on avait $n = r(\gamma)$, alors $y = \gamma(0)$ et donc $y \in \gamma([0, t_n])$, ce qui n'est pas le cas ici
Il existe donc un chemin à retours finis $c$ de $y$ à $\gamma([0, t_n])$ exploitant le tracé du lacet à venir, soit $\gamma_{|[t_{n+1}, 1]}$

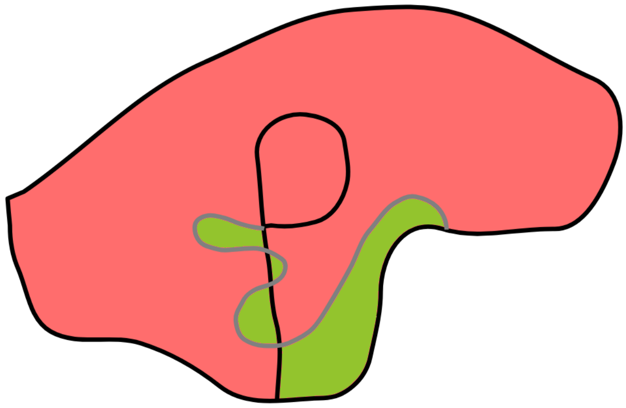
On se donne comme pour le cas 1, $C_1$ et $C_2$ des composantes connexes par arcs de $V \cap U'$, qui sont élements de $C_\gamma(t_{n+1}) \backslash C_\gamma(t_n)$
Leur frontières rencontrent donc $\gamma(]t_n, t_{n+1}])$ par la Proposition 10
Soient $u \in \mathrm{Fr}(C_1) \cap \gamma(]t_n, t_{n+1}])$ et $v \in \mathrm{Fr}(C_2)\gamma(]t_n, t_{n+1}])$, distincts tout deux de $\gamma(t_{n+1})$
De tels point existent car tout voisinage de $\gamma(t_{n+1})$ rencontre $U$ et $U'$ par construction
Ainsi, si $\gamma(t_{n+1})$ était l'unique point de $\mathrm{Fr}(C_1) \cap \gamma(]t_n, t_{n+1}])$, comme une boule privée d'un point est connexe par arcs, alors on aurait $\mathrm{Fr}(C_1) \cap (V \cap U') \neq \varnothing$
Or par la Proposition 3, $\mathrm{Fr}(C_1) \subset \mathrm{Fr}(V \cap U')$ et c'est donc absurde

On se donne $a \leq b \in ]t_n, t_{n+1}[$ tels que $\gamma(a) = u$ et $\gamma(b) = v$ sans perte de généralité
Notons que le chemin obtenu en concaténant, $\gamma([b, t_{n+1}])$, $c$ et $\gamma([t_n, a])$ est à retours finis et rencontre $\gamma([a, b])$ un nombre fini de fois car $\gamma$ est à retours finis
On se donne alors un nouveau chemin $d$ de $v$ à $u$ injectif, et ne rencontrant pas $\gamma([a, b])$ par les Propositions ? et 6
On peut alors construire une courbe de Jordan exploitant $\gamma([a, b])$ et $d$
Puis, on conclut comme dans le cas 1 que $C_1 = C_2$

Pour $V \cap U$, on procède de même manière que pour le cas 1, en utilisant la courbe de Jordan $\gamma_{|[t', t_{n+1}]}$

$V \cap U$ et $V \cap U'$ sont alors tout deux connexes par arcs, ouverts, et formant une partition de $V \backslash \gamma([t_n, t_{n+1}])$
Par la Proposition 5

FIGURE 5 – Le chemin injectif de $y$ à $\gamma([0, t_n])$ dans $\gamma([t_{n+1}, 1])$, cas 2
Le chemin est en gris. Les composantes connexes par arcs bornées des différentes courbes de Jordan construites sont en vert



Puis en utilisant les lemmes de préservation et d'apparition

$$\begin{aligned}|C_\gamma(t_{n+1})| &= |(C_\gamma(t_{n+1}) \backslash C_\gamma(t_n)) \sqcup (C_\gamma(t_{n+1}) \cap C_\gamma(t_n))| \\ &= 2 + |C_\gamma(t_n)| - 1 \\ &= r_\gamma(t_n) + 2 \\ &= r_\gamma(t_{n+1}) + 1\end{aligned}$$

Au total par récurrence, on obtient $|C_\gamma(t_{r(\gamma)})| = |C_\gamma(1)| = r(\gamma) + 1$
Par la Proposition 11, $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ possède donc $r(\gamma)$ composantes connexes bornées

$\square$