TIPE - Autour du théorème de Jordan

20 mai 2024

1 Définitions usuelles et notations

Dans tout le document, on notera $\sqcup$ les unions disjointes

Définition

Un chemin de x à y est une application $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

Si γ est un chemin, on dénotera également son image par γ

Définition

Un lacet est un chemin γ de $\gamma(0)$ à $\gamma(0)$

Définition

Une courbe de Jordan est un lacet injectif sur $[0,1[$

Le théorème de Jordan s'énonce alors comme

Théorème de Jordan

Soit γ une courbe de Jordan
Alors $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ a deux composantes connexes par arcs ouvertes, l'une bornée, l'autre non, ayant toutes deux pour frontière γ

On parlera par la suite de composante connexe interne, ou externe, pour parler de la composante bornée, ou non bornée
On se demande alors : que se passerait il en affaiblissant l'hypothèse d'injectivité ?

2 Problème

Définition 1

Soit γ un chemin
On note
$$I_\gamma = \{x \in \gamma \mid \exists t_1 \neq t_2 \in [0,1], x = \gamma(t_1) = \gamma(t_2)\}$$
l'ensemble des intersections de γ

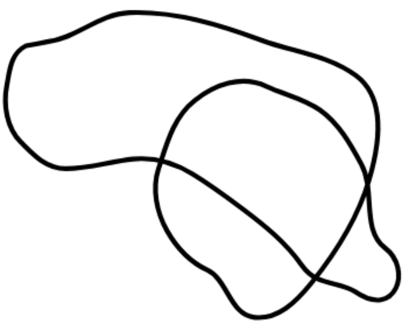
Définition 2

Soit $x \in I_\gamma$
Sous réserve d'existence, on note $S(x)$ le "nombre de sorties" de x l'entier suivant
$$S(x) = |\gamma^{-1}(\{x\})|$$

Définition 3

Soit γ un chemin
Si I_γ est fini et pour tout $x \in I_\gamma$, $S(x)$ est défini, on dira que γ est à retours finis et on note le nombre de retours
$$r(\gamma) = \sum_{x \in I_\gamma} (S(x) - 1)$$

Figure 1 – Un exemple de lacet à retours finis



On cherche alors à montrer que

Théorème des retours

Soit γ un lacet à retours finis
γ délimite $r(\gamma)$ composantes connexes par arcs bornées

Pour cela, on s'intéresse à ce qu'il se passe lorsque l'on trace un lacet à la main
On remarque intuitivement ou empiriquement que chaque fois que le tracé croise une portion de courbe déjà dessinée, il apparaît une nouvelle composante connexe
C'est cette intuition qui nous conduit à introduire les définitions suivantes

Définition 4

Soit γ un lacet à retours finis
On définit pour $t \in [0,1]$ le nombre de sorties à l'instant t

$$\forall x \in I_\gamma, S(x,t) = |\gamma^{-1}(\{x\}) \cap [0,t]|$$

et, en notant $I_\gamma(t) = I_\gamma \cap \gamma([0,t])$

$$r_\gamma(t) = \sum_{x \in I_\gamma(t)} S(x,t) - 1$$

Définition 5

Soit γ un lacet à retours finis et $t \in [0,1]$
On note $C_\gamma(t)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,t])$

L'idée de la démonstration sera de procéder par récurrence sur les instants en lesquels le nombre de retour augmente afin de montrer que $|C_\gamma(1)| = r_\gamma(1) + 1 = r(\gamma) + 1$
On aura ainsi $r(\gamma)$ composantes connexes bornées, car il n'y a qu'une composante non bornée
Pour cela on commence par déterminer certaines propriétés de la fonction r_γ et des cas d'augmentation de r_γ
On admettra également le théorème suivant, étendant le théorème de Jordan

Théorème de Jordan-Schönflies

Soit γ une courbe de Jordan
Notons V sa composante interne
Il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui même, tel que l'image de $\overline{V}$ par ce dernier soit $\mathcal{B}_f(0,1)$

3 Premières propriétés

3.1 Une propriété utile des connexes par arcs

Propriété 1

Soit A un connexe par arcs et $B \subset \mathbb{R}^2$ tel que $A \cap B \neq \varnothing$ et $A \backslash B \neq \varnothing$
Alors $A \cap \mathrm{Fr}(B) \neq \varnothing$

Démonstration. Soient $x \in A \backslash B$, $y \in A \cap B$
Soit c un chemin de x à y dans A par connexité par arcs
Donc $c(0) \in A \backslash B$, on peut alors considérer

$$t_0 = \sup\{t \in [0,1] \mid c(t) \in A \backslash B\}$$

Si $t_0 \neq 0$ et $t_0 \neq 1$:
Alors :

$$\forall \varepsilon \in]0, t_0[, \exists t \in]t_0 - \varepsilon, t_0[, c(t_0 - \varepsilon) \in A \backslash B \tag{1}$$

et

$$\forall \varepsilon \in]0, t_1 - t_0[, c(t_0 + \varepsilon) \in A \cap B \tag{2}$$

Par continuité de c et (2) et (3) toute boule ouverte centrée en $c(t_0)$ rencontre $A \cap B$ et $A \backslash B$
On obtient alors que $c(t_0) \in \mathrm{Fr}(A \cap B) \subset \mathrm{Fr}(B)$

Si $t_0 = 0$, on a juste (3) et le fait que toute boule centrée en $c(0)$ contient $c(0)$ et rencontre donc $A \backslash B$.
On aboutit alors au même résultat
Si $t_0 = 1$ même chose, mais avec (2)

□

3.2 Caractérisation des composantes connexes

Propriété 2

Soit $t \in [0,1]$, et V un ouvert de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,t])$, connexe par arcs
On a
$$V \in C_\gamma(t) \Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0,t])$$

Démonstration. Sens direct :
Si $V \in C_\gamma(t)$
Soit $x \in \mathrm{Fr}(V)$ et $n \in \mathbb{N}^*$
Par définition de la frontière il existe
$$y_n \in \mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap V \text{ et } z_n \in \mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (\mathbb{R}^2 \backslash V)$$
Comme $\mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$ est connexe par arcs, il existe $c_n \in \mathcal{C}([0,1], \mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right))$ tel que $c_n(0) = y_n$ et $c(1) = z_n$
Or $\mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \backslash \gamma([0,t])$ ne peut être connexe par arcs, sinon V aurait accès à une autre composante connexe par arcs de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,t])$
Donc c_n rencontre $\gamma([0,t])$, on choisit donc $i_n \in \mathcal{B}\left(0, \frac{1}{n}\right) \cap \gamma([0,t])$

On a que $i_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$
(i_n) est à valeurs dans $\gamma([0,t])$ un fermé, donc $x \in \gamma([0,t])$

Sens réciproque :
On raisonne par contraposée

Si $V \notin C_\gamma(t)$
Comme $V \subset \mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,t])$, il existe $U \in C_\gamma(t)$ tel que $V \cap U \neq \varnothing$
Comme V est connexe par arcs, $V \subsetneq U$ (sinon V rencontrerais Fr(U) $\subset \gamma([0,t])$)

Puis comme V est un ouvert strictement inclus dans U, on a que $U \backslash \overline{V} \neq \varnothing$
$V \sqcup U \backslash \overline{V}$ n'est donc pas connexe par arcs comme réunion disjointe d'ouverts
Comme U est connexe, il existe un chemin de V à $U \backslash \overline{V}$ dans U
Ce chemin rencontre nécessairement $U \backslash (V \sqcup (U \backslash \overline{V})) = \mathrm{Fr}(V)$
Donc $\mathrm{Fr}(V)$ rencontre U, car le chemin est à valeurs dans U
Or $U \subset \mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,t])$, donc $\mathrm{Fr}(V) \not\subset \gamma([0,t])$

□

3.3 Propriétés de r_γ

Propriété 3

Soit γ un lacet à retours finis
r_γ est une fonction en escalier. De plus, la subidivision minimale associée à r_γ, $(t_n)_{0\leq n\leq r(\gamma)}$ vérifie

$$\forall n \in [\![0, r(\gamma)-1]\!], r_\gamma(t_{n+1}) = 1 + r_\gamma(t_n)$$

et

$$\forall n \in [\![0, r(\gamma)]\!], \gamma(t_n) \in I_\gamma(t_n)$$

Démonstration. Notons que pour tout $x \in I_\gamma$, $t \longmapsto S(x,t)$ est croissante
Donc r_γ est croissante
De plus elle ne prend que des valeurs entières et est bornée, elle est alors en escalier

Supposons qu'elle ne le soit pas, alors pour toute subdivision $(t_n)_{0\leq n\leq p}$ de $[0,1]$, il existe $n \in [\![0, p-1]\!]$ tel que r_γ ne soit pas constante sur $]t_n, t_{n+1}[$
Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, r_γ prend k valeurs distinctes
C'est évident pour $k = 1$
Supposons la propriété vraie au rang $k \in \mathbb{N}$
Notons $v_0 < ... < v_{k-1} \in \mathbb{N}$ les k premières valeurs prises par r_γ (bien défini car r_γ est à valeurs entières)
On pose alors $(t_n)_{0\leq n\leq k}$ telle que

$$\forall n \in [\![0, k-1]\!], t_n = \inf\{t \in [0,1] \mid r_\gamma(t) = v_n\}$$

et $t_k = 1$

Comme r_γ est croissante on a $t_0 \leq t_1 < ... < t_k$ (on peut si $t_0 = t_1$ remplacer la subdivision en n'en gardant qu'un)
On a alors, par croissance que r_γ est constante sur les $]t_n, t_{n+1}[$ pour $n \in [\![0, k-2]\!]$, en effet si elle y prenait d'autres valeurs, il s'agirait nécessairement par définition des (t_n) d'une valeur strictement supérieure à v_{k-1}, mais cela contredirait la croissance
On a de plus $r_\gamma(t_0) \leq r_\gamma(t_1) < r_\gamma(t_2) < ... < r_\gamma(t_{k-1}) < r_\gamma(t_k)$:
Les inégalités strictes de 1 à $k-1$ viennent de la définition des (t_n) comme borne inférieure et de la croissance de r_γ
La dernière inégalité stricte vient du fait que r_γ est nécessairement non constante sur $]t_{k-1}, t_k[$ par ce qui précède
Donc r_γ prend k valeurs distinctes

On a bien montré la propriété par récurrence

Mais alors, comme ces valeurs sont entières, r_γ est non bornée, absurde

Considérons alors $(t_n)_{0\leq n\leq p}$ la subdivision minimale associée à r_γ
Montrons d'abord que

$$\forall n \in [\![0,p]\!], \forall t < t_n, r_\gamma(t) < r_\gamma(t_n) \tag{3}$$

Supposons que non
Donc il existe $n \in [\![0,p]\!]$ et $t < t_n$ tel que $r_\gamma(t_n) \leq r_\gamma(t)$
Comme r_γ est croissante on a

$$\forall t' \in [t, t_n[, r_\gamma(t') = r_\gamma(t_n)$$

Puis on utilise la minimalité de (t_n) :
- Si $n = p$, c'est absurde car $r_\gamma(t) < r(\gamma)$ pour $t \in [0, 1[$
- Sinon, alors par minimalité, r_γ doit prendre une valeurs strictement plus grande que $r_\gamma(t_n)$ sur $]t_n, t_{n+1}[$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $r_\gamma(t_n + \varepsilon) > r_\gamma(t_n)$, donc par définition de r_γ, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in I_\gamma \cap \gamma(]t_n, t_n + \varepsilon[)$ tel que $S(x, t_n + \varepsilon) > 2$
On a donc trouvé une infinité d'intersections, absurde car γ est à retours finis
On a bien la propriété annoncée
Cela implique en particulier que r_γ est constante sur les $[t_n, t_{n+1}[$

Montrons ensuite qu'il existe $t \in [t_n, t_{n+1}[$ tel que

$$\sum_{x \in I_\gamma(t_{n+1}) \setminus \gamma([0,t])} S(x, t_{n+1}) - 1 = 0$$

Il suffit de remarquer que $I_\gamma(t_{n+1})$ étant fini, il existe $t \in [t_n, t_{n+1}[$ tel que $|I_\gamma(t_{n+1}) \setminus \gamma([0, t])| \leq 1$
Si l'ensemble est vide, c'est terminé
Sinon, $\gamma(t_{n+1}) \notin \gamma([0, t_{n+1}[)$, donc $S(\gamma(t_{n+1}, t_{n+1})) = 1$
Donc la somme vaut bien 0

Enfin, on considère un tel $t \in [t_n, t_{n+1}[$
On a donc d'après ce qui précède

$$r_\gamma(t_{n+1}) - r_\gamma(t) = \sum_{x \in I_\gamma(t)} S(x, t_{n+1}) - S(x, t) \geq 1$$

Il existe donc un $x \in I_\gamma(t)$ tel que $S(x, t_{n+1}) > S(x, t)$
Par minimalité de la subdivision, on a que $S(x, t') = S(x, t)$ pour $t \leq t' < t_{n+1}$ (le cas contraire le nombre de retours aurait augmenté entre t_n et t_{n+1})
Donc nécessairement $x = \gamma(t_{n+1})$, ce qui montre que ce x est unique
De plus il vient que

$$|\gamma^{-1}\{x\} \cap [0, t_{n+1}]| = 1 + |\gamma^{-1}\{x\} \cap [0, t_{n+1}[|$$

Donc
$$\forall t' \in [t, t_{n+1}[, S(x, t_{n+1}) = 1 + S(x, t')$$
Donc comme ce x est unique, on a
$$\forall t' \in [t, t_{n+1}[, r_\gamma(t_{n+1}) = 1 + r_\gamma(t)$$
Or r_γ est constante sur $[t_n, t_{n+1}[$ par les résultats précédents on a $r_\gamma(t_{n+1}) = 1 + r_\gamma(t_n)$
Puisque r_γ prends des valeurs de $r_\gamma(0) = 0$ à $r_\gamma(t_p) = r(\gamma)$, on en déduit que $p = r(\gamma)$

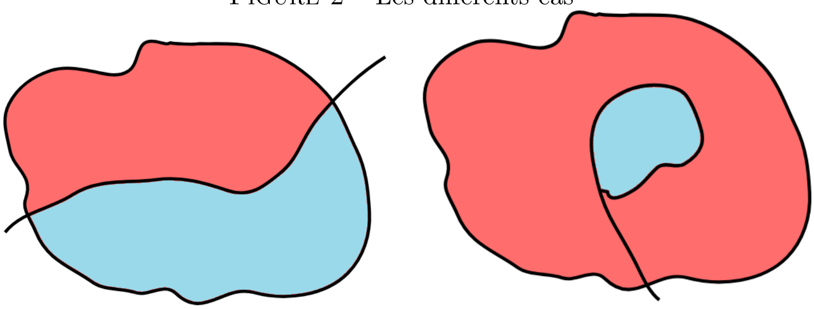
□

3.4 Les cas d'augmentation

On se fixe γ un lacet à retours finis
On se donne (t_n) la subdivision minimale adaptée à r_γ
On distingue 2 cas d'augmentation du nombre de retours de t_n à t_{n+1} de la subdivision minimale

Dans le premier cas, le lacet "traverse" une composante connexe déjà présente
Dans le second, le lacet forme une boucle à l'intérieur d'une autre composante connexe

FIGURE 2 – Les différents cas



Plus formellement, pour $n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$ on a :
- Cas 1 : Soit $\gamma(t_{n+1}) \in \gamma([0, t_n[)$
- Cas 2 : Soit $\gamma(t_{n+1}) \in \gamma([t_n, t_{n+1}])$

4 Lemmes

Lemme 1

Soit V un ouvert
Ses composantes connexes par arcs sont ouvertes

Démonstration. Si V est connexe par arcs, on a déjà le résultat

Si V ne l'est pas, notons $\mathcal{C}$ l'ensemble de ses composantes et prenons $U \in \mathcal{C}$
Supposons par l'absurde que U n'est pas ouvert, soit $U \cap \mathrm{Fr}(U) \neq \varnothing$
Soit $x \in U \cap \mathrm{Fr}(U)$
Comme $U \subset V$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset V$, et on a également comme $\mathcal{B}(x, r) \backslash U \neq \varnothing$
Comme

$$V = \bigcup_{U' \in \mathcal{C}} U'$$

il existe donc $U' \in \mathcal{C} \backslash \{U\}$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \cap U' \neq \varnothing$
$\mathcal{B}(x, r)$ étant connexe par arcs inclus dans V et rencontrant U et U', il existe un chemin dans V de U à U', ce qui est absurde car ces deux composantes connexes par arcs sont distinctes

Donc U est ouvert $\square$

Lemme de préservation

Soit γ un lacet à retours finis, et $a < b \in [0, 1]$
On suppose qu'il existe $V \in C_\gamma(a)$ tel que $\gamma(]a, b[) \subset V$
On a

$$C_\gamma(a) \cap C_\gamma(b) = C_\gamma(a) \backslash \{V\}$$

Démonstration. Montrons d'abord que $C_\gamma(a) \backslash \{V\} \subset C_\gamma(b) \cap C_\gamma(a)$

Notons d'abord que $\gamma(b) \in \overline{V}$: en effet par continuité, on a $\gamma(b) = \lim_{t \to b^-} \gamma(t)$
Soit $U \in C_\gamma(a) \backslash \{V\}$
On a $\overline{V} \cap U = \varnothing$: si ce n'était pas le cas, il existerait un point de $\overline{V}$ dans U. Comme U est ouvert, il est voisinage de ce point, or tout voisinage de ce point rencontre U
Or $V \cap U = \varnothing$ et donc $\overline{V} \cap U = \varnothing$

Enfin, U est connexe par arcs, $\mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0, b])$, et

$$\gamma([0, b]) \cap U = (\gamma([0, a]) \cap U) \cup (\gamma(]a, b]) \cap U) = \varnothing$$

car $\gamma(]a, b]) \subset \overline{V}$
Par la propriété 2, $U \in C_\gamma(b)$, donc $C_\gamma(a) \backslash \{V\} \subset C_\gamma(b) \cap C_\gamma(a)$

Réciproquement, si $U \in C_\gamma(a) \cap C_\gamma(b)$, alors $U \neq V$:
En effet, $V \notin C_\gamma(b)$ car $V \cap \gamma(]a, b[) \neq \varnothing$
On a bien $C_\gamma(a) \cap C_\gamma(b) = C_\gamma(a) \backslash \{V\}$ $\square$

Lemme d'apparition

Soit γ un lacet à retours finis, et $a < b \in [0,1]$
On suppose qu'il existe $V \in C_\gamma(a)$ tel que $\gamma(]a,b[) \subset V$
Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des composantes connexes par arc de $V \backslash \gamma([a,b])$
On a
$$C_\gamma(b) \backslash C_\gamma(a) = \mathcal{C}$$

Démonstration. Montrons d'abord $C_\gamma(b) \backslash C_\gamma(a) \subset \mathcal{C}$

Soit $U \in C_\gamma(b) \backslash C_\gamma(a)$
Donc par la propriété 2, $\mathrm{Fr}(U) \cap \gamma(]a,b]) \neq \varnothing$
Si $\gamma(b) \in V$, alors $\overline{U} \cap V \neq \varnothing$
Si $\gamma(b) \notin V$, montrons que $\mathrm{Fr}(U) \cap \gamma(]a,b[) \neq \varnothing$

Supposons par l'absurde que $\mathrm{Fr}(U) \cap \gamma(]a,b[) = \varnothing$
$\gamma(b)$ est l'unique point de $\mathrm{Fr}(U)$ dans $\gamma(]a,b])$
Notons que par l'hypothèse précedente et continuité de γ, $\gamma(b) \in \mathrm{Fr}(V) \subset \gamma([0,a])$
Donc $\mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0,a])$
Donc, comme U est connexe et $U \cap \gamma([0,a]) \subset U \cap \gamma([0,b]) = \varnothing$, on a $U \in C_\gamma(a)$
Absurde

On a bien montré la propriété
Donc au total $\overline{U} \cap V \neq \varnothing$
Comme V est un voisinage de tout ses points, et que tout voisinage d'un point de $\overline{U}$ rencontre U, on a $U \cap V \neq \varnothing$
Si on avait $U \backslash V \neq \varnothing$, alors par la propriété 1 car U est connexe, U rencontrerait $\mathrm{Fr}(V)$ donc $\gamma([0,a])$, ce qui est impossible
Donc $U \subset V$

Donc $U \subset V \backslash \gamma([a,b])$ car $U \cap \gamma([a,b]) = \varnothing$
Comme U est connexe par arcs, il existe $U' \in \mathcal{C}$ tel que $U \subset U'$
Si $U' \backslash U \neq \varnothing$ par la propriété 1, par connexité de U', U' rencontre $\mathrm{Fr}(U)$ donc $\gamma([0,b])$
Or $U' \subset V \backslash \gamma([a,b])$ et $V \cap \gamma([0,a]) = \varnothing$, donc c'est absurde
Donc $U' = U$
On a bien $C_\gamma(b) \backslash C_\gamma(a) \subset \mathcal{C}$

Réciproquement, soit $U \in \mathcal{C}$
Donc U est connexe par arcs, $U \subset V \backslash \gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,b])$, et Montrons que $\mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0,b])$

On a d'abord

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}(V\backslash\gamma([a,b])) &= \overline{V\backslash\gamma([a,b])}\backslash(V\backslash\gamma([a,b])) \\
&= \overline{V\backslash\gamma([a,b])}\cap(\mathbb{R}^2\backslash V\cup\gamma([a,b])) \\
&\subset (\mathrm{Fr}(V)\cap\overline{\mathbb{R}^2\backslash\gamma([a,b])})\cup(\gamma([a,b])\cap\overline{V\backslash\gamma([a,b])}) \\
&\subset \gamma([0,b])
\end{aligned}$$

Puis, comme les élements de $\mathcal{C}$ forment une partition de $V\backslash\gamma([a,b])$, et que les adhérences de ces derniers sont disjointes, sinon ils ne formeraient pas une partition (par les mêmes arguments utilisés pour montrer l'inclusion directe), on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}(V\backslash\gamma([a,b])) &= \mathrm{Fr}\left(\bigsqcup_{U'\in\mathcal{C}} U'\right) \\
&= \overline{\bigsqcup_{U'\in\mathcal{C}} U'}\backslash\left(\bigsqcup_{U'\in\mathcal{C}} U'\right) \\
&\supset \bigcup_{U'\in\mathcal{C}} \overline{U'} \bigcap_{U'\in\mathcal{C}} \mathbb{R}^2\backslash U' \\
&= \bigcup_{U'\in\mathcal{C}} \left(\overline{U'} \bigcap_{U''\in\mathcal{C}} \mathbb{R}^2\backslash U''\right) \\
&= \bigcup_{U'\in\mathcal{C}} \overline{U'}\backslash U' \\
&= \bigcup_{U'\in\mathcal{C}} \mathrm{Fr}(U')
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Fr}(U)\subset\gamma([0,b])$
Donc $U\in C_\gamma(b)$ par la propriété 2
Puis, $U\notin C_\gamma(a)$, car $U\subsetneq V$ et $V\in C_\gamma(a)$
Donc $U\in C_\gamma(b)\backslash C_\gamma(a)$

On a bien $\mathcal{C}=C_\gamma(a)\backslash C_\gamma(b)$ □

Lemme 2

Soit γ un lacet à retours finis et (t_n) la subdivision minimale associée à r_γ
Soit $n\in[\![0,r(\gamma)-1]\!]$
Il existe $V\in C_\gamma(t_n)$ tel que $\gamma(]t_n,t_{n+1}[)\subset V$

Démonstration. Comme $C_\gamma(t_n)$ est l'ensemble des composantes connexes délimitées par $\gamma([0,t_n])$ on a

$$\bigcup_{V\in C_\gamma(t_n)} V=\mathbb{R}^2\backslash\gamma([0,t_n])$$

Soit $t \in]t_n, t_{n+1}[$
Supposons par l'absurde que $\gamma(t) \in \gamma([0, t_n])$
Alors $S(\gamma(t), t_{n+1}) \geq 2$, et par la propriété 3, comme $\gamma(t_{n+1}) \in I_\gamma(t_{n+1})$, $S(\gamma(t_{n+1}), t_{n+1}) \geq 2$, donc $r_\gamma(t_{n+1}) \geq 2 + r_\gamma(t_n)$, absurde
Donc par ce qui précède il existe $V \in C_\gamma(t_n)$ tel que $\gamma(t) \in V$

Fixons nous $t \in]t_n, t_{n+1}[$ et $V \in C_\gamma(t_n)$ tel que $\gamma(t) \in V$
Supposons par l'absurde que $\gamma(]t_n, t_{n+1}[) \not\subseteq V$
Donc $\gamma(]t_n, t_{n+1}[)$ rencontre V et son complémentaire, comme cet ensemble est connexe par continuité de γ, il rencontre $\mathrm{Fr}(V)$, donc $\gamma([0, t_n])$ par la propriété 2
C'est absurde, donc $\gamma(]t_n, t_{n+1}[) \subset V$ □

Lemme 3

Soit γ un lacet à retours finis et $t \in [0, 1]$
Il n'existe qu'un seul $V \in C_\gamma(t)$ non borné

Démonstration. Comme $[0, t]$ est compact et γ continue, $\gamma([0, t])$ est borné
Soit $r > 0$ tel que $\gamma([0, t]) \subset \mathcal{B}(0, r)$
$\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}(0, r)$ est ainsi une partie connexe non bornée de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$
Donc il existe $V \in C_\gamma(t)$ contenant cet ensemble, et donc non borné

Soit $U \in C_\gamma(t)$ non bornée
U rencontre alors $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}(0, r)$, donc $U \cap V \neq \varnothing$, donc $U = V$
On a bien l'unicité □

Lemme 4

Soit α un chemin à retours finis de x à y, où $x \neq y$
Il existe β un chemin injectif de x à y tel que $\beta \subset \alpha$

Démonstration. On écrit $I_\alpha = \{z_1, ..., z_n\}$, où $n = |I_\alpha|$
Montrons par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$, qu'il existe un chemin β_k à retours finis de x à y tel que $I_{\beta_k} \subset \{z_{k+1}, ..., z_n\}$
On a pour $k = 0$, que $\beta_k = \alpha$ convient

Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![0, n-1]\!]$
On se donne alors β_k tel que $I_{\beta_k} \subset \{z_{k+1}, ..., z_n\}$
Si $I_{\beta_k} = \varnothing$, β_k convient pour le rang $k + 1$

Sinon, on suppose sans perte de géneralité que $z_{k+1} \in I_{\beta_k}$
On définit alors, comme $\beta_k^{-1}(\{z_{k+1}\})$ est un compact par continuité :

$$t_k^- = \min(\beta_k^{-1}(\{z_{k+1}\})) \text{ et } t_k^+ = \max(\beta_k^{-1}(\{z_{k+1}\}))$$

On définit alors

$$c : \begin{array}{ll} [0, 1-(t_k^+ - t_k^-)] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto \begin{cases} \beta_k(t) & \text{si } t \in [0, t_k^-] \\ \beta_k(t + t_k^+ - t_k^-) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

et

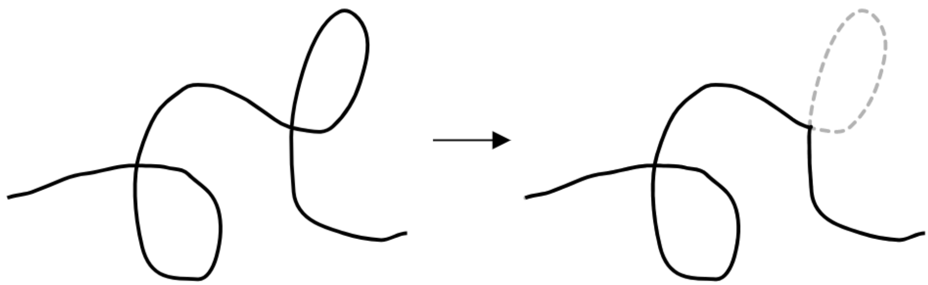
$$\beta_{k+1} : \begin{array}{ll} [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto c(t(1-(t_k^+ - t_k^-))) \end{array}$$

$[0, 1-(t_k^+ - t_k^-)]$ n'est pas réduit à un point car $x \neq y$, donc $t_k^+ - t_k^- < 1$
β_{k+1} est bien continue car $c(t_k^-) = c(t_k^+) = z_{k+1}$
Puis, $z_{k+1} \notin I_{\beta_{k+1}}$: en effet, par minimalité et maximalité de t_k^- et t_k^+, on a pour $t \in [0, 1-(t_k^+ - t_k^-)]$, $t \neq t_k^-$, que $c(t) \neq z_{k+1}$
Comme $\beta_{k+1} \subset \beta_k$, on a bien $I_{\beta_{k+1}} \subset \{z_{k+2}, ..., z_n\}$

Donc il existe bien un chemin β de x à y injectif, en appliquant la propriété au rang n ($I_\beta = \varnothing$)

$\square$

Figure 3 – Illustration de la construction de β_{k+1} à partir de β_k



Lemme 5

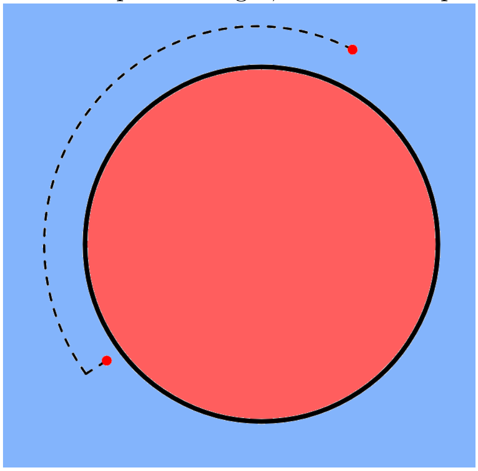
Soit γ une courbe de Jordan, $x, y \in \gamma$
On écrit $x = \gamma(t_0)$ et $y = \gamma(t_1)$ et on suppose $t_0 < t_1$
Soit V une des composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$
Pour tout $r > 0$ et tout $u \in \mathcal{B}(x,r) \cap V$ et $v \in \mathcal{B}(y,r) \cap V$, il existe un chemin c de u à v dans V vérifiant

$$\forall t \in [0,1], d(c(t), \gamma([t_0,t_1])) < r$$

Démonstration. On se ramène par le théorème de Jordan Schönflies au cas où $V = \mathcal{B}(0,1)$, ou $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_f(0,1)$

Dans les deux cas, un chemin en arc de cercle suivi d'une ligne droite pour ajuster la norme convient □

Figure 4 – Le chemin entre u et v dans V
u et v sont les points rouges, le chemin en pointillé



5 Le théorème

Théorème des retours

Un lacet γ à retours finis délimite $r(\gamma)$ composantes connexes bornées

Démonstration. Soit γ un lacet à retours finis

Montrons la propriété suivante par récurrence finie sur $n \in [\![0, r(\gamma)]\!]$

$$\mathcal{H}(n) : r_\gamma(t_n) + 1 = |C_\gamma(t_n)|$$

Le cas $n = 0$ est évident car $\mathbb{R}^2 \backslash \{\gamma(0)\}$ est connexe par arcs et non borné

Supposons $\mathcal{H}(n)$ pour un $n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$
Notons $x = \gamma(t_n)$ et $y = \gamma(t_{n+1})$
Par le Lemme 2, on se donne $V \in C_\gamma(t_n)$ tel que $\gamma(]t_n, t_{n+1}[) \subset V$

Remarquons d'abord que γ est injective sur $[t_n, t_{n+1}[$: en effet si il existait $t \neq t' \in [t_n, t_{n+1}[$ tels que $\gamma(t) = \gamma(t')$, on aurait alors comme $\gamma(t) \in I_\gamma(t_{n+1}) \backslash I_\gamma(t_n)$, et $S(\gamma(t), t_{n+1}) \geq 2$, $r_\gamma(t_{n+1}) \geq 2 + r_\gamma(t_n)$ ce qui est absurde par la propriété 3

On montre d'abord que $V \backslash \gamma([t_n, t_{n+1}])$ n'est pas connexe :

— Cas 1 : Si $y \notin \gamma(]t_n, t_{n+1}[)$
On a donc $y \in \gamma([0, t_n])$
Il existe alors un chemin à retours finis de y à x dans $\gamma([0, t_n])$, obtenu en suivant le tracé du lacet
On se donne alors c un chemin injectif de y à x par le Lemme 4
On construit alors une courbe de Jordan α en concaténant c à $\gamma_{|[t_n, t_{n+1}]}$, car c ne rencontre pas $\gamma(]t_n, t_{n+1}[)$ car $\mathrm{Fr}(V) \subset \gamma([0, t_n])$ et que $\gamma(]t_n, t_{n+1}[) \subset V$

Soit $t \in]t_n, t_{n+1}[$
Comme $\gamma(t) \in V$, V est un voisinage de $\gamma(t)$
Or $\gamma(t) \in \alpha$ et est donc sur la frontière de la composante interne U délimitée par α, et externe U'
Donc V, en tant que voisinage de $\gamma(t)$, rencontre U et U'
Soient $u \in V \cap U$ et $u' \in V \cap U'$
Considérons un chemin de u à u' dans V
Comme U et U' sont deux composantes connexes distinctes de $\mathbb{R}^2 \backslash \alpha$ et que ce chemin va de l'une à l'autre, il rencontre $\mathrm{Fr}(U) = \alpha$
Comme ce chemin est inclus dans V, il rencontre $\alpha \cap V = \gamma(]t_n, t_{n+1}[)$
Donc u et u' sont dans deux composantes connexes distinctes de $V \backslash \gamma([t_n, t_{n+1}])$
$V \backslash \gamma([t_n, t_{n+1}])$ a donc au moins 2 composantes connexes par arc

— Cas 2 : si $y \in \gamma(]t_n, t_{n+1}[)$
On se donne $t' \in [t_n, t_{n+1}]$ tel que $\gamma(t') = y$
Comme $\gamma_{|[t_n, t_{n+1}[}$ est injective, $\gamma_{|[t', t_{n+1}]}$ est une courbe de Jordan
On note U sa composante interne
Soit $t \in]t', t_{n+1}[$
On a alors $\gamma(t) \in \mathrm{Fr}(U)$ et $\gamma(t) \in V$
Donc V rencontre U et la composante externe délimitée par $\gamma_{|[t', t_{n+1}]}$
Puis de même manière que précedemment, on en déduit que $V \backslash \gamma([t_n, t_{n+1}])$ a au moins 2 composantes connexes par arc

Puis on montre que $V\backslash\gamma(]t_n, t_{n+1}[)$ a exactement 2 composantes connexes par arcs

— Cas 1 : On reprend les notations précedentes
Montrons d'abord que $V \cap U \in C_\gamma(t_{n+1})\backslash C_\gamma(t_n)$
En utilisant la propriété 2, il suffit de montrer que $V \cap U$ est connexe par arcs, car par construction on a $\gamma([t_n, t_{n+1}]) \subset \mathrm{Fr}(V \cap U)$
Soient C_1, C_2 des composantes connexes par arcs de $V \cap U$
On a alors que $C_1, C_2 \in C_\gamma(t_{n+1})\backslash C_\gamma(t_n)$, donc $\gamma(]t_n, t_{n+1}]) \cap \mathrm{Fr}(C_1) \neq \varnothing$ et de même pour C_2
Mais alors par le Lemme 5, il existe un chemin de C_1 à C_2 ne rencontrant pas $\gamma([t_n, t_{n+1}])$ et à une distance arbitraire de cet ensemble
Donc comme $V \cap U$ est ouvert, il existe un chemin de C_1 à C_2 dans $V \cap U$, donc $C_1 = C_2$
Donc $V \cap U$ est connexe par arcs

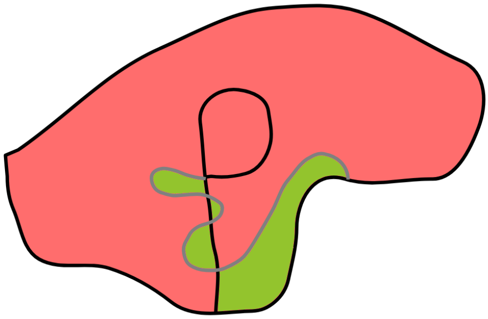
On raisonne de même manière pour $V \cap U'$
On a alors, comme $(V \cap U) \sqcup (V \cap U') = V\backslash\alpha = V\backslash\gamma([t_n, t_{n+1}])$, qu'il s'agit des deux uniques composantes connexes de $V\backslash\gamma([t_n, t_{n+1}])$

— Cas 2 : Notons que dans ce cas, $n \neq r(\gamma) - 1$: en effet, si on avait $n = r(\gamma)$, alors $y = \gamma(0)$ et donc $y \in \gamma([0, t_n])$, ce qui n'est pas le cas ici
Il existe donc un chemin à retours finis de y à $\gamma([0, t_n])$ exploitant le tracé du lacet à venir, soit $\gamma_{|[t_{n+1},1]}$
Puis il existe, de ce point de $\gamma([0, t_n])$ un chemin à retours finis vers x dans $\gamma([0, t_n])$, obtenu en suivant le tracé du lacet
On se donne alors un chemin injectif c, d'abord de y à un point de $\gamma([0, t_n])$ dans $\gamma([t_{n+1}, 1])$ puis de ce point à x dans $\gamma([0, t_n])$ par le Lemme 4

On peut alors construire des courbes de Jordan, exploitant $\gamma([t_n, t'])$ et c, car c est injectif et rencontre $\gamma([t_n, t'])$ un nombre fini de fois car γ est à retours finis

On peut alors tenir un raisonnement similaire au Cas 1, en utilisant le Lemme 5 pour construire des chemins proches de $\gamma([t_n, t'])$ dans $V\backslash\gamma([t_n, t_{n+1}])$ entre des points de $V \cap U'$, ou U' est la composante externe délimitée par la courbe de Jordan $\gamma_{|[t', t_{n+1}]}$
On construit également de tels chemins entre des points de $V \cap U'$, mais également $V \cap U$ par le Lemme 5, mais cette fois proches de $\gamma([t', t_{n+1}])$ car il s'agit de l'image d'une courbe de Jordan, et à valeur dans $V\backslash\gamma([t_n, t_{n+1}])$
Au total, comme pour $C \in C_\gamma(t_{n+1})\backslash C_\gamma(t_n)$, on a $\mathrm{Fr}(C) \cap \gamma(]t_n, t_{n+1}]) \neq \varnothing$, on conclut en reprenant le raisonnement du Cas 1, que les composantes connexes de $V\backslash\gamma([t_n, t_{n+1}])$ sont $V \cap U$ et $V \cap U'$

Figure 5 – Le chemin injectif de y à $\gamma([0,t_n])$ dans $\gamma([t_{n+1},1])$, cas 2
Le chemin est en gris. Les composantes connexes internes des différentes courbes de Jordan construites sont en vert



Puis en utilisant les lemmes de préservation et d'apparition

$$\begin{aligned}
|C_\gamma(t_{n+1})| &= |(C_\gamma(t_{n+1})\backslash C_\gamma(t_n)) \sqcup (C_\gamma(t_{n+1}) \cap C_\gamma(t_n))| \\
&= 2 + |C_\gamma(t_n)| - 1 \\
&= r_\gamma(t_n) + 2 \\
&= r_\gamma(t_{n+1}) + 1
\end{aligned}$$

Au total par récurrence, on obtient $|C_\gamma(t_{r(\gamma)})| = |C_\gamma(1)| = r(\gamma)+1$
Par le Lemme 3, $\mathbb{R}^2\backslash\gamma$ possède donc $r(\gamma)$ composantes connexes bornées

$\square$