TIPE - Connexité et lacets à intersection dans le plan

1er juin 2024

Résumé

Le théorème de Jordan est un théorème phare en topologie, connu notamment pour son énoncé intuitif, contrastant avec les outils nécessaires pour aboutir à une démonstration de ce dernier. Dans ce TIPE, on définit formellement la notion d'autointersection pour des chemins, et on aboutit à un théorème généralisant celui de Jordan, permettant de quantifier le nombre de composantes connexe par arcss du complémentaire dans le plan de certains lacets

1 Définitions usuelles et notations

Dans tout le document, on notera $\sqcup$ les unions disjointes

Définition

Un chemin de x à y est une application $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

Si γ est un chemin, on dénotera également son image par γ

Définition

Un lacet est un chemin γ tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$

Définition

Une courbe de Jordan est un lacet injectif sur $[0,1[$

Le théorème de Jordan s'énonce alors comme

Théorème de Jordan

Soit γ une courbe de Jordan
Alors $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ a deux composantes connexes par arcs ouvertes, l'une bornée, l'autre non, ayant toutes deux pour frontière γ

Le théorème suivant vient compléter l'information donnée par le théorème de Jordan

Théorème de Jordan-Schönflies

Soit γ une courbe de Jordan
Notons V sa composante bornée
Il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui même, tel que l'image de V par ce dernier soit $\mathcal{B}(0,1)$ et celle de γ soit $\mathcal{S}(0,1)$

Ajouter illustration des deux théroèmes ici

Ces résultats portant uniquement sur des courbes de Jordan, on se demande alors : que se passerait-il si on affaiblissait l'hypothèse d'injectivité ?

2 Problème

On va ici développer des outils pour quantifier à quel point un lacet "s'autointersecte", et définir un ensemble de lacets particuliers

Définition 1

Soit γ un chemin
On note

$$I_\gamma = \{x \in \gamma \mid \exists t_1 \neq t_2 \in [0,1], x = \gamma(t_1) = \gamma(t_2)\}$$

l'ensemble des intersections de γ

Définition 2

Soit $x \in I_\gamma$
Si $\gamma^{-1}(\{x\})$ est fini, on note $S(x)$ le "nombre de sorties" de x l'entier suivant

$$S(x) = |\gamma^{-1}(\{x\})|$$

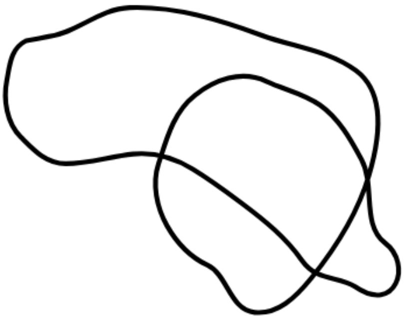
Définition 3

Soit γ un chemin
Si I_γ est fini et pour tout $x \in I_\gamma$, $S(x)$ est défini, on dira que γ est à retours finis et on note le nombre de retours

$$r(\gamma) = \sum_{x \in I_\gamma} (S(x) - 1)$$

Notons que selon ces définitions, $\gamma(0)$, le point ou le lacet se referme, compte comme une intersection, donc $\gamma(0) \in I_\gamma$
Le nombre de lacets du lacet figure 1 est alors de 4
Le lacet de la figure 2 n'est pas à retours finis car possède un nombre infini d'intersections distinctes

Figure 1 – Un exemple de lacet à retours finis



Notons que le lacet figure 1 délimite 4 composantes connexes par arc bornées
On cherchera alors à montrer le théorème suivant

Théorème des retours

Soit γ un lacet à retours finis
γ délimite $r(\gamma)$ composantes connexes par arcs bornées

L'idée générale de la démonstration sera basée sur le constat suivant : lorsque l'on trace le lacet, à la main par exemple, chaque fois que le nombre de retours augmente, une nouvelle composante connexe par arcs est créée. On formalisera par la suite ce constat

3 Connexité par arcs dans le plan

Avant de démontrer le théorème, on se dote d'abord de quelques propriétés utiles des connexes par arc de $\mathbb{R}^2$

3.1 Une géneralisation des valeurs intermédiaires

On montre ici une propriété très utile, connue sous le nom de "théorème du passage à la douane", dont l'énoncé généralise le théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 1

Soit A un connexe par arcs et $B \subset \mathbb{R}^2$ tel que $A \cap B \neq \varnothing$ et $A \backslash B \neq \varnothing$
Alors $A \cap \text{Fr}(B) \neq \varnothing$

Démonstration. Soient $x \in A \backslash B$, $y \in A \cap B$
Soit c un chemin de x à y dans A par connexité par arcs
Donc $c(0) \in A \backslash B$, on peut alors considérer

$$t_0 = \sup\{t \in [0,1] \mid c(t) \in A \backslash B\}$$

Si $t_0 \neq 0$ et $t_0 \neq 1$:
Alors :

$$\forall s \in]0, t_0[, \exists t \in]s, t_0[, c(t) \in A \backslash B \tag{1}$$

et

$$\forall t \in]t_0, 1[, c(t) \in A \cap B \tag{2}$$

Par continuité de c et (2) et (3) toute boule ouverte centrée en $c(t_0)$ rencontre $A \cap B$ et $A \backslash B$
On obtient alors que $c(t_0) \in \text{Fr}(A \cap B) \subset \text{Fr}(B)$

Si $t_0 = 0$, on a juste (3) et le fait que toute boule centrée en $c(0)$ contient $c(0)$ et rencontre donc $A \backslash B$.
On aboutit alors au même résultat
Si $t_0 = 1$ même chose, mais avec (2)

□

3.2 Composantes connexes par arcs d'un ouvert

Proposition 2

Soit V un ouvert
Ses composantes connexes par arcs sont ouvertes

Démonstration. Si V est connexe par arcs, on a déjà le résultat

Si V ne l'est pas, notons $\mathcal{C}$ l'ensemble de ses composantes et prenons $U \in \mathcal{C}$
Supposons par l'absurde que U n'est pas ouvert, soit $U \cap \mathrm{Fr}(U) \neq \varnothing$
Soit $x \in U \cap \mathrm{Fr}(U)$
Comme $U \subset V$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset V$, et on a également comme $\mathcal{B}(x, r) \backslash U \neq \varnothing$
Comme

$$V = \bigcup_{U' \in \mathcal{C}} U'$$

il existe donc $U' \in \mathcal{C} \backslash \{U\}$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \cap U' \neq \varnothing$
$\mathcal{B}(x, r)$ étant connexe par arcs inclus dans V et rencontrant U et U', il existe un chemin dans V de U à U', ce qui est absurde car ces deux composantes connexes par arcs sont distinctes

Donc U est ouvert □

Après cette proposition, on considèrera que toutes les composantes connexes par arc manipulées seront des ouverts

Proposition 3

Soit U un ouvert et $(V_i)_{i \in I}$ ses composantes connexes par arc
On a

$$\bigcup_{i \in I} \mathrm{Fr}(V_i) \subset \mathrm{Fr}(U)$$

Démonstration. Soit $i \neq j \in I$
Notons que $\overline{V_i} \subset \mathbb{R}^2 \backslash V_j$
En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait un point dans $\overline{V_i}$ et V_j
V_j est un voisinage de ce point, étant un ouvert, et ainsi rencontre V_i
Or ce sont des composantes distinctes, ce qui justifie l'inclusion

Puis, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}(U) &= \overline{U}\backslash U \\
&= \left(\overline{\bigsqcup_{i\in I} V_i}\right)\backslash U \\
&\supset \left(\bigcup_{i\in I} \overline{V_i}\right)\backslash\left(\bigsqcup_{i\in I} V_i\right) \\
&= \bigcup_{i\in I}\left(\overline{V_i}\bigcap_{j\in I}\mathbb{R}^2\backslash V_j\right) \\
&= \bigcup_{i\in I}\overline{V_i}\cap\mathbb{R}^2\backslash V_i \\
&= \bigcup_{i\in I}\mathrm{Fr}(V_i)
\end{aligned}$$

□

Proposition 4

Soit U un ouvert et V une composante connexe par arcs de U
Soit A un connexe par arcs tel que $A\subset U$ et $A\cap V\neq\varnothing$
Alors $A\subset V$

Démonstration. Supposons par l'absurde que ce soit faux
Ainsi A rencontre V et son complémentaire
Par connexité et la proposition 1, A rencontre $\mathrm{Fr}(V)$
Par la Proposition 3, $\mathrm{Fr}(V)\subset\mathrm{Fr}(U)\subset\mathbb{R}^2\backslash U$ car U est ouvert
Donc A rencontre le complémentaire de U, absurde par inclusion

Donc $A\subset V$ □

Proposition 5

Soit $A\subset\mathbb{R}^2$ tel que

$$A=\bigsqcup_{i\in I} V_i$$

où les $(V_i)_{i\in I}$ sont des ouverts connexes par arcs
Les composantes connexes par arcs de A sont les $(V_i)_{i\in I}$

Démonstration. Soit $i\in I$
Comme A s'écrit comme union de ses composantes connexes par arcs, il existe U une composante connexe par arcs de A tel que $U\cap V_i\neq\varnothing$

Par la Proposition 4, $V_i \subset U$

Supposons que $U \neq V_i$, donc U rencontre le complémentaire de V_i dans A
Donc U rencontre $\mathrm{Fr}(V_i)$
Donc il existe $x \in A \cap \mathrm{Fr}(V_i)$
Comme V_i est ouvert et par partition, $x \notin V_i$ et donc il existe $j \in I$, $j \neq i$ tel que $x \in V_j$
V_j étant ouvert, il s'agit d'un voisinage de x
Or tout voisinage de x rencontre V_i, donc $V_i \cap V_j \neq \varnothing$, absurde

Donc $U = V_i$ □

3.3 Construction de chemins particuliers

Proposition 6

Soit α un chemin à retours finis de x à y, où $x \neq y$
Il existe β un chemin injectif de x à y tel que $\beta \subset \alpha$

Démonstration. On écrit $I_\alpha = \{z_1, ..., z_n\}$, où $n = |I_\alpha|$
Montrons par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$, qu'il existe un chemin β_k à retours finis de x à y tel que $I_{\beta_k} \subset \{z_{k+1}, ..., z_n\}$
On a pour $k = 0$, que $\beta_k = \alpha$ convient

Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![0, n-1]\!]$
On se donne alors β_k tel que $I_{\beta_k} \subset \{z_{k+1}, ..., z_n\}$
Si $I_{\beta_k} = \varnothing$, β_k convient pour le rang $k+1$

Sinon, on suppose sans perte de géneralité que $z_{k+1} \in I_{\beta_k}$
On définit alors, comme $\beta_k^{-1}(\{z_{k+1}\})$ est un compact par continuité :

$$t_k^- = \min(\beta_k^{-1}(\{z_{k+1}\})) \text{ et } t_k^+ = \max(\beta_k^{-1}(\{z_{k+1}\}))$$

On définit alors

$$c : \begin{array}{ccl} [0, 1-(t_k^+ - t_k^-)] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \beta_k(t) & \text{si } t \in [0, t_k^-] \\ \beta_k(t + t_k^+ - t_k^-) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

et

$$\beta_{k+1} : \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & c(t(1-(t_k^+ - t_k^-))) \end{array}$$

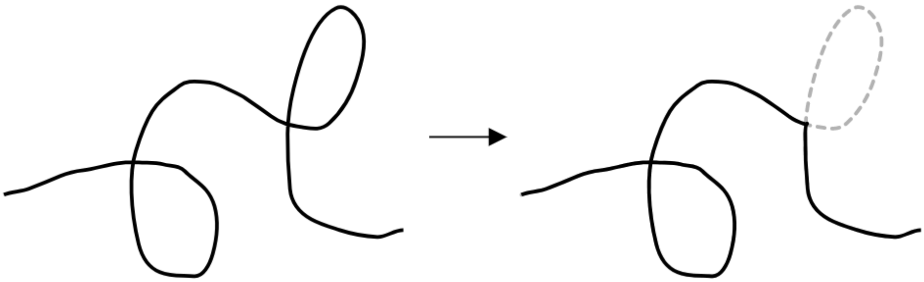
$[0, 1-(t_k^+ - t_k^-)]$ n'est pas réduit à un point car $x \neq y$, donc $t_k^+ - t_k^- < 1$
β_{k+1} est bien continue car $c(t_k^-) = c(t_k^+) = z_{k+1}$
Puis, $z_{k+1} \notin I_{\beta_{k+1}}$: en effet, par minimalité et maximalité de t_k^- et t_k^+, on a pour $t \in [0, 1-(t_k^+ - t_k^-)]$, $t \neq t_k^-$, que $c(t) \neq z_{k+1}$

Comme $\beta_{k+1} \subset \beta_k$, on a bien $I_{\beta_{k+1}} \subset \{z_{k+2}, ..., z_n\}$

Donc il existe bien un chemin β de x à y injectif, en appliquant la propriété au rang n ($I_\beta = \varnothing$)

$\square$

FIGURE 2 – Illustration de la construction de β_{k+1} à partir de β_k



Proposition 7

Soit γ une courbe de Jordan, $x, y \in \gamma$
On écrit $x = \gamma(t_0)$ et $y = \gamma(t_1)$ et on suppose $t_0 < t_1$
Soit V une des composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$
Pour tout $R > 0$, il existe $r \in]0, R[$ tel que pour tout $u \in \mathcal{B}(x, r) \cap V$ et $v \in \mathcal{B}(y, r) \cap V$, il existe un chemin c de u à v dans V vérifiant

$$\forall t \in [0, 1], d(c(t), \gamma([t_0, t_1])) < R$$

Démonstration. On étudie d'abord le cas où V est soit égal à $\mathcal{B}(0, 1)$, soit le complémentaire de $\mathcal{B}_f(0, 1)$
Dans les deux cas un chemin en arc de cercle puis ligne droite pour ajuster la norme convient, pour tout points u, v choisis
Notons que ce chemin existe existe pour tout $R > 0$ et est bien à une distance inférieure à R de l'arc de cercle allant de x à y

On se donne par le Théorème de Jordan-Schönflies φ un homéomorphisme vérifiant les hypothèses du théorème relatives à γ, c'est à dire envoyant la composante bornée de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ sur $\mathcal{B}(0, 1)$
On se donne x, y définis comme dans l'énoncé de la proposition et $R > 0$
Enfin, l'ensemble $\bigcup_{t \in [t_0, t_1]} \mathcal{B}(\gamma(t), R)$ étant borné, on se donne K un compact le contenant

$\varphi(K)$ étant compact et φ^{-1} étant continue, on se donne par uniforme continuité $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x', y') \in K^2, \|\varphi(x') - \varphi(y')\| < \delta \Longrightarrow \|x' - y'\| < R$$

Puis, on se donne par compacité de K et continuité de φ, $r > 0$ tel que

$$\forall (x', y') \in K^2, \|x' - y'\| < r \Longrightarrow \|\varphi(x') - \varphi(y')\| < \delta$$

Soient $u \in \mathcal{B}(x, r) \cap V$ et $v \in \mathcal{B}(y, r) \cap V$
Donc par ce qui précède, $\varphi(u) \in \mathcal{B}(\varphi(x), \delta) \cap \varphi(V)$ et de même pour v
Comme on s'est ramené au cas de la boule, on se donne un c vérifiant les hypothèses par ce qui précède, soit

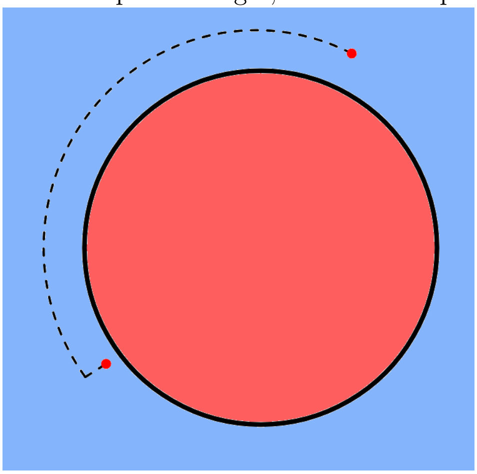
$$\forall t \in [0,1], d(c(t), \varphi \circ \gamma([t_0, t_1])) < \delta$$

car un des deux arcs de cercles reliant $\varphi(x)$ à $\varphi(y)$ correspond à l'image de $\gamma([t_0, t_1])$ par définition de φ
Comme pour $t \in [0,1]$, $d(c(t), \varphi \circ \gamma([t_0, t_1]))) = \inf_{t' \in [t_0, t_1]} \|c(t) - \varphi \circ \gamma(t')\|$, que $\varphi \circ \gamma$ est continue, et $[t_0, t_1]$ est compact, il existe $z(t) \in \varphi \circ \gamma([t_0, t_1])$ tel que
$d(c(t), \varphi \circ \gamma([t_0, t_1])) = \|c(t) - z(t)\| < \delta$
Donc, en revenant à V, on obtient par ce qui précède,

$$d(\varphi^{-1} \circ c(t), \gamma([t_0, t_1])) \leq \|\varphi^{-1}(c(t)) - \varphi^{-1}(z(t))\| < R$$

$\square$

Figure 3 – Le chemin entre u et v dans V
u et v sont les points rouges, le chemin en pointillé



4 Etude des lacets à retours finis

On formalise enfin l'intution qu'on a en tracant le lacet
On se fixe dans cette partie γ un lacet à retours finis

4.1 Définitions

Définition 4

On définit pour $t \in [0,1]$ le nombre de sorties à l'instant t

$$\forall x \in I_\gamma, S(x,t) = |\gamma^{-1}(\{x\}) \cap [0,t]|$$

et, en notant $I_\gamma(t) = I_\gamma \cap \gamma([0,t])$

$$r_\gamma(t) = \sum_{x \in I_\gamma(t)} S(x,t) - 1$$

Notons qu'il s'agit des définitions précedemment données, appliquées au chemin $\gamma_{|[0,t]}$ pour $t \in [0,1]$

Définition 5

Soit $t \in [0,1]$
On note $C_\gamma(t)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0,t])$

On a donc par cette définition que $|C_\gamma(1)|$ correspond à l'ensemble des composantes connexes par arc du complémentaire de γ dans le plan

4.2 Subdivision minimale

On montre ici une propriété essentielle à la formalisation de notre intuition concernant le tracé des lacets à retours finis

Proposition 8

r_γ est une fonction en escalier. De plus, la subdivision minimale associée à r_γ, $(t_n)_{0\leq n\leq r(\gamma)}$ vérifie

$$\forall n \in [\![0, r(\gamma)-1]\!], r_\gamma(t_{n+1}) = 1 + r_\gamma(t_n)$$

et

$$\forall n \in [\![1, r(\gamma)]\!], \gamma(t_n) \in I_\gamma(t_n)$$

Démonstration. Notons que pour tout $x \in I_\gamma$, $t \longmapsto S(x,t)$ est croissante
Donc r_γ est croissante
De plus elle ne prend que des valeurs entières et est bornée, elle est alors en escalier

Supposons qu'elle ne le soit pas, alors pour toute subdivision $(t_n)_{0\leq n\leq p}$ de $[0,1]$, il existe $n \in [\![0, p-1]\!]$ tel que r_γ ne soit pas constante sur $]t_n, t_{n+1}[$
Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, r_γ prend k valeurs distinctes
C'est évident pour $k = 1$
Supposons la propriété vraie au rang $k \in \mathbb{N}$
Notons $v_0 < ... < v_{k-1} \in \mathbb{N}$ les k premières valeurs prises par r_γ (bien défini car r_γ est à valeurs entières)
On pose alors $(t_n)_{0\leq n\leq k}$ telle que

$$\forall n \in [\![0, k-1]\!], t_n = \inf\{t \in [0,1] \mid r_\gamma(t) = v_n\}$$

et $t_k = 1$

Comme r_γ est croissante on a $t_0 \leq t_1 < ... < t_k$ (on peut si $t_0 = t_1$ remplacer la subdivision en n'en gardant qu'un)
On a alors, par croissance que r_γ est constante sur les $]t_n, t_{n+1}[$ pour $n \in [\![0, k-2]\!]$, en effet si elle y prenait d'autres valeurs, il s'agirait nécessairement par définition des (t_n) d'une valeur strictement supérieure à v_{k-1}, mais cela contredirait la croissance
On a de plus $r_\gamma(t_0) \leq r_\gamma(t_1) < r_\gamma(t_2) < ... < r_\gamma(t_{k-1}) < r_\gamma(t_k)$:
Les inégalités strictes de 1 à $k-1$ viennent de la définition des (t_n) comme borne inférieure et de la croissance de r_γ
La dernière inégalité stricte vient du fait que r_γ est nécessairement non constante sur $]t_{k-1}, t_k[$ par ce qui précède
Donc r_γ prend k valeurs distinctes

On a bien montré la propriété par récurrence
Mais alors, comme ces valeurs sont entières, r_γ est non bornée, absurde

Considérons alors $(t_n)_{0\leq n\leq p}$ la subdivision minimale associée à r_γ
Montrons d'abord que

$$\forall n \in [\![0,p]\!], \forall t < t_n, r_\gamma(t) < r_\gamma(t_n) \tag{3}$$

Supposons que non
Donc il existe $n \in [\![0,p]\!]$ et $t < t_n$ tel que $r_\gamma(t_n) \leq r_\gamma(t)$
Comme r_γ est croissante on a

$$\forall t' \in [t, t_n[, r_\gamma(t') = r_\gamma(t_n)$$

Puis on utilise la minimalité de (t_n) :
- Si $n = p$, c'est absurde car $r_\gamma(t) < r(\gamma)$ pour $t \in [0, 1[$
- Sinon, alors par minimalité, r_γ doit prendre une valeur strictement plus grande que $r_\gamma(t_n)$ sur $]t_n, t_{n+1}[$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $r_\gamma(t_n + \varepsilon) > r_\gamma(t_n)$, donc par définition de r_γ, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in I_\gamma \cap \gamma(]t_n, t_n + \varepsilon[)$ tel que $S(x, t_n + \varepsilon) > 2$
On a donc trouvé une infinité d'intersections, absurde car γ est à retours finis
On a bien la propriété annoncée
Cela implique en particulier que r_γ est constante sur les $[t_n, t_{n+1}[$

Montrons ensuite qu'il existe $t \in [t_n, t_{n+1}[$ tel que

$$\sum_{x \in I_\gamma(t_{n+1}) \setminus \gamma([0,t])} S(x, t_{n+1}) - 1 = 0$$

Il suffit de remarquer que $I_\gamma(t_{n+1})$ étant fini, il existe $t \in [t_n, t_{n+1}[$ tel que $|I_\gamma(t_{n+1}) \setminus \gamma([0,t])| \leq 1$
Si l'ensemble est vide, c'est terminé
Sinon, $\gamma(t_{n+1}) \notin \gamma([0, t_{n+1}[)$, donc $S(\gamma(t_{n+1}, t_{n+1})) = 1$
Donc la somme vaut bien 0

Enfin, on considère un tel $t \in [t_n, t_{n+1}[$
On a donc d'après ce qui précède

$$r_\gamma(t_{n+1}) - r_\gamma(t) = \sum_{x \in I_\gamma(t)} S(x, t_{n+1}) - S(x, t) \geq 1$$

Il existe donc un $x \in I_\gamma(t)$ tel que $S(x, t_{n+1}) > S(x, t)$
Par minimalité de la subdivision, on a que $S(x, t') = S(x, t)$ pour $t \leq t' < t_{n+1}$ (le cas contraire le nombre de retours aurait augmenté entre t_n et t_{n+1})
Donc nécessairement $x = \gamma(t_{n+1})$, ce qui montre que ce x est unique

De plus il vient que

$$|\gamma^{-1}\{x\} \cap [0, t_{n+1}]| = 1 + |\gamma^{-1}\{x\} \cap [0, t_{n+1}[|$$

Donc

$$\forall t' \in [t, t_{n+1}[, S(x, t_{n+1}) = 1 + S(x, t')$$

Donc comme ce x est unique, on a

$$\forall t' \in [t, t_{n+1}[, r_\gamma(t_{n+1}) = 1 + r_\gamma(t)$$

Or r_γ est constante sur $[t_n, t_{n+1}[$ par les résultats précédents on a $r_\gamma(t_{n+1}) = 1 + r_\gamma(t_n)$
Puisque r_γ prends des valeurs de $r_\gamma(0) = 0$ à $r_\gamma(t_p) = r(\gamma)$, on en déduit que $p = r(\gamma)$

□

Corollaire 1

Pour tout $n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$, $\gamma(]t_n, t_{n+1}[)$ ne rencontre pas $\gamma([0, t_n])$

Démonstration. Soit $t \in]t_n, t_{n+1}[$
Supposons par l'absurde que $\gamma(t) \in \gamma([0, t_n])$
Alors $S(\gamma(t), t_{n+1}) - S(\gamma(t), t_n) \geq 1$, et par la Proposition 8, comme $\gamma(t_{n+1}) \in I_\gamma(t_{n+1})$, $S(\gamma(t_{n+1}), t_{n+1}) \geq 2$, donc $r_\gamma(t_{n+1}) \geq 2 + r_\gamma(t_n)$, absurde

□

Corollaire 2

Pour tout $n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$, γ est injective sur $]t_n, t_{n+1}[$

Démonstration. Soit $x \in \gamma$
Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \neq t_2 \in]t_n, t_{n+1}[$ tels que $x = \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$
Donc $S(x, t_{n+1}) \geq 2$ et par la Proposition 8, $S(\gamma(t_{n+1}), t_{n+1}) \geq 2$
Au total on a $r_\gamma(t_{n+1}) \geq 2 + r_\gamma(t_n)$, absurde □

4.3 Résultats sur C_γ

Proposition 9

Soit $t \in [0, 1]$, et V un ouvert de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0, t])$, connexe par arcs
On a

$$V \in C_\gamma(t) \iff \mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0, t])$$

Démonstration. Sens direct :

On a, comme $\gamma([0,t])$ est fermé par continuité :

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(\mathbb{R}^2\backslash\gamma([0,t])) &= \overline{\mathbb{R}^2\backslash\gamma([0,t])}\cap\gamma([0,t])\\ &\subset \gamma([0,t])\end{aligned}$$

Puis par la Proposition 3, on pour $V \in C_\gamma(t)$, comme $\gamma([0,t])$ est fermé,
$\mathrm{Fr}(V) \subset \mathrm{Fr}(\mathbb{R}^2\backslash\gamma([0,t])) \subset \gamma([0,t])$

Sens réciproque :
On raisonne par contraposée

Si $V \notin C_\gamma(t)$
Comme $V \subset \mathbb{R}^2\backslash\gamma([0,t])$, il existe $U \in C_\gamma(t)$ tel que $V \cap U \neq \varnothing$
Donc $V \subsetneq U$ par la Proposition 4, et donc U rencontre V et son complémentaire
Donc par connexité par arcs et la Proposition 1 de U, $U \cap \mathrm{Fr}(V) \neq \varnothing$, et donc
$\mathrm{Fr}(V) \not\subset \gamma([0,t])$ car $U \cap \gamma([0,t]) = \varnothing$

□

Proposition 10

Pour tout $t \in [0,1]$, il n'existe qu'un seul $V \in C_\gamma(t)$ non borné

Démonstration. Comme $[0,t]$ est compact et γ continue, $\gamma([0,t])$ est borné
Soit $r > 0$ tel que $\gamma([0,t]) \subset \mathcal{B}(0,r)$
$\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{B}(0,r)$ est ainsi une partie connexe non bornée de $\mathbb{R}^2\backslash\gamma$
Donc il existe $V \in C_\gamma(t)$ contenant cet ensemble, et donc non borné

Soit $U \in C_\gamma(t)$ non bornée
U rencontre alors $\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{B}(0,r)$, donc $U \cap V \neq \varnothing$, donc $U = V$
On a bien l'unicité □

On se fixe pour les trois prochains lemmes $a, b \in [0,1]$ tels que $a < b$, et on suppose qu'il existe $V \in C_\gamma(a)$ tel que $\gamma(]a,b[) \subset V$

Lemme de préservation

Les composantes connexes par arcs du complémentaire dans le plan de $\gamma([0,a])$ distinctes de V, sont également des composantes connexes par arcs du compléementaire de $\gamma([0,b])$, et réciproquement. En d'autres termes

$$C_\gamma(a) \cap C_\gamma(b) = C_\gamma(a)\backslash\{V\}$$

Démonstration. Montrons d'abord que $C_\gamma(a)\backslash\{V\} \subset C_\gamma(b) \cap C_\gamma(a)$

Notons d'abord que $\gamma(b) \in \overline{V}$: en effet par continuité, on a $\gamma(b) = \lim_{t\to b^-} \gamma(t)$
Soit $U \in C_\gamma(a) \backslash \{V\}$
On a $\overline{V} \cap U = \varnothing$: si ce n'était pas le cas, il existerait un point de $\overline{V}$ dans U. Comme U est ouvert, il est voisinage de ce point, or tout voisinage de ce point rencontre U
Or $V \cap U = \varnothing$ et donc $\overline{V} \cap U = \varnothing$

Enfin, U est connexe par arcs, $\mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0,b])$, et

$$\gamma([0,b]) \cap U = (\gamma([0,a]) \cap U) \cup (\gamma(]a,b]) \cap U) = \varnothing$$

car $\gamma(]a,b]) \subset \overline{V}$
Par la Proposition 9, $U \in C_\gamma(b)$, donc $C_\gamma(a) \backslash \{V\} \subset C_\gamma(b) \cap C_\gamma(a)$

Réciproquement, si $U \in C_\gamma(a) \cap C_\gamma(b)$, alors $U \neq V$:
En effet, $V \notin C_\gamma(b)$ car $V \cap \gamma(]a,b[) \neq \varnothing$
On a bien $C_\gamma(a) \cap C_\gamma(b) = C_\gamma(a) \backslash \{V\}$ □

Lemme 1

Soit γ un lacet à retours finis, et $a < b \in [0,1]$
On suppose qu'il existe $V \in C_\gamma(a)$ tel que $\gamma(]a,b[) \subset V$ et $\gamma(b) \notin V$
Pour tout $U \in C_\gamma(b) \backslash C_\gamma(a)$, on a

$$\mathrm{Fr}(U) \cap \gamma(]a,b[) \neq \varnothing$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\mathrm{Fr}(U) \cap \gamma(]a,b[) = \varnothing$
$\gamma(b)$ est l'unique point de $\mathrm{Fr}(U)$ dans $\gamma(]a,b])$
Comme $\gamma(]a,b[) \subset V$ et par continuité de γ, $\gamma(b) \in \mathrm{Fr}(V)$
Par la Proposition 9, $\gamma(b) \in \gamma([0,a])$

Par cette même propriété, $\mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0,b])$
Or par hypothèse et ce qui précède, on a donc $\mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0,a])$
Donc, comme U est connexe et $U \cap \gamma([0,a]) \subset U \cap \gamma([0,b]) = \varnothing$, on a $U \in C_\gamma(a)$
Absurde □

Lemme d'apparition

Soit γ un lacet à retours finis, et $a < b \in [0,1]$
On suppose qu'il existe $V \in C_\gamma(a)$ tel que $\gamma(]a,b[) \subset V$
Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des composantes connexes par arc de $V \backslash \gamma([a,b])$
On a

$$C_\gamma(b) \backslash C_\gamma(a) = \mathcal{C}$$

Démonstration. Montrons d'abord $C_\gamma(b)\backslash C_\gamma(a) \subset \mathcal{C}$

Soit $U \in C_\gamma(b)\backslash C_\gamma(a)$
Donc par la Proposition 9, $\mathrm{Fr}(U) \cap \gamma(]a,b]) \neq \varnothing$
Si $\gamma(b) \in V$, alors $\overline{U} \cap V \neq \varnothing$
Si $\gamma(b) \notin V$, $\mathrm{Fr}(U) \cap \gamma(]a,b[) \neq \varnothing$ par le Lemme 1

Donc au total $\overline{U} \cap V \neq \varnothing$
Comme V est un voisinage de tout ses points, et que tout voisinage d'un point de $\overline{U}$ rencontre U, on a $U \cap V \neq \varnothing$
Donc $U \subset V$ par la Proposition 4, car $U \in C_\gamma(b)$

Donc $U \subset V\backslash\gamma([a,b])$ car $U \cap \gamma([a,b]) = \varnothing$
Comme U est connexe par arcs, par la Proposition 4 il existe $U' \in \mathcal{C}$ tel que $U \subset U'$
Si $U'\backslash U \neq \varnothing$ par la Proposition 1, par connexité de U', U' rencontre $\mathrm{Fr}(U)$ donc $\gamma([0,b])$
Or $U' \subset V\backslash\gamma([a,b])$ et $V \cap \gamma([0,a]) = \varnothing$, donc c'est absurde
Donc $U' = U$
On a bien $C_\gamma(b)\backslash C_\gamma(a) \subset \mathcal{C}$

Réciproquement, soit $U \in \mathcal{C}$
Donc U est connexe par arcs, $U \subset V\backslash\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^2\backslash\gamma([0,b])$, et Montrons que $\mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0,b])$
On a d'abord

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}(V\backslash\gamma([a,b])) &= \overline{V\backslash\gamma([a,b])}\backslash(V\backslash\gamma([a,b])) \\
&= \overline{V\backslash\gamma([a,b])} \cap (\mathbb{R}^2\backslash V \cup \gamma([a,b])) \\
&\subset (\mathrm{Fr}(V) \cap \overline{\mathbb{R}^2\backslash\gamma([a,b])}) \cup (\gamma([a,b]) \cap \overline{V\backslash\gamma([a,b])}) \\
&\subset \gamma([0,b])
\end{aligned}$$

Puis, par la Proposition 3, on a $\mathrm{Fr}(U) \subset \mathrm{Fr}(V\backslash\gamma([a,b]))$
Donc $\mathrm{Fr}(U) \subset \gamma([0,b])$
Donc $U \in C_\gamma(b)$ par la Proposition 9
Puis, $U \notin C_\gamma(a)$, car $U \subsetneq V$ et $V \in C_\gamma(a)$
Donc $U \in C_\gamma(b)\backslash C_\gamma(a)$

On a bien $\mathcal{C} = C_\gamma(a)\backslash C_\gamma(b)$ □

On montre ensuite que dans le cas de la subdivision minimale, un tel V existe toujours

Proposition 11

Soit γ un lacet à retours finis et (t_n) la subdivision minimale associée à r_γ
Soit $n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$
Il existe $V \in C_\gamma(t_n)$ tel que $\gamma(]t_n, t_{n+1}[) \subset V$

Démonstration. Comme $C_\gamma(t_n)$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs délimitées par $\gamma([0, t_n])$ on a

$$\bigcup_{V \in C_\gamma(t_n)} V = \mathbb{R}^2 \backslash \gamma([0, t_n])$$

Donc par ce qui précède il existe $V \in C_\gamma(t_n)$ tel que $\gamma(t) \in V$

Donc $\gamma(]t_n, t_{n+1}[)$ est connexe par arcs, et rencontre $V \in C_\gamma(t_n)$
De plus $\gamma(]t_n, t_{n+1}[) \cap \gamma([0, t_n]) = \varnothing$ par ce qui précède
Donc par la Proposition 4, on a $\gamma(]t_n, t_{n+1}[) \subset V$ □

5 Le théorème

Nous avons à présent tout les outils pour démontrer le théorème

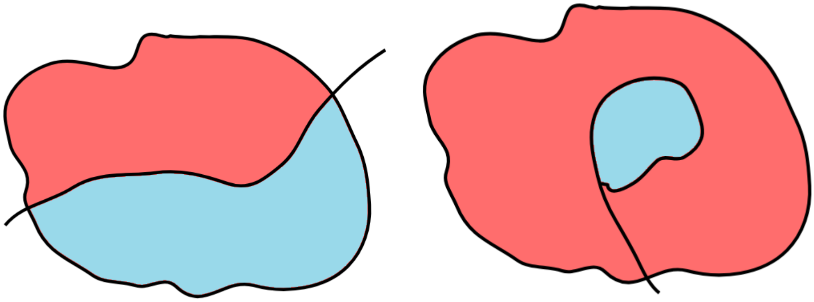
5.1 Les cas d'augmentation

On se fixe γ un lacet à retours finis
On se donne (t_n) la subdivision minimale adaptée à r_γ
On distingue 2 cas d'augmentation du nombre de retours de t_n à t_{n+1} de la subdivision minimale

Dans le premier cas, le lacet "traverse" une composante connexe par arcs déjà présente
Dans le second, le lacet forme une boucle à l'intérieur d'une autre composante connexe par arcs
Ils sont ici représentés par des composantes bornées, mais cette disjonction s'applique aussi lorsque le lacet traverse une composante non bornée

Plus formellement, pour $n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$ on a :
- Cas 1 : Soit $\gamma(t_{n+1}) \notin \gamma(]t_n, t_{n+1}[)$
- Cas 2 : Soit $\gamma(t_{n+1}) \in \gamma(]t_n, t_{n+1}[])$

Figure 4 – Les différents cas



5.2 La démonstration

Théorème des retours

Un lacet γ à retours finis délimite $r(\gamma)$ composantes connexes par arcs bornées

Démonstration. Soit γ un lacet à retours finis
Montrons la propriété suivante par récurrence finie sur $n \in [\![0, r(\gamma)]\!]$

$$\mathcal{H}(n) : r_\gamma(t_n) + 1 = |C_\gamma(t_n)|$$

Le cas $n = 0$ est évident car $\mathbb{R}^2 \backslash \{\gamma(0)\}$ est connexe par arcs et non borné

Supposons $\mathcal{H}(n)$ pour un $n \in [\![0, r(\gamma) - 1]\!]$
Notons $x = \gamma(t_n)$ et $y = \gamma(t_{n+1})$
Par la Proposition 11, on se donne $V \in C_\gamma(t_n)$ tel que $\gamma(]t_n, t_{n+1}[) \subset V$

Montrons alors que $V \backslash \gamma([t_n, t_{n+1}])$ a exactement 2 composantes connexes par arc

— Cas 1 : Si $y \notin \gamma(]t_n, t_{n+1}[)$
  On a donc $y \in \gamma([0, t_n])$
  Il existe alors un chemin à retours finis de y à x dans $\gamma([0, t_n])$, obtenu en suivant le tracé du lacet
  On se donne alors c un chemin injectif de y à x par la Proposition 6
  On construit alors une courbe de Jordan α en concaténant c à $\gamma_{|[t_n, t_{n+1}]}$, par les Corollaires 1 et 2

  Montrons que $V \cap U$ et $V \cap U'$ sont les composantes connexes par arcs de $V \backslash \gamma([t_n, t_{n+1}])$
  Montrons d'abord que $V \cap U$ est connexe par arcs

  Pour cela, considérons C_1 et C_2 deux composantes connexes par arcs de $V \cap U$ et montrons qu'elles appartiennent à $C_\gamma(t_{n+1}) \backslash C_\gamma(t_n)$

On mène pour cela une démonstration très similaire au Lemme d'apparition, en exploitant le fait que $\mathrm{Fr}(V \cap U) \cap V = \gamma(]t_n, t_{n+1}[)$ par construction

Par le Lemme 1, $\mathrm{Fr}(C_1) \cap \gamma(]t_n, t_{n+1}[) \neq \varnothing$ et de même pour C_2
On se donne alors $t \leq t' \in]t_n, t_{n+1}[$ tels que $\gamma(t)$ et $\gamma(t')$ appartiennent respectivement à ces intersections
Comme $\gamma([t, t']) \subset V$ et est compact, on se donne $r > 0$ tel que pour tout point de $\gamma([t, t'])$, la boule centrée en ce point de rayon r est incluse dans V
Comme $\gamma(t)$ et $\gamma(t')$ sont des points frontière, il existe dans tout voisinage de ces points respectivement des points de C_1 ou C_2
Par ce qui precède et la Proposition 7, il existe donc un chemin dans $V \cap U$ de C_1 à C_2 et donc $C_1 = C_2$
$V \cap U$ est bien connexe par arcs et par le même raisonnement $V \cap U'$ également

Par la Proposition 5, comme ce sont des ouverts connexes par arc formant une partition de $V \backslash \gamma([t_n, t_{n+1}])$, il s'agit de ses composantes connexes par arc

— Cas 2 : si $y \in \gamma(]t_n, t_{n+1}[)$
On se donne $t' \in [t_n, t_{n+1}]$ tel que $\gamma(t') = y$
Comme $\gamma_{|[t_n, t_{n+1}[}$ est injective par le Corallaire 2, $\gamma_{|[t', t_{n+1}]}$ est une courbe de Jordan
On note U sa composante bornée et U' celle non bornée

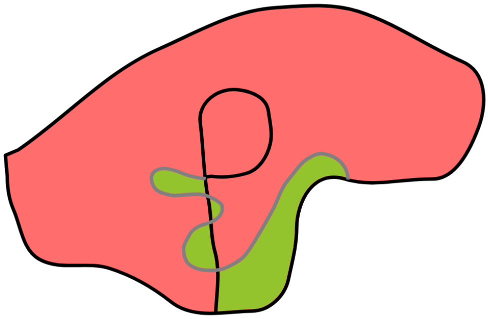
Notons que dans ce cas, $n \neq r(\gamma) - 1$: en effet, si on avait $n = r(\gamma)$, alors $y = \gamma(0)$ et donc $y \in \gamma([0, t_n])$, ce qui n'est pas le cas ici
Il existe donc un chemin à retours finis de y à $\gamma([0, t_n])$ exploitant le tracé du lacet à venir, soit $\gamma_{|[t_{n+1}, 1]}$
Puis il existe, de ce point de $\gamma([0, t_n])$ un chemin à retours finis vers x dans $\gamma([0, t_n])$, obtenu en suivant le tracé du lacet
On se donne alors un chemin injectif c, d'abord de y à un point de $\gamma([0, t_n])$ dans $\gamma([t_{n+1}, 1])$ puis de ce point à x dans $\gamma([0, t_n])$ par la Proposition 6

On peut alors construire des courbes de Jordan, exploitant $\gamma([t_n, t'])$ et c, car c est injectif et rencontre $\gamma([t_n, t'])$ un nombre fini de fois car γ est à retours finis

On peut alors tenir un raisonnement similaire au Cas 1, en utilisant la Proposition 7 pour construire des chemins proches de $\gamma([t_n, t'])$ dans $V \backslash \gamma([t_n, t_{n+1}])$ entre des points de $V \cap U'$, ou U' est la composante non bornée délimitée par la courbe de Jordan $\gamma_{|[t', t_{n+1}]}$
On construit également de tels chemins entre des points de $V \cap U'$, mais également $V \cap U$ par la Proposition 7, mais cette fois proches de $\gamma([t', t_{n+1}])$ car il s'agit de l'image d'une courbe de Jordan, et à valeur dans $V \backslash \gamma([t_n, t_{n+1}])$
Au total, comme pour $C \in C_\gamma(t_{n+1}) \backslash C_\gamma(t_n)$, on a $\mathrm{Fr}(C) \cap \gamma(]t_n, t_{n+1}]) \neq \varnothing$, on conclut en reprenant le raisonnement du Cas 1, que les composantes connexes par

arcs de $V\backslash\gamma([t_n, t_{n+1}])$ sont $V \cap U$ et $V \cap U'$

Figure 5 – Le chemin injectif de y à $\gamma([0, t_n])$ dans $\gamma([t_{n+1}, 1])$, cas 2
Le chemin est en gris. Les composantes connexes par arcs bornées des différentes courbes de Jordan construites sont en vert



Puis en utilisant les lemmes de préservation et d'apparition

$$\begin{aligned}|C_\gamma(t_{n+1})| &= |(C_\gamma(t_{n+1})\backslash C_\gamma(t_n)) \sqcup (C_\gamma(t_{n+1}) \cap C_\gamma(t_n))| \\ &= 2 + |C_\gamma(t_n)| - 1 \\ &= r_\gamma(t_n) + 2 \\ &= r_\gamma(t_{n+1}) + 1\end{aligned}$$

Au total par récurrence, on obtient $|C_\gamma(t_{r(\gamma)})| = |C_\gamma(1)| = r(\gamma) + 1$
Par la Proposition 10, $\mathbb{R}^2\backslash\gamma$ possède donc $r(\gamma)$ composantes connexes bornées

$\square$