

Estructuras

Estructuras

ESTRUCTURAS

CONTENIDO:

1. Descripción y elementos de estructuras sencillas
2. Cargas. Tipos de apoyos y uniones.
3. Cálculos básicos en estructuras
4. Cálculo de esfuerzos en vigas.
5. Cálculo de esfuerzos en estructuras de barras articuladas.
 - 5.1 Método de los nudos
 - 5.2. Método de las secciones (Ritter)
 - 5.3 Método gráfico de Cremona

IES EL MAJUELO. DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍA.



Versión imprimible

Aquí tienes la versión en PDF del recurso, por si quieras trabajar con ella para añadir anotaciones.

1. Descripción y elementos de estructuras sencillas

Conceptos básicos sobre las estructuras

Las estructuras son conjuntos de elementos unidos entre sí capaces de soportar las fuerzas que actúan sobre ellas, conservando su forma.

Recordamos algunos conceptos básicos sobre las estructuras, que utilizaremos en esta unidad.

Cargas

Las fuerzas que actúan sobre las estructuras se denominan **cargas** o acciones.

Reacciones

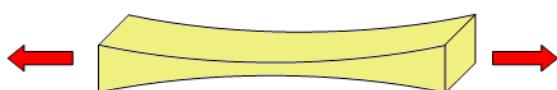
Para mantenerse en equilibrio con las fuerzas que actúan sobre ellas, las estructuras, según el principio físico de acción y reacción, tienen que contraponer otras fuerzas iguales y de sentido contrario. Al conjunto de fuerzas con las que las estructuras reaccionan ante las cargas se las denomina **reacciones**. Las fuerzas de reacción se ejercen en los puntos por donde las estructuras están sujetas (**apoyos**), o bien por donde se unen los diferentes elementos de las mismas (**uniones**).

Esfuerzos

Al aplicar cargas sobre una estructura, aparecen unas tensiones o fuerzas internas en los elementos de la estructura que se denominan **esfuerzos**. Los diferentes esfuerzos que puede soportar una estructura son los siguientes:

Axil de tracción

El esfuerzo de tracción tiende a **estirar** la estructura:



Ejemplos de elementos que soportan este esfuerzo son: cañeras de un cisternario, cable de una grúa, etc.

Axil de compresión

El esfuerzo de compresión tiende a **comprimir** la estructura:



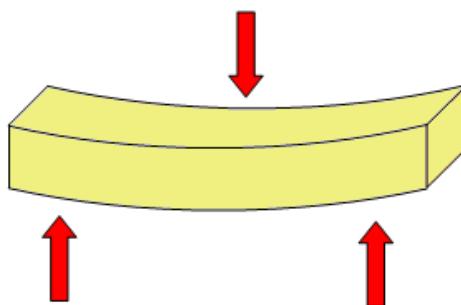
Ejemplos de elementos que soportan este esfuerzo son: patas de una silla, columnas de un edificio, etc.

<https://www.youtube.com/embed/AI_LQnkxIe0>

https://www.youtube.com/embed/AI_LQnkxIe0 <https://www.youtube.com/embed/AI_LQnkxIe0>

Flector

El esfuerzo flector realiza una flexión de la estructura: tiende a **doblarla**:



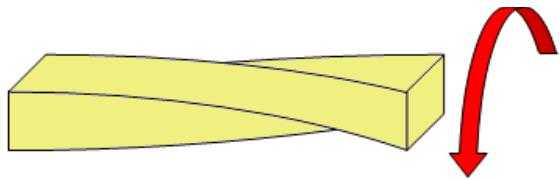
Ejemplos de elementos que soportan este esfuerzo son: tablero de una silla, suelos de edificios, brazo de una grúa,etc.

<<https://www.youtube.com/embed/BPWnjQR2Dg>>

<https://www.youtube.com/embed/BPWnjQR2Dg> <<https://www.youtube.com/embed/BPWnjQR2Dg>>

Torsor

El esfuerzo torsor provoca la torsión. Es decir, tiende a **retorcer** la estructura:



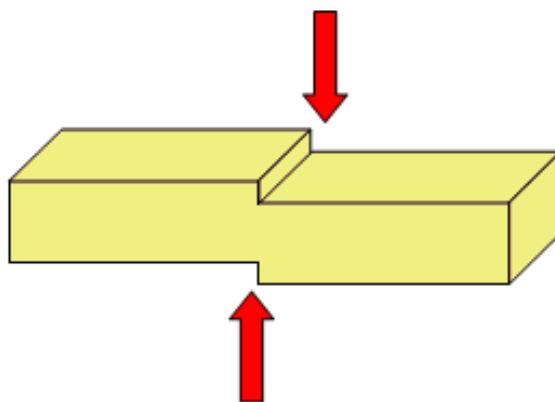
Ejemplos de elementos que soportan este esfuerzo son: eje de un destornillador, llave al girar, eje de un grifo, etc.

<<https://www.youtube.com/embed/SCgqctdD6Rg>>

<https://www.youtube.com/embed/SCgqctdD6Rg> <<https://www.youtube.com/embed/SCgqctdD6Rg>>

Cortante

El esfuerzo cortante tiende a provocar el **corte** o **cizalla** de la estructura:



Ejemplos de elementos que soportan este esfuerzo son: papel cortado con tijeras, escarpia que soporta un cuadro, etc.

<<https://www.youtube.com/embed/-I7wWrBjK7c>>

<https://www.youtube.com/embed/-I7wWrBjK7c> <<https://www.youtube.com/embed/-I7wWrBjK7c>>



Condiciones a cumplir por las estructuras

A las estructuras se les exige **soportar cargas**, **mantener la forma**, **proteger** partes delicadas, ser **ligeras** y sobre todo, ser **estables**. Para ello, toda estructura tiene que cumplir las siguientes **condiciones**:

- **Estabilidad.** Para que la estructura se mantenga erguida y no vuelque, **su centro de gravedad tiene que estar dentro de su base** y lo más **cercano al suelo** posible. Para conseguirlo a veces se tiene que recurrir a acciones como ampliar la base, poner tirantes o empotrar su base inferior al suelo.
- **Resistencia.** Tienen que ser capaces de **soportar las distintas cargas sin romperse**, esto depende de la forma de la estructura y del tipo y de la cantidad de material con que se ha construido, ya que todos los materiales tienen una tensión de rotura determinada, que es la máxima fuerza por unidad de superficie que aguantan sin romperse.
- **Rigidez.** La **deformación** de los elementos no puede ser grande. Esto se consigue cuando la forma de las estructuras es adecuada, soldando las uniones para reforzarlas y con triangulaciones, ya que el triángulo es el único polígono

indeformal. Es por ello que son las formas más empleadas en las estructuras. Las diagonales usadas para triangular se llaman **arriostramientos**. Aún así, toda estructura tiene que tener cierto grado de flexibilidad, ya que tienen que ser capaces de soportar las variaciones debidas a la dilatación y a la contracción de materiales, así como de absorber vibraciones y movimientos sísmicos.

Elementos resistentes en edificación

Las estructuras de edificación se componen de lo que denominamos elementos resistentes, que se pueden clasificar en:

Cimientos o cimentación

Conjunto de elementos estructurales cuya misión es **transmitir las cargas** de la edificación o de elementos apoyados en éste **al suelo**, distribuyéndolas de forma que no superen una serie de valores máximos del terreno de apoyo.

Debido a que la resistencia del suelo es, generalmente, menor que la de los pilares o muros que soportará, el área de contacto entre el suelo y la cimentación será mucho más grande que los elementos soportados. Por ejemplo, un tipo de cimentación muy utilizado son las **zapatas**, que son unos bloques con mucha mayor sección en las bases de los pilares.



Sopores

Elementos **verticales** que soportan fundamentalmente esfuerzos de **compresión**, aunque también parte de cortante y, sobre todo, en los elementos más esbeltos, **pandeo**. Los tipos de sopores más usados son:

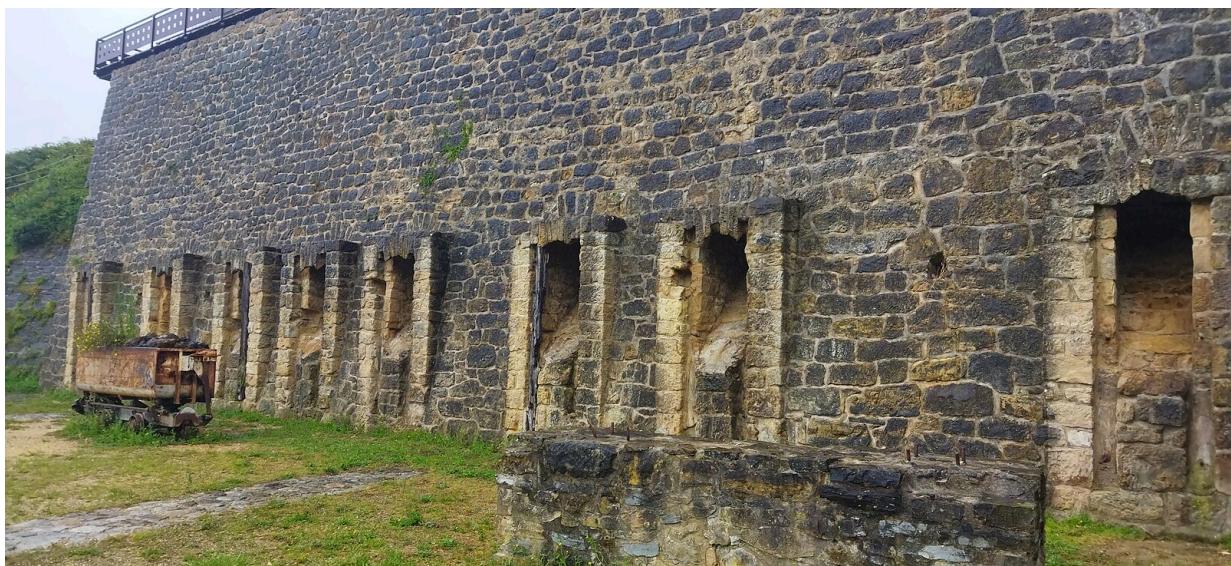
- **Pilares:** son habitualmente de hormigón armado, normalmente ejecutados “in situ”, vertiendo el hormigón en un molde denominado **encofrado**. También pueden ser de acero.
- **Pie derecho:** es como se denomina a los sopores cuando son de **madera**.
- **Columna:** es cualquier soporte de **sección circular**.



Muros de carga o portantes.

Se trata de **paredes** de una edificación que poseen función estructural, es decir, aquellas que **soportan otros elementos** estructurales del edificio, como arcos, bóvedas, vigas o viguetas de forjados o de la cubierta. Soportan fundamentalmente esfuerzos **axiles de compresión**.

Cuando los muros soportan **cargas horizontales**, como las presiones del terreno contiguo, se denominan **muros de contención**. En este caso, soportan esfuerzos flectores y cortantes.



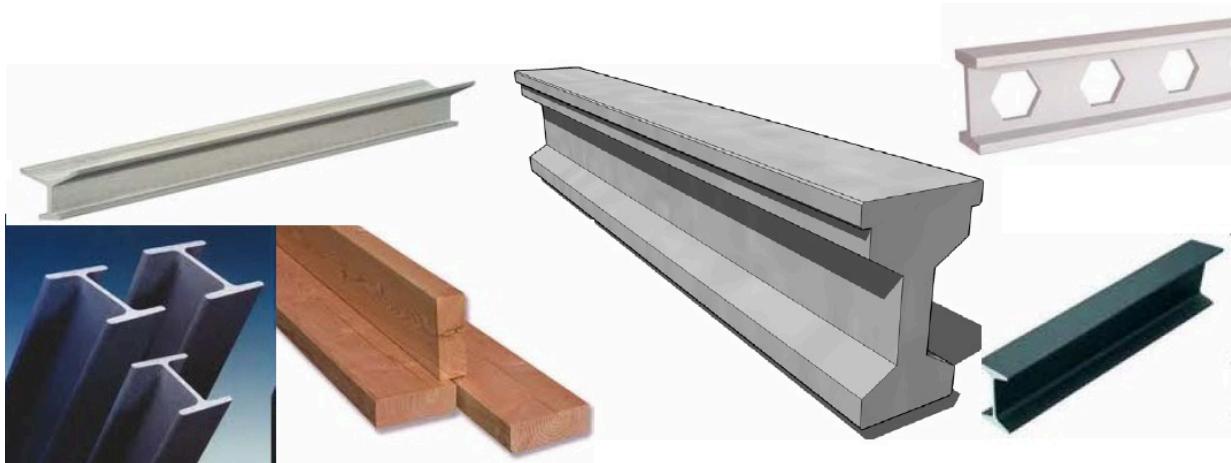
Vigas

Elemento estructural que normalmente se coloca en **posición horizontal** (aunque pueden ser también inclinadas) que se apoya sobre los pilares, destinado a soportar esfuerzos principalmente de **flexión** y de **cortante**.

Las vigas pueden ser de **acero**, de **madera** o de **hormigón armado o prefabricado**.

Hay un tipo de vigas que no se apoyan directamente en los pilares sino en otras vigas más grandes y que forman parte de la superficie de un forjado. Estas vigas se denominan **viguetas**.

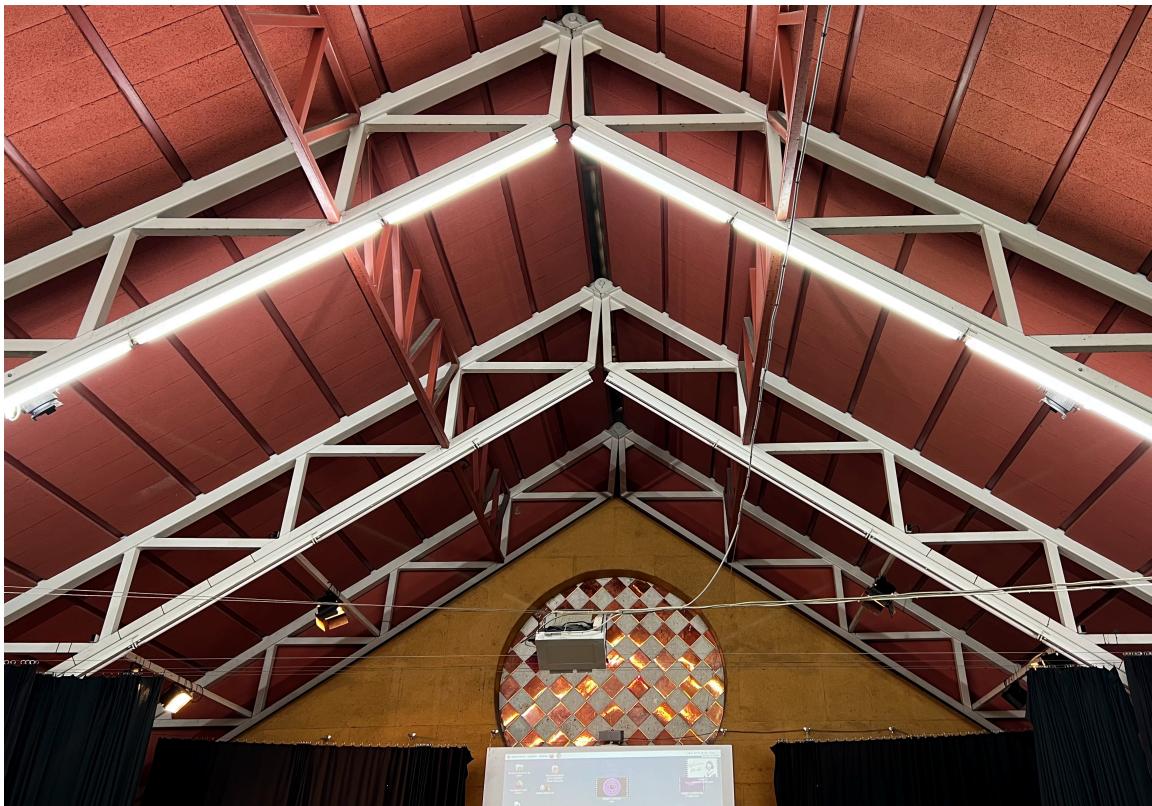
El conjunto vigas-pilares forma lo que denominan **pórticos**.



Cerchas

Una cercha es una **celosía**, una **estructura reticular** de **barras rectas** interconectadas en nodos **formando triángulos planos** (en celosías planas) o **pirámides tridimensionales** (en celosías espaciales). También se les conoce como **armaduras**.

El interés de este tipo de estructuras es que las barras trabajan predominantemente a **compresión** y **tracción**, presentando comparativamente flexiones pequeñas.



Forjados

Se denomina forjado **al elemento estructural, horizontal o inclinado** (en cubiertas), que **soporta su propio peso y las sobrecargas de uso**, tabiquería, dinámicas, etc. Dichas cargas se transmiten al terreno mediante otros elementos de la estructura como vigas, pilares, muros y cimentación.

Forma parte de la estructura horizontal de las diferentes plantas de un edificio, siendo capaz de solidarizar horizontalmente los diversos elementos estructurales, permitiendo no solo transmitir cargas verticales, sino también horizontales. Ello contribuye a aportar rigidez en ese plano horizontal.

Un tipo muy habitual de forjado es el formado por viguetas y bovedillas. En este vídeo tienes una animación de cómo se construye este tipo de forjado:

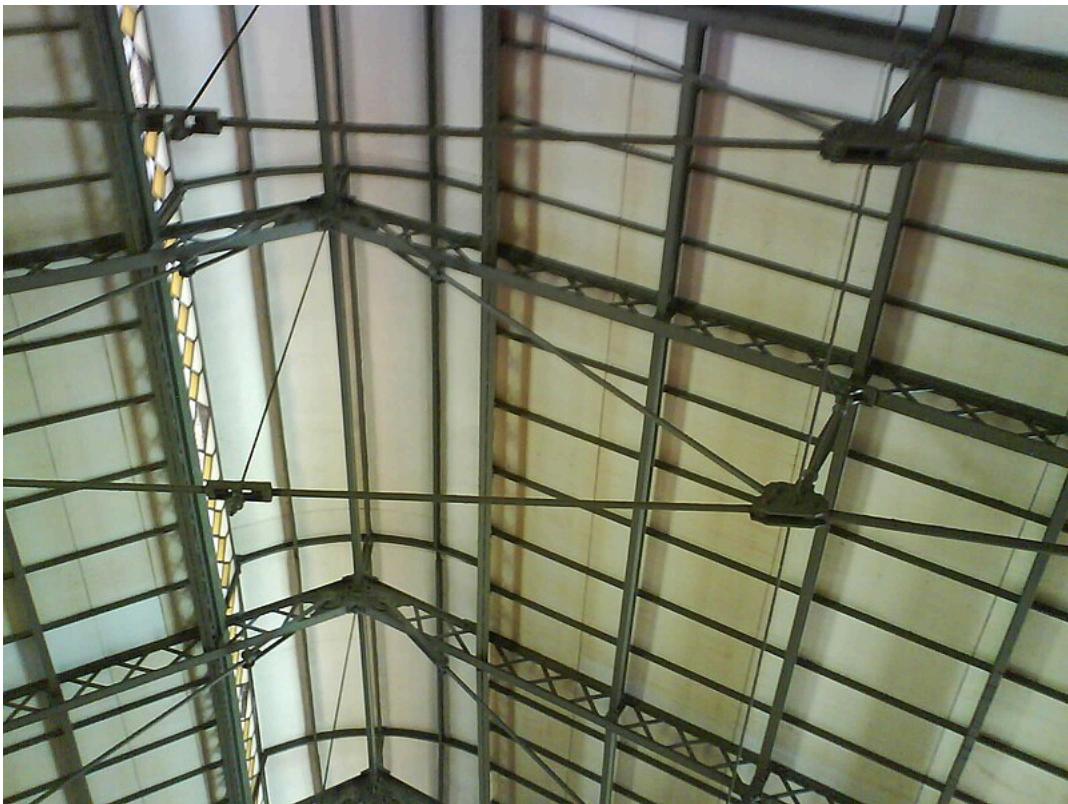
<<https://www.youtube.com/embed/52orJqSKP30>>

<https://www.youtube.com/embed/52orJqSKP30> <<https://www.youtube.com/embed/52orJqSKP30>>

Tirantes

Se usan para unir dos elementos de una estructura o una estructura al terreno. Su principal característica es que trabajan **siempre a tracción**, y no soportan ningún otro esfuerzo que no sea el axil de tracción.

Se fabrican habitualmente de acero, dada su excelente resistencia a la tracción.



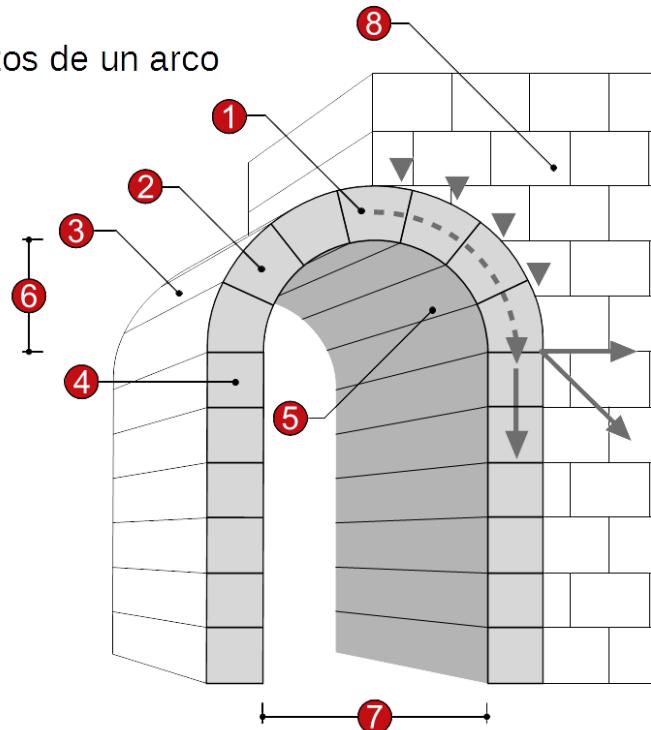
Arcos, bóvedas y cúpulas

Arco

Es un elemento estructural de directriz en forma curvada, que salva el espacio abierto entre dos pilares o muros transmitiendo toda la carga que soporta a los apoyos, mediante una fuerza oblicua que se denomina empuje. Normalmente, está formado por piezas denominadas dovelas.

Se diseña para que el material trabaje predominantemente a **compresión**, lo que permite cubrir distancias importantes con materiales pétreos (que trabajan muy bien a compresión, pero no tanto a flexión)

Elementos de un arco



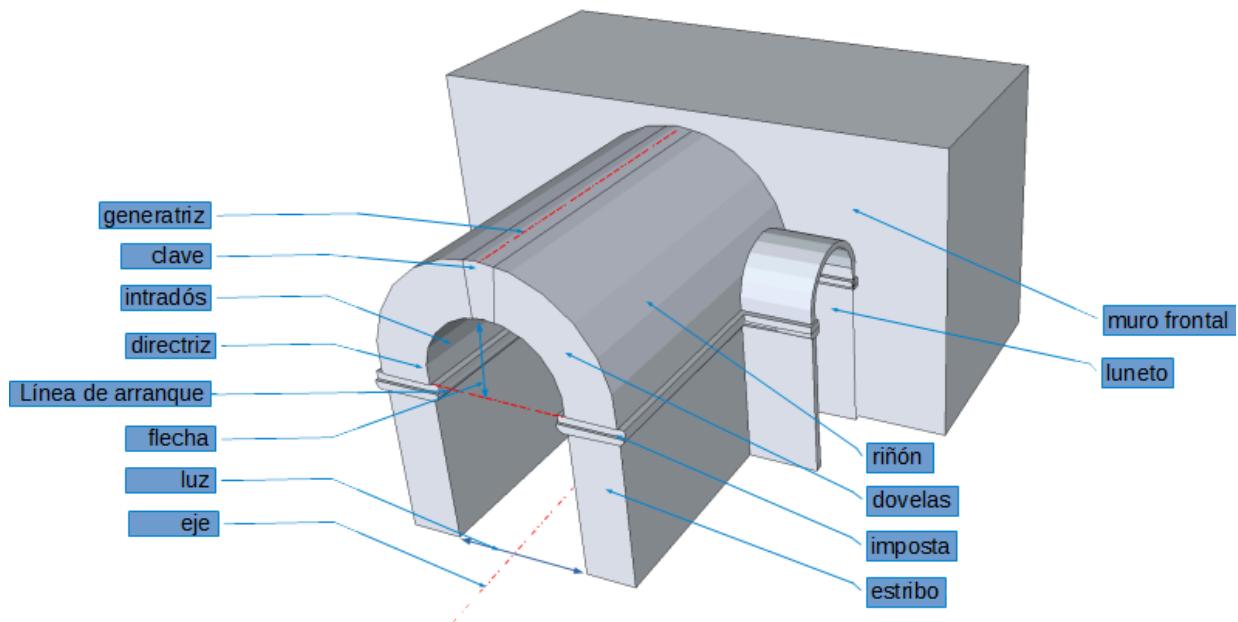
1. Clave 2. Dovela 3. Trasdós 4. Imposta 5. Intradós 6. Flecha 7. Luz, Vano 8. Contrafuerte.

Bóveda

Elemento estructural **superficial**, generalmente elaborado en mampostería o fábrica, en el que sus piezas y componentes trabajan a **compresión**.

Las bóvedas poseen una forma geométrica generada por el **movimiento de un arco a lo largo de un eje**. Por regla general, este elemento constructivo sirve para cubrir el espacio comprendido entre dos muros o una serie de pilares alineados.

Elementos de una bóveda



Cúpula

La cúpula es un elemento estructural que se utiliza para **cubrir un espacio** de planta circular, cuadrada, poligonal o elíptica, mediante arcos de perfil semicircular, parabólico u ovoidal, rotados **respecto de un punto central de simetría**.

Los esfuerzos predominantes son de **tracción** en el sentido de los **paralelos** y de **compresión** en el sentido de los **meridianos**. Estructuralmente funcionan como una lámina de revolución.

En este vídeo puedes ver con más detalle estos tres elementos resistentes:

<https://www.youtube.com/embed/3AE_5Zc3KDw>

https://www.youtube.com/embed/3AE_5Zc3KDw <https://www.youtube.com/embed/3AE_5Zc3KDw>

Dinteles

Es el **elemento superior que permite crear vanos en los muros** para conformar puertas, ventanas o pórticos. Por extensión, el tipo de construcción que utiliza dinteles para cubrir los espacios en los edificios se llama construcción **adintelada**.

Es un tipo de estructura masiva. No hay que confundir los dinteles con las vigas.



Elementos resistentes en maquinaria

Chasis y bastidor

El **chasis** es el **armazón metálico** que sirve de soporte para los elementos de un vehículo (motor, carrocería, etc.). Se trata de la principal estructura de soporte del vehículo.

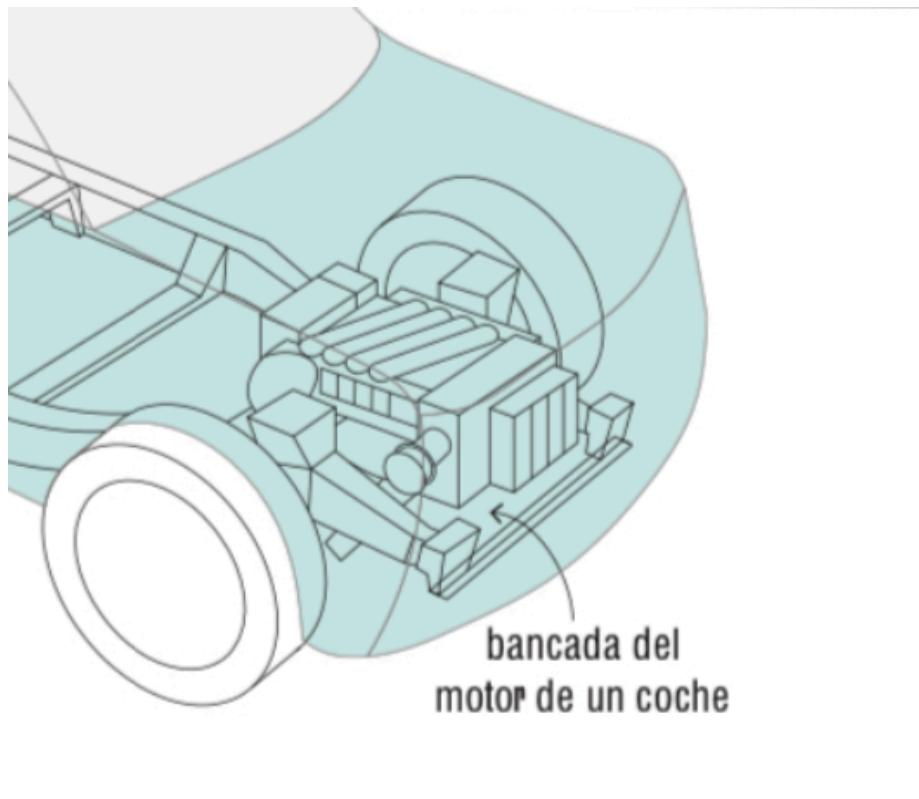
El **bastidor** es la parte más importante del chasis. A partir de la década de 1950, el empleo del bastidor se ha limitado principalmente a los vehículos todo-terreno, camiones, camionetas grandes y algunas camionetas livianas, y se ha sustituido en la mayoría de los automóviles por **carrocerías monocasco**, en las que bastidor y carrocería quedan integrados en un única estructura (generalmente de acero), de la que no pueden separarse.



La función principal del chasis es absorber las cargas mientras mantiene cada elemento en su lugar. Para ello, debe tener buena resistencia a la fatiga, alta rigidez y ligereza.

Bancada

Es la estructura de una máquina herramienta, sobre la que se construye ésta. Sus principales funciones son soportar vibraciones y movimientos, mantener la precisión en el mecanizado de piezas y alojar los mecanismos.



bancada del
motor de un coche

2. Cargas. Tipos de apoyos y uniones

Cargas aplicadas y reacciones

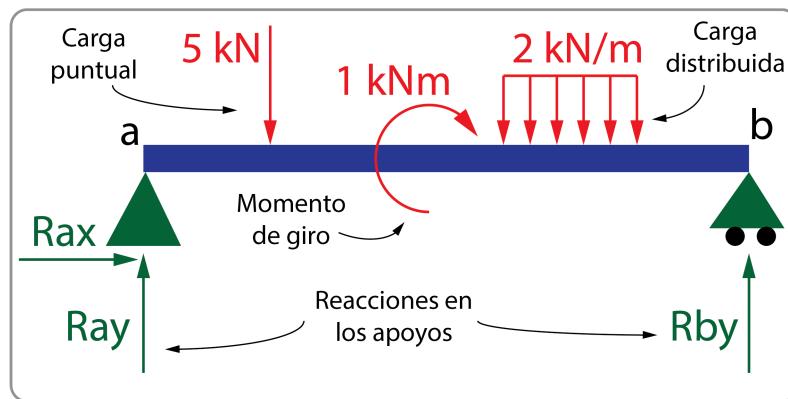
Las **fuerzas** que actúan sobre la estructura se llaman **cargas estructurales** y son causantes de **esfuerzos**, **deformaciones** y **desplazamientos**. Todas tienen que ser incluidas en el cálculo estructural.

Las cargas pueden ser **fijas**, como el propio peso de las estructuras, o **variables**, como el viento.

Como las cargas son fuerzas, se miden en **newtons (N)** en el Sistema Internacional.

Las fuerzas pueden ser **puntuales** (aplicadas en un sólo punto), o **distribuidas** sobre una longitud de la viga (bien de manera constante o siguiendo alguna función o geometría). Por su parte, los **momentos** de giro se aplican siempre en una sección concreta de la viga.

Para mantener el equilibrio estático en la viga, es necesario que se produzcan **reacciones**. La viga no está aislada, estará sujetada en otros elementos (vigas, pilares, suelo, pared...) que generarán, como resultado de las cargas aplicadas, una reacción sobre la viga en forma de fuerzas o momentos.



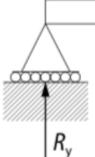
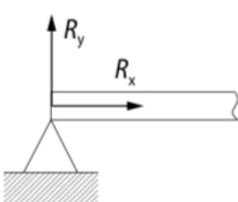
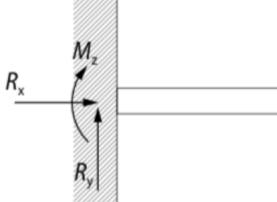
Tipos de apoyos y restricciones

El valor de las reacciones es influido por la magnitud de las cargas aplicadas. Sin embargo, las reacciones también dependen de las **restricciones** presentes en la viga. Lógicamente, no es lo mismo que una viga se deje simplemente apoyada por sus

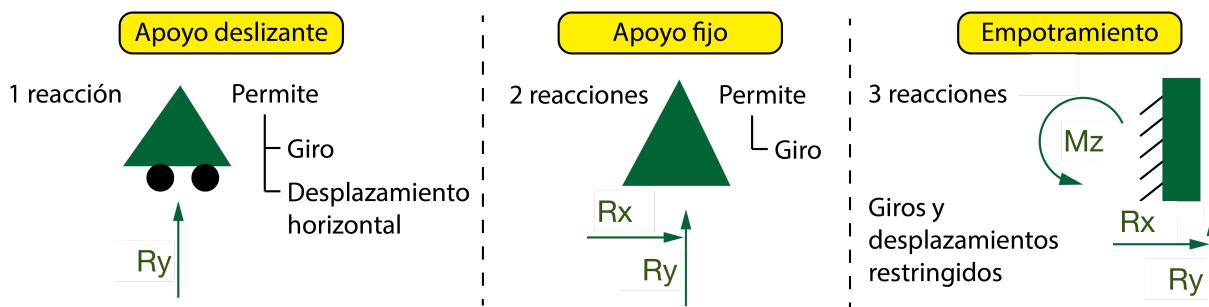
extremos, o que un extremo se introduzca completamente en una pared, empotrándolo. Las **limitaciones de movimiento** que estos distintos **apoyos** introducen en la viga definen sus restricciones.

Vamos a utilizar un sistema de apoyos que simule aquellas restricciones de movimiento que pueden encontrarse en la realidad (apoyar sobre una superficie, empotrar completamente un extremo, fijar una posición...).

De manera general (aunque pueden darse más variantes), **para el cálculo de vigas podemos identificar tres tipos de apoyos:**

| Apoyo deslizante | Apoyo fijo | Empotramiento |
|--|--|--|
|  |  |  |
| <p>Aparece R_y como fuerza vertical de reacción, ya que se impide la translación en la dirección del eje Y.</p> <p>No hay momento de reacción, ya que la rotación está permitida.</p> | <p>Aparecen R_x y R_y como fuerzas de reacción, una en cada eje, ya que se impide la translación en cualquier dirección.</p> <p>No hay momento de reacción, ya que la rotación está permitida.</p> | <p>Aparecen R_x y R_y como fuerzas de reacción, una en cada eje, ya que se impide la translación en cualquier dirección.</p> <p>Aparece el momento de reacción M_z ya que se impide la rotación.</p> |

En resumen:



En este vídeo puedes ver ejemplos en el mundo real de estos tipos de apoyos:

<<https://www.youtube.com/embed/WlriFqjVHNE>>

<https://www.youtube.com/embed/WlriFqjVHNE> <<https://www.youtube.com/embed/WlriFqjVHNE>>

3. Cálculos básicos en estructuras

El análisis estructural es un proceso importante en ingeniería. Las estructuras deben conseguir que las construcciones se sostengan y perduren en el tiempo, es decir, que tengan **estabilidad y resistencia**.

En el diseño de las estructuras es necesario realizar cálculos para garantizar esa estabilidad y resistencia, que podemos simplificar así:

1. Cálculo de la **dimensión** de la estructura para que cumpla su función, analizando las fuerzas que van a actuar sobre ella.
2. Cálculo de la **estabilidad** estructura, de forma que no se sobrepasen ciertos esfuerzos máximos en sus elementos.

Antes de calcular directamente esfuerzos producidos en elementos resistentes, comenzaremos familiarizándonos con algunos conceptos físicos y cálculos sencillos que son de aplicación directa en las estructuras.

Centro de gravedad

El concepto del **centro de gravedad** es fundamental en el diseño de estructuras, en la física, en la ingeniería, y en muchas otras disciplinas que dependen del equilibrio y la estabilidad de los cuerpos.

El centro de gravedad de un cuerpo es el punto en el cual **se puede considerar que está concentrado todo su peso o masa**, en términos de cómo la gravedad actúa sobre él. En otras palabras, es el punto en el que las fuerzas de gravedad que actúan sobre cada una de las partículas que componen el cuerpo se equilibran y suman, permitiendo que **el objeto se comporte como si todo su peso estuviera concentrado en ese lugar**.

Características del centro de gravedad:

1. **Equilibrio:** si un cuerpo se sostiene en su centro de gravedad, este se mantendrá en equilibrio sin inclinarse hacia ningún lado.
2. **Distribución de masa:** la ubicación del centro de gravedad depende de cómo esté distribuida la masa del objeto. En objetos **homogéneos** (con distribución uniforme de masa), el centro de gravedad suele coincidir con el **centro geométrico** del objeto.

3. Posición del centro de gravedad: El centro de gravedad no siempre está dentro del objeto; puede encontrarse fuera del cuerpo, dependiendo de la forma y distribución de su masa. Por ejemplo, en un aro o un anillo, el centro de gravedad está en el centro del espacio vacío.

En un objeto **irregular**, como una silla, el centro de gravedad estará en algún punto dependiendo de cómo esté distribuida su masa, que puede no coincidir con su centro geométrico. Para calcular el centro de gravedad en estos casos, hay que **descomponer el cuerpo en objetos más pequeños** que sí sean homogéneos, y calcular el centro de gravedad así:

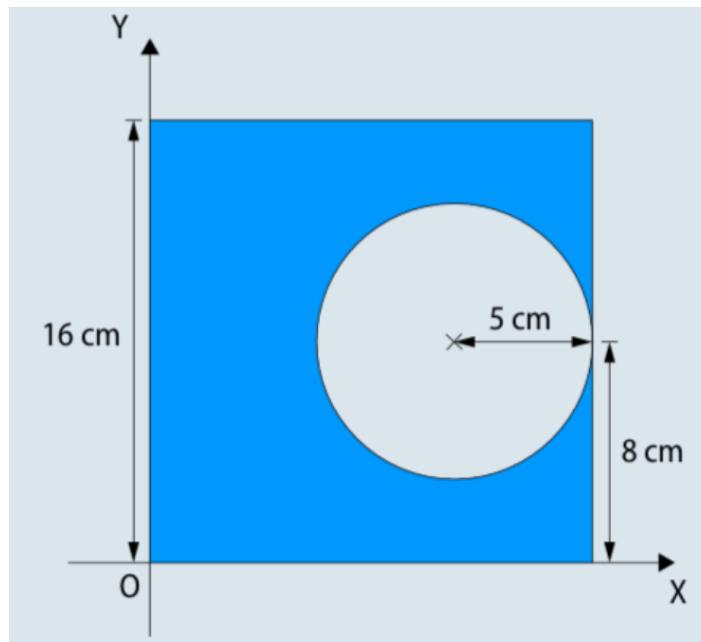
$$X_G = \frac{\sum m_i \cdot X_i}{M} \quad Y_G = \frac{\sum m_i \cdot Y_i}{M}$$

Donde:

- X_G, Y_G : coordenadas del centro de gravedad del cuerpo completo.
- m_i : masa del objeto "i"
- X_i, Y_i : coordenadas del centro de gravedad del objeto "i"
- M : masa total del cuerpo completo.

Si tenemos un cuerpo con orificios, podemos considerar estos como objetos de **masa negativa**, a efectos de calcular el centro de gravedad global.

Halla las coordenadas del centro de gravedad de la chapa cuadrada agujereada de la de la figura:



Llamamos "L" a la longitud de los lados de la chapa ($L = 16 \text{ cm}$) y "r" al radio del orificio ($r = 5 \text{ cm}$).

Podemos calcular fácilmente los centros de gravedad de la chapa sin agujero y del propio agujero.

Por simetría, la posición de dichos CG es **el centro geométrico de cada una de esas figuras:**

- Chapa sin orificio (centro del cuadrado): $X_{CH} = L / 2 = 8 \text{ cm}$; $Y_{CH} = L / 2 = 8 \text{ cm}$.
- Orificio (centro del círculo): $X_O = L - r = 16 - 5 = 11 \text{ cm}$; $Y_O = L / 2 = 8 \text{ cm}$.

La superficie de cada una de esas figuras es la siguiente:

- Chapa sin orificio: $S_{CH} = L \cdot L = 16 \cdot 16 = 256 \text{ cm}^2$
- Orificio: $S_O = -\pi \cdot r^2 = -\pi \cdot 5^2 = -78,54 \text{ cm}^2$

El orificio hay que quitárselo a la chapa, por eso hemos calculado su superficie con un **signo negativo**, para que vaya **restando** en la expresión final (sería como si lo considerásemos con masa o superficie **negativa**)

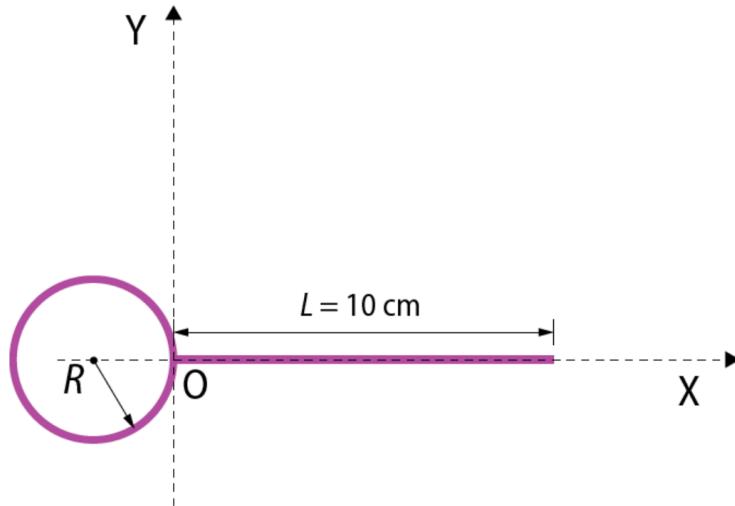
Así, combinando las dos figuras, la posición del centro de gravedad global será la siguiente:

$$X_G = \frac{\sum S_i \cdot X_i}{S} = \frac{S_{CH} \cdot X_{CH} + S_O \cdot X_O}{S_{CH} + S_O} = \frac{256 \cdot 8 - 78,54 \cdot 11}{256 - 78,54} = 6,67 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{\sum S_i \cdot Y_i}{S} = \frac{S_{CH} \cdot Y_{CH} + S_O \cdot Y_O}{S_{CH} + S_O} = \frac{256 \cdot 8 - 78,54 \cdot 8}{256 - 78,54} = 8 \text{ cm}$$

Ejercicio propuesto

1 - Dada la pieza siguiente, realizada en alambre de grosor homogéneo, calcula el radio de la forma circular que hará que el centro de masas del sistema esté justo en el punto de unión de la forma recta y la circular. (*Solución: $R = 22,71 \text{ cm}$*)

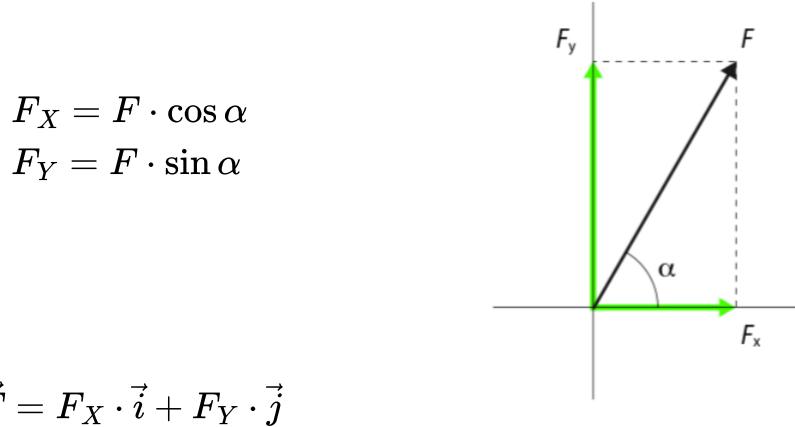


Componentes vectoriales de una fuerza

Las fuerzas son magnitudes vectoriales. Para definir por completo un vector fuerza, necesitamos conocer:

- El valor de su **módulo**.
- El **punto de aplicación**.
- La **dirección** en la que actúa.
- El **sentido** en el que actúa.

Dada una fuerza F cuya dirección forma un ángulo α con el eje horizontal (X), podemos calcular sus proyecciones sobre los ejes cartesianos X e Y de la siguiente forma (para simplificar, consideraremos vectores bidimensionales):



El **módulo** de la fuerza se calcula fácilmente aplicando el teorema de Pitágoras:

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2}$$

La dirección de la fuerza la podemos conocer calculando la pendiente del vector respecto del eje X, es decir, la tangente del ángulo α :

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{F_Y}{F_X}$$

Una persona tira de una cuerda atada a una piedra con una fuerza de 400 N. Si el ángulo que forma la cuerda con la horizontal es de 40° , calcular:

- a. La fuerza que tiende a elevar la piedra
- b. La fuerza que tiende a arrastrar la piedra

Solución

El vector de la fuerza aplicada con un ángulo $\alpha = 40^\circ$ se descompone en dos vectores de fuerza, uno horizontal F_X y otro vertical F_Y .

a. El vector de la fuerza vertical que tiende a **elevar** la piedra será:

$$F_Y = F \cdot \sin \alpha = 400 \cdot \sin 40^\circ = 247,12 \text{ N}$$

b. El vector de la fuerza horizontal que tiende a **arrastrar** la piedra será:

$$F_X = F \cdot \cos \alpha = 400 \cdot \cos 40^\circ = 306,42 \text{ N}$$

Fuerza resultante

Cuando dos o más fuerzas son concurrentes (actúan sobre el mismo punto), podemos sustituir el conjunto de fuerzas por una sola **fuerza resultante** cuya acción será equivalente a la del conjunto.

Para calcular el valor de la fuerza resultante, se descompone cada fuerza en sus componentes F_X , F_Y , y se suman. Desde el punto de vista vectorial:

$$F_{RES} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

$$F_{RES} = (F_{1X} + F_{2X} + \cdots + F_{nX}) \cdot \vec{i} + (F_{1Y} + F_{2Y} + \cdots + F_{nY}) \cdot \vec{j}$$

Tenemos dos fuerzas que se aplican desde un mismo punto, una de valor 100 N y otra de 50 N y cuyas direcciones forman un ángulo entre sí de 60° .

- Calcula el **módulo** del vector de la fuerza resultante.
- Calcula el ángulo que forma la resultante con la primera fuerza.
- Realiza la representación vectorial del sistema.

Solución

Primero expresamos vectorialmente las dos fuerzas, suponiendo que la primera fuerza es horizontal (forma 0° con el eje X) y que, por tanto, la segunda fuerza forma 60° con el eje X (porque están a 60° entre sí):

$$\vec{F}_1 = F_{1X} \cdot \vec{i} + F_{1Y} \cdot \vec{j} = 100 \cdot \cos 0^\circ \cdot \vec{i} + 100 \cdot \sin 0^\circ \cdot \vec{j} = 100 \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_2 = F_{2X} \cdot \vec{i} + F_{2Y} \cdot \vec{j} = 50 \cdot \cos 60^\circ \cdot \vec{i} + 50 \cdot \sin 60^\circ \cdot \vec{j} = 25 \cdot \vec{i} + 25\sqrt{3} \cdot \vec{j}$$

Calculamos la fuerza resultante sumando vectorialmente las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (100 \cdot \vec{i}) + (25 \cdot \vec{i} + 25\sqrt{3} \cdot \vec{j}) = 125 \cdot \vec{i} + 25\sqrt{3} \cdot \vec{j}$$

a. Módulo de la fuerza resultante

El módulo de la fuerza resultante se calcula ya directamente al tener el vector:

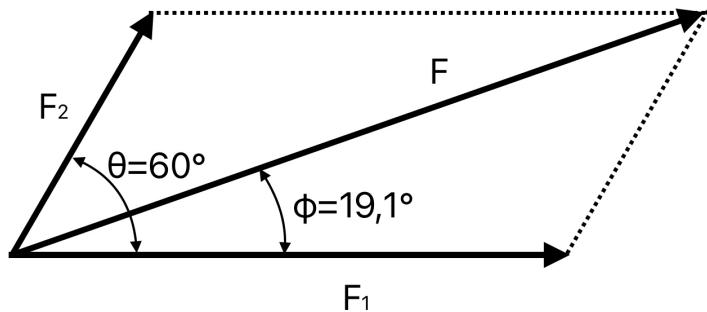
$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = \sqrt{(125^2 + (25\sqrt{3})^2)} = 132,29 \text{ N}$$

b. Ángulo de la resultante con la primera fuerza.

Como la primera fuerza la hemos tomado en el eje X, el ángulo de la resultante con la primera fuerza es el ángulo de la resultante con el eje X. Por lo tanto, también lo podemos calcular directamente a partir del vector:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{F_Y}{F_X} \right) = \arctan \left(\frac{25\sqrt{3}}{125} \right) = 19,11^\circ$$

c. Representación vectorial



Momento de una fuerza

Consideramos que las fuerzas son concurrentes cuando su punto de aplicación es el centro de gravedad de una estructura, pero, si no lo son, el sistema de fuerzas da lugar a **momentos**. En este caso, la estructura tiende a girar.

Esto mismo ocurre cuando tenemos puntos de apoyo. Es decir, el momento de una fuerza provoca el giro del cuerpo sobre el que actúa.

El momento de una fuerza se calcula como el producto vectorial entre la fuerza aplicada y el vector distancia desde el punto de aplicación de la fuerza al eje de giro:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{d}$$

En el Sistema Internacional, el momento se mide en **newtons-metro (N·m)**.

Condiciones de equilibrio

Para que un sólido se encuentre en equilibrio, deben darse dos condiciones fundamentales:

- El sólido no debe **trasladarse** en ninguna dirección, por lo que la **fuerza resultante** de todas las fuerzas que actúen sobre él debe ser **nula**:

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

- El sólido no debe **girar** en ningún eje, por lo que el **momento resultante** de todos los momentos que actúen sobre él debe ser **nulo**:

$$\sum \vec{M}_i = 0$$

Estas condiciones pueden establecerse para cada uno de los tres ejes principales del espacio (x, y, z), por lo que tendríamos **6 ecuaciones de equilibrio** de un sólido (tres con las fuerzas y tres con los momentos).

Ejercicios propuestos

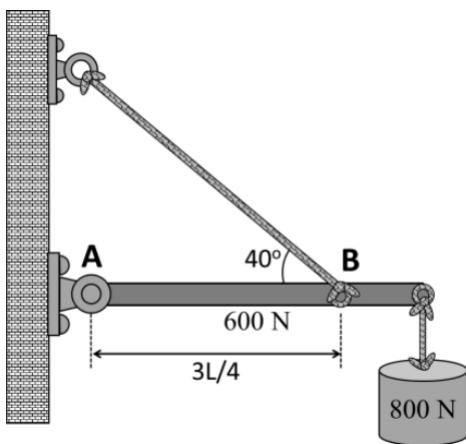
1 - Una persona carga en un hombro una barra de madera de 2 m con un cubo en cada extremo. La carga de uno de los cubos es tres veces la del otro (F).

- Calcula el módulo vector de la fuerza resultante. (*Solución: $F_R = 4F\text{ N}$*)
 - Calcula el punto de apoyo de la barra para que la carga esté equilibrada. (*Solución: $x = 1,5\text{ m}$; $y = 0,5\text{ m}$*)
 - Realiza la representación vectorial del sistema.
-

2 - Una puerta de 400 N de peso y 2 m de alto por 1 m de ancho se soporta en dos bisagras que se sitúan a 1,5 m una de otra y la misma distancia de los extremos superior e inferior de la puerta.

- Realiza la representación vectorial del sistema de fuerzas.
 - Calcula el valor de las fuerzas que se ejercen en cada bisagra. (*Solución: bisagra superior: $F_R = 421,23\text{ N}$; bisagra inferior: $R = F_X = 133,33\text{ N}$*)
-

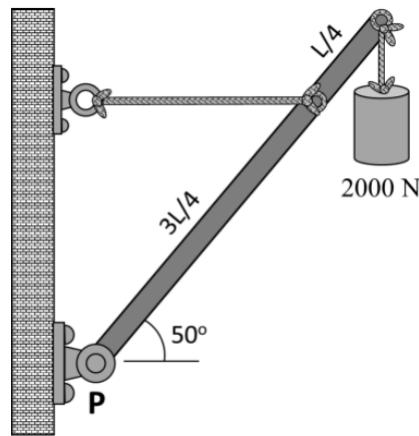
3 (PAU) - En el sistema en equilibrio que se muestra en la figura adjunta, la viga uniforme de longitud L pesa 0,60 kN y está sujetada a un apoyo articulado fijo en el punto A y a una cuerda tensora en el punto B. En el otro extremo, la viga sujeta un peso de 0,80 kN.



Se pide:

- Dibujar el diagrama del sólido libre indicando correctamente el sentido de todas las fuerzas.
- Calcular la tensión en la cuerda tensora y las componentes de la fuerza de reacción que ejerce el apoyo articulado fijo sobre la viga. (*Sol: $F_T = 2281,7 \text{ N}$; $F_{Rx} = 1747,9 \text{ N}$; $F_{Ry} = -66,6 \text{ N}$*)

4 (PAU) - Un asta de peso 0,40 N y densidad uniforme está suspendida como se muestra en la figura. En su extremo libre sujetá un peso de 2 kN.



Se pide:

- Dibujar el diagrama del sólido libre indicando correctamente el sentido de todas las fuerzas.
- Calcular la tensión en la cuerda y la fuerza que ejerce el pivote en P sobre el asta (*Sol: $F_T = 2,46 \text{ kN}$; $F_R = 3,44 \text{ kN}$; $\theta = 44^\circ$*)

5 (PAU) - Para colgar un cartel en la fachada de un edificio, se usa una barra horizontal con un extremo fijo en la pared a cierta altura. El otro extremo de la barra se sujeta con un cable tensor que se fija a la pared 3,2 m por encima del apoyo fijo de la barra.

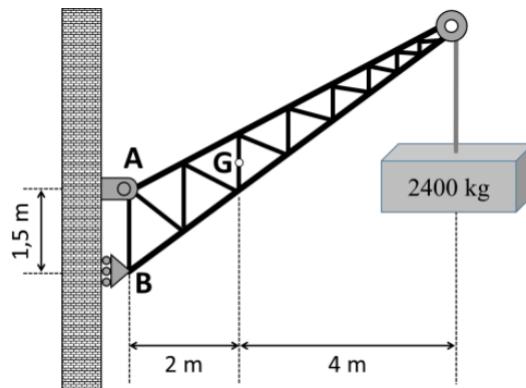
La barra mide 2,8 m de largo y su masa es despreciable. El cartel es cuadrado, de 1,9 m de lado y 52,3 kg. Cuelga del punto central de su lado superior mediante un cable fijado

a la barra, de modo que el extremo derecho del cartel queda alineado con el extremo derecho de la barra.

Se pide:

- a. Dibujar el diagrama del sólido libre indicando correctamente el sentido de todas las fuerzas.
 - b. Calcular la tensión del cable de soporte. (*Sol: $F_T = 450 \text{ N}$*)
 - c. Calcular las componentes horizontal y vertical de la reacción ejercida por la pared. (*Sol: $F_{Rx} = 296 \text{ N}; F_{Ry} = 174 \text{ N}$*)
-

6 (PAU) - Una grúa fija tiene una masa de 1 000 kg y se usa para levantar un contenedor de 2 400 kg. La grúa se mantiene en su lugar por medio de un perno en A y un balancín en B. El perno es un tipo de anclaje fijo que permite rotaciones de la grúa, pero no traslaciones, y un balancín es un apoyo móvil tipo rodillo que permite rotaciones y traslaciones. El centro de gravedad de la grúa está ubicado en G de acuerdo con el siguiente dibujo:



Se pide:

- a. Dibujar el diagrama del sólido libre.
 - b. Calcular la fuerza de reacción en los apoyos A y B. (*Sol: $A_x = 107,1 \text{ kN izqda}; A_y = 33,3 \text{ kN arriba}; B_x = 107,1 \text{ kN dcha}$*)
-

7 (PAU) - Un tractor como el de la figura tiene una masa de 2 100 lb y se utiliza para levantar 900 lb de grava en su pala delantera. El tractor se apoya en las ruedas traseras y delanteras, que están separadas 60 in. El centro de gravedad del tractor se sitúa 20 in por delante de las ruedas traseras, y durante el transporte el centro de gravedad de la pala cargada se encuentra 50 in por delante de las ruedas delanteras.



Se pide:

- a. Dibujar el diagrama del sólido libre indicando correctamente el sentido de todas las fuerzas.
- b. Calcular las reacciones en ruedas traseras (apoyo A) y en las delanteras (apoyo B).
 $(A_y = 1,45 \text{ kN}; B_y = 5,23 \text{ kN})$

Considerar $1 \text{ lb} = 0,454 \text{ kg}$ y $1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$.

4. Cálculo de esfuerzos en vigas. Diagramas de esfuerzos.

Hemos visto que una viga es un elemento estructural diseñado para soportar fuerzas, por lo que **debe estar en equilibrio**, esto es, que no se rompa ni se mueva por las fuerzas y que no gire por los momentos que producen las fuerzas.

Dado que consideramos que la viga es bidimensional, **para que una viga esté en equilibrio se tiene que cumplir:**

- Que la suma de fuerzas en el eje X sea 0 (no se mueve horizontalmente)
- Que la suma de fuerzas en el eje Y sea 0 (no se mueve verticalmente)
- Que la suma de los momentos que producen todas las fuerzas sea 0 (no gira)

Criterio de signos

Para realizar los cálculos en problemas de vigas, tomaremos el siguiente criterio para los signos:

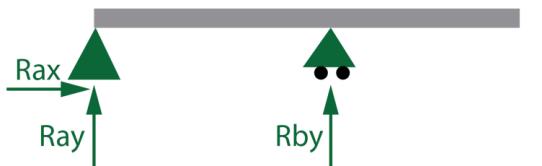
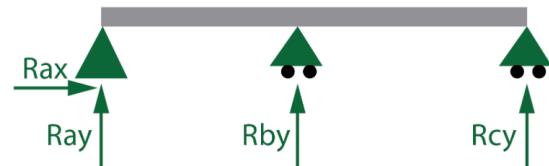
- Fuerzas **horizontales**: positivas hacia la **derecha**
- Fuerzas **verticales**: positivas hacia **arriba**
- **Momentos**: positivos si provocan **giro antihorario**

Viga isostática

Una viga será isostática si es posible realizar su análisis estático aplicando las ecuaciones de sumatorio de fuerzas y momentos.

Como solo vamos a hacer análisis en el plano, siempre tendremos tres ecuaciones como hemos visto antes ($\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M_z = 0$). Por lo tanto, para resolver el sistema de ecuaciones, **el número total de reacciones (incógnitas) en la viga debe ser 3**, coincidente con el número de ecuaciones estáticas disponibles.

Si el número de reacciones es menor a 3, la viga será un **mecanismo** (se moverá) y si el número de reacciones es superior a 3, se tratará de una **viga hiperestática**. El grado de hiperestaticidad será mayor conforme aumente el número de reacciones redundantes. Este tipo de vigas no puede calcularse directamente, debiendo utilizar pasos adicionales para su resolución.



Ejemplos de vigas isostáticas

Ejemplos de vigas hiperestáticas

Nosotros nos centraremos en el cálculo de vigas isostáticas en este curso.

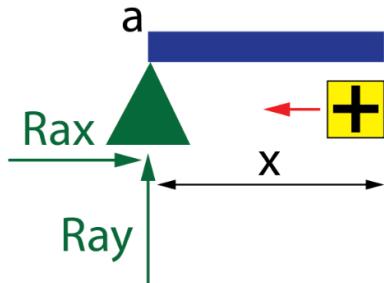
Tipos de esfuerzos en una viga

Las cargas y reacciones producen los siguientes esfuerzos en una viga (ignorando la torsión que rara vez ocurre y que no tendremos nunca en cuenta):

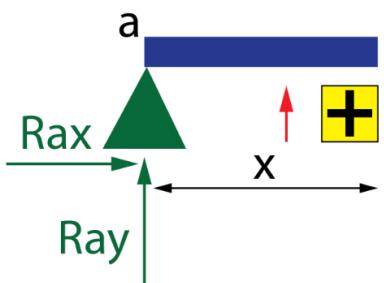
- **Esfuerzo axil (N):** genera tensiones normales, **según la dirección del eje longitudinal de la viga.** Es producido por la suma de todas las cargas y reacciones paralelas al eje longitudinal de la viga. El esfuerzo puede ser de tracción (tiende a estirar la viga) o de compresión (tiende a aplastarla).
- **Esfuerzo cortante (V):** genera tensiones **tangenciales en la viga.** Es producido por aquellas cargas y reacciones aplicadas en dirección perpendicular al eje longitudinal de la viga.
- **Momento flector (M):** normalmente es el esfuerzo más determinante y genera tensiones normales en la viga (aparecen axiles de tracción en la parte externa del giro y de compresión en la parte interna). Es producida por aquellas cargas y reacciones perpendiculares al eje longitudinal de la viga, fuerzas paralelas al eje pero descentradas y momentos de giro aplicados.

Para poder obtener las leyes de esfuerzo, es necesario definir un **criterio de signos para los esfuerzos** cuando estemos considerando esfuerzos en una sección "x" de la viga:

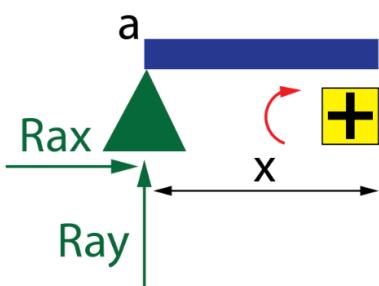
- **Esfuerzo axil, N:** se toma como criterio **positivo el esfuerzo de tracción**, es decir, aquellas cargas que tienen a incrementar la longitud de la barra. Por lo tanto, **la compresión es negativa**. A nivel del procedimiento de análisis se traduce en definir como criterio positivo todas aquellas fuerzas en dirección paralela al eje de la viga que, situadas a la izquierda de la sección x, están dirigidas hacia la **izquierda**.



- **Esfuerzo cortante, V:** aquellas fuerzas situadas a la izquierda de la sección x con dirección perpendicular al eje de la viga y hacia **arriba** generarán un cortante positivo.



- **Momento flector, M:** se tomará como criterio de momento positivo, el **sentido horario** producido por las cargas situadas a la izquierda de la sección x.



Diagrams de esfuerzos

Para estudiar los esfuerzos de una viga, se representan mediante tres diagramas:

Diagrama de esfuerzo axil (N) → muestra si la barra está en tracción o compresión.

Diagrama de esfuerzo cortante (V) → muestra las fuerzas internas verticales.

Diagrama de momento flector (M) → muestra los momentos internos que tienden a doblar la viga

Para obtener los diagramas de esfuerzos de una viga, hay que realizar los siguientes pasos:

1. Determinar las reacciones en los apoyos

Antes de analizar los esfuerzos internos, hay que conocer cómo reacciona la viga en sus apoyos. Se aplican las ecuaciones de equilibrio: $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M_z = 0$

De ahí se obtienen las reacciones verticales, horizontales y de giro, si las hay. Como estudiaremos siempre vigas isostáticas, habrá exactamente 3 reacciones para calcular.

2. “Cortar” la viga mentalmente

Se hace un corte imaginario en un punto cualquiera de la viga, a una distancia "x" del extremo izquierdo, para analizar una de las partes.

Sobre esa parte se dibujan los esfuerzos internos que aparecen en la sección:

- $N(x)$: fuerza horizontal interna (axil)
- $V(x)$: fuerza vertical interna (cortante)
- $M(x)$: momento interno (flector)

Y se vuelven a aplicar las ecuaciones de equilibrio a esa porción.

3. Expresar cada esfuerzo en función de la posición x

Al mover el punto de corte a lo largo de la viga, los valores de N , V y M cambian. Se escriben las expresiones en cada tramo, teniendo en cuenta la posición de las cargas.

Por ejemplo, si hay una carga puntual, el cortante cambia bruscamente en ese punto, mientras que el momento flector cambia de forma lineal entre cargas.

4. Dibujar los diagramas

Con los valores obtenidos, se dibujan tres diagramas (uno debajo del otro):

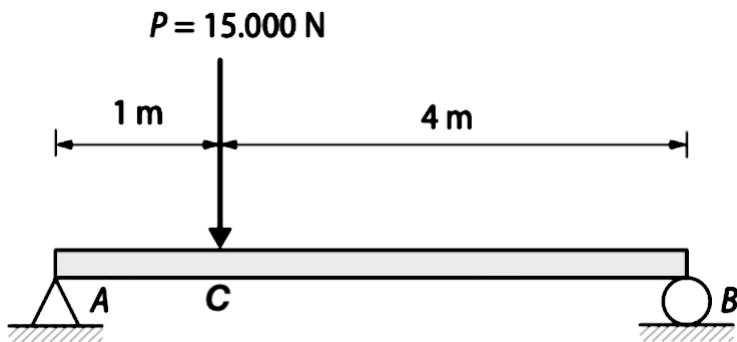
| Diagrama | Eje vertical representa... | Forma típica |
|----------|-------------------------------|---|
| $N(x)$ | Esfuerzo axil | Constante (si no hay cargas horizontales) |
| $V(x)$ | Esfuerzo cortante | Segmentos horizontales o con saltos |
| $M(x)$ | Momento flector | Líneas rectas o curvas suaves (triangular o parabólica) |

Todo esto lo entenderás mejor con los ejemplos resueltos de los próximos subapartados.

4.1. Ejemplo 1: carga puntual

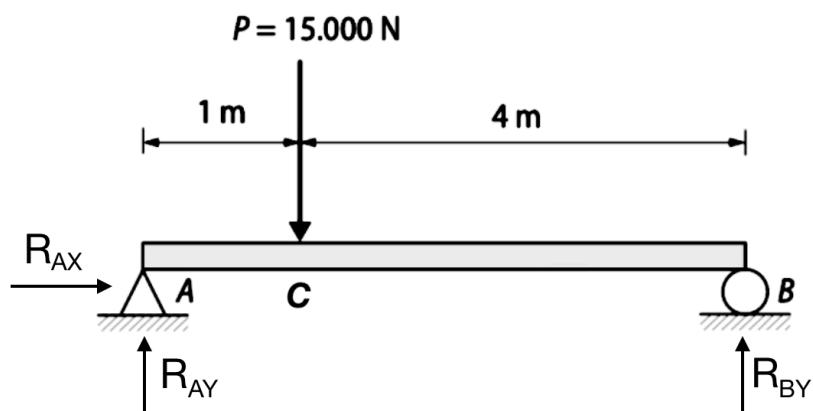
Enunciado

Elabora los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes correspondientes a la viga de la figura:



1. Calcular las reacciones

Determinamos las reacciones según los tipos de apoyos que vemos en la figura:



Aplicando las condiciones de que no haya movimiento en horizontal ni en vertical, ni que haya giro, obtenemos las tres ecuaciones necesarias para calcular las reacciones R_{AX} , R_{AY} y R_{BY} :

Horizontal

Equilibrio de **fuerzas** en el **eje horizontal** $\sum F_x = 0$:

$$R_{AX} = 0$$

Vertical

Equilibrio de **fuerzas** en el **eje vertical** $\sum F_y = 0$. Recuerda que el criterio es considerar las fuerzas positivas si van hacia arriba y negativas si van hacia abajo:

$$R_{AY} - P + R_{BY} = 0$$

Giro

Equilibrio de **momentos** de fuerzas, referido a una sección cualquiera de la viga $\sum M_A = 0$.

Es recomendable seleccionar la sección que más incógnitas elimine. En este caso es la sección A, ya que hay dos fuerzas aplicadas en este punto que, por lo tanto, no generan momento en él.

Recuerda que el criterio de signos es momentos positivos en sentido antihorario y negativos en sentido horario:

$$-P \cdot 1m + R_{BY} \cdot (4 + 1)m = 0$$

Sustituyendo los datos del problema, nos queda este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} - 15000 + R_{BY} = 0 \\ -15000 + 5R_{BY} = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos los valores de las reacciones:

$$\begin{aligned} R_{AX} &= 0 \text{ N} \\ R_{AY} &= 12000 \text{ N} = 12 \text{ kN} \\ R_{BY} &= 3000 \text{ N} = 3 \text{ kN} \end{aligned}$$

2. "Cortar" la viga en los tramos que sea necesario

El procedimiento consiste en partir la viga en tramos, **separados por cambios de carga o apoyos**. Es decir, recorriendo la viga de derecha a izquierda, se definirá un tramo

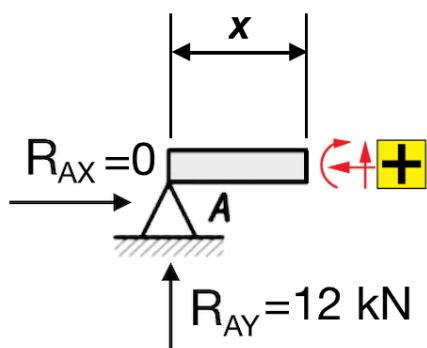
cuando aparezca una nueva carga o un apoyo.

Siguiendo este criterio, esta viga se divide en dos tramos, A-C y C-B, definidos por la aplicación de la carga puntual "P" en el punto C. Por tanto, las leyes de esfuerzos deberemos calcularlas en estos dos tramos.

3. Expresar cada esfuerzo en función de la posición x

Tramo A-C

Nos encontramos con el siguiente trozo de viga (se han indicado en rojo los sentidos positivos de los esfuerzos):



Esfuerzo axil:

El esfuerzo axil es nulo, ya que no hay fuerzas en dirección paralela al eje de la viga:

$$N_{A-C}(x) = R_{AX} = 0 \text{ N}$$

Esfuerzo cortante:

La componente vertical R_{AY} de la reacción en el apoyo A es la única fuerza en dirección perpendicular a la viga que genera cortante. Como va hacia **arriba**, se cuenta como **positiva**:

$$V_{A-C}(x) = R_{AY} = 12 \text{ kN}$$

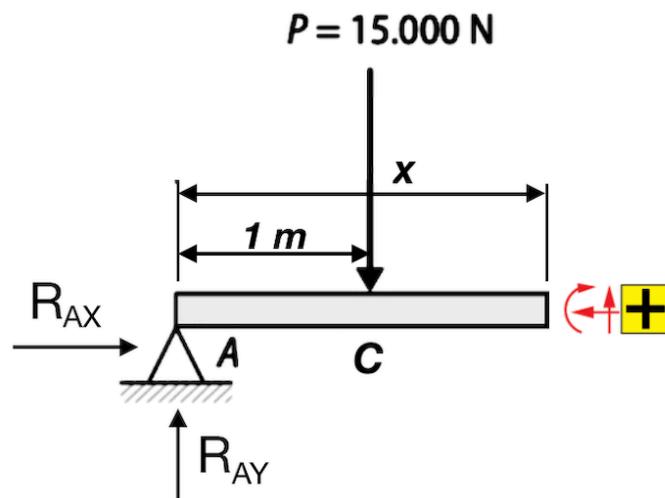
Momento flector:

El momento flector es generado por la reacción R_{AY} , cuya distancia a la sección **x** es la propia distancia x. Genera un momento en **sentido horario**, por lo que lo consideramos **positivo**.

$$M_{A-C}(x) = R_{AY} \cdot x - 12x \cdot 15 + 15$$

Tramo C-B

Nos encontramos con el siguiente trozo de viga:



Esfuerzo axil:

El esfuerzo axil es nulo, ya que no hay fuerzas en dirección paralela al eje de la viga:

$$N_{C-B}(x) = R_{AX} = 0 \text{ N}$$

Esfuerzo cortante:

Al cortante generado por la reacción R_{AY} , se le añade la fuerza aplicada de 15 kN, que genera un cortante **negativo**.

$$V_{C-B}(x) = R_{AY} - 15 = 12 - 15 = -3 \text{ kN}$$

Momento flector:

Al momento flector generado por la reacción R_{AY} se suma el producido por la fuerza aplicada de 15 kN, cuya distancia a la sección analizada es $(x-1)$. Esta fuerza genera un momento en sentido antihorario y, por tanto, **negativo**.

$$M_{C-B}(x) = R_{AY} \cdot x - 15 \cdot (x - 1) = 12x - 15x + 15 = 15 - 3x \text{ kN} \cdot \text{m}$$

4. Dibujar los diagramas

Ya solo nos queda dibujar las funciones que hemos obtenido en el paso anterior, siendo x el eje horizontal y estando el origen de coordenadas en el apoyo A.

El diagrama de esfuerzos axiles no tiene sentido dibujarlo, ya que $N(x) = 0$ para toda la viga. Dibujaremos, por tanto, los diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos flectores:

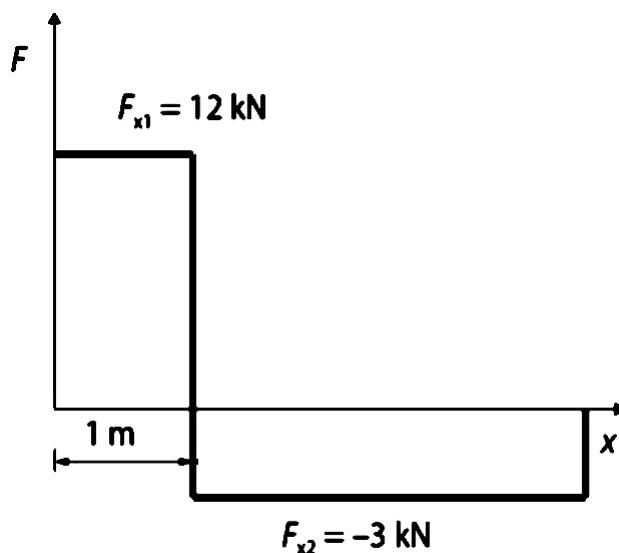


Diagrama de esfuerzos cortantes

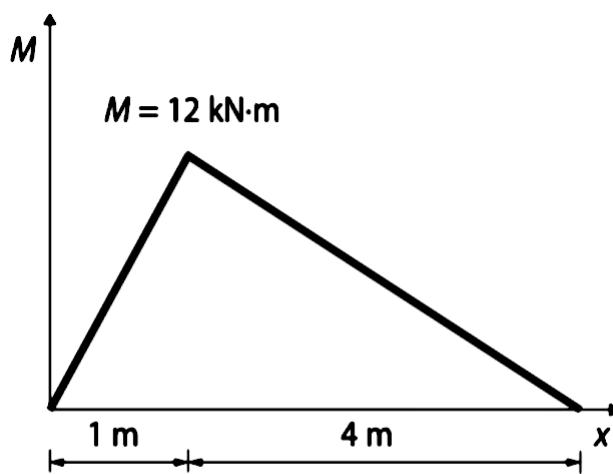
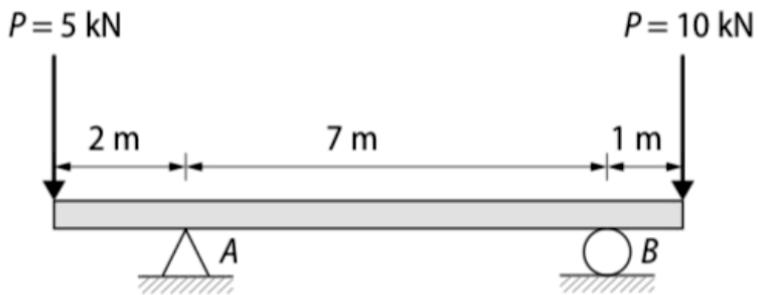


Diagrama de momentos flectores

Ejercicios propuestos

- 1 - Elabora los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes correspondientes a la viga de la figura:



Solución (partiendo del punto A):

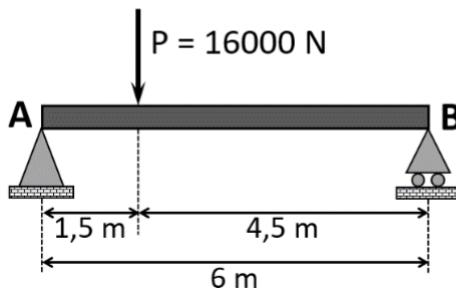
Momentos flectores:

- Para $0 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m} \rightarrow M_{x1} = -5x \text{ (kN}\cdot\text{m)}$
- Para $2 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m} \rightarrow M_{x2} = -10 \text{ (kN}\cdot\text{m)}$
- Para $9 \text{ m} \leq x \leq 10 \text{ m} \rightarrow M_{x3} = 10x - 100 \text{ (kN}\cdot\text{m)}$

Esfuerzos cortantes:

- Para $0 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m} \rightarrow F_{x1} = -5 \text{ kN}$
- Para $2 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m} \rightarrow F_{x2} = 0 \text{ kN}$
- Para $9 \text{ m} \leq x \leq 10 \text{ m} \rightarrow F_{x3} = 10 \text{ kN}$

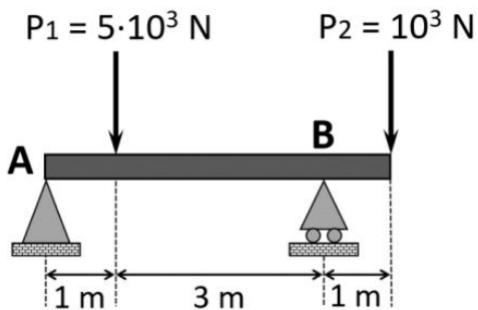
2 (PAU) - Se requiere analizar la viga presentada en la figura adjunta:



Considerando los datos proporcionados, calcular:

- Las reacciones en ambos apoyos en condiciones de equilibrio estático. ($R_{Ax} = 0 \text{ N}$; $R_{Ay} = 12 \ 000 \text{ N}$; $R_{By} = 4 \ 000 \text{ N}$)
- Las ecuaciones de fuerzas cortantes y momentos flectores en cada tramo de la viga en función de la coordenada "x". (Para $0 \text{ m} \leq x \leq 1,5 \text{ m}$ $V(x) = 12 \text{ kN}$ y $M(x) = 12x \text{ kN}\cdot\text{m}$; Para $1,5 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$ $V(x) = -4 \text{ kN}$ y $M(x) = -4x + 24 \text{ kN}\cdot\text{m}$)
- Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga.

3 (PAU) - En la siguiente figura se representan las cargas que debe soportar una viga y los apoyos que tiene en la estructura de la que forma parte.



Considerando los datos proporcionados, analizar la estructura calculando:

- Las reacciones en ambos apoyos en condiciones de equilibrio estático. ($R_{Ax} = 0 \text{ kN}$; $R_{Ay} = 3,5 \text{ kN}$; $R_{By} = 2,5 \text{ kN}$)
 - Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga. (Para $0 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$ $V(x) = 3,5 \text{ kN}$ y $M(x) = 3,5x \text{ kN}\cdot\text{m}$; Para $1 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$ $V(x) = -1,5 \text{ kN}$ y $M(x) = -1,5x + 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$; Para $4 \text{ m} \leq x \leq 5 \text{ m}$ $V(x) = 1 \text{ kN}$ y $M(x) = x - 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$)
 - Obtener el momento flector máximo. ($M_{max}(1 \text{ m}) = 3,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$)
-

4 (PAU) - Se requiere analizar una viga de 5 m con su extremo derecho (punto B) empotrado en una pared. Sobre el extremo izquierdo (punto A) actúa una fuerza peso de 3 kN, y a 2 m del empotramiento se localiza otra fuerza peso de 2 kN. Se pide:

- Calcular el valor de las reacciones que se producen en el empotramiento (punto B) en condiciones de equilibrio estático. ($R_{Bx} = 0 \text{ kN}$; $R_{By} = 5 \text{kN}$; $M_B = 19 \text{ kNm}$)
 - Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga en función de x. (Para $0 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$ $V(x) = -3 \text{ kN}$ y $M(x) = -3x \text{ kN}\cdot\text{m}$; Para $3 \text{ m} \leq x \leq 5 \text{ m}$ $V(x) = -5 \text{ kN}$ y $M(x) = -5x + 6 \text{ kN}\cdot\text{m}$)
-

5 (PAU) - Para evitar inundaciones con las crecidas, se ha canalizado el río Guadalquivir a su paso por Sevilla en varios tramos, y la expansión de la ciudad hace necesario construir un nuevo puente sobre el canal de 46 m de ancho. Se estudia la opción de construir el puente con vigas de hormigón armado tipo Doble T como las de la figura, que pueden alcanzar hasta los 53 m de largo.



Tras el estudio del terreno, se decide usar una viga de 50 m de largo apoyada en un extremo en un soporte fijo y el otro en un apoyo móvil o de rodillo. El puente debe soportar el paso de vehículos pesados, por lo que se diseñará para una masa máxima

de vehículos de 65 toneladas. La masa de la viga es 110,5 toneladas. Colabora en el diseño del puente resolviendo las siguientes cuestiones.

- a. Dibujar el diagrama de sólido libre del puente cuando el vehículo pesado haya recorrido 25 m del puente desde el extremo fijo, y calcular el valor de las reacciones en ambos apoyos en condiciones de equilibrio estático. ($R_{Ax} = 0$; $R_{Ay} = 861 \text{ kN}$; $R_{By} = 861 \text{ kN}$)
- b. Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga, y determinar el momento flector máximo que debe soportar la viga cuando el camión esté en esa posición. (Para $0 \text{ m} \leq x \leq 25 \text{ m}$ $V(x) = 861 \text{ kN}$ y $M(x) = 861x \text{ kN}\cdot\text{m}$; Para $25 \text{ m} \leq x \leq 50 \text{ m}$ $V(x) = -861 \text{ kN}$ y $M(x) = -861x + 43\,050 \text{ kN}\cdot\text{m}$; $M_{max}(25\text{m}) = 21\,525 \text{ kN}\cdot\text{m}$)

(NOTA: este ejercicio está planteado para considerar el peso de la viga como una carga puntual aplicada en su centro de masas, no como una distribución continua de carga, ya que en PAU solo se pedirán ejercicios con cargas puntuales)

6 (PAU) - El estudio de arquitectura Andalusí está desarrollando el proyecto de un bloque de viviendas en primera línea de playa en Almería. Una de las viviendas del ático dispone de una terraza voladiza de 4 m de longitud que sobresale desde la fachada principal. La terraza se modela como una viga con un extremo empotrado en la fachada y el otro extremo en voladizo.

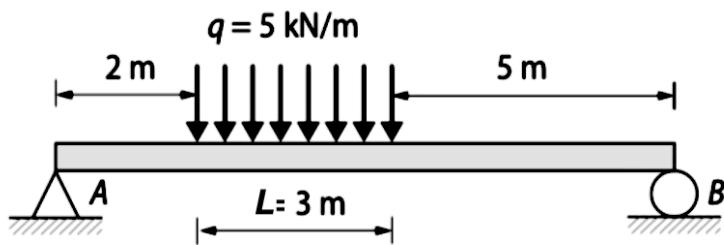
Teniendo en cuenta el tamaño total de la terraza, se estima que durante una fiesta puede albergar un grupo de personas con un peso total de 8,5 kN. El peso de la losa de hormigón de la terraza es de 16,8 kN.

- a. Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la terraza y calcular las reacciones considerando la fuerza peso del grupo de personas como una carga puntual aplicada en el centro. ($R_{Ax} = 0 \text{ kN}$; $R_{Ay} = 25,3 \text{ kN}$; $M_A = 50,6 \text{ kNm}$)
 - b. Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores resultantes. (Para $0 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$ $V(x) = 25,3 \text{ kN}$ y $M(x) = 25,3x - 50,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$; Para $2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$ $V(x) = 0 \text{ kN}$ y $M(x) = 0 \text{ kN}\cdot\text{m}$)
 - c. Determinar el valor del momento flector máximo que soportará la terraza y en qué posición se encuentra. ($M_{max} = 50,6 \text{ kNm}$ en $x = 0$)
-

4.2. Ejemplo 2: carga uniformemente repartida

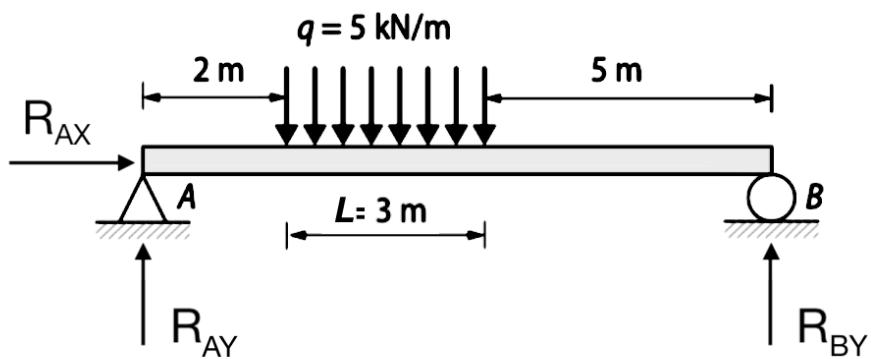
Enunciado

Elabora los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes correspondientes a la viga de la figura:



1. Calcular las reacciones

Determinamos las reacciones según los tipos de apoyos que vemos en la figura:



Horizontal

Equilibrio de **fuerzas** en el **eje horizontal** $\sum F_x = 0$:

$$R_{AX} = 0$$

Vertical

Equilibrio de fuerzas en el eje vertical $\sum F_y = 0$ (positivas fuerzas hacia arriba y negativas fuerzas hacia abajo). La carga distribuida tiene un valor en kN/m, por lo que hay que multiplicarla por toda la longitud sobre la que actúa para obtener la fuerza total que ejerce sobre la viga ($q \cdot L$):

$$R_{AY} - q \cdot L + R_{BY} = 0$$

Giro

Equilibrio de **momentos** de fuerzas, referido a una sección cualquiera de la viga $\sum M_A = 0$. Como en el ejemplo anterior, calcularemos los momentos en el apoyo A, que es donde hay más restricciones.

A efectos de momento, **la carga distribuida equivale a una carga de valor $q \cdot L$ aplicada en el centro exacto de la distribución**. En este caso, estará aplicada a una distancia de $2 + L/2$ del apoyo A. La ecuación quedará, por tanto (momentos positivos en sentido antihorario y negativos en sentido horario):

$$-q \cdot L \cdot \left(2m + \frac{L}{2}\right) + R_{BY} \cdot (2 + L + 5)m = 0$$

Sustituyendo los datos del problema, nos queda este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} - 5 \frac{kN}{m} \cdot 3m + R_{BY} = 0 \\ -5 \frac{kN}{m} \cdot 3 \cdot \left(2 + \frac{3}{2}\right)m + R_{BY} \cdot (2 + 3 + 5)m = 0 \end{cases}$$

Operamos y escribimos el sistema sin unidades para simplificar (sabemos que todas las fuerzas irán en kN y todas las distancias en m):

$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} - 15 + R_{BY} = 0 \\ -52,5 + 10R_{BY} = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos los valores de las reacciones:

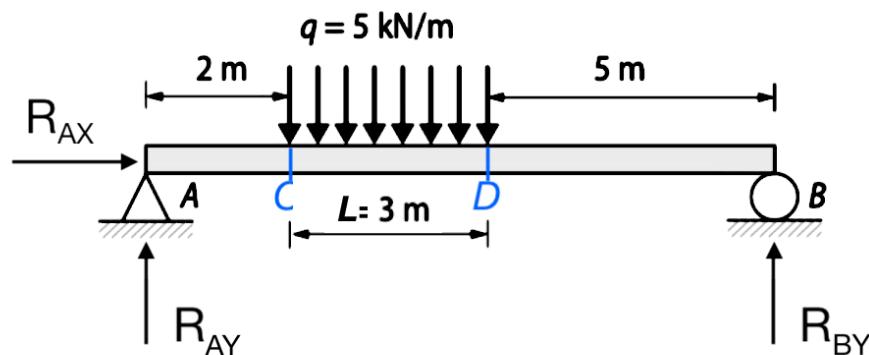
$$\begin{aligned} R_{AX} &= 0N \\ R_{AY} &= 9,75 \text{ kN} \\ R_{BY} &= 5,25 \text{ kN} \end{aligned}$$

2. "Cortar" la viga en los tramos que sea necesario

El procedimiento consiste en partir la viga en tramos, **separados por cambios de carga o apoyos**. Es decir, recorriendo la viga de derecha a izquierda, se definirá un tramo cuando aparezca una nueva carga o un apoyo.

En este caso, la viga se dividirá en 3 tramos:

- Tramo A-C, entre el apoyo A y el comienzo de la carga q .
- Tramo C-D, en el que actúa la carga distribuida q .
- Tramo D-B, entre la carga y el apoyo B

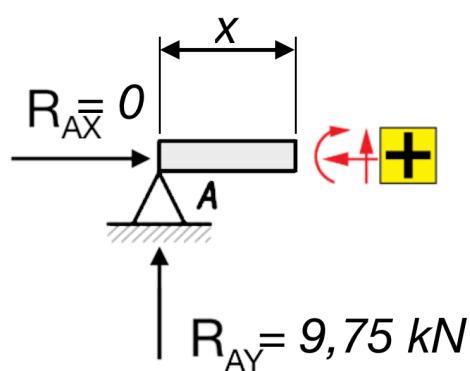


Por tanto, las leyes de esfuerzos deberemos calcularlas en estos tres tramos.

3. Expresar cada esfuerzo en función de la posición x

Tramo A-C

Nos encontramos con el siguiente trozo de viga (se han indicado en rojo los sentidos positivos de los esfuerzos):



Esfuerzo axil:

El esfuerzo axial es nulo, ya que no hay fuerzas en dirección paralela al eje de la viga:

$$N_{A-C}(x) = R_{AX} = 0 \text{ N}$$

Esfuerzo cortante:

La componente vertical R_{AY} de la reacción en el apoyo A es la única fuerza en dirección perpendicular a la viga que genera cortante. Como va hacia **arriba**, se cuenta como **positiva**:

$$V_{A-C}(x) = R_{AY} = 9,75 \text{ kN}$$

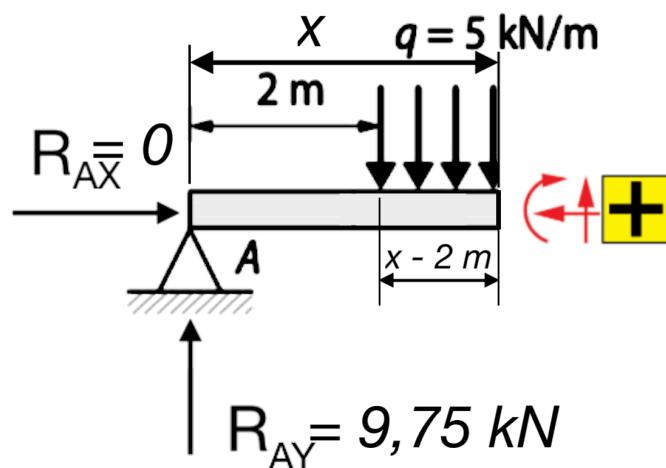
Momento flector:

El momento flector es generado por la reacción R_{AY} , cuya distancia a la sección **x** es la propia distancia x . Genera un momento en **sentido horario**, por lo que lo consideramos **positivo**. Fíjate que la reacción R_{AX} no generaría momento flector aunque no fuera nula, porque su línea de actuación (dirección de la fuerza) pasa directamente por la sección x .

$$M_{A-C}(x) = R_{AY} \cdot x = 9,75x \text{ kN} \cdot m$$

Tramo C-D

Nos encontramos con el siguiente trozo de viga:



Esfuerzo axial:

El esfuerzo axial es nulo, ya que no hay fuerzas en dirección paralela al eje de la viga:

$$N_{C-D}(x) = R_{AX} = 0 \text{ N}$$

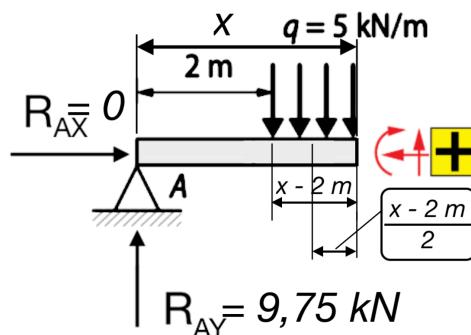
Esfuerzo cortante:

Al cortante generado por la reacción R_{AY} , se le suma la fuerza distribuida, que genera un cortante **negativo**. Como la fuerza de la carga distribuida se calcula multiplicando q por su longitud de actuación, en este caso esa fuerza sería $q \cdot (x-2)$

$$V_{C-D}(x) = R_{AY} - q(x-2) = 9,75 - 5(x-2) = 19,75 - 5x \text{ kN}$$

Momento flector:

Al momento flector generado por la reacción R_{AY} se suma el producido por la carga distribuida q , cuya distancia a la sección analizada es ahora $\frac{x-2}{2} \text{ m}$, como puedes ver en la imagen:



Esta fuerza genera un momento en sentido antihorario y, por tanto, **negativo**. La expresión queda:

$$M_{C-D}(x) = R_{AY} \cdot x - q(x-2) \frac{x-2}{2} = 9,75x - 5(x-2) \frac{x-2}{2} = 9,75x - 2,$$

Operando:

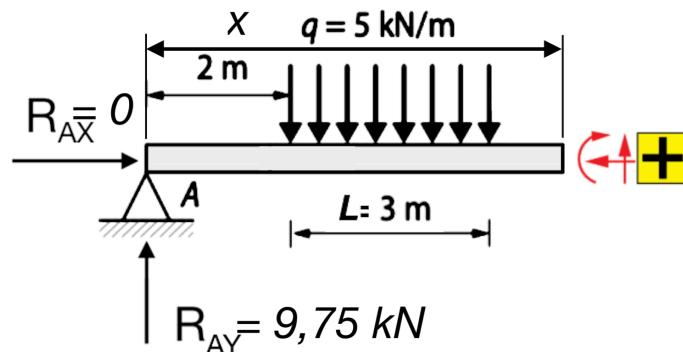
$$M_{C-D}(x) = 9,75x - 2,5(x-2)^2 = 9,75x - 2,5(x^2 - 2x + 4) = 9,75x - 2,5x^2 + 19,75x - 10$$

Y, finalmente, podemos expresar el momento como:

$$M_{C-D}(x) = -2,5x^2 + 19,75x - 10 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$$

Tramo D-B

Nos encontramos con el siguiente trozo de viga:



El esfuerzo axil es nulo, ya que no hay fuerzas en dirección paralela al eje de la viga:

$$N_{D-B}(x) = R_{AX} = 0 \text{ N}$$

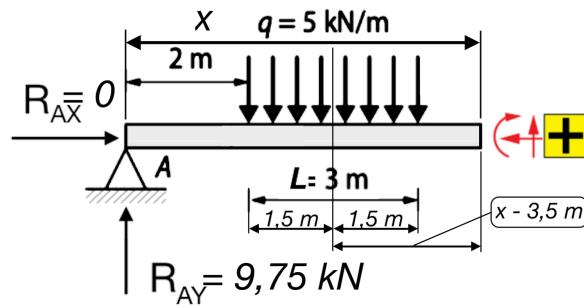
Esfuerzo cortante:

Al cortante generado por la reacción R_{AY} , se le añade la fuerza distribuida, que genera un cortante **negativo**. Como la fuerza de la carga distribuida se calcula multiplicando q por su longitud de actuación, en este caso esa fuerza sería $q \cdot L$

$$V_{D-B}(x) = R_{AY} - q \cdot L = 9,75 - 5 \cdot 3 = -5,25 \text{ kN}$$

Momento flector:

Al momento flector generado por la reacción R_{AY} se suma el producido por la carga distribuida q , cuya distancia a la sección analizada es ahora $x - 3,5 \text{ m}$, como puedes ver en la imagen:



Esta fuerza genera un momento en sentido antihorario y, por tanto, **negativo**. La expresión queda:

$$M_{D-B}(x) = R_{AY} \cdot x - q \cdot L(x - 3,5) = 9,75x - 5 \cdot 3(x - 3,5) = 9,75x - 15(x - 3,5)$$

Operando, podemos expresar finalmente el momento como:

$$M_{D-B}(x) = 52,5 - 5,25x \text{ (kN} \cdot \text{m)}$$

4. Dibujar los diagramas

Por último, hay que dibujar las funciones que hemos obtenido en el paso anterior, siendo x el eje horizontal y estando el origen de coordenadas en el apoyo A.

El diagrama de esfuerzos axiles no tiene sentido dibujarlo, ya que $N(x) = 0$ para toda la viga. Dibujaremos, por tanto, los diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos flectores.

Recordamos que, para cada tramo, solo vale la ecuación correspondiente. Estas ecuaciones son, recapitulando:

$$\text{Esfuerzo cortante } V(x) : \quad V(x) = \begin{cases} +9,75 & 0 \leq x < 2 \\ 19,75 - 5x & 2 \leq x \leq 5 \\ -5,25 & 5 < x \leq 10 \end{cases} \quad [\text{kN}]$$

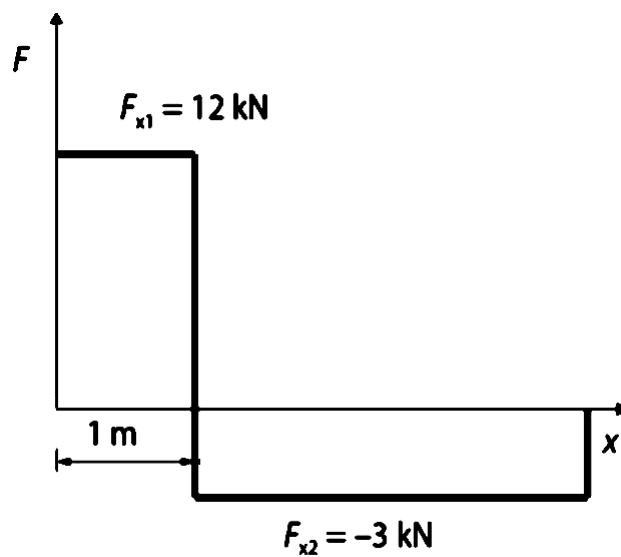
$$\text{Memento flector } M(x) : \quad M(x) = \begin{cases} 9,75x & 0 \leq x < 2 \\ -2,5x^2 + 19,75x - 10 & 2 \leq x \leq 5 \\ -5,25x + 52,5 & 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

Punto de momento máximo: $V(x) = 0 \Rightarrow 19,75 - 5x = 0 \Rightarrow x = 3,95 \text{ m}$

$$M_{\max} = -2,5(3,95)^2 + 19,75(3,95) - 10 = 29$$

Fíjate que, para calcular el momento máximo, hemos hecho $V(x) = 0$. Esto es porque el esfuerzo cortante es la derivada del momento flector $V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$.

Con esta información, podemos ya dibujar los diagramas fácilmente:



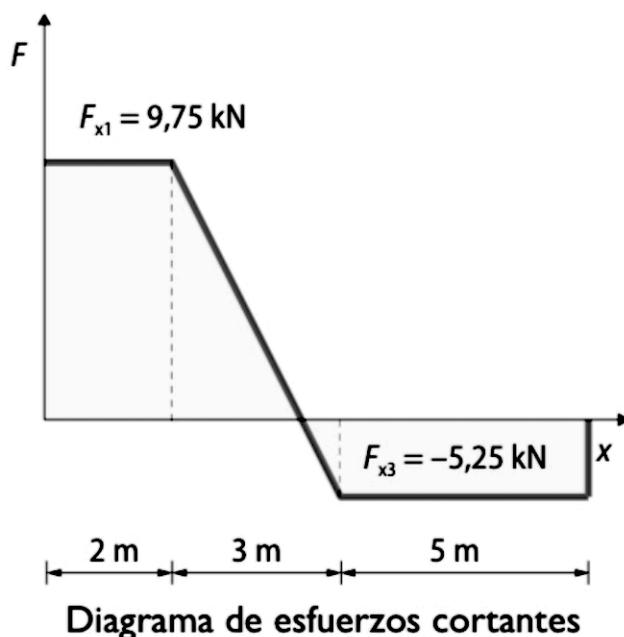


Diagrama de esfuerzos cortantes

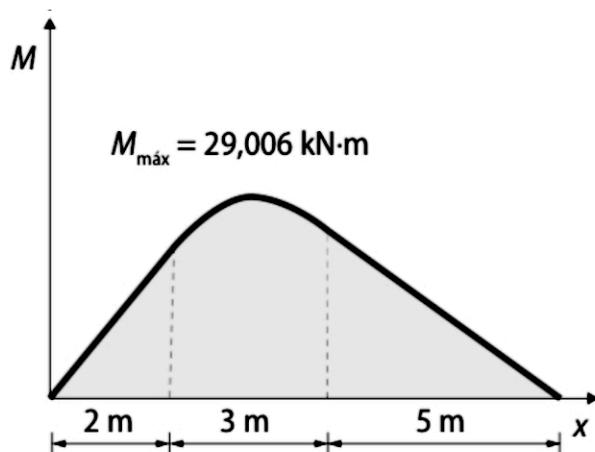
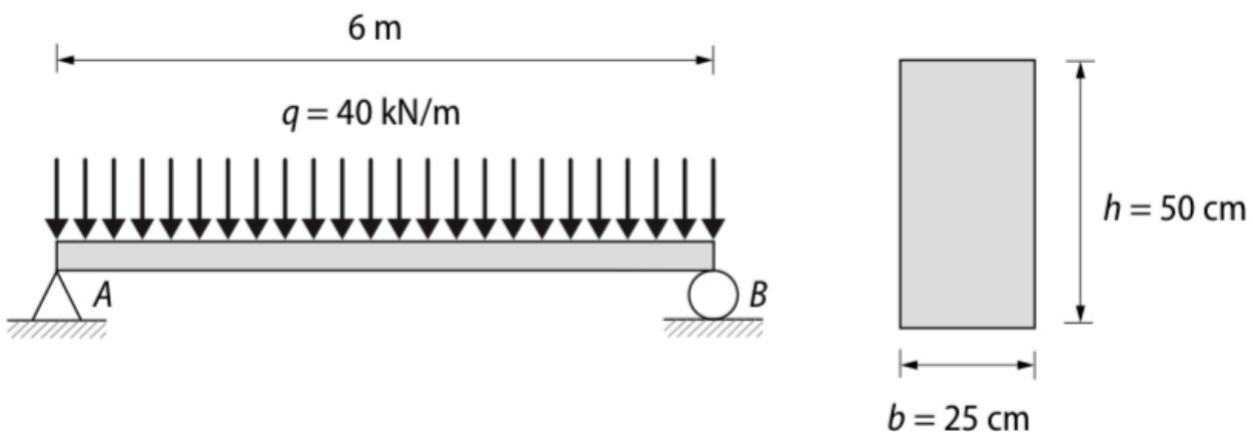


Diagrama de momentos flectores

Ejercicio propuesto

La viga de la figura es de madera laminada de perfil rectangular de 25 x 50 cm y soporta una carga uniformemente distribuida de 3 kN/m.



- a. Elabora los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes correspondientes a la viga.
- b. Halla las tensiones máximas de tracción y compresión producidas en la viga como consecuencia de la flexión.

Solución:

a) (Partiendo del punto A)

- Para $0m \leq x \leq 6 m \rightarrow M(x) = 120x - 20x^2 \text{ kN}\cdot\text{m}$

Momento máximo en $x = 3 m : M_{max} = 180 \text{ kN}\cdot\text{m}$

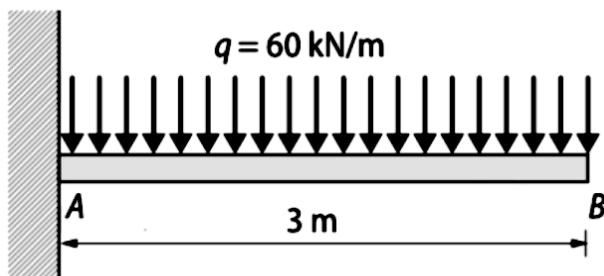
- Para $0m \leq x \leq 6 m \rightarrow V(xs) = 12-40x \text{ kN}$

b) $\sigma_t = 17.280 \text{ kN/m}^2; \sigma_c = -17.280 \text{ kN/m}^2$

4.3. Ejemplo 3: empotramiento con carga uniformemente repartida

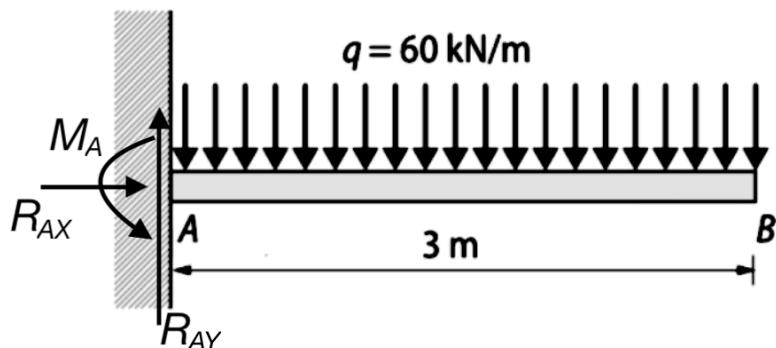
Enunciado

Elabora los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes correspondientes a la viga en voladizo de la figura, con carga uniformemente distribuida:



1. Calcular las reacciones

En este caso hay un solo apoyo donde se encuentran las tres reacciones, al ser un apoyo empotrado:



Fíjate que el momento de reacción, M_A , tiene sentido antihorario porque debe oponerse al momento creado por la carga que hay sobre la viga, que provoca un momento en A con sentido horario.

Las ecuaciones para equilibrar la viga serán:
Horizontal

Equilibrio de **fuerzas** en el **eje horizontal** $\sum F_x = 0$:

$$R_{AX} = 0$$

Vertical

Equilibrio de **fuerzas** en el **eje vertical** $\sum F_y = 0$ (positivas fuerzas hacia arriba y negativas fuerzas hacia abajo). La carga distribuida tiene un valor en kN/m, por lo que hay que multiplicarla por toda la longitud sobre la que actúa para obtener la fuerza total que ejerce sobre la viga ($q \cdot L$):

$$R_{AY} - q \cdot L = 0$$

Por lo tanto:

$$R_{AY} = q \cdot L$$

Giro

Equilibrio de **momentos** de fuerzas, referido a una sección cualquiera de la viga $\sum M_A = 0$. Calcularemos los momentos en el único apoyo A, que es donde están las restricciones. Por tanto, ni R_{AX} ni R_{AY} provocan momento en A, por lo que la ecuación queda muy simple.

A efectos de momento, **la carga distribuida equivale a una carga de valor $q \cdot L$ aplicada en el centro exacto de la distribución**. En este caso, estará aplicada a una distancia de $L/2$ del apoyo A. La ecuación quedará, por tanto (momentos positivos en sentido antihorario y negativos en sentido horario):

$$-q \cdot L \cdot \frac{L}{2} + M_A = 0$$

Es decir:

$$M_A = -q \cdot \frac{L^2}{2}$$

Sustituyendo los datos del problema, podemos calcular directamente las 3 reacciones:

$$R_{AX} = 0 \text{ N}$$

$$R_{AY} = 60 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} = 180 \text{ kN}$$

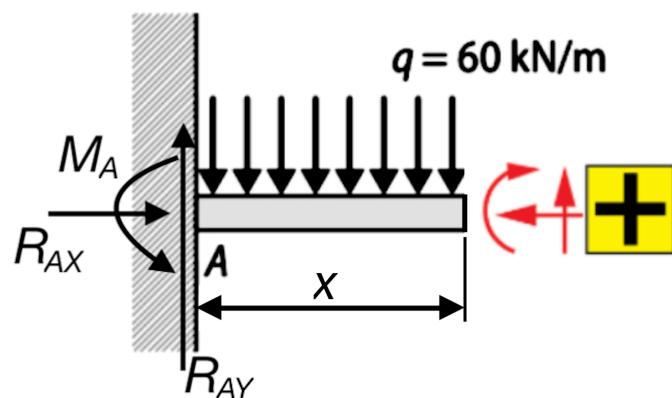
$$M_A = 60 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{3^2}{2} \text{ m}^2 = 270 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

2. "Cortar" la viga en los tramos que sea necesario

Como solo tenemos una carga sobre la viga y, además, ocupa toda la longitud de esta, **no es necesario cortar la viga**. Los esfuerzos serán continuos en toda su longitud.

Expresar cada esfuerzo en función de la posición x

Nos encontramos con el siguiente trozo de viga (se han indicado en rojo los sentidos positivos de los esfuerzos):



Esfuerzo axil:

El esfuerzo axil es nulo, ya que no hay fuerzas en dirección paralela al eje de la viga:

$$N(x) = R_{AX} = 0 \text{ N}$$

Esfuerzo cortante:

Tanto la componente vertical R_{AY} de la reacción en el apoyo A como la carga distribuida q , generan esfuerzo cortante en la viga. La fuerza total que produce q depende de la distancia x y vale $q \cdot x$. Como R_{AY} va hacia **arriba**, se cuenta como **positiva**. Como $q \cdot x$ va hacia abajo, se cuenta como **negativa**:

$$V(x) = R_{AY} - q \cdot x = 180 - 60x \text{ kN}$$

Momento flector:

El momento flector es generado por la reacción R_{AY} , cuya distancia a la sección x es la propia distancia x , por la carga distribuida q , que genera una fuerza $q \cdot x$ a una distancia de $\frac{x}{2} m$ y por el momento de reacción del empotramiento M_A .

- La reacción R_{AY} genera un momento en "x" en **sentido horario**, por lo que lo consideramos **positivo**.
- La carga q genera un momento en "x" en sentido antihorario, por lo que lo consideramos **negativo**.
- El empotramiento genera un momento en sentido antihorario, por lo que lo consideramos **negativo**.

$$M(x) = R_{AY} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} - M_A = 180x - 60 \frac{x^2}{2} - 270 = -30x^2 + 180x - 270 \text{ kNm}$$

Dibujar los diagramas

Recapitulando lo calculado antes, tenemos las siguientes leyes de esfuerzos en la barra (incluimos los valores extremos para que sea más fácil dibujar los diagramas):

Ámbito: $0 \leq x \leq 3 \text{ (m)}$

Esfuerzo axil: $N(x) = 0 \text{ [kN]}$

Cortante: $V(x) = 60(3 - x) = \boxed{180 - 60x} \text{ [kN]}$

Momento flector: $M(x) = -30(x - 3)^2 = -30(x^2 - 6x + 9) = \boxed{-30x^2 + 180x - 270} \text{ kNm}$

Valores extremos: $V(0) = 180, V(3) = 0; M(0) = -270, M_{max} = M(3) = 0$

Así, el diagrama de cortantes será lineal y el de momentos flectores parabólico:

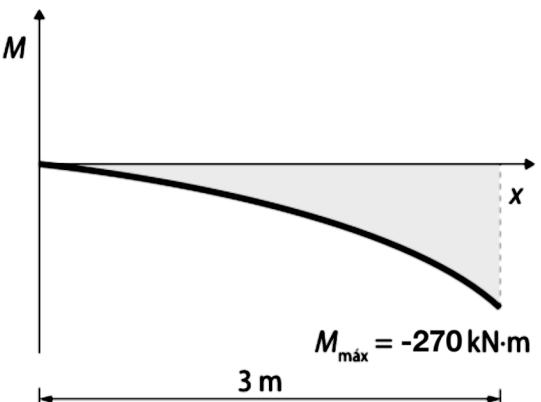


Diagrama de momentos flectores

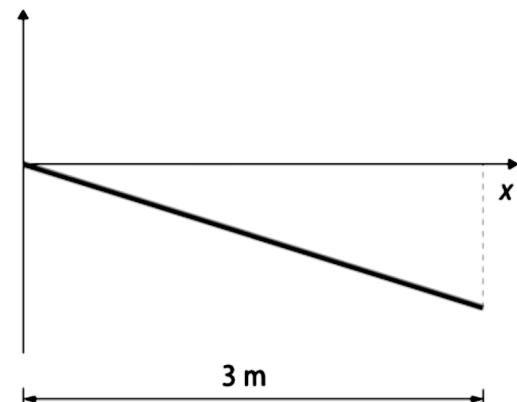
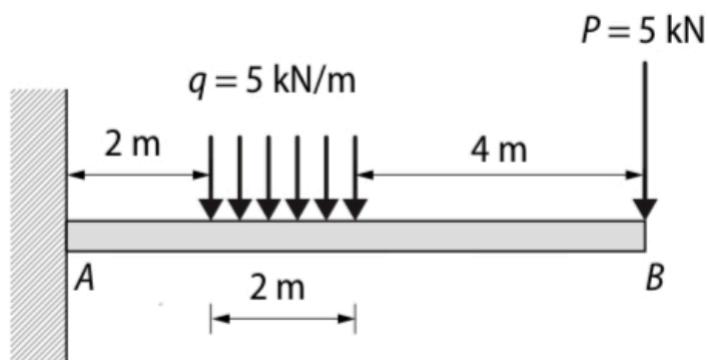


Diagrama de esfuerzos cortantes

Ejercicio propuesto

Elabora los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes correspondientes a la viga en voladizo de la figura:



Solución (partiendo del punto B):

Momentos flectores:

- Para $0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \rightarrow M(x) = -5x \text{ kN}\cdot\text{m}$
- Para $4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \rightarrow M(x) = 2,5x^2 + 15x - 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- Para $6 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m} \rightarrow M(x) = 50 - 15x \text{ kN}\cdot\text{m}$

Esfuerzos cortantes:

- Para $0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \rightarrow V(x) = -5 \text{ kN}$
- Para $4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \rightarrow V(x) = -5x + 15 \text{ kN}$
- Para $6 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m} \rightarrow V(x) = -15 \text{ kN}$

Otros ejemplos

Aquí tienes un vídeo donde se explican algunos ejercicios más:

<<https://www.youtube.com/embed/muCrmuI1T-A>>

<https://www.youtube.com/embed/muCrmuI1T-A> <<https://www.youtube.com/embed/muCrmuI1T-A>>

5. Cálculo de esfuerzos en estructuras de barras articuladas.



Las **estructuras de barras articuladas** se utilizan en grúas, torres, puentes, etc. En la modelización de estas estructuras supondremos que son **bidimensionales**, como hemos hecho con las vigas.

También supondremos que:

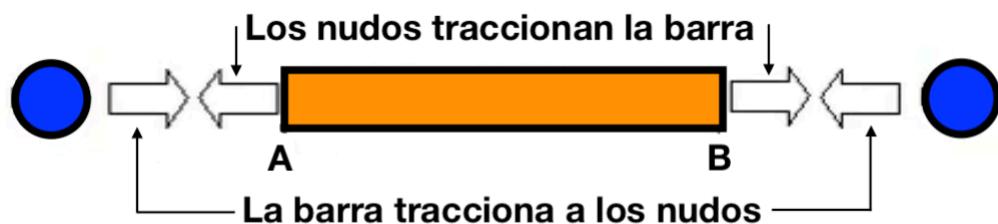
- Los nudos son **articulaciones perfectas**.
- Las **cargas externas** están **aplicadas exclusivamente en los nudos**.
- Las **deformaciones** son **despreciables** frente a las dimensiones de las barras.
- El **peso** de las barras puede considerarse **despreciable** frente a las **cargas** externas.

Estas simplificaciones implican que **las barras se ven solicitadas esencialmente a un esfuerzo dirigido a lo largo de su eje (axil)**

Resolver una cercha supone calcular cómo trabajan todas las barras, y cada barra introduce sólo una incógnita, la **magnitud del axil**.

El **sentido** del axil podrá ser de **tracción** o **compresión**, dependiendo del signo que obtengamos.

AXIL DE TRACCIÓN



AXIL DE COMPRESIÓN



Sistemas isostáticos e hiperestáticos

Las estructuras articuladas se fijan mediante apoyos. Si llamamos **b** al **número de barras** y **n** al **número de nudos**, teniendo en cuenta el número de incógnitas en los apoyos (según las ecuaciones de equilibrio), los sistemas se clasifican así:

Exteriormente, en función del **exceso o defecto de restricciones en los apoyos**:

- **Inestable:** n° de incógnitas < 3
- **Isostático:** n° de incógnitas $= 3$
- **Hiperestático:** n° de incógnitas > 3

Interiormente, en función del **exceso o defecto de barras**:

- **Inestable:** $b < 2n - 3$
- **Isostático:** $b = 2n - 3$
- **Hiperestático:** $b > 2n - 3$

Por lo tanto, **para que una estructura sea isostática, debe cumplirse que:**

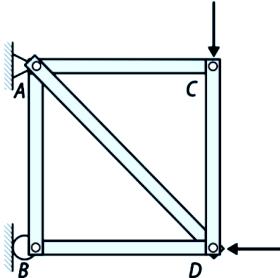
$$n^{\circ} \text{ de incógnitas} = 3$$

$$b = 2n - 3$$

Nosotros nos limitaremos a ver estructuras isostáticas en este curso.

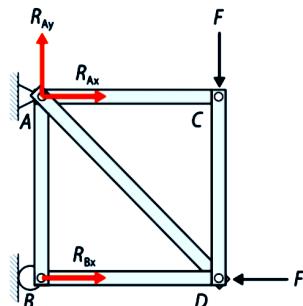
Ejemplo de estructura isostática

En la figura se representa una estructura de barras donde A es un apoyo articulado y B es un apoyo libre. Di si se trata de una estructura isostática.



Solución

Construimos el diagrama de fuerzas:



Se trata de una estructura isostática exteriormente, ya que hay igual número de incógnitas ($R_{Ax} = ?, R_{Ay} = ?, R_{Bx} = ?$) que de ecuaciones ($\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M = 0$), y también es isostática interiormente, ya que el número de barras $b = 5 = 2n - 3$ (siendo n el número de nudos: $n = 4$).

Métodos de cálculos de estructuras de barras

Estudiaremos tres métodos distintos para calcular los esfuerzos en las barras de las estructuras. Dos de esos métodos son analíticos y el tercero es un método gráfico. Son los siguientes:

- **Método de los nudos**
- **Método de las secciones (método de Ritter)**
- **Método gráfico de Cremona**

5.1. Método de los nudos

Método de los nudos

Cuando una estructura articulada es **isostática**, puede analizarse por medio del **método de los nudos**. Al estar la estructura en equilibrio, supondremos en equilibrio todas sus barras y nudos, y obtendremos **ecuaciones de equilibrio estático para cada barra y cada nudo**.

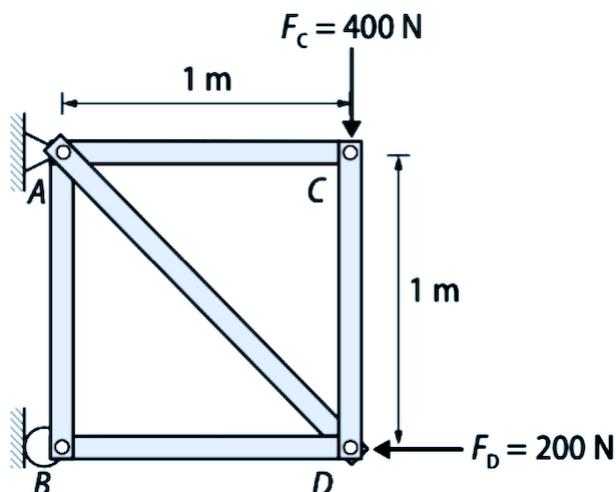
Para utilizar este método seguimos los siguientes pasos:

1. Calculamos las **reacciones en los apoyos** mediante las ecuaciones de equilibrio de toda la estructura.
2. Obtenemos la **ecuación de equilibrio para cada nudo** para calcular la **fuerza que ejerce cada barra sobre el nudo**.
3. La **fuerza que ejerce el nudo sobre la barra será igual y de sentido contrario**.
4. Con esto sabremos si las fuerzas son de **tracción** o de **compresión**.

Ejemplo resuelto

En la figura se representa una estructura de barras donde A es un apoyo articulado apoyo libre.

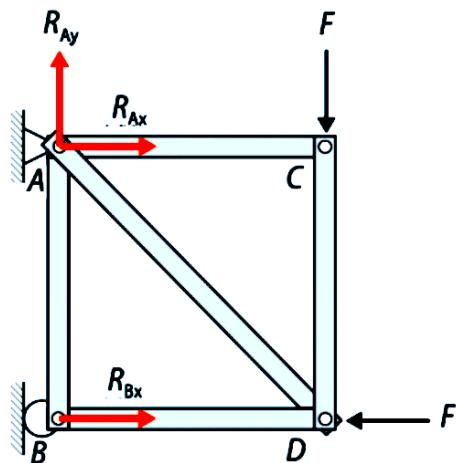
- a) Calcula el valor de las reacciones.
- b) Empleando el método de los nudos, calcula las tensiones de cada barra.



Comprobamos la **isostaticidad**:

Se trata de una estructura isostática exteriormente, ya que hay igual número de incógnitas (R_{AY} , R_{BX}) que de ecuaciones ($\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M = 0$), y también es interiormente, ya que el número de barras $b = 5 = 2n - 3$ (siendo n el número de nudos).

Construimos el diagrama de fuerzas:



Calculamos el valor de las reacciones en los nudos A y B:

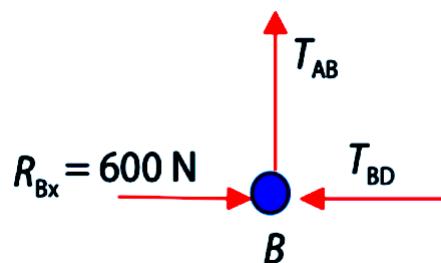
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} + R_{Bx} - 200 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 400 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 400 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_{Bx} \cdot 1 - 200 \cdot 1 - 400 \cdot 1 = 0 \Rightarrow R_{Bx} = 600 \text{ N} \Rightarrow R_{Ax} = -600 \text{ N}$$

Las **tensiones de cada barra**, calculadas por el método de los nudos, serán:

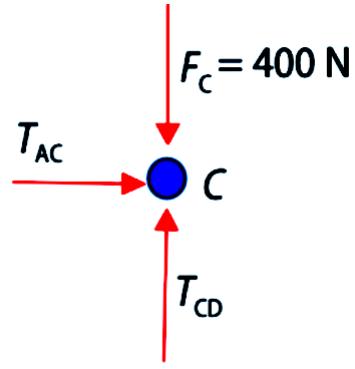
Nudo B



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Bx} - T_{BD} = 0 \Rightarrow T_{BD} = 600 \text{ N} \text{ (compresión)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AB} = 0 \text{ N}$$

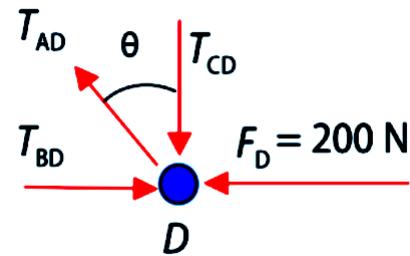
Nudo C



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AC} = 0 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_C + T_{CD} = 0 \Rightarrow T_{CD} = 400 \text{ N} \text{ (compresión)}$$

Nudo D



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AD} \cos \theta - T_{CD} = 0 \Rightarrow T_{AD} = \frac{T_{CD}}{\cos \theta} = \frac{400}{\cos 45^\circ} = 565,68 \text{ N} \text{ (tension)}$$

5.2. Método de las secciones (Ritter)

Método de las secciones (Ritter)

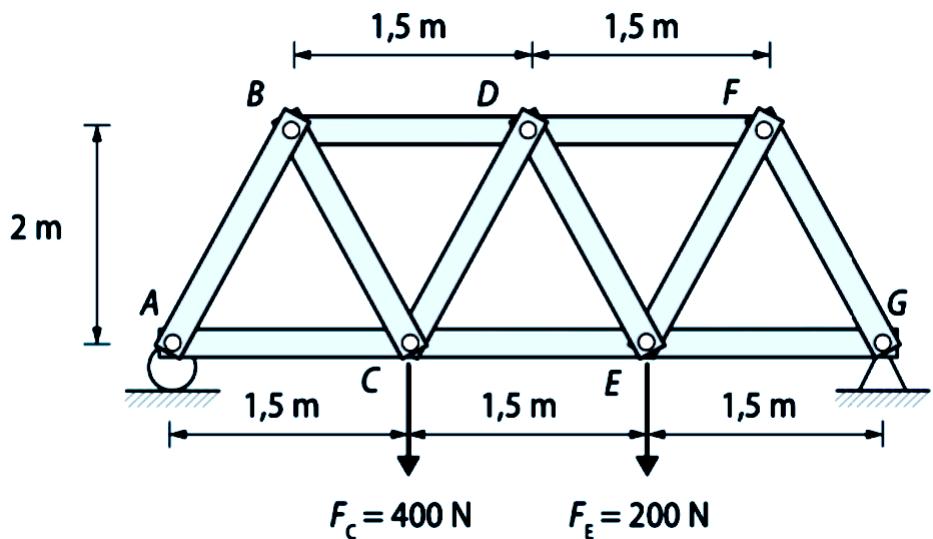
Se utiliza cuando queremos estudiar **una barra en concreto** y no la totalidad de la estructura.

Consiste en lo siguiente:

1. **Cortamos** la estructura por una sección que **intersecte tres barras**.
2. Eliminamos una de las dos partes en las que ha quedado dividida la estructura.
3. Aplicamos en la otra parte **las tres ecuaciones de equilibrio**.

Ejemplo resuelto

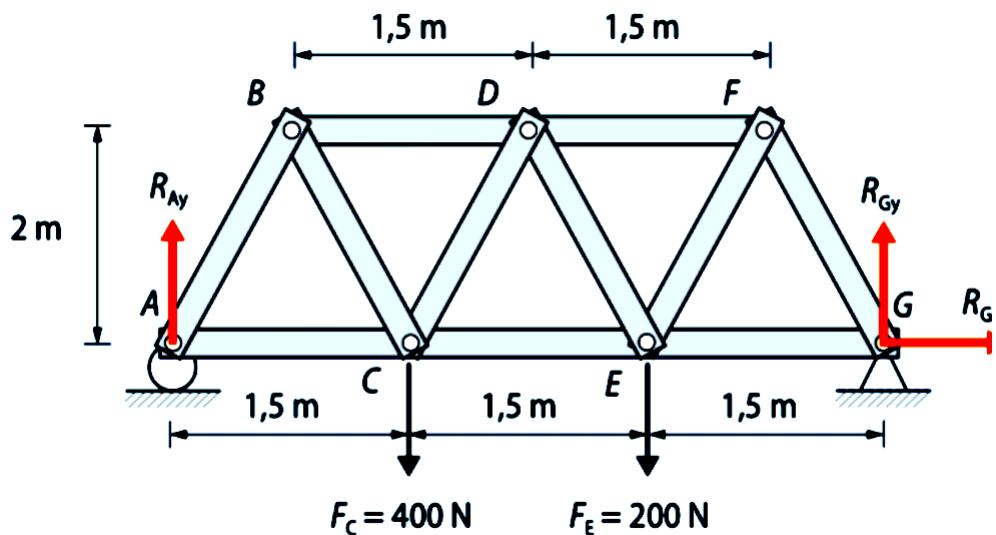
Empleando el método de las secciones, o de Ritter, calcula las tensiones de las barras siguiente estructura de barras, donde A es un apoyo libre y G es un apoyo articulado.



Comprobamos la isostática:

Se trata de una estructura isostática exteriormente, ya que hay igual número de incógnitas de ecuaciones ($\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M = 0$), y también es isostática interiormente, ya que el número de barras $b = 11 = 2n - 3$ (siendo n el número de nudos: $n = 7$).

Calculamos primero las **reacciones** con las ecuaciones de equilibrio de la estructura:



Con la suma de momentos en G podemos calcular directamente la reacción R_{Ay} :

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow R_{Ay} \cdot 4,5 - 400 \cdot 3 - 200 \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 333,$$

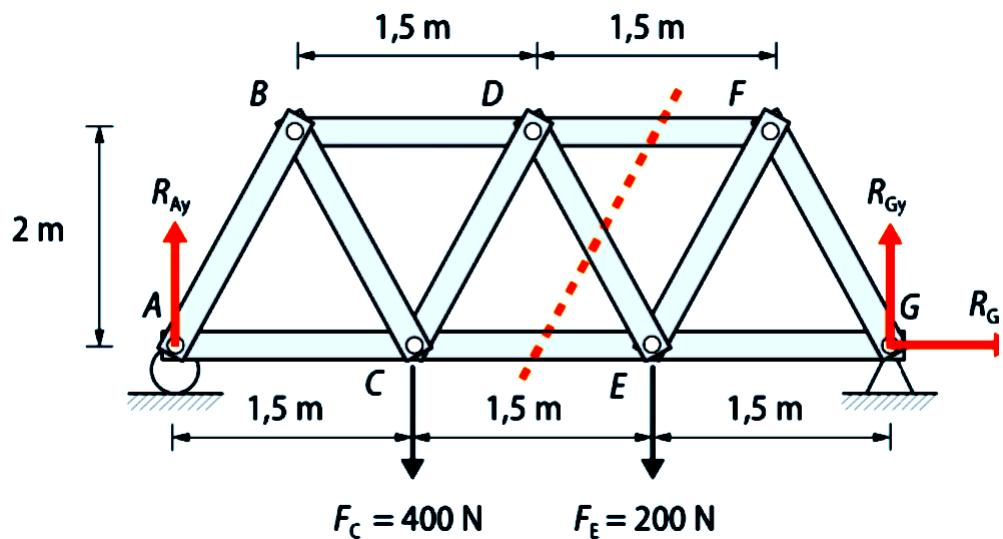
Con la suma de fuerzas verticales calculamos la reacción R_{Gy} :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Gy} = 600 - 333,33 = 266,66 \text{ N}$$

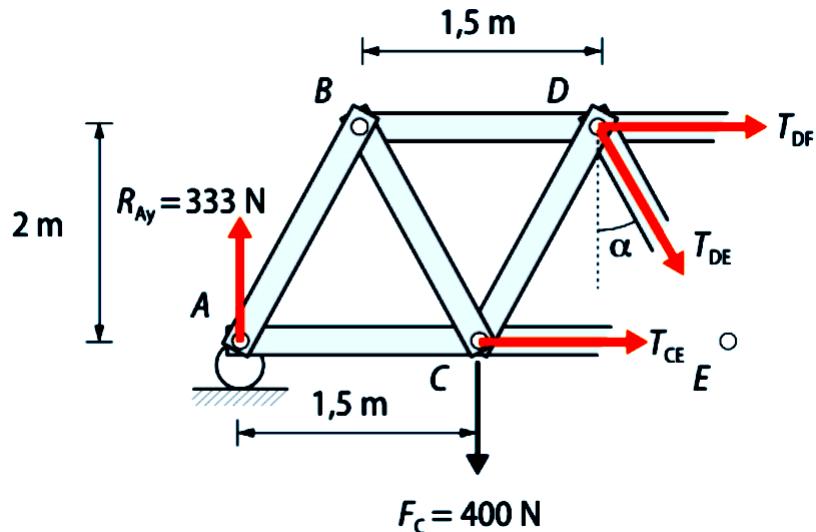
Por último, la última reacción, R_{Gx} , es claramente nula al ser la única fuerza horizontal:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Gx} = 0 \text{ N}$$

A continuación realizamos la sección de la estructura por tres barras, tal y como se ve



Cogemos el lado izquierdo del corte, realizamos el diagrama de cuerpo libre y dibuja las barras. Escogemos todas las tensiones como de tracción, es decir, salen del nud negativas, será que en realidad son de compresión:



Ponemos la ecuación de momento nulo en el nudo E. Como las tensiones T_{CE} y T_{DF} generan momento y nos las quitamos. Por lo tanto, podemos calcular directamente la:

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 333,33 \cdot 3 - 400 \cdot 1,5 + T_{DF} \cdot 2 \Rightarrow T_{DF} = -200$$

Como sale negativa, resulta que es un esfuerzo de **compresión**.

Con el equilibrio de fuerzas en el eje vertical, podemos calcular la tensión T_{DE} :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - F_C - T_{DE} \cos \alpha = 0$$

El ángulo α lo podemos calcular fácilmente de la geometría de la estructura:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{0,75}{2} \right) = 20,55^\circ$$

Por lo tanto:

$$333,33 - 400 - T_{DE} \cos 20,55^\circ = 0 \Rightarrow T_{DE} = -71,20 \text{ N}$$

De nuevo sale negativa, por lo que es un esfuerzo de **compresión**.

Por último, con la suma de fuerzas horizontales obtenemos la tensión que nos falta, T_{CE} :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{CE} + T_{DF} + T_{DE} \sin 20,55^\circ = 0 \Rightarrow T_{CE} = 200 - 71,2 \sin 20,55^\circ$$

En esta ocasión, al salir positiva, es un esfuerzo de **tracción**.

5.3. Método gráfico de Cremona

Método gráfico de Cremona

El método de Cremona es un procedimiento gráfico basado en el método de los nudos.

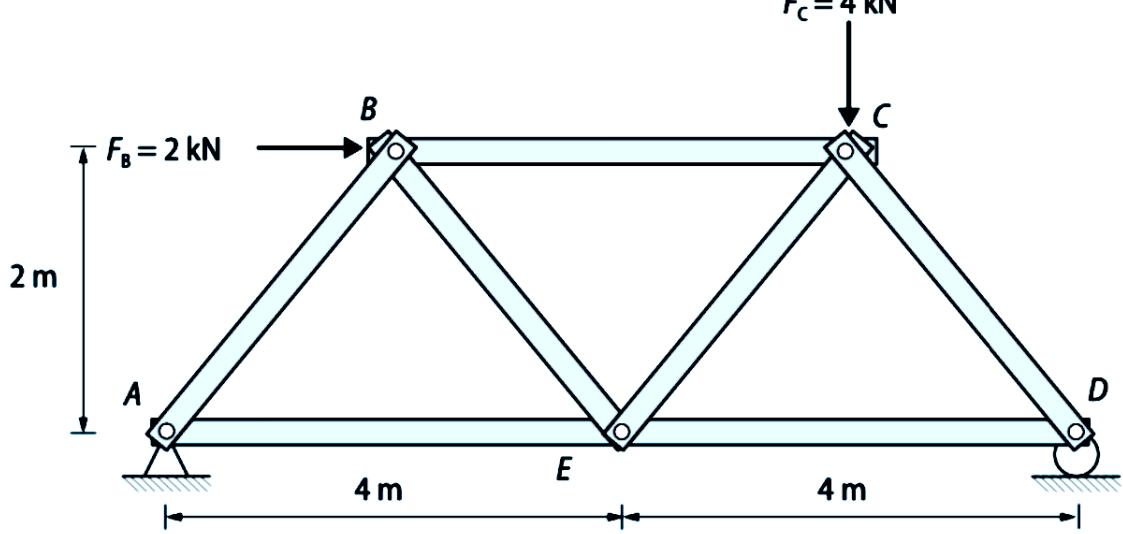
Consiste en lo siguiente:

1. Dibujamos la estructura indicando las **cargas** y calculando las **reacciones**.
2. Asignamos un número a cada **zona del perímetro externo** situada entre dos fuerzas (ya sean cargas o reacciones).
3. Asignamos un número a cada **zona interna** situada entre las barras de la estructura.
4. Dibujamos el **polígono de fuerzas exteriores y reacciones**.
5. Consideramos cada nudo aisladamente, estableciendo **dos ecuaciones de equilibrio para cada nudo**. Comenzaremos por un nudo en el que concurren dos barras.
6. Operamos con nudos sucesivos, eligiéndolos de forma que al resolverlos sólo existan dos barras cuyas fuerzas sean desconocidas.
7. Determinamos las incógnitas teniendo en cuenta que **las fuerzas exteriores e interiores constituyen polígonos cerrados**.
8. Iniciamos la construcción de gráficas. Dibujaremos **polígonos cerrados de fuerzas para cada uno de los nudos**, combinados de forma que **cada fuerza actuante en una barra**, que será común a dos nudos, **solamente se represente una vez**.
9. Medimos las fuerzas en el polígono de Cremona y las pasamos a una tabla. Las tensiones que se **acerquen** al nudo serán de **compresión** y las que se **alejen** serán de **tracción**.

Como siempre, lo veremos mejor con un ejemplo resuelto.

Ejemplo resuelto

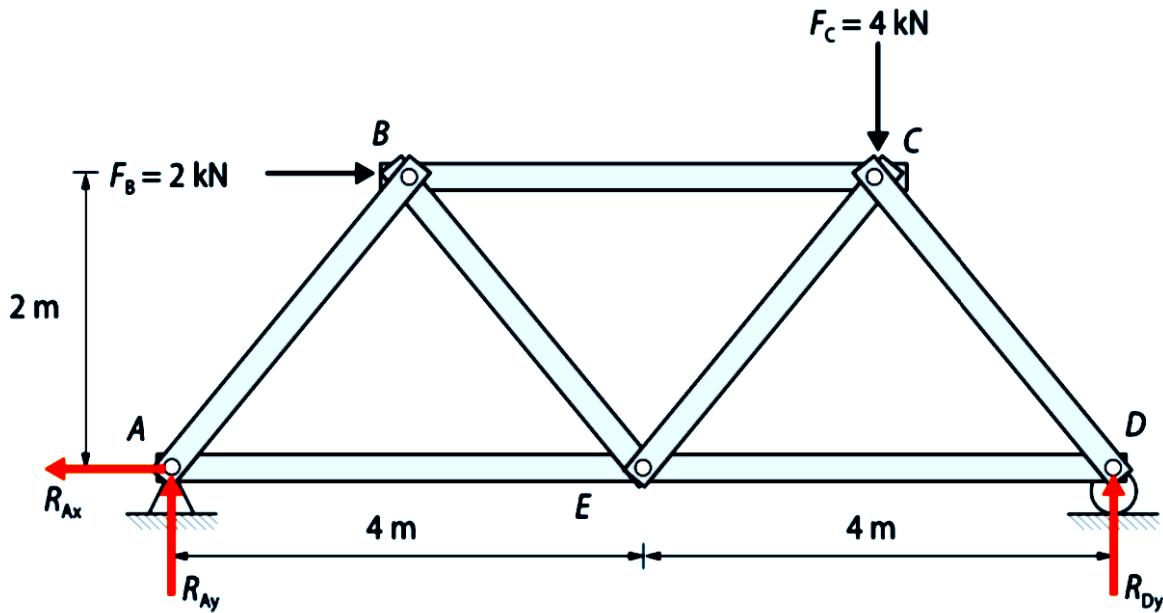
Empleando el método gráfico de Cremona, calcula las tensiones de las barras de la siguiente estructura de barras, donde A es un apoyo articulado y D es un apoyo libre.



Comprobamos la isostática:

Se trata de una estructura isostática exteriormente, ya que hay igual número de incógnitas (R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Dy}) que de ecuaciones ($\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M = 0$), y también es isostática interiormente, ya que el número de barras $b = 7 = 2n - 3$ (siendo n el número de nudos: $n = 5$).

Calculamos las reacciones:



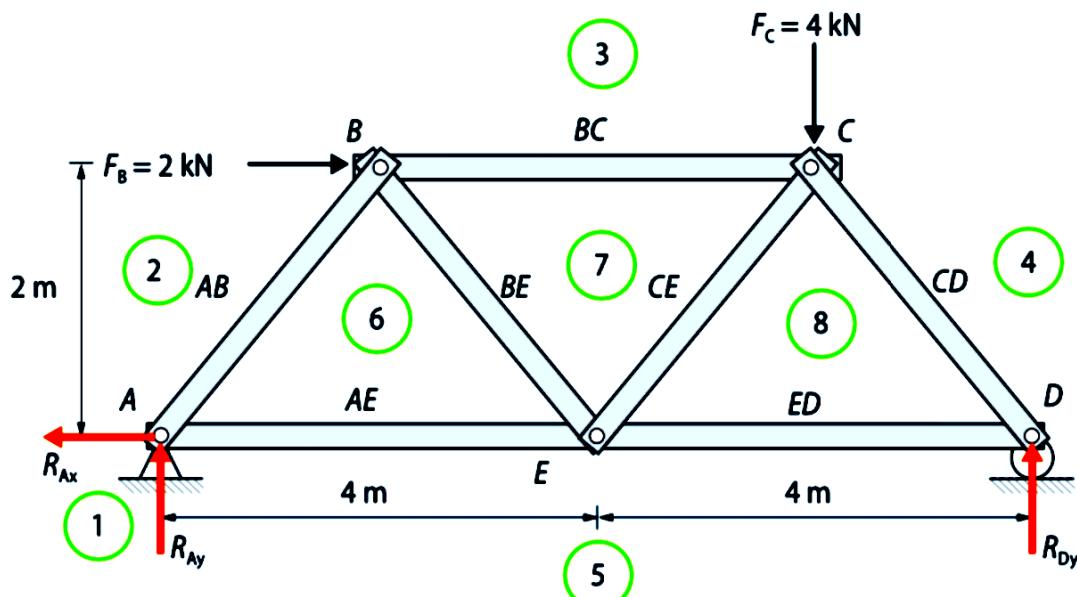
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_{Dy} \cdot 8 - 4 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_{Dy} = 3,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 4 - R_{Dy} = 0,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 2 \text{ kN}$$

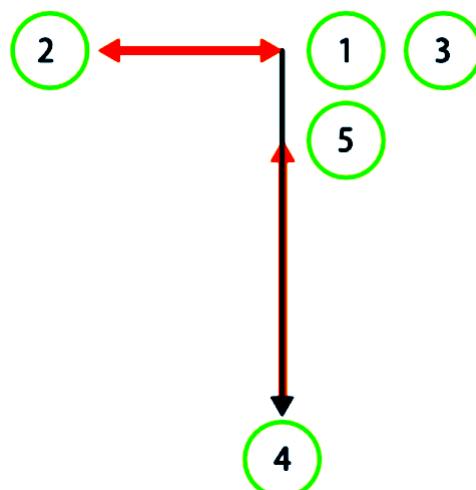
Numeramos las barras y asignamos un número a cada zona del perímetro externo situado entre dos fuerzas (acciones o reacciones) y luego a las zonas internas.

Las zonas del perímetro serán, en este caso, 1, 2, 3, 4 y 5, mientras que las zonas internas serán 6, 7 y 8:



Ahora dibujamos el **polígono de fuerzas externas**, que estará formado por los números de las zonas externas (es decir, del 1 al 5). Para dibujarlo, operamos como sigue:

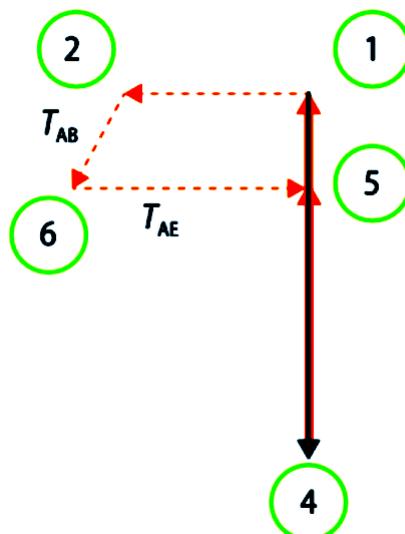
- Situamos el número 1.
- Trazamos desde el número 1 una línea paralela a la fuerza que hay entre 1 y 2 (en este caso R_{Ax}), y elegimos una escala para marcar una distancia que corresponda al valor de dicha fuerza (por ejemplo, 1 cm = 1 kN)
- Una vez situado el número 2, repetimos el procedimiento anterior para situar el 3.
- Continuamos hasta llegar al último número (en este caso el 5), comprobando que desde él hacia el 1 el polígono queda **cerrado** (es decir, que terminamos de nuevo sobre el número 1)



Sobre el diagrama de Cremona, empezamos a dibujar los números de las zonas internas, correspondientes a las barras que concurren en un nudo **con sólo dos incógnitas**. Para ello, recorremos el nudo en **SENTIDO HORARIO**: mirando, por ejemplo, el **nudo A**, la numeración es 1-2-6-5. Lo que estamos haciendo es sumar las fuerzas que actúan en cada nudo en un determinado orden.

El nº 6 es el único que no está situado en el diagrama. Vemos cómo situarlo:

- La **barra AB** corresponderá en el diagrama a un segmento **entre 2 y 6**. Por tanto, trazamos desde 2 una línea paralela a la barra AB.
- La **barra AE** corresponderá en el diagrama a un segmento **entre 6 y 5**. Por tanto, trazamos desde 5 una línea paralela a la barra AE.
- En el punto donde se corten estas dos líneas, estará el punto 6.



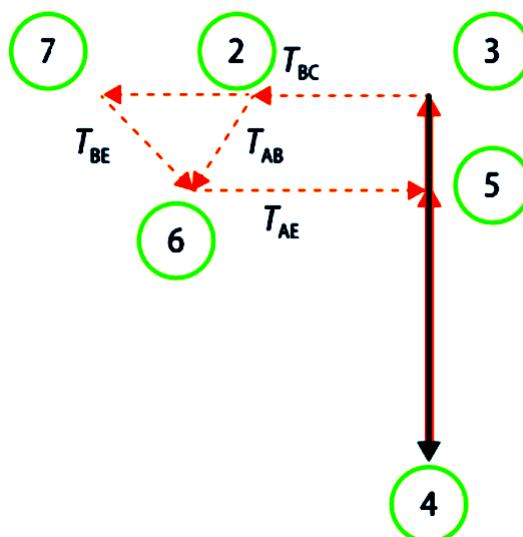
Midiendo sobre el diagrama la longitud de los segmentos, obtenemos la magnitud de los axiles de las barras AB y AE. Los esfuerzos que van **hacia el nudo** (en este caso A) son de **compresión** y los que se **alejan** son de **tracción**. En este caso resultan ser:

$$T_{AB} = 0,707 \text{ kN} \text{ (compresión)}$$

$$T_{AE} = 2,5 \text{ kN} \text{ (tracción)}$$

Seguimos por el **nudo B**: dibujamos los segmentos de las barras del nudo B.

- La **barra BC** corresponderá en el diagrama a un segmento **entre 3 y 7**. Por tanto, trazamos desde 3 una línea paralela a la barra BC.
- La **barra BE** corresponderá en el diagrama a un segmento **entre 7 y 6**. Por tanto, trazamos desde 6 una línea paralela a la barra BE.
- En el punto donde se corten estas dos líneas, estará el número 7.



Directamente sobre el diagrama medimos las magnitudes de los axiles. Los que se acerquen al nudo B serán de compresión y los que se alejen serán de tracción:

$$T_{BC} = 3 \text{ k N} \text{ (compresión)}$$

$$T_{BE} = 0,707 \text{ kN} \text{ (tracción)}$$

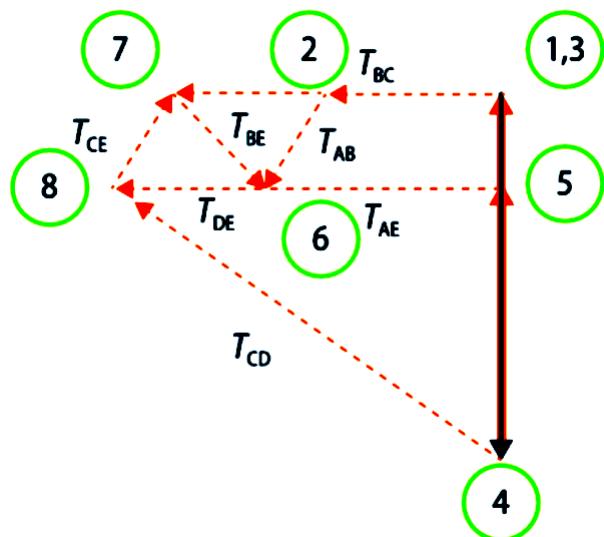
A continuación, seguimos con el **nudo C**:

- La **barra CD** corresponderá en el diagrama a un segmento **entre 4 y 8**. Por tanto, trazamos desde 4 una línea paralela a la barra CD.
- La **barra CE** corresponderá en el diagrama a un segmento **entre 8 y 7**. Por tanto, trazamos desde 7 una línea paralela a la barra CE.
- En el punto donde se corten estas dos líneas, estará el punto 8.

Finalizamos con el **nudo D**:

- La **barra ED** corresponderá en el diagrama a un segmento entre 5 y 8. Por tanto, **unimos los puntos 5 y 8** del diagrama y obtendremos una línea paralela a la barra ED que nos representa ya el axil T_{ED} .

El diagrama completo queda así:



Los valores que faltaban por medir son estos:

$$T_{CD} = 4,95 \text{ kN} \text{ (compresión)}$$

$$T_{CE} = 0,707 \text{ kN} \text{ (compresión)}$$

$$T_{ED} = 3,5 \text{ kN} \text{ (tracción)}$$