

# **Unidad 7: Estructuras**

**Tecnología e Ingeniería II - 2º Bachillerato**

José Luis García Jiménez

10/01/2026

# Índice de contenidos

<b>Introducción</b>	<b>4</b>
Contenidos de la unidad . . . . .	4
<b>1 Descripción y elementos de estructuras sencillas</b>	<b>5</b>
1.1 Conceptos básicos sobre las estructuras . . . . .	5
Cargas . . . . .	5
Reacciones . . . . .	5
Esfuerzos . . . . .	5
Condiciones a cumplir por las estructuras . . . . .	6
1.2 Elementos resistentes en edificación . . . . .	7
Cimientos o cimentación . . . . .	7
Soportes . . . . .	7
Muros de carga o portantes . . . . .	7
Vigas . . . . .	7
Cerchas . . . . .	7
Forjados . . . . .	7
Tirantes . . . . .	9
Arcos, bóvedas y cúpulas . . . . .	10
Dinteles . . . . .	10
1.3 Elementos resistentes en maquinaria . . . . .	10
Chasis y Bastidor . . . . .	10
Bancada . . . . .	10
<b>2 Cargas. Tipos de apoyos y uniones</b>	<b>12</b>
2.1 Cargas aplicadas y reacciones . . . . .	12
2.2 Tipos de apoyos y restricciones . . . . .	12
Apoyo Deslizante . . . . .	13
Apoyo Fijo (Articulado) . . . . .	13
Empotramiento . . . . .	13
Resumen de reacciones en apoyos . . . . .	13
2.2.1 Ejemplos reales . . . . .	13
<b>3 Cálculos básicos en estructuras</b>	<b>15</b>
3.1 Centro de gravedad . . . . .	15
3.1.1 Ejercicio propuesto . . . . .	17
3.2 Componentes vectoriales de una fuerza . . . . .	17
3.3 Fuerza resultante . . . . .	18
3.4 Momento de una fuerza . . . . .	20
3.5 Condiciones de equilibrio . . . . .	20
3.6 Ejercicios . . . . .	20
<b>4 Cálculo de esfuerzos en vigas. Diagramas de esfuerzos</b>	<b>23</b>
4.1 Criterio de signos (Cargas) . . . . .	23
4.2 Viga isostática . . . . .	24

4.3	Tipos de esfuerzos en una viga . . . . .	24
4.3.1	Criterio de signos para los esfuerzos internos . . . . .	25
4.4	Diagramas de esfuerzos . . . . .	25
1.	Determinar las reacciones en los apoyos . . . . .	26
2.	“Cortar” la viga mentalmente . . . . .	26
3.	Expresar cada esfuerzo en función de la posición x . . . . .	26
4.	Dibujar los diagramas . . . . .	26
4.5	Ejemplo 1: Viga con carga puntual . . . . .	27
	Enunciado . . . . .	27
1.	Calcular las reacciones . . . . .	27
2.	“Cortar” la viga en tramos . . . . .	28
3.	Expresar los esfuerzos (Cortes) . . . . .	28
4.	Dibujar los diagramas . . . . .	29
4.6	Ejemplo 2: Viga con carga distribuida . . . . .	34
	Enunciado . . . . .	34
1.	Calcular las reacciones . . . . .	34
2.	“Cortar” la viga en tramos . . . . .	35
3.	Expresar los esfuerzos (Cortes) . . . . .	36
4.	Dibujar los diagramas . . . . .	37
4.7	Ejemplo 3: Viga en voladizo con carga uniformemente repartida . . . . .	39
	Enunciado . . . . .	39
1.	Calcular las reacciones . . . . .	40
2.	“Cortar” la viga . . . . .	40
3.	Expresar los esfuerzos ( $0 \leq x \leq 3$ ) . . . . .	41
4.	Dibujar los diagramas . . . . .	41
4.8	Otros ejemplos de cálculo de esfuerzos . . . . .	43
	Vídeo explicativo . . . . .	43
<b>5</b>	<b>5. Cálculo de esfuerzos en estructuras de barras articuladas</b>	<b>44</b>
5.1	Sistemas isostáticos e hiperestáticos . . . . .	45
5.2	Métodos de cálculo de estructuras de barras . . . . .	46
5.3	Método de los nudos . . . . .	46
	Comprobación de isostaticidad . . . . .	47
1.	Diagrama de fuerzas y Reacciones . . . . .	47
2.	Cálculo de tensiones (Método de los Nudos) . . . . .	48
5.4	Método de las secciones (Ritter) . . . . .	49
	Comprobación de isostaticidad . . . . .	50
1.	Cálculo de Reacciones . . . . .	50
2.	Aplicación del Método de Ritter . . . . .	50
5.5	Método gráfico de Cremona . . . . .	51
	Comprobación de isostaticidad . . . . .	52
1.	Cálculo de Reacciones . . . . .	52
2.	Numeración de Zonas (Notación de Bow) . . . . .	53
3.	Construcción del Polígono de Fuerzas (Cremona) . . . . .	53
4.	Medición de Resultados . . . . .	55

# Introducción

En esta unidad de **Tecnología e Ingeniería II**, veremos desde los conceptos básicos de cargas y apoyos hasta el cálculo de estructuras articuladas y vigas.

## Contenidos de la unidad

A continuación se detallan las secciones que componen esta unidad:

1. **Descripción y elementos de estructuras sencillas:** Una visión general sobre la función de las estructuras.
2. **Cargas. Tipos de apoyos y uniones:** Clasificación de las fuerzas externas a las estructuras.
3. **Cálculos básicos en estructuras:** Aplicación de los principios fundamentales.
4. **Cálculo de esfuerzos en vigas:** Análisis del comportamiento de vigas sometidas a flexión, axil y cortante.
5. **Cálculo de esfuerzos en estructuras de barras articuladas:** Resolución de celosías mediante métodos analíticos y gráficos.

*Última actualización: 10/01/2026*

# 1 Descripción y elementos de estructuras sencillas

## 1.1 Conceptos básicos sobre las estructuras

### Definición

Las estructuras son conjuntos de elementos unidos entre sí capaces de soportar las fuerzas que actúan sobre ellas, conservando su forma.

Recordamos algunos conceptos básicos sobre las estructuras, que utilizaremos en esta unidad.

### Cargas

Las **fuerzas** que actúan sobre las estructuras se denominan **cargas o acciones**.

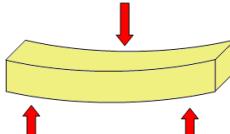
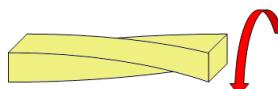
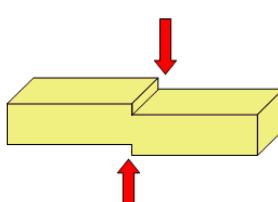
### Reacciones

Para mantenerse en equilibrio con las fuerzas que actúan sobre ellas, las estructuras, según el principio físico de acción y reacción, tienen que contraponer otras fuerzas iguales y de sentido contrario. **Al conjunto de fuerzas con las que las estructuras reaccionan ante las cargas se las denomina reacciones.** Las fuerzas de reacción se ejercen en los puntos por donde las estructuras están sujetas (apoyos), o bien por donde se unen los diferentes elementos de las mismas (uniones).

### Esfuerzos

Al aplicar cargas sobre una estructura, aparecen unas **tensiones o fuerzas internas** en los elementos de la estructura que se denominan esfuerzos. Los diferentes esfuerzos que puede soportar una estructura son los siguientes:

Esfuerzo	Efecto y Descripción	Esquema	Ejemplos
Tracción	Estirar. Dos fuerzas opuestas tiran del elemento para alargarlo.		Cadenas de columpio, cables de grúa.

Esfuerzo	Efecto y Descripción	Esquema	Ejemplos
<b>Compresión</b>	<b>Comprimir.</b> Dos fuerzas opuestas aplastan el elemento para acortarlo.		Patas de silla, columnas, pilares.
<b>Flexión</b>	<b>Doblar.</b> Las fuerzas tienden a curvar el elemento.		Tablero de mesa, vigas de suelo, estanterías.
<b>Torsión</b>	<b>Retorcer.</b> Las fuerzas giran en sentidos opuestos sobre el eje.		Eje de destornillador, llave al girar, grifos.
<b>Cortante</b>	<b>Cortar/Cizallar.</b> Dos fuerzas paralelas y opuestas muy próximas.		Tijeras, guillotina, sujeción de cuadros.

### Condiciones a cumplir por las estructuras

A las estructuras se les exige **soportar cargas, mantener la forma, proteger** partes delicadas, ser **ligeras** y sobre todo, ser **estables**.

Para ello, toda estructura tiene que cumplir las siguientes condiciones:

- **Estabilidad:** Para que la estructura se mantenga erguida y no vuelque, **su centro de gravedad tiene que estar dentro de su base** y lo más cercano al suelo posible. Para conseguirlo a veces se tiene que recurrir a acciones como ampliar la base, poner tirantes o empotrar su base inferior al suelo.
- **Resistencia:** Tienen que ser capaces de **soportar las distintas cargas sin romperse**, esto depende de la forma de la estructura y del tipo y de la cantidad de material con que se ha construido.
- **Rigidez:** La **deformación** de los elementos no puede ser grande.

### **Importante: Triangulación**

Esto se consigue cuando la forma de las estructuras es adecuada, soldando las uniones para reforzarlas y con triangulaciones, ya que **el triángulo es el único polígono indeformable**. Es por ello que son las formas más empleadas en las estructuras.

Las diagonales usadas para triangular se llaman **arriostramientos**.

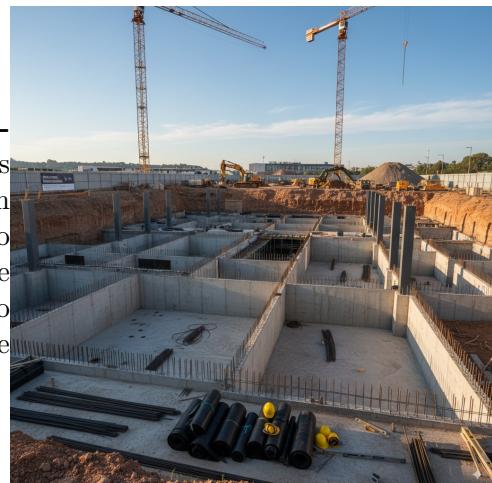
Aún así, toda estructura tiene que tener cierto grado de flexibilidad, ya que tienen que ser capaces de soportar las variaciones debidas a la dilatación y a la contracción de materiales, así como de absorber vibraciones y movimientos sísmicos.

## **1.2 Elementos resistentes en edificación**

Las estructuras de edificación se componen de lo que denominamos elementos resistentes, que se pueden clasificar en:

### **Cimientos o cimentación**

Conjunto de elementos estructurales cuya misión es **transmitir las cargas** de la edificación o de elementos apoyados en éste **al suelo**, distribuyéndolas de forma que no superen una serie de valores máximos del terreno de apoyo. Debido a que la resistencia del suelo es, generalmente, menor que la de los pilares o muros que soportará, el área de contacto entre el suelo y la cimentación será mucho más grande que los elementos soportados (zapatas).



(a) Cimientos

### **Soportes**

### **Muros de carga o portantes**

### **Vigas**

### **Cerchas**

### **Forjados**

Se denomina forjado al **elemento estructural, horizontal o inclinado** (en cubiertas), que **soporta su propio peso y las sobrecargas de uso**, tabiquería, dinámicas, etc. Transmite cargas verticales y horizontales, aportando rigidez.

Elementos **verticales** que soportan fundamentalmente esfuerzos de **compresión**, aunque también parte de cortante y, sobre todo, en los elementos más esbeltos, **pandeo**.

- **Pilares**: son habitualmente de hormigón armado, normalmente ejecutados “in situ” (encofrado). También pueden ser de acero.
- **Pie derecho**: soporte de **madera**.
- **Columna**: soporte de **sección circular**.



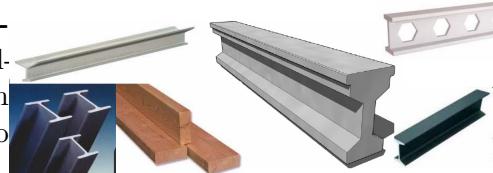
(a) Pilares

Se trata de **paredes** de una edificación que poseen función estructural, es decir, aquellas que **soportan otros elementos** estructurales del edificio, como arcos, bóvedas, vigas o viguetas de forjados o de la cubierta. Soportan fundamentalmente esfuerzos **axiles de compresión**. Cuando soportan cargas horizontales (presiones del terreno) se denominan **muros de contención**.



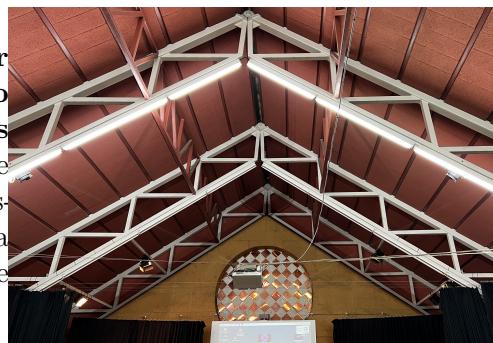
(a) Muros de carga

Elemento estructural que normalmente se coloca en **posición horizontal** destinado a soportar esfuerzos principalmente de **flexión** y de **cortante**. Las vigas que forman parte de un forjado se denominan **viguetas**. El conjunto vigas-pilares forma lo que denominan **pórticos**.



(a) Tipos de vigas

Una cercha es una **celosía**, una **estructura reticular** de **barras rectas** interconectadas en nodos formando **triángulos planos** (en celosías planas) o **pirámides tridimensionales** (en celosías espaciales). También se les conoce como **armaduras**. El interés de este tipo de estructuras es que las barras trabajan predominantemente a **compresión y tracción**, presentando comparativamente flexiones pequeñas.



(a) Cercha

Un tipo muy habitual es el forjado de viguetas y bovedillas, cuya construcción se detalla en el recurso adjunto.

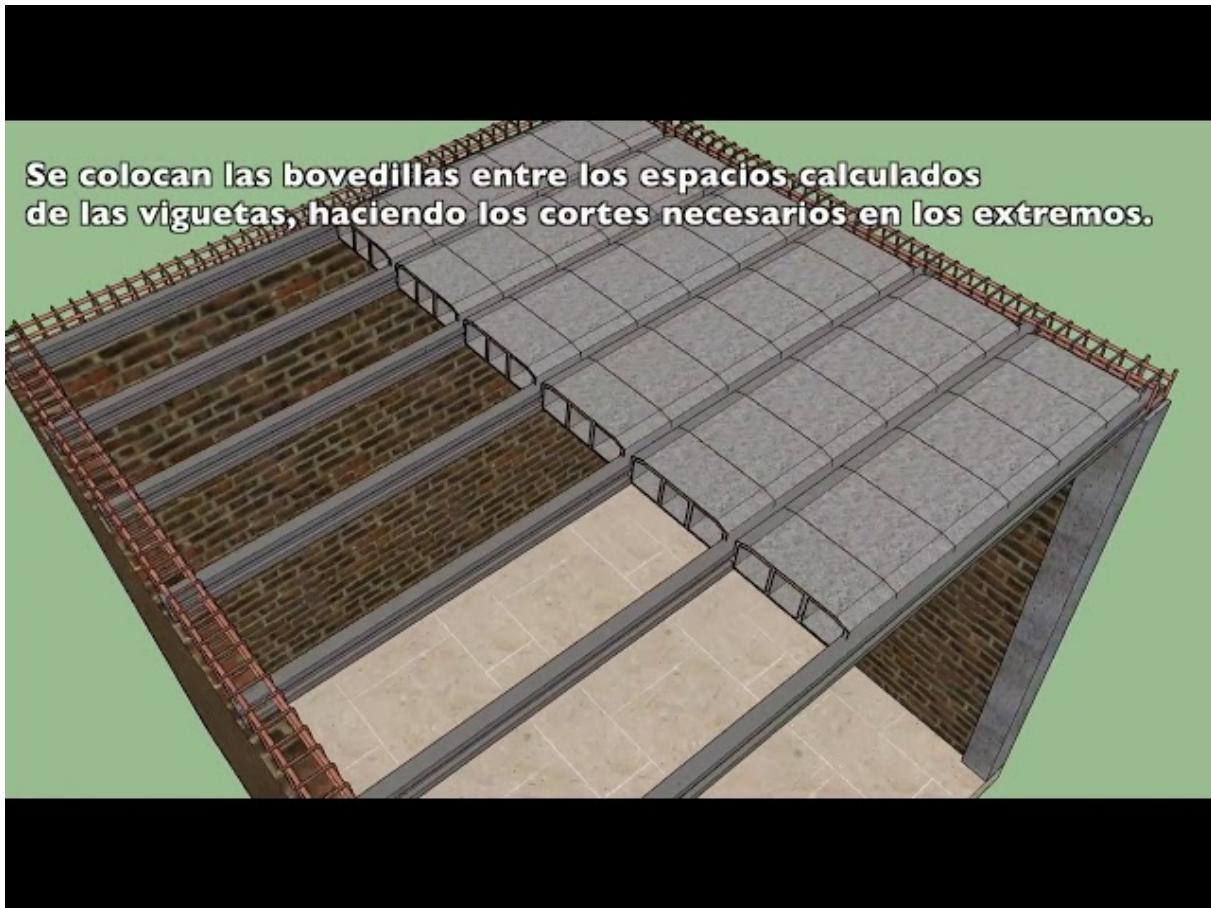
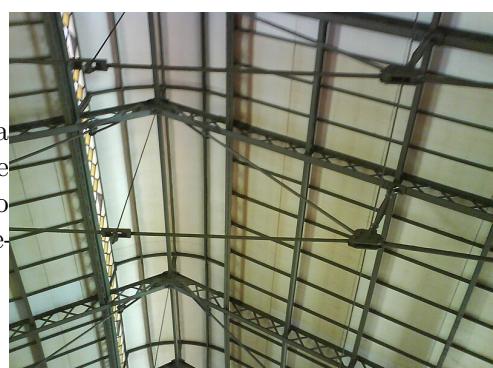


Figure 1.6: Ver vídeo: Construcción de forjado

([Click para ver vídeo](#))

## Tirantes

Se usan para unir dos elementos de una estructura o una estructura al terreno. Su principal característica es que trabajan **siempre a tracción** y no soportan ningún otro esfuerzo. Se fabrican habitualmente de acero, dada su excelente resistencia a la tracción.



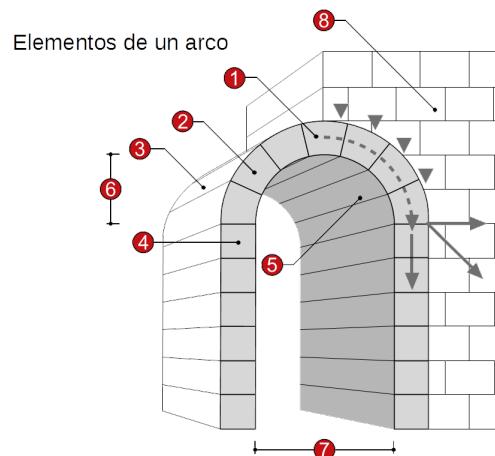
(a) Tirantes (Mercado del Val)

## Arcos, bóvedas y cúpulas

**Arco:** Elemento curvo que salva el espacio entre dos pilares. Trabaja predominantemente a **compresión**, transmitiendo cargas oblicuas (empuje) a los apoyos.

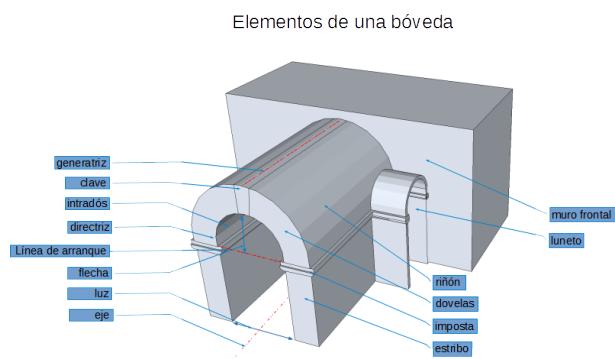
**Bóveda:** Elemento **superficial** generado por el **movimiento de un arco** a lo largo de un eje. Cubre espacios entre muros o pilares trabajando a **compresión**.

**Cúpula:** Elemento para **cubrir un espacio** circular o poligonal mediante arcos rotados respecto a un punto central. Los esfuerzos son de **tracción** en los **paralelos** y de **compresión** en los **meridianos**.



1. Clave 2. Dovela 3. Trasdós 4. Imposta 5. Intradós 6. Flecha 7. Luz, Vano 8. Contrafuerte.

(a) Elementos del arco



(a) Elementos de la bóveda

## Dinteles

Es el **elemento superior que permite crear vanos en los muros** para conformar puertas y ventanas. La construcción que utiliza dinteles se llama **adintelada**. A diferencia de los arcos, trabaja fundamentalmente a **flexión**, por lo que requiere materiales resistentes a la tracción.



(a) Dintel de piedra (Año 1780)

## 1.3 Elementos resistentes en maquinaria

### Chasis y Bastidor

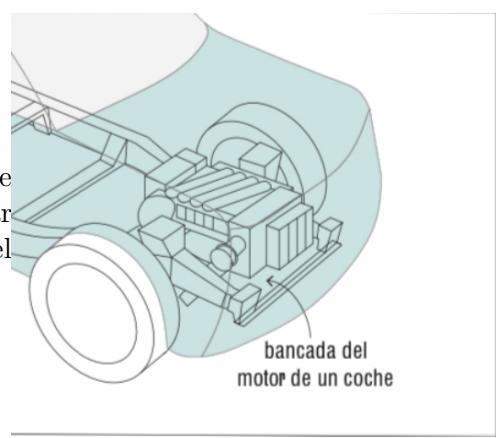
### Bancada

El **chasis** es el **armazón metálico** que soporta los elementos de un vehículo (motor, carrocería). El **bastidor** es la parte más importante del chasis. Es una estructura compuesta por largueros y travesaños donde se fijan los elementos mecánicos. En los turismos modernos ha sido sustituido por **carrocerías monocasco**, integrando bastidor y carrocería en una única estructura.



(a) Chasis rodante

Es la estructura de una máquina herramienta, sobre la que se construye ésta. Sus principales funciones son soportar vibraciones y movimientos, mantener la precisión en el mecanizado de piezas y alojar los mecanismos.



(a) Bancada

# 2 Cargas. Tipos de apoyos y uniones

## 2.1 Cargas aplicadas y reacciones

Las **fuerzas** que actúan sobre la estructura se llaman **cargas estructurales** y son causantes de **esfuerzos, deformaciones y desplazamientos**. Todas tienen que ser incluidas en el cálculo estructural.

- **Tipos:** Las cargas pueden ser **fijas** (como el peso propio) o **variables** (como el viento).
- **Unidades:** Se miden en **newtons (N)** en el Sistema Internacional.
- **Distribución:** Pueden ser **puntuales** (un punto), **distribuidas** (sobre una longitud) o **momentos** (giros en una sección).

Para mantener el equilibrio estático, es necesario que se produzcan **reacciones**. La viga no está aislada, sino sujeta a otros elementos que generan una reacción opuesta a las cargas.

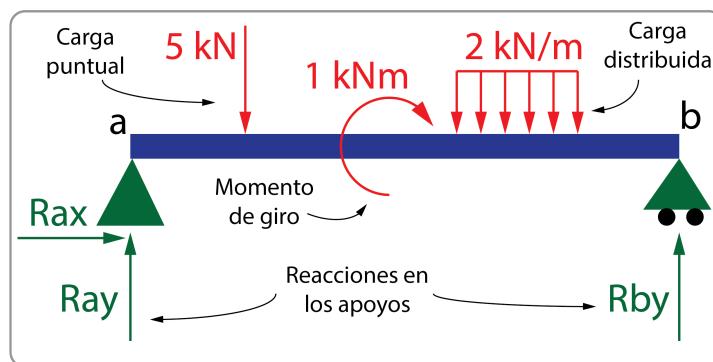


Figure 2.1: Esquema de cargas y reacciones

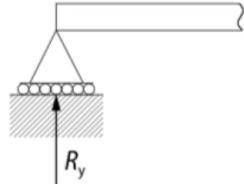
## 2.2 Tipos de apoyos y restricciones

El valor de las reacciones depende de las cargas y de las **restricciones** de la viga. No es lo mismo un apoyo simple que un empotramiento. Las **limitaciones de movimiento** que introducen los **apoyos** definen estas restricciones.

Para el cálculo de vigas identificamos tres tipos principales:

## Apoyo Deslizante

Permite la rotación y el movimiento en una dirección (generalmente horizontal).

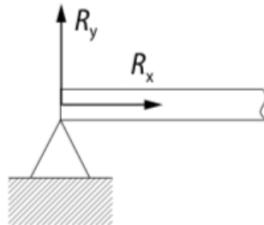


(a) Apoyo Deslizante

- **Reacción ( $R_y$ ):** Aparece solo una fuerza vertical, ya que se impide la translación vertical.
- **Momento:** No hay, la rotación está permitida.

## Apoyo Fijo (Articulado)

Permite la rotación pero impide movimiento en una dirección (cualquier traslación).

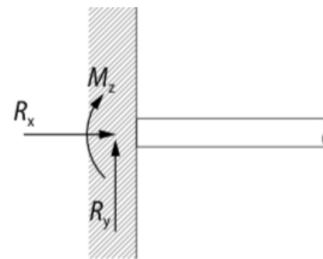


(a) Apoyo Fijo

- **Reacciones ( $R_x, R_y$ ):** Aparecen fuerzas en ambos ejes, ya que se impide la translación en cualquier dirección.
- **Momento:** No hay, la rotación está permitida.

## Empotramiento

Impide cualquier movimiento (traslación o rotación).



(a) Empotramiento

- **Reacciones ( $R_x, R_y$ ):** Aparecen fuerzas en ambos ejes.
- **Momento ( $M_z$ ):** Aparece un momento de reacción ya que se impide la rotación.

## Resumen de reacciones en apoyos

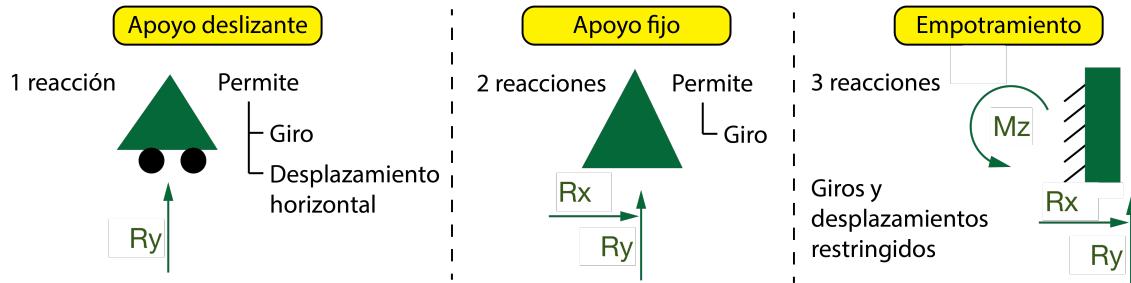


Figure 2.5: Tabla resumen de apoyos

### 2.2.1 Ejemplos reales

En el siguiente vídeo puedes ver ejemplos en el mundo real de estos tipos de apoyos:

## ¿Cómo se ve un apoyo en la vida real?

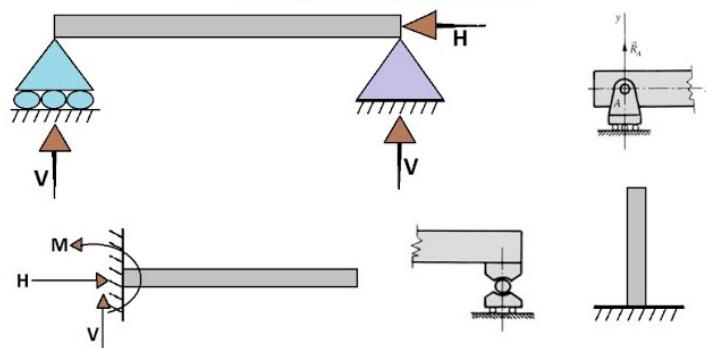


Figure 2.6: Ver vídeo: Tipos de apoyos

(Click para ver vídeo)

# 3 Cálculos básicos en estructuras

El análisis estructural es un proceso importante en ingeniería. Las estructuras deben conseguir que las construcciones se sostengan y perduren en el tiempo, es decir, que tengan **estabilidad** y **resistencia**.

En el diseño de las estructuras es necesario realizar cálculos para garantizar esa estabilidad y resistencia, que podemos simplificar así:

1. Cálculo de la **dimensión** de la estructura para que cumpla su función, analizando las fuerzas que van a actuar sobre ella.
2. Cálculo de la **estabilidad** estructura, de forma que no se sobrepasen ciertos esfuerzos máximos en sus elementos.

Antes de calcular directamente esfuerzos producidos en elementos resistentes, comenzaremos familiarizándonos con algunos conceptos físicos y cálculos sencillos que son de aplicación directa en las estructuras.

## 3.1 Centro de gravedad

El concepto del **centro de gravedad** es fundamental en el diseño de estructuras, en la física, en la ingeniería, y en muchas otras disciplinas que dependen del equilibrio y la estabilidad de los cuerpos.

El centro de gravedad de un cuerpo es el punto en el cual **se puede considerar que está concentrado todo su peso o masa**, en términos de cómo la gravedad actúa sobre él. En otras palabras, es el punto en el que las fuerzas de gravedad que actúan sobre cada una de las partículas que componen el cuerpo se equilibran y suman, permitiendo que **el objeto se comporte como si todo su peso estuviera concentrado en ese lugar**.

Características del centro de gravedad:

1. **Equilibrio:** si un cuerpo se sostiene en su centro de gravedad, este se mantendrá en equilibrio sin inclinarse hacia ningún lado.
2. **Distribución de masa:** la ubicación del centro de gravedad depende de cómo esté distribuida la masa del objeto. En objetos **homogéneos** (con distribución uniforme de masa), el centro de gravedad suele coincidir con el **centro geométrico** del objeto.
3. **Posición del centro de gravedad:** El centro de gravedad no siempre está dentro del objeto; puede encontrarse fuera del cuerpo, dependiendo de la forma y distribución de su masa. Por ejemplo, en un aro o un anillo, el centro de gravedad está en el centro del espacio vacío.

En un objeto **irregular**, como una silla, el centro de gravedad estará en algún punto dependiendo de cómo esté distribuida su masa, que puede no coincidir con su centro geométrico. Para calcular el centro de gravedad en estos casos, hay que **descomponer el cuerpo en objetos más pequeños** que sí sean homogéneos, y calcular el centro de gravedad así:

## Fórmulas del Centro de Gravedad

$$X_G = \frac{\sum m_i \cdot X_i}{M} ; \quad Y_G = \frac{\sum m_i \cdot Y_i}{M}$$

Donde:

- $X_G, Y_G$ : coordenadas del centro de gravedad del cuerpo completo.
- $m_i$ : masa del objeto “ $i$ ”.
- $X_i, Y_i$ : coordenadas del centro de gravedad del objeto “ $i$ ”.
- $M$ : masa total del cuerpo completo.

Si tenemos un cuerpo con orificios, podemos considerar estos como objetos de **masa negativa**, a efectos de calcular el centro de gravedad global.

### Ejemplo de cálculo del centro de gravedad

Halla las coordenadas del centro de gravedad de la chapa cuadrada agujereada de la figura:

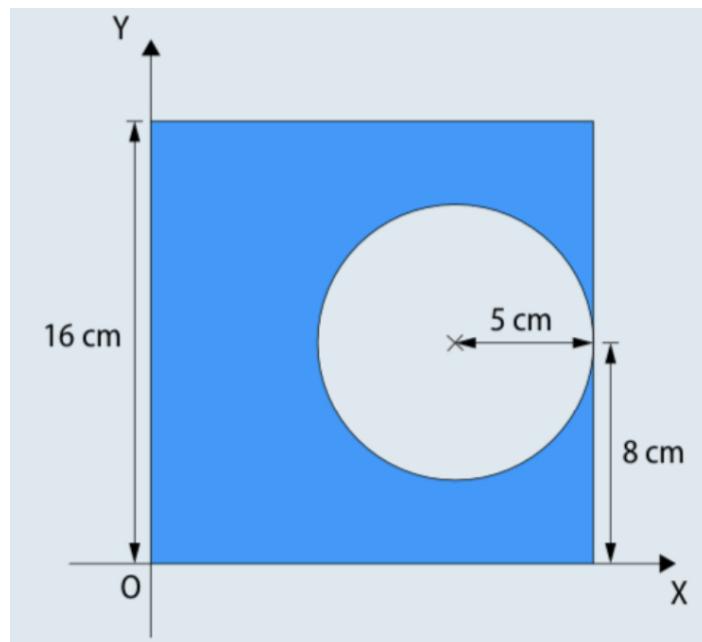


Figure 3.1: Chapa con orificio

Llamamos “ $L$ ” a la longitud de los lados de la chapa ( $L = 16$  cm) y “ $r$ ” al radio del orificio ( $r = 5$  cm).

Podemos calcular fácilmente los centros de gravedad de la chapa sin agujero y del propio agujero.

Por simetría, la posición de dichos CG es **el centro geométrico de cada una de esas figuras**:

- Chapa sin orificio (centro del cuadrado):  $X_{CH} = L/2 = 8$  cm;  $Y_{CH} = L/2 = 8$  cm.
- Orificio (centro del círculo):  $X_O = L - r = 16 - 5 = 11$  cm;  $Y_O = L/2 = 8$  cm.

La superficie de cada una de esas figuras es la siguiente:

- Chapa sin orificio:  $S_{CH} = L \cdot L = 16 \cdot 16 = 256$  cm<sup>2</sup>
- Orificio:  $S_O = -\pi \cdot r^2 = -\pi \cdot 5^2 = -78,54$  cm<sup>2</sup>

El orificio hay que quitárselo a la chapa, por eso hemos calculado su superficie con un **signo negativo**, para que vaya **restando** en la expresión final (sería como si lo considerásemos con masa o superficie **negativa**)

Así, combinando las dos figuras, la posición del centro de gravedad global será la siguiente:

$$X_G = \frac{\sum S_i \cdot X_i}{S} = \frac{S_{CH} \cdot X_{CH} + S_O \cdot X_O}{S_{CH} + S_O} = \frac{256 \cdot 8 - 78,54 \cdot 11}{256 - 78,54} = 6,67 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{\sum S_i \cdot Y_i}{S} = \frac{S_{CH} \cdot Y_{CH} + S_O \cdot Y_O}{S_{CH} + S_O} = \frac{256 \cdot 8 - 78,54 \cdot 8}{256 - 78,54} = 8 \text{ cm}$$

### 3.1.1 Ejercicio propuesto

1. Dada la pieza siguiente, realizada en alambre de grosor homogéneo, calcula el radio de la forma circular que hará que el centro de masas del sistema esté justo en el punto de unión de la forma recta y la circular. (*Solución:  $R = 22,71 \text{ cm}$* )

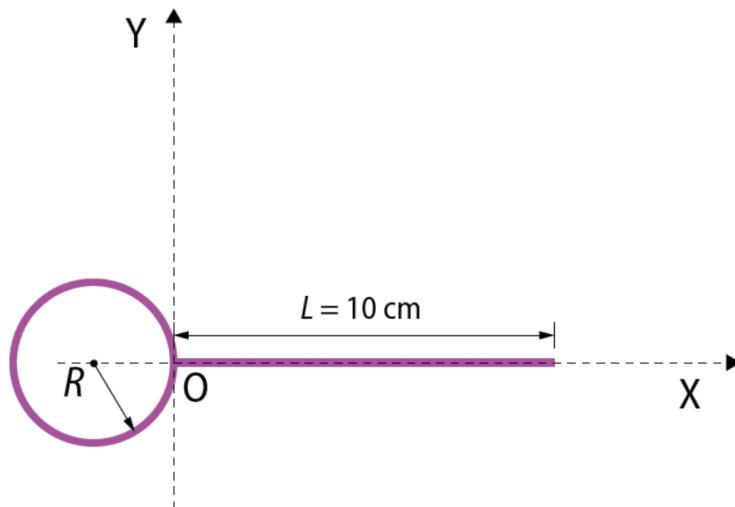


Figure 3.2: Ejercicio propuesto 1

### 3.2 Componentes vectoriales de una fuerza

Las fuerzas son magnitudes vectoriales definidos por: **Módulo**, **Punto de aplicación**, **Dirección** y **Sentido**.

Dada una fuerza  $F$  cuya dirección forma un ángulo  $\alpha$  con el eje horizontal ( $X$ ):

#### Ejemplo resuelto. Descomposición de fuerzas.

Una persona tira de una cuerda atada a una piedra con una fuerza de 400 N. Si el ángulo que forma la cuerda con la horizontal es de  $40^\circ$ , calcular:

- a. La fuerza que tiende a elevar la piedra
- b. La fuerza que tiende a arrastrar la piedra

#### *Solución*

### Componentes rectangulares

$$F_X = F \cdot \cos \alpha$$

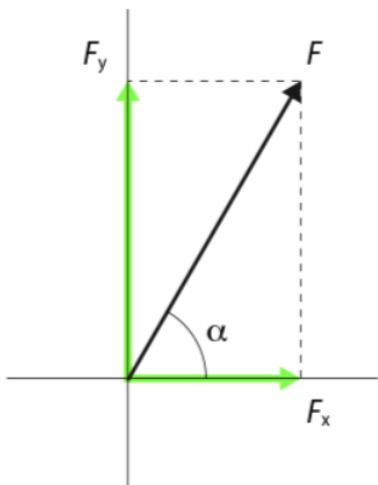
$$F_Y = F \cdot \sin \alpha$$

Expresión vectorial:

$$\vec{F} = F_X \cdot \vec{i} + F_Y \cdot \vec{j}$$

### Cálculo inverso

- **Módulo:**  $F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2}$
- **Dirección:**  $\tan \alpha = \frac{F_Y}{F_X}$



(a) Descomposición de fuerza

El vector de la fuerza aplicada con un ángulo  $\alpha = 40^\circ$  se descompone en dos vectores de fuerza, uno horizontal  $F_X$  y otro vertical  $F_Y$ .

a. El vector de la fuerza vertical que tiende a **elevar** la piedra será:

$$F_Y = F \cdot \sin \alpha = 400 \cdot \sin 40^\circ = 247,12 \text{ N}$$

b. El vector de la fuerza horizontal que tiende a **arrastrar** la piedra será:

$$F_X = F \cdot \cos \alpha = 400 \cdot \cos 40^\circ = 306,42 \text{ N}$$

## 3.3 Fuerza resultante

Cuando dos o más fuerzas son concurrentes (actúan sobre el mismo punto), podemos sustituir el conjunto de fuerzas por una sola **fuerza resultante** cuya acción será equivalente a la del conjunto.

Para calcular el valor de la fuerza resultante, se descompone cada fuerza en sus componentes  $F_X$ ,  $F_Y$ , y se suman. Desde el punto de vista vectorial:

### Suma vectorial

$$\vec{F}_{RES} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\vec{F}_{RES} = (F_{1X} + F_{2X} + \dots + F_{nX}) \cdot \vec{i} + (F_{1Y} + F_{2Y} + \dots + F_{nY}) \cdot \vec{j}$$

### Ejemplo resuelto. Fuerza resultante.

Tenemos dos fuerzas que se aplican desde un mismo punto, una de valor 100 N y otra de 50 N y cuyas direcciones forman un ángulo entre sí de  $60^\circ$ .

- Calcula el **módulo** del vector de la fuerza resultante.
- Calcula el ángulo que forma la resultante con la primera fuerza.
- Realiza la representación vectorial del sistema.

#### Solución

Primero expresamos vectorialmente las dos fuerzas, suponiendo que la primera fuerza es horizontal (forma  $0^\circ$  con el eje X) y que, por tanto, la segunda fuerza forma  $60^\circ$  con el eje X (porque están a  $60^\circ$  entre sí):

$$\vec{F}_1 = F_{1X} \cdot \vec{i} + F_{1Y} \cdot \vec{j} = 100 \cdot \cos 0^\circ \cdot \vec{i} + 100 \cdot \sin 0^\circ \cdot \vec{j} = 100 \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_2 = F_{2X} \cdot \vec{i} + F_{2Y} \cdot \vec{j} = 50 \cdot \cos 60^\circ \cdot \vec{i} + 50 \cdot \sin 60^\circ \cdot \vec{j} = 25 \cdot \vec{i} + 25\sqrt{3} \cdot \vec{j}$$

Calculamos la fuerza resultante sumando vectorialmente las fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$ :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (100 \cdot \vec{i}) + (25 \cdot \vec{i} + 25\sqrt{3} \cdot \vec{j}) = 125 \cdot \vec{i} + 25\sqrt{3} \cdot \vec{j}$$

- Módulo de la fuerza resultante

El módulo de la fuerza resultante se calcula ya directamente al tener el vector:

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = \sqrt{(125^2 + (25\sqrt{3})^2)} = 132,29 \text{ N}$$

- Ángulo de la resultante con la primera fuerza.

Como la primera fuerza la hemos tomado en el eje X, el ángulo de la resultante con la primera fuerza es el ángulo de la resultante con el eje X. Por lo tanto, también lo podemos calcular directamente a partir del vector:

$$\varphi = \arctan \left( \frac{F_Y}{F_X} \right) = \arctan \left( \frac{25\sqrt{3}}{125} \right) = 19,11^\circ$$

- Representación vectorial

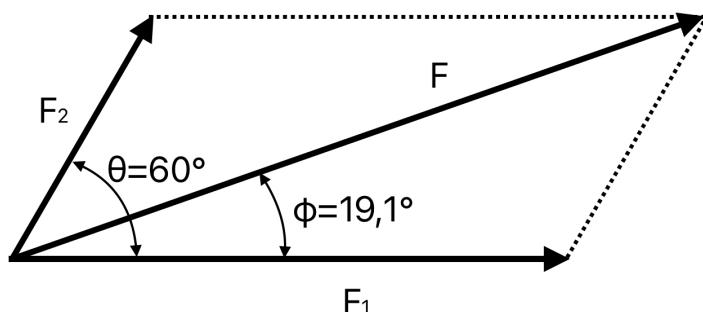


Figure 3.4: Representación vectorial

## 3.4 Momento de una fuerza

Consideramos que las fuerzas son concurrentes cuando su punto de aplicación es el centro de gravedad de una estructura, pero, si no lo son, el sistema de fuerzas da lugar a **momentos**. En este caso, **la estructura tiende a girar**.

Esto mismo ocurre cuando tenemos puntos de apoyo. Es decir, el momento de una fuerza provoca el giro del cuerpo sobre el que actúa.

### Fórmula del Momento

El momento de una fuerza se calcula como el producto vectorial entre la fuerza aplicada y el vector distancia desde el punto de aplicación de la fuerza al eje de giro:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{d}$$

En el Sistema Internacional, el momento se mide en **newtons-metro (N · m)**.

## 3.5 Condiciones de equilibrio

Para que un sólido se encuentre en equilibrio, deben darse dos condiciones fundamentales:

- El sólido no debe **trasladarse** en ninguna dirección, por lo que la **fuerza resultante** de todas las fuerzas que actúen sobre él debe ser **nula**:

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

- El sólido no debe **girar** en ningún eje, por lo que el **momento resultante** de todos los momentos que actúen sobre él debe ser **nulo**:

$$\sum \vec{M}_i = 0$$

Estas condiciones pueden establecerse para cada uno de los tres ejes principales del espacio (x, y, z), por lo que tendríamos **6 ecuaciones de equilibrio** de un sólido (tres con las fuerzas y tres con los momentos).

## 3.6 Ejercicios





## 4 Cálculo de esfuerzos en vigas. Diagramas de esfuerzos

Hemos visto que una viga es un elemento estructural diseñado para soportar fuerzas, por lo que **debe estar en equilibrio**, esto es, que no se rompa ni se mueva por las fuerzas y que no gire por los momentos que producen las fuerzas.

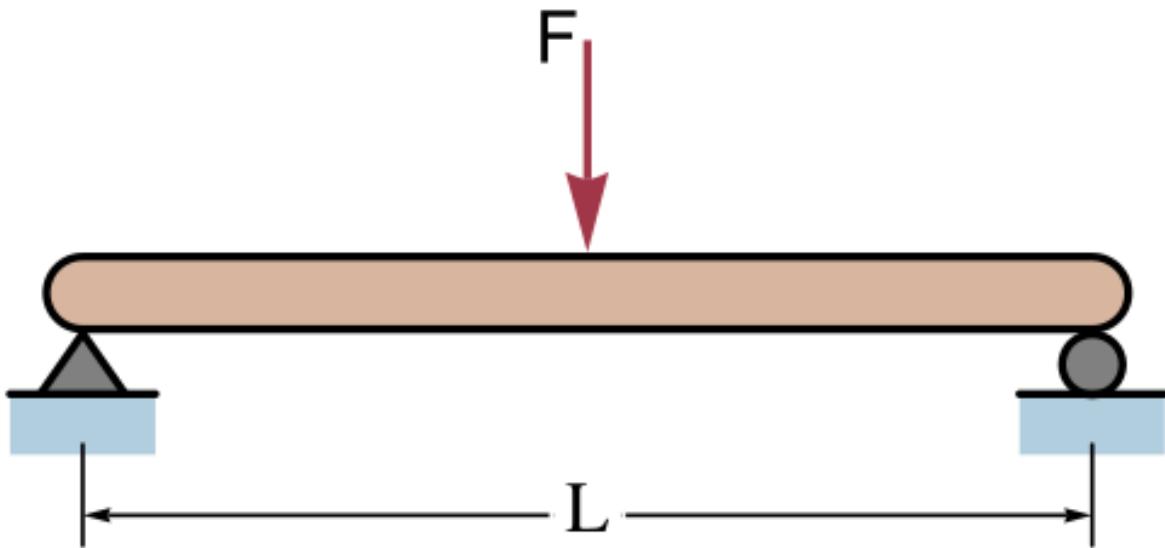


Figure 4.1: Diagrama de sólido libre de una viga

Dado que consideramos que la viga es bidimensional, **para que una viga esté en equilibrio se tiene que cumplir:**

### Ecuaciones de Equilibrio

- Que la suma de fuerzas en el eje X sea 0 (no se mueve horizontalmente).
- Que la suma de fuerzas en el eje Y sea 0 (no se mueve verticalmente).
- Que la suma de los momentos que producen todas las fuerzas sea 0 (no gira).

### 4.1 Criterio de signos (Cargas)

Para realizar los cálculos en problemas de vigas, tomaremos el siguiente criterio para los signos de las **cargas externas**:

- Fuerzas **horizontales**: positivas hacia la **derecha**.

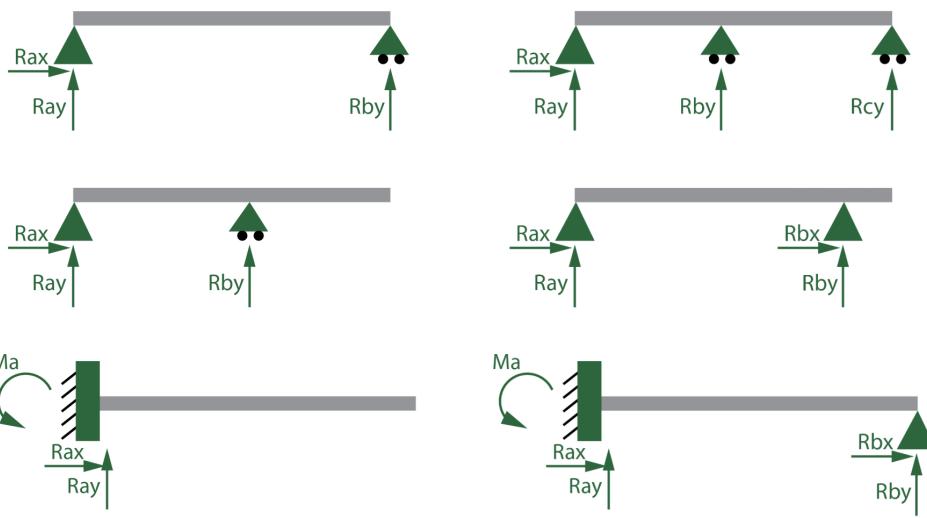
- Fuerzas **verticales**: positivas hacia **arriba**.
- **Momentos**: positivos si provocan **giro antihorario**.

## 4.2 Viga isostática

Una viga será isostática si es posible realizar su análisis estático aplicando las ecuaciones de sumatorio de fuerzas y momentos.

Como solo vamos a hacer análisis en el plano, siempre tendremos tres ecuaciones como hemos visto antes ( $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$ ;  $\sum M_z = 0$ ). Por lo tanto, para resolver el sistema de ecuaciones, **el número total de reacciones (incógnitas) en la viga debe ser 3**, coincidente con el número de ecuaciones estáticas disponibles.

- Si el número de reacciones es **menor a 3**, la viga será un **mecanismo** (se moverá).
- Si el número de reacciones es **superior a 3**, se tratará de una **viga hiperestática**. El grado de hiperestaticidad será mayor conforme aumente el número de reacciones redundantes. Este tipo de vigas no puede calcularse directamente, debiendo utilizar pasos adicionales para su resolución.



Ejemplos de vigas isostáticas

Ejemplos de vigas hiperestáticas

Figure 4.2: Vigas isostáticas e hiperestáticas

Nosotros nos centraremos en el cálculo de vigas isostáticas en este curso.

## 4.3 Tipos de esfuerzos en una viga

Las cargas y reacciones producen los siguientes esfuerzos en una viga (ignorando la torsión que rara vez ocurre y que no tendremos nunca en cuenta):

- **Esfuerzo axil (N)**: genera tensiones normales, **según la dirección del eje longitudinal de la viga**. Es producido por la suma de todas las cargas y reacciones paralelas al eje longitudinal de la viga. El esfuerzo puede ser de tracción (tiende a estirar la viga) o de compresión (tiende a aplastarla).

- **Esfuerzo cortante (V):** genera tensiones **tangenciales en la viga**. Es producido por aquellas cargas y reacciones aplicadas en dirección perpendicular al eje longitudinal de la viga.
- **Momento flector (M):** normalmente es el esfuerzo más determinante y genera tensiones normales en la viga (aparecen axiles de tracción en la parte externa del giro y de compresión en la parte interna). Es producida por aquellas cargas y reacciones perpendiculares al eje longitudinal de la viga, fuerzas paralelas al eje pero descentradas y momentos de giro aplicados.

#### 4.3.1 Criterio de signos para los esfuerzos internos

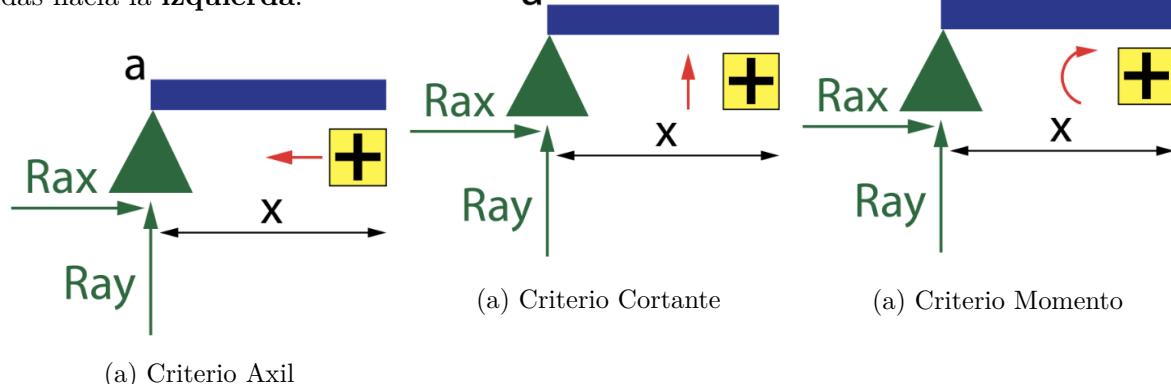
Para poder obtener las leyes de esfuerzo, es necesario definir un **criterio de signos** cuando estemos considerando esfuerzos en una sección “ $x$ ” de la viga:

##### Esfuerzo Axil (N)

Se toma como criterio **positivo el esfuerzo de tracción**, **Esfuerzo Cortante (V)** **Momento Flector (M)**

es decir, aquellas cargas que tienen a incrementar la longitud de la sección “ $x$ ” con respecto a la izquierda de la sección “ $x$ ”. Aquellas fuerzas situadas a la derecha de la sección “ $x$ ” se tomarán como criterio de momento positivo el sentido horizontal de la barra (**la compresión**-dirección perpendicular al eje contrario producido por las cargas es negativa). A nivel de la viga y hacia arriba generará situadas a la izquierda de la sección “ $x$ ”.

la izquierda de la sección dirigidas hacia la **izquierda**.



#### 4.4 Diagramas de esfuerzos

Para estudiar los esfuerzos de una viga, se representan mediante tres diagramas:

- Diagrama de esfuerzo axil (N) → muestra si la barra está en tracción o compresión.
- Diagrama de esfuerzo cortante (V) → muestra las fuerzas internas verticales.
- Diagrama de momento flector (M) → muestra los momentos internos que tienden a doblar la viga.

Para obtener los diagramas de esfuerzos de una viga, hay que realizar los siguientes pasos:

## 1. Determinar las reacciones en los apoyos

Antes de analizar los esfuerzos internos, hay que conocer cómo reacciona la viga en sus apoyos. Se aplican las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad \sum F_y = 0 \quad ; \quad \sum M_z = 0$$

De ahí se obtienen las reacciones verticales, horizontales y de giro, si las hay. Como estudiaremos siempre vigas isostáticas, habrá exactamente 3 reacciones para calcular.

## 2. “Cortar” la viga mentalmente

Se hace un corte imaginario en un punto cualquiera de la viga, a una distancia “ $x$ ” del extremo izquierdo, para analizar una de las partes.

Sobre esa parte se dibujan los esfuerzos internos que aparecen en la sección:

- $N(x)$ : fuerza horizontal interna (axil).
- $V(x)$ : fuerza vertical interna (cortante).
- $M(x)$ : momento interno (flector).

Y se vuelven a aplicar las ecuaciones de equilibrio a esa porción.

## 3. Expresar cada esfuerzo en función de la posición $x$

Al mover el punto de corte a lo largo de la viga, los valores de  $N$ ,  $V$  y  $M$  cambian. Se escriben las expresiones en cada tramo, teniendo en cuenta la posición de las cargas.

Por ejemplo, si hay una carga puntual, el cortante cambia bruscamente en ese punto, mientras que el momento flector cambia de forma lineal entre cargas.

## 4. Dibujar los diagramas

Con los valores obtenidos, se dibujan tres diagramas (uno debajo del otro):

Diagrama	Eje vertical representa...	Forma típica
$N(x)$	Esfuerzo axil	Constante (si no hay cargas horizontales)
$V(x)$	Esfuerzo cortante	Segmentos horizontales o con saltos
$M(x)$	Momento flector	Líneas rectas o curvas suaves (triangular o parabólica)

Todo esto lo entenderás mejor con los ejemplos resueltos que tienes a continuación.

## 4.5 Ejemplo 1: Viga con carga puntual

En este apartado vamos a resolver paso a paso un ejercicio completo de una viga isostática con una carga puntual.

### Enunciado

Elabora los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes correspondientes a la viga de la figura:

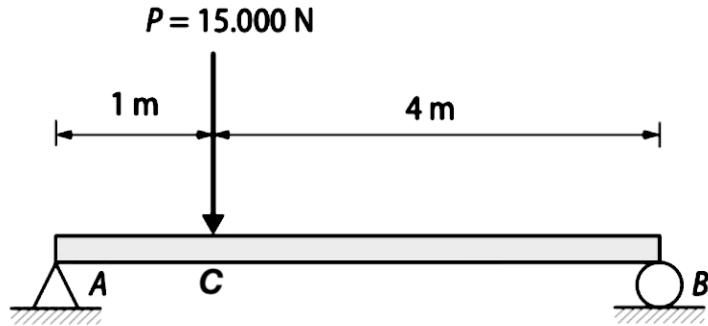


Figure 4.6: Esquema de la viga

### 1. Calcular las reacciones

Determinamos las reacciones según los tipos de apoyos que vemos en la figura (apoyo fijo en A, apoyo móvil en B):

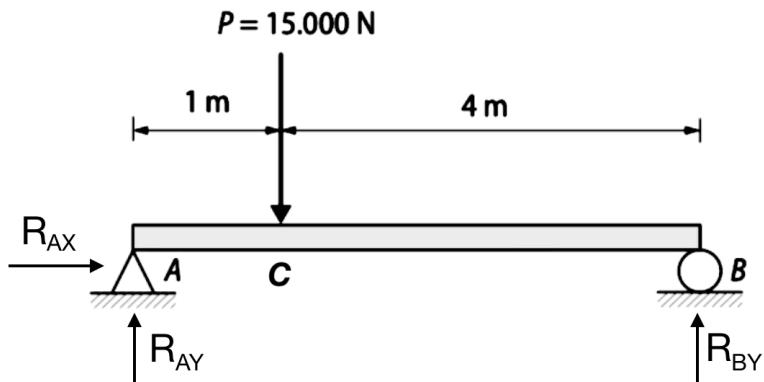


Figure 4.7: Diagrama de cuerpo libre y reacciones

Aplicando las condiciones de equilibrio estático:

#### 1. Equilibrio Horizontal ( $\sum F_x = 0$ )

$$R_{AX} = 0$$

#### 2. Equilibrio Vertical ( $\sum F_y = 0$ ) Considerando positivas las fuerzas hacia arriba:

$$R_{AY} - P + R_{BY} = 0$$

**3. Equilibrio de Momentos ( $\sum M_A = 0$ )** Tomamos momentos respecto al punto A para eliminar incógnitas ( $R_{AX}$  y  $R_{AY}$ ). Criterio: antihorario positivo.

$$-P \cdot 1 + R_{BY} \cdot (4 + 1) = 0$$

Sustituyendo los datos ( $P = 15000$  N):

$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} - 15000 + R_{BY} = 0 \\ -15000 + 5 \cdot R_{BY} = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} R_{AX} &= 0 \text{ N} \\ R_{BY} &= \frac{15000}{5} = 3000 \text{ N} = 3 \text{ kN} \\ R_{AY} &= 15000 - 3000 = 12000 \text{ N} = 12 \text{ kN} \end{aligned}$$

## 2. “Cortar” la viga en tramos

El procedimiento consiste en partir la viga en tramos, **separados por cambios de carga o apoyos**. Recorriendo la viga de derecha a izquierda, definimos un tramo cuando aparece una nueva carga.

En este caso, la carga puntual  $P$  en el punto C divide la viga en dos tramos: **Tramo A-C** y **Tramo C-B**.

## 3. Expresar los esfuerzos (Cortes)

### Tramo A-C ( $0 \leq x < 1$ )

Analizamos el trozo de viga a una distancia  $x$  antes de llegar a la carga  $P$ .

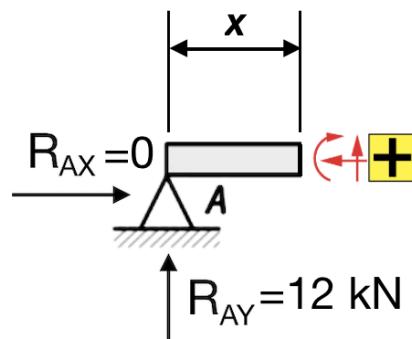


Figure 4.8: Corte Tramo A-C

- **Esfuerzo Axil ( $N$ ):** No hay fuerzas horizontales.

$$N_{A-C}(x) = R_{AX} = 0 \text{ kN}$$

- **Esfuerzo Cortante ( $V$ ):** La única fuerza vertical es la reacción en A (hacia arriba = positiva).

$$V_{A-C}(x) = R_{AY} = 12 \text{ kN}$$

- **Momento Flector ( $M$ ):** Generado por  $R_{AY}$  a una distancia  $x$ . Sentido horario (según nuestro criterio de signos a la izquierda del corte, comprime arriba) es positivo.

$$M_{A-C}(x) = R_{AY} \cdot x = 12x \text{ kN} \cdot \text{m}$$

### Tramo C-B ( $1 \leq x \leq 5$ )

Pasamos la carga  $P$  y analizamos una sección genérica a distancia  $x$ .

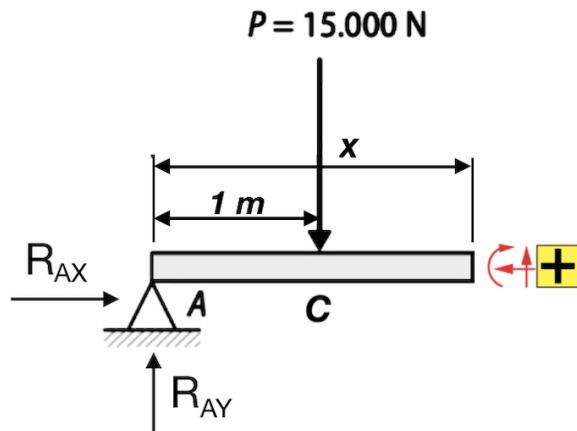


Figure 4.9: Corte Tramo C-B

- **Esfuerzo Axil ( $N$ ):** Sigue siendo nulo.

$$N_{C-B}(x) = 0 \text{ kN}$$

- **Esfuerzo Cortante ( $V$ ):** A la reacción  $R_{AY}$  se le resta la carga  $P$  (hacia abajo).

$$V_{C-B}(x) = R_{AY} - 15 = 12 - 15 = -3 \text{ kN}$$

- **Momento Flector ( $M$ ):** Sumamos el momento de la reacción y restamos el de la carga  $P$  (que genera giro antihorario respecto al corte, negativo). La distancia de la carga  $P$  al corte es ( $x - 1$ ).

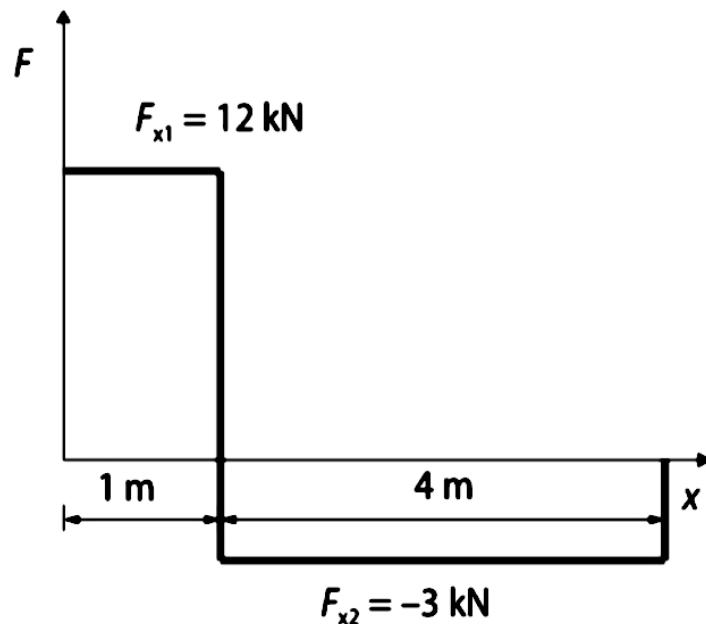
$$M_{C-B}(x) = R_{AY} \cdot x - 15 \cdot (x - 1)$$

$$M_{C-B}(x) = 12x - 15(x - 1) = 15 - 3x \text{ kN} \cdot \text{m}$$

## 4. Dibujar los diagramas

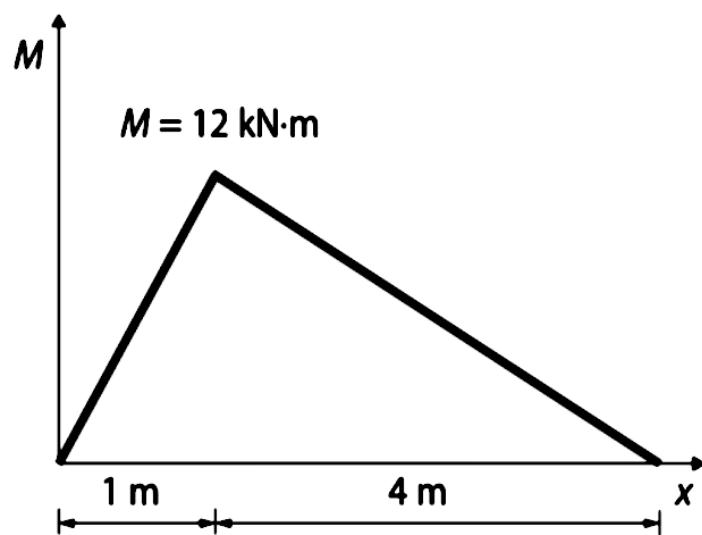
Representamos las funciones obtenidas.

- **Axiles:**  $N(x) = 0$ .
- **Cortantes:** Valor constante de 12 hasta  $x = 1$ , donde baja a  $-3$ .
- **Flectores:** Crecimiento lineal  $12x$  hasta el máximo en  $x = 1$  ( $12 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ), luego decrece linealmente hasta 0 en el apoyo B.



### Diagrama de esfuerzos cortantes

Figure 4.10: Diagrama de Esfuerzos Cortantes



### Diagrama de momentos flectores

Figure 4.11: Diagrama de Momentos Flectores

#### Ejercicios propuestos

1. Elabora los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes correspondientes a la viga de la figura:

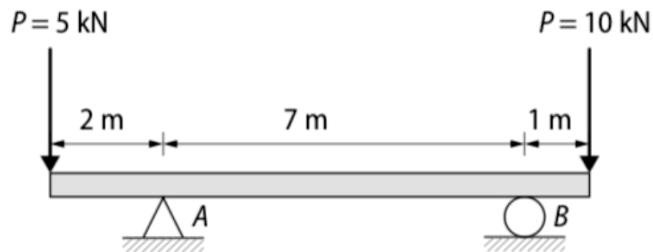


Figure 4.12: Ejercicio 1

*Solución (partiendo del punto A):*

- **Momentos flectores:**

- $0 \leq x \leq 2 \text{ m} \rightarrow M_{x1} = -5x \text{ (kN} \cdot \text{m)}$
- $2 \leq x \leq 9 \text{ m} \rightarrow M_{x2} = -10 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$
- $9 \leq x \leq 10 \text{ m} \rightarrow M_{x3} = 10x - 100 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$

- **Esfuerzos cortantes:**

- $0 \leq x \leq 2 \text{ m} \rightarrow V_{x1} = -5 \text{ kN}$
- $2 \leq x \leq 9 \text{ m} \rightarrow V_{x2} = 0 \text{ kN}$
- $9 \leq x \leq 10 \text{ m} \rightarrow V_{x3} = 10 \text{ kN}$

**2 (PAU).** Se requiere analizar la viga presentada en la figura adjunta:

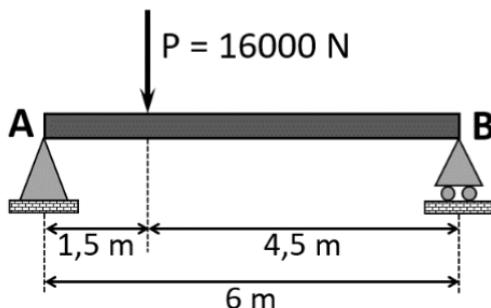


Figure 4.13: Ejercicio 2 (PAU)

Considerando los datos proporcionados, calcular:

- Las reacciones en ambos apoyos en condiciones de equilibrio estático. (*Sol:*  $R_{Ax} = 0 \text{ N}$ ;  $R_{Ay} = 12000 \text{ N}$ ;  $R_{By} = 4000 \text{ N}$ )
- Las ecuaciones de fuerzas cortantes y momentos flectores en cada tramo de la viga en función de la coordenada “x”. (*Sol:* Para  $0 \leq x \leq 1,5 \text{ m} \rightarrow V(x) = 12 \text{ kN}$ ,  $M(x) = 12x \text{ kN} \cdot \text{m}$ ; Para  $1,5 \leq x \leq 6 \text{ m} \rightarrow V(x) = -4 \text{ kN}$ ,  $M(x) = -4x + 24 \text{ kN} \cdot \text{m}$ )
- Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga.

**3 (PAU).** En la siguiente figura se representan las cargas que debe soportar una viga y los apoyos que tiene en la estructura de la que forma parte.

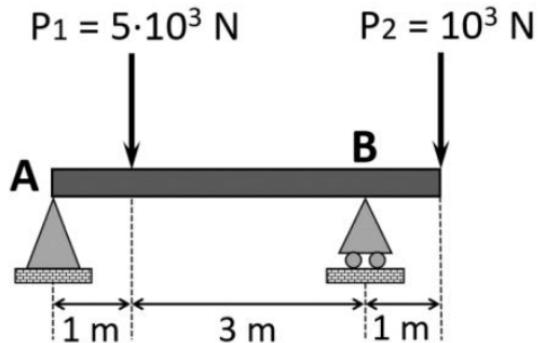


Figure 4.14: Ejercicio 3 (PAU)

Considerando los datos proporcionados, analizar la estructura calculando:

- Las reacciones en ambos apoyos en condiciones de equilibrio estático. (*Sol:*  $R_{Ax} = 0 \text{ kN}$ ;  $R_{Ay} = 3,5 \text{ kN}$ ;  $R_{By} = 2,5 \text{ kN}$ )
- Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga. (*Sol:*  $0 \leq x \leq 1 \rightarrow V = 3,5, M = 3,5x$ ;  $1 \leq x \leq 4 \rightarrow V = -1,5, M = -1,5x + 5$ ;  $4 \leq x \leq 5 \rightarrow V = 1, M = x - 5$ )
- Obtener el momento flector máximo. (*Sol:*  $M_{max}(1 \text{ m}) = 3,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ )

**4 (PAU).** Se requiere analizar una viga de 5 m con su extremo derecho (punto B) empotrado en una pared. Sobre el extremo izquierdo (punto A) actúa una fuerza peso de 3 kN, y a 2 m del empotramiento se localiza otra fuerza peso de 2 kN. Se pide:

- Calcular el valor de las reacciones que se producen en el empotramiento (punto B) en condiciones de equilibrio estático. (*Sol:*  $R_{Bx} = 0 \text{ kN}$ ;  $R_{By} = 5 \text{ kN}$ ;  $M_B = 19 \text{ kN} \cdot \text{m}$ )
- Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga en función de x. (*Sol:*  $0 \leq x \leq 3 \rightarrow V = -3, M = -3x$ ;  $3 \leq x \leq 5 \rightarrow V = -5, M = -5x + 6$ )

**5 (PAU).** Para evitar inundaciones con las crecidas, se ha canalizado el río Guadalquivir a su paso por Sevilla en varios tramos, y la expansión de la ciudad hace necesario construir un nuevo puente sobre el canal de 46 m de ancho. Se estudia la opción de construir el puente con vigas de hormigón armado tipo Doble T como las de la figura, que pueden alcanzar hasta los 53 m de largo.



Figure 4.15: Ejercicio 5 (PAU)

Tras el estudio del terreno, se decide usar una viga de 50 m de largo apoyada en un extremo en un soporte fijo y el otro en un apoyo móvil o de rodillo. El puente debe soportar el paso de vehículos pesados, por lo que se diseñará para una masa máxima de vehículos de 65 toneladas. La masa de la viga es 110,5 toneladas. Colabora en el diseño del puente resolviendo las siguientes cuestiones.

- Dibujar el diagrama de sólido libre del puente cuando el vehículo pesado haya recorrido 25 m del puente desde el extremo fijo, y calcular el valor de las reacciones en ambos apoyos en condiciones de equilibrio estático. (*Sol:*  $R_{Ax} = 0$ ;  $R_{Ay} = 861 \text{ kN}$ ;  $R_{By} = 861 \text{ kN}$ )
- Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga, y determinar el momento flector máximo que debe soportar la viga cuando el camión esté en esa posición. (*Sol:*  $0 \leq x \leq 25 \rightarrow V = 861, M = 861x$ ;  $25 \leq x \leq 50 \rightarrow V = -861, M = -861x + 43050$ ;  $M_{max} = 21525 \text{ kN} \cdot \text{m}$ )

(NOTA: este ejercicio está planteado para considerar el peso de la viga como una carga puntual aplicada en su centro de masas, no como una distribución continua de carga).

**6 (PAU).** El estudio de arquitectura Andalusí está desarrollando el proyecto de un bloque de viviendas en primera línea de playa en Almería. Una de las viviendas del ático dispone de una terraza voladiza de 4 m de longitud que sobresale desde la fachada principal. La terraza se modela como una viga con un extremo empotrado en la fachada y el otro extremo en voladizo.

Teniendo en cuenta el tamaño total de la terraza, se estima que durante una fiesta puede albergar un grupo de personas con un peso total de 8,5 kN. El peso de la losa de hormigón de la terraza es de 16,8 kN.

- Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la terraza y calcular las reacciones considerando la fuerza peso del grupo de personas como una carga puntual aplicada en el centro. (*Sol:*  $R_{Ax} = 0 \text{ kN}$ ;  $R_{Ay} = 25,3 \text{ kN}$ ;  $M_A = 50,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ )
- Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores resultantes. (*Sol:*  $0 \leq x \leq 2 \rightarrow V = 25,3, M = 25,3x - 50,6$ ;  $2 \leq x \leq 4 \rightarrow V = 0, M = 0$ )
- Determinar el valor del momento flector máximo que soportará la terraza y en qué posición se encuentra. (*Sol:*  $M_{max} = 50,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$  en  $x = 0$ )

## 4.6 Ejemplo 2: Viga con carga distribuida

En este apartado analizaremos una viga con una carga distribuida rectangular.

### Enunciado

Elabora los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes correspondientes a la viga de la figura:

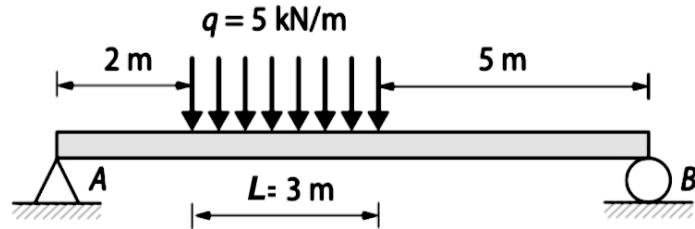


Figure 4.16: Esquema de la viga

### 1. Calcular las reacciones

Determinamos las reacciones según los tipos de apoyos que vemos en la figura:

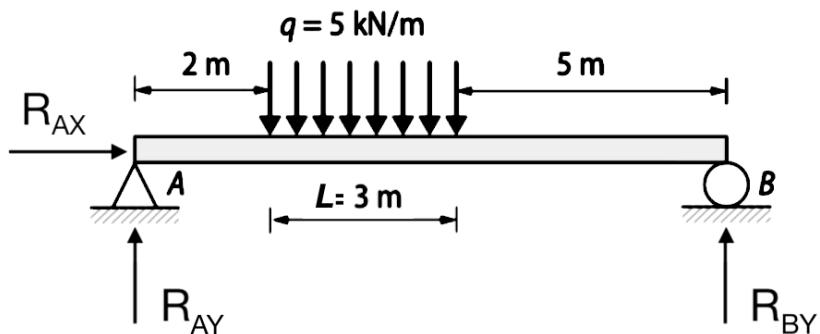


Figure 4.17: Diagrama de cuerpo libre y reacciones

Aplicando las condiciones de equilibrio estático:

#### 1. Equilibrio Horizontal ( $\sum F_x = 0$ )

$$R_{AX} = 0$$

#### 2. Equilibrio Vertical ( $\sum F_y = 0$ )

Considerando positivas las fuerzas hacia arriba. La carga distribuida ( $q$ ) se multiplica por la longitud ( $L$ ) para obtener la fuerza total:

$$R_{AY} - q \cdot L + R_{BY} = 0$$

**3. Equilibrio de Momentos ( $\sum M_A = 0$ )** Tomamos momentos respecto al punto A. **La carga distribuida equivale a una fuerza  $q \cdot L$  aplicada en su centro.** En este caso, la carga de 3m está centrada a  $2 + 1,5 = 3,5\text{m}$  de A.

$$-q \cdot L \cdot (2 + \frac{L}{2}) + R_{BY} \cdot (2 + L + 5) = 0$$

Sustituyendo los datos ( $q = 5 \text{ kN/m}$ ,  $L = 3 \text{ m}$ ):

$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} - 5 \cdot 3 + R_{BY} = 0 \\ -5 \cdot 3 \cdot (2 + 1,5) + R_{BY} \cdot (2 + 3 + 5) = 0 \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} - 15 + R_{BY} = 0 \\ -52,5 + 10 \cdot R_{BY} = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} R_{AX} &= 0 \text{ N} \\ R_{BY} &= \frac{52,5}{10} = 5,25 \text{ kN} \\ R_{AY} &= 15 - 5,25 = 9,75 \text{ kN} \end{aligned}$$

## 2. “Cortar” la viga en tramos

Dividimos la viga en tramos separados por cambios de carga o apoyos: \* **Tramo A-C** ( $0 \leq x < 2$ ): Entre el apoyo A y el inicio de la carga. \* **Tramo C-D** ( $2 \leq x \leq 5$ ): Zona de la carga distribuida. \* **Tramo D-B** ( $5 < x \leq 10$ ): Entre el final de la carga y el apoyo B.

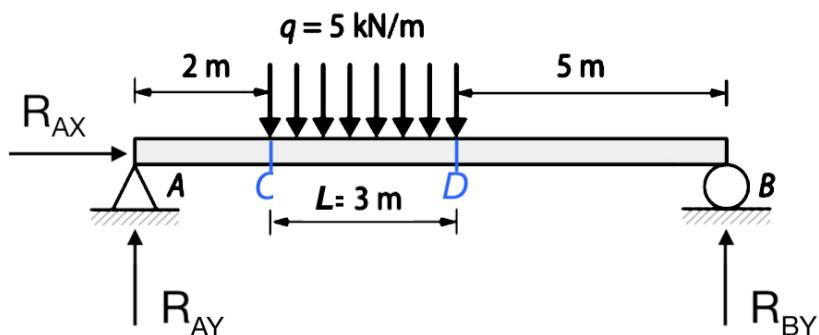


Figure 4.18: División en tramos

### 3. Expressar los esfuerzos (Cortes)

**Tramo A-C** ( $0 \leq x < 2$ )

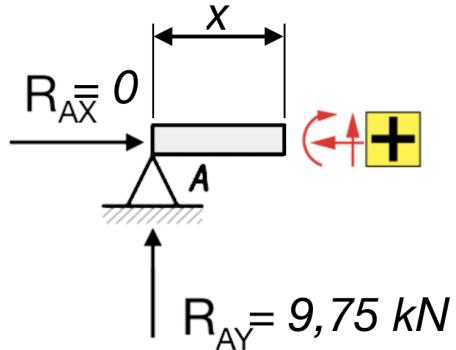


Figure 4.19: Corte Tramo A-C

- **Axil:**  $N_{A-C}(x) = 0 \text{ kN}$
- **Cortante:**  $V_{A-C}(x) = R_{AY} = 9,75 \text{ kN}$
- **Momento:**  $M_{A-C}(x) = R_{AY} \cdot x = 9,75x \text{ kN} \cdot \text{m}$

**Tramo C-D** ( $2 \leq x \leq 5$ )

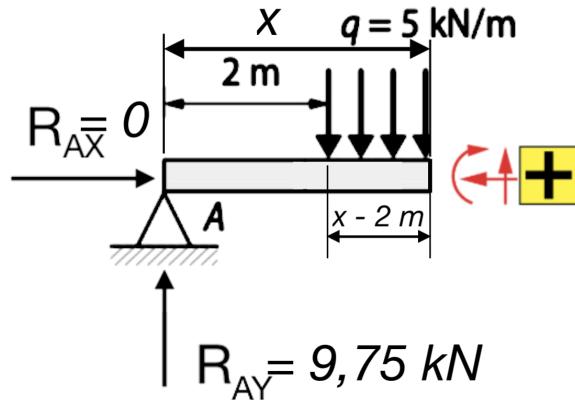


Figure 4.20: Corte Tramo C-D

- **Axil:**  $N_{C-D}(x) = 0 \text{ kN}$
- **Cortante:** Restamos la parte de carga distribuida que entra en el corte ( $q \cdot (x - 2)$ ).

$$V_{C-D}(x) = R_{AY} - 5(x - 2) = 9,75 - 5x + 10 = 19,75 - 5x \text{ kN}$$

- **Momento:** La carga distribuida parcial tiene su centro a  $(x - 2)/2$  del corte.

$$M_{C-D}(x) = R_{AY} \cdot x - [5(x - 2)] \cdot \frac{x - 2}{2}$$

$$M_{C-D}(x) = 9,75x - 2,5(x - 2)^2$$

$$M_{C-D}(x) = -2,5x^2 + 19,75x - 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

### Tramo D-B ( $5 < x \leq 10$ )

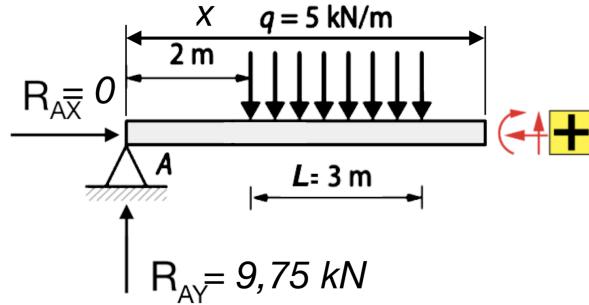


Figure 4.21: Corte Tramo D-B

- **Axil:**  $N_{D-B}(x) = 0\text{ kN}$
- **Cortante:** Ahora restamos la carga distribuida completa ( $5 \cdot 3 = 15$ ).

$$V_{D-B}(x) = R_{AY} - 15 = 9,75 - 15 = -5,25\text{ kN}$$

- **Momento:** La carga completa de 15 kN está centrada en  $x = 3,5$  (mitad de la distribución).

$$M_{D-B}(x) = R_{AY} \cdot x - 15 \cdot (x - 3,5)$$

$$M_{D-B}(x) = 9,75x - 15x + 52,5 = 52,5 - 5,25x\text{ kN} \cdot \text{m}$$

## 4. Dibujar los diagramas

Resumen de ecuaciones y cálculo del máximo:

$$\text{Esfuerzo Cortante } V(x) = \begin{cases} 9,75 & 0 \leq x < 2 \\ 19,75 - 5x & 2 \leq x \leq 5 \\ -5,25 & 5 < x \leq 10 \end{cases} \quad [\text{kN}]$$

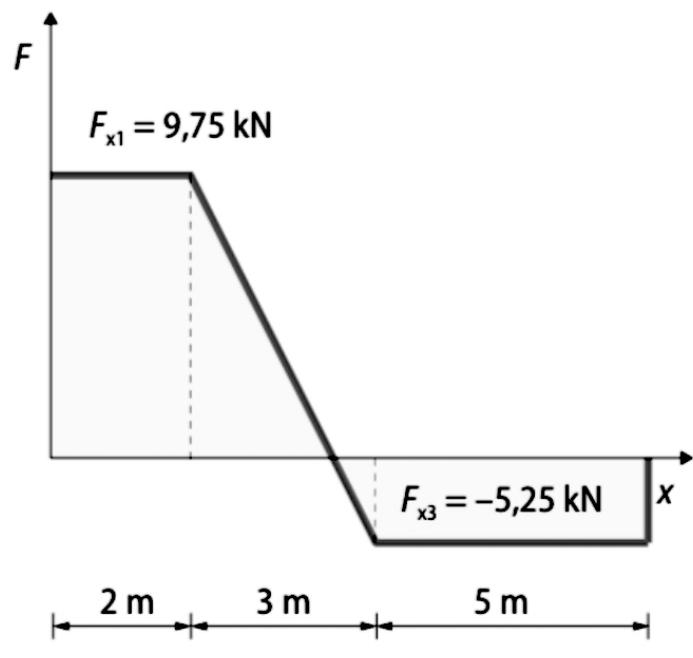
$$\text{Momento Flector } M(x) = \begin{cases} 9,75x & 0 \leq x < 2 \\ -2,5x^2 + 19,75x - 10 & 2 \leq x \leq 5 \\ -5,25x + 52,5 & 5 < x \leq 10 \end{cases} \quad [\text{kN} \cdot \text{m}]$$

**Punto de momento máximo:** Se produce donde el cortante es nulo ( $V = 0$ ) dentro del tramo con carga distribuida:

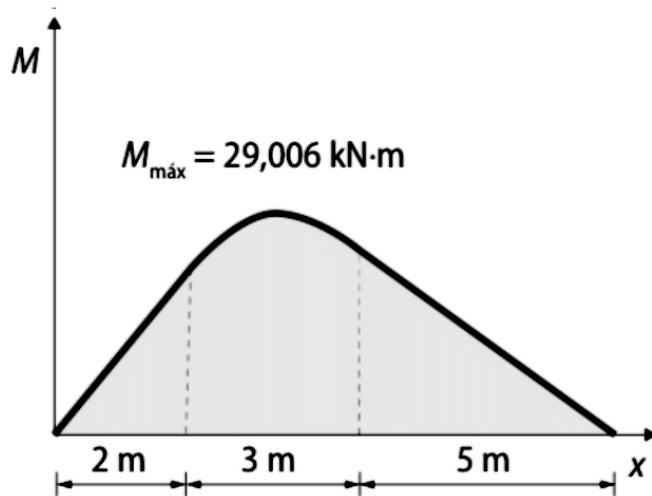
$$19,75 - 5x = 0 \Rightarrow x = 3,95\text{ m}$$

$$M_{\max} = -2,5(3,95)^2 + 19,75(3,95) - 10 = 29,006\text{ kN} \cdot \text{m}$$

Representación gráfica:



**Diagrama de esfuerzos cortantes**



**Diagrama de momentos flectores**

Figure 4.22: Diagramas de Cortantes y Flectores

**Ejercicio propuesto**

- La viga de la figura es de madera laminada de perfil rectangular de 25 × 50 cm y soporta una carga uniformemente distribuida de 40 kN/m.

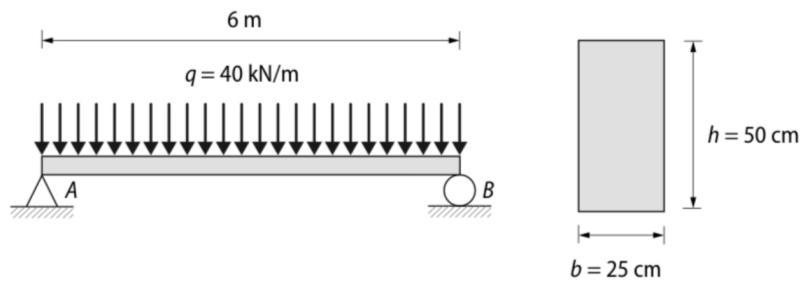


Figure 4.23: Ejercicio propuesto

- Elabora los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes correspondientes a la viga.
- Halla las tensiones máximas de tracción y compresión producidas en la viga como consecuencia de la flexión.

*Solución:*

- a) (Partiendo del punto A):
  - $0 \leq x \leq 6 \text{ m} \rightarrow M(x) = 120x - 20x^2 \text{ kN} \cdot \text{m}$
  - Momento máximo en  $x = 3 \text{ m} : M_{max} = 180 \text{ kN} \cdot \text{m}$
  - $0 \leq x \leq 6 \text{ m} \rightarrow V(x) = 120 - 40x \text{ kN}$
- b)  $\sigma_t = 17.280 \text{ kN/m}^2; \sigma_c = -17.280 \text{ kN/m}^2$

## 4.7 Ejemplo 3: Viga en voladizo con carga uniformemente repartida

En este ejemplo analizaremos una viga en voladizo (cantilever) empotrada en un extremo y libre en el otro, sometida a una carga distribuida.

### Enunciado

Elabora los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes correspondientes a la viga en voladizo de la figura, con carga uniformemente distribuida:

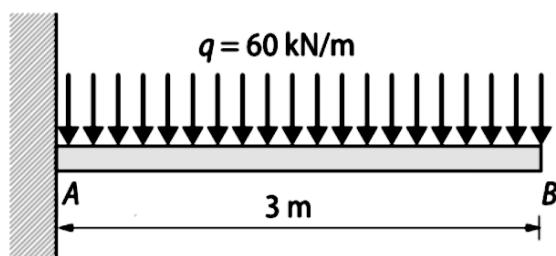


Figure 4.24: Viga en voladizo con carga distribuida

## 1. Calcular las reacciones

En este caso hay un solo apoyo (empotramiento en A) donde se concentran las tres reacciones ( $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$ ,  $M_A$ ):

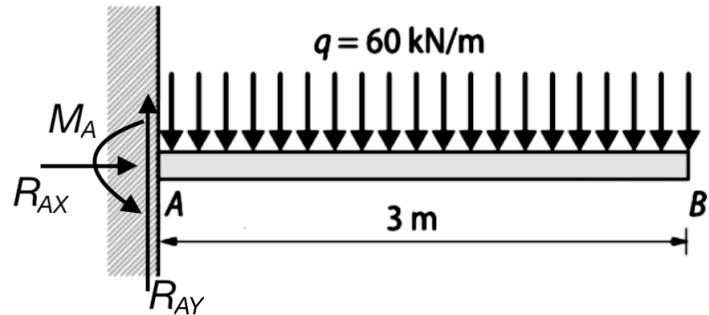


Figure 4.25: Reacciones en el empotramiento

Fíjate que el momento de reacción,  $M_A$ , tiene sentido antihorario porque debe oponerse al momento creado por la carga, que tiende a girar la viga en sentido horario.

Las ecuaciones de equilibrio son:

### 1. Equilibrio Horizontal ( $\sum F_x = 0$ )

$$R_{AX} = 0$$

### 2. Equilibrio Vertical ( $\sum F_y = 0$ ) La carga total es $Q = q \cdot L$ .

$$R_{AY} - q \cdot L = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_{AY} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{L}$$

### 3. Equilibrio de Momentos ( $\sum M_A = 0$ ) Tomamos momentos en el apoyo A. La carga distribuida equivale a una fuerza $q \cdot L$ en el centro ( $L/2$ ).

$$-q \cdot L \cdot \frac{L}{2} + M_A = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_A = \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{L}^2}{2}$$

Sustituyendo los datos ( $q = 60 \text{ kN/m}$ ,  $L = 3 \text{ m}$ ):

$$R_{AX} = 0 \text{ N}$$

$$R_{AY} = 60 \cdot 3 = 180 \text{ kN}$$

$$M_A = 60 \cdot \frac{3^2}{2} = 270 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

## 2. “Cortar” la viga

Como solo tenemos una carga continua sobre toda la longitud, **no es necesario dividir la viga en tramos**. Una única ecuación de 0 a  $L$  servirá para toda la viga.

### 3. Expressar los esfuerzos ( $0 \leq x \leq 3$ )

Analizamos una sección a distancia  $x$  del empotramiento:

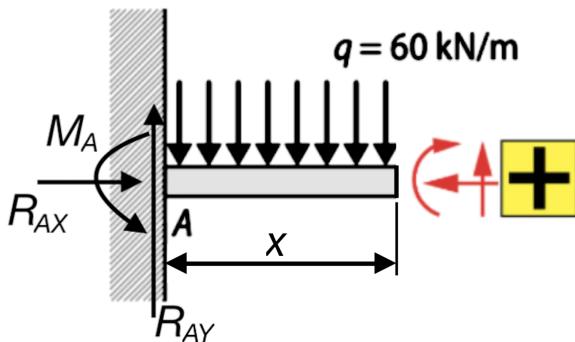


Figure 4.26: Corte genérico a distancia x

- **Esfuerzo Axil ( $N$ ):** No hay fuerzas horizontales.

$$N(x) = 0 \text{ kN}$$

- **Esfuerzo Cortante ( $V$ ):** Suma de fuerzas verticales a la izquierda (Reacción  $R_{AY}$  positiva, carga distribuida  $q \cdot x$  negativa).

$$V(x) = R_{AY} - q \cdot x$$

$$V(x) = 180 - 60x \text{ kN}$$

- **Momento Flector ( $M$ ):** Suma de momentos a la izquierda (Reacción  $R_{AY}$  positiva, Carga distribuida negativa, Momento de empotramiento  $M_A$  negativo).

- Brazo de  $R_{AY}$ :  $x$
- Brazo de la carga distribuida ( $q \cdot x$ ):  $x/2$

$$M(x) = R_{AY} \cdot x - (q \cdot x) \cdot \frac{x}{2} - M_A$$

$$M(x) = 180x - 60 \cdot \frac{x^2}{2} - 270$$

$$M(x) = -30x^2 + 180x - 270 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

### 4. Dibujar los diagramas

Resumen de las leyes de esfuerzos ( $0 \leq x \leq 3$  m):

**Cortante:**  $V(x) = 180 - 60x \text{ [kN]}$

**Flector:**  $M(x) = -30x^2 + 180x - 270 = -30(x - 3)^2 \text{ [kN} \cdot \text{m]}$

**Valores extremos:** \* En el empotramiento ( $x = 0$ ): \*  $V(0) = 180 \text{ kN}$  \*  $M(0) = -270 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (Máximo momento negativo) \* En el extremo libre ( $x = 3$ ): \*  $V(3) = 180 - 180 = 0 \text{ kN}$  \*  $M(3) = -30(0) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$

El diagrama de cortantes es lineal y el de momentos parabólico:

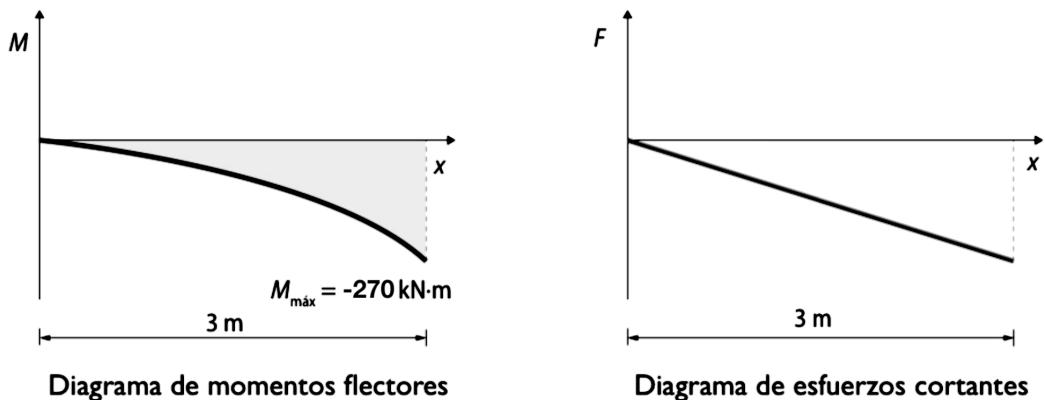


Figure 4.27: Diagramas de Cortante y Flector

### Ejercicio propuesto

1. Elabora los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes correspondientes a la viga en voladizo de la figura:

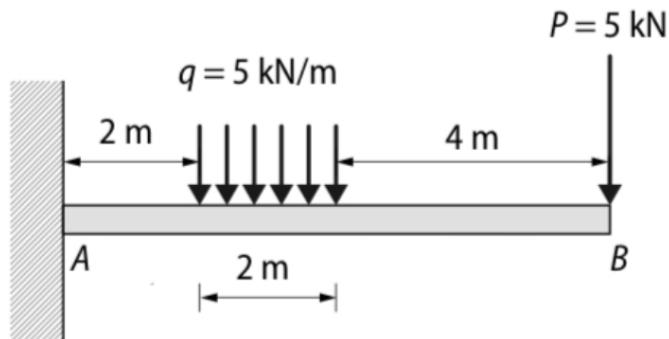


Figure 4.28: Ejercicio propuesto

Solución (partiendo del punto B, de derecha a izquierda, o reajustando coordenadas):

- **Momentos flectores:**

- $0 \leq x \leq 4 \text{ m} \rightarrow M(x) = -5x \text{ kN} \cdot \text{m}$
- $4 \leq x \leq 6 \text{ m} \rightarrow M(x) = 2,5x^2 + 15x - 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- $6 \leq x \leq 8 \text{ m} \rightarrow M(x) = 50 - 15x \text{ kN} \cdot \text{m}$

- **Esfuerzos cortantes:**

- $0 \leq x \leq 4 \text{ m} \rightarrow V(x) = -5 \text{ kN}$
- $4 \leq x \leq 6 \text{ m} \rightarrow V(x) = -5x + 15 \text{ kN}$
- $6 \leq x \leq 8 \text{ m} \rightarrow V(x) = -15 \text{ kN}$

## 4.8 Otros ejemplos de cálculo de esfuerzos

Para reforzar lo aprendido, aquí tienes un recurso audiovisual donde se explican paso a paso algunos ejercicios adicionales de cálculo de reacciones y diagramas de esfuerzos (cortantes y flectores) en vigas isostáticas.

### Vídeo explicativo

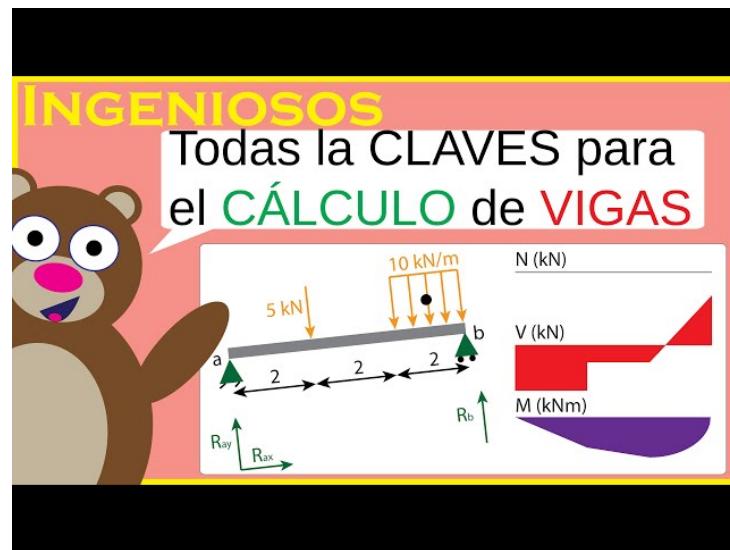


Figure 4.29: Ver vídeo: Ejercicios de diagramas de esfuerzos

(Click para ver vídeo explicativo)

## 5 5. Cálculo de esfuerzos en estructuras de barras articuladas



Figure 5.1: Cercha

Las **estructuras de barras articuladas** se utilizan en grúas, torres, puentes, etc. En la modelización de estas estructuras supondremos que son **bidimensionales**, como hemos hecho con las vigas.

También supondremos que:

- Los nudos son **articulaciones perfectas**.
- Las **cargas externas** están **aplicadas exclusivamente en los nudos**.
- Las **deformaciones** son **despreciables** frente a las dimensiones de las barras.
- El **peso** de las barras puede considerarse **despreciable** frente a las **cargas** externas.

Estas simplificaciones implican que **las barras se ven solicitadas esencialmente a un esfuerzo dirigido a lo largo de su eje (axil)**.

Resolver una cercha supone calcular cómo trabajan todas las barras, y cada barra introduce sólo una incógnita, la **magnitud del axil**.

El **sentido** del axil podrá ser de **tracción** o **compresión**, dependiendo del signo que obtengamos.

Tipo de Esfuerzo	Esquema
<b>AXIL DE TRACCIÓN</b>	
<b>AXIL DE COMPRESIÓN</b>	

## 5.1 Sistemas isostáticos e hiperestáticos

Las estructuras articuladas se fijan mediante apoyos. Si llamamos  $b$  al **número de barras** y  $n$  al **número de nudos**, teniendo en cuenta el número de incógnitas en los apoyos (según las ecuaciones de equilibrio), los sistemas se clasifican así:

**Exteriormente**, en función del **exceso o defecto de restricciones en los apoyos**:

- **Inestable:**  $n^o$  de incógnitas  $< 3$
- **Isostático:**  $n^o$  de incógnitas  $= 3$
- **Hiperestático:**  $n^o$  de incógnitas  $> 3$

**Interiormente**, en función del **exceso o defecto de barras**:

- **Inestable:**  $b < 2n - 3$
- **Isostático:**  $b = 2n - 3$
- **Hiperestático:**  $b > 2n - 3$

Por lo tanto, para que una estructura sea isostática, debe cumplirse que:

**Condición de Isostaticidad**

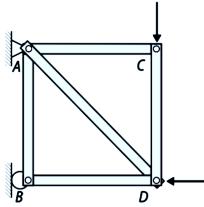
$$n^o \text{ de incógnitas} = 3$$

$$b = 2n - 3$$

Nosotros nos limitaremos a ver estructuras isostáticas en este curso.

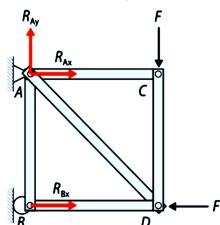
**Ejemplo de estructura isostática (Clic para ver)**

En la figura se representa una estructura de barras donde A es un apoyo articulado y B es un apoyo libre. Di si se trata de una estructura isostática.



#### Solución

Construimos el diagrama de fuerzas:



Se trata de una estructura isostática exteriormente, ya que hay igual número de incógnitas ( $R_{Ax} = ?, R_{Ay} = ?, R_{Bx} = ?$ ) que de ecuaciones ( $\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M = 0$ ), y también es isostática interiormente, ya que el número de barras  $b = 5 = 2n - 3$  (siendo  $n$  el número de nudos:  $n = 4$ ).

Figure 5.2: Ejemplo de estructura isostática

## 5.2 Métodos de cálculo de estructuras de barras

Estudiaremos tres métodos distintos para calcular los esfuerzos en las barras de las estructuras. Dos de esos métodos son analíticos y el tercero es un método gráfico. Son los siguientes:

- Método de los nudos:** Consiste en aplicar el equilibrio a cada nudo de la estructura por separado.
- Método de las secciones (método de Ritter):** Consiste en cortar la estructura en dos partes y aplicar el equilibrio a una de ellas. Útil para conocer el esfuerzo en barras concretas sin calcular toda la estructura.
- Método gráfico de Cremona:** Método geométrico basado en el equilibrio de los polígonos de fuerzas de cada nudo.

## 5.3 Método de los nudos

Cuando una estructura articulada es **isostática**, puede analizarse por medio del **método de los nudos**. Al estar la estructura en equilibrio, supondremos en equilibrio todas sus barras y nudos, y obtendremos **ecuaciones de equilibrio estático para cada barra y cada nudo**.

Para utilizar este método seguimos los siguientes pasos:

- Calculamos las **reacciones en los apoyos** mediante las ecuaciones de equilibrio de toda la estructura.
- Obtenemos la **ecuación de equilibrio para cada nudo** para calcular la **fuerza que ejerce cada barra sobre el nudo**.
- La **fuerza que ejerce el nudo sobre la barra será igual y de sentido contrario**.
- Con esto sabremos si las fuerzas son de **tracción** o de **compresión**.

### Ejemplo Resuelto: Estructura articulada

En la figura se representa una estructura de barras donde A es un apoyo articulado y B es

un apoyo libre.

- Calcula el valor de las reacciones.
- Empleando el método de los nudos, calcula las tensiones de cada barra.

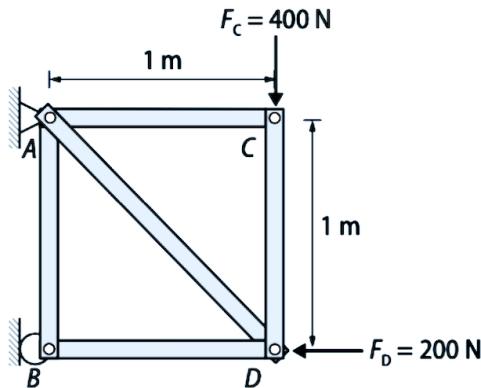


Figure 5.3: Estructura propuesta

### Comprobación de isostaticidad

Se trata de una estructura isostática exteriormente, ya que hay igual número de incógnitas ( $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$ ,  $R_{BX}$ ) que de ecuaciones ( $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$ ;  $\sum M = 0$ ).

También es isostática interiormente, ya que el número de barras  $b = 5$  cumple la condición  $b = 2n - 3$  (siendo  $n = 4$  el número de nudos).

### 1. Diagrama de fuerzas y Reacciones

Construimos el diagrama de cuerpo libre global:

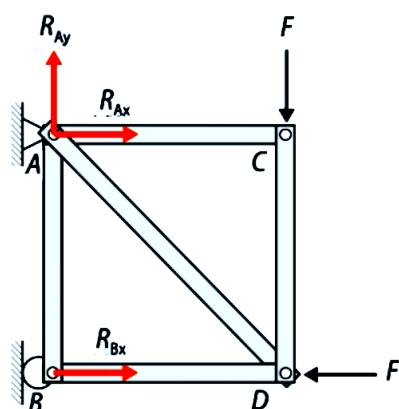


Figure 5.4: Diagrama de fuerzas y reacciones

Calculamos el valor de las reacciones en los apoyos A y B aplicando las ecuaciones de equilibrio global:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} + R_{Bx} - 200 = 0 \quad (5.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 400 = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_{Ay} = 400 \text{ N} \quad (5.2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_{Bx} \cdot 1 - 200 \cdot 1 - 400 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_{Bx} = 600 \text{ N} \quad (5.3)$$

Sustituyendo  $R_{Bx}$  en la primera ecuación:

$$R_{Ax} + 600 - 200 = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_{Ax} = -400 \text{ N}$$

(El signo negativo indica que  $R_{Ax}$  va hacia la izquierda).

## 2. Cálculo de tensiones (Método de los Nudos)

Analizamos el equilibrio de cada nudo por separado.

### Nudo B

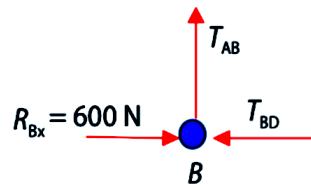


Figure 5.5: Equilibrio en el Nudo B

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Bx} - T_{BD} = 0 \Rightarrow T_{BD} = 600 \text{ N} \text{ (compresión)} \quad (5.4)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AB} = 0 \text{ N} \quad (5.5)$$

### Nudo C

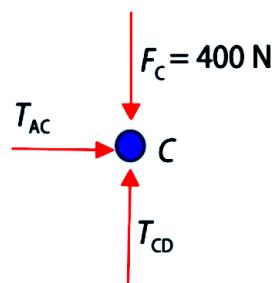


Figure 5.6: Equilibrio en el Nudo C

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AC} = 0 \text{ N} \quad (5.6)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_C + T_{CD} = 0 \Rightarrow T_{CD} = 400 \text{ N} \text{ (compresión)} \quad (5.7)$$

## Nudo D

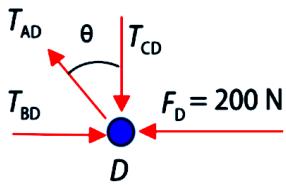


Figure 5.7: Equilibrio en el Nudo D

Por la geometría de la estructura (cuadrado de  $1 \times 1$ ), el ángulo de la barra diagonal AD es  $\theta = 45^\circ$ .

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AD} \cos \theta - T_{CD} = 0$$

$$T_{AD} = \frac{T_{CD}}{\cos \theta} = \frac{400}{\cos 45^\circ} = \mathbf{565,68 \text{ N (tracción)}}$$

## 5.4 Método de las secciones (Ritter)

Se utiliza cuando queremos estudiar **una barra en concreto** y no la totalidad de la estructura.

Consiste en lo siguiente:

1. **Cortamos** la estructura por una sección que **intersecte tres barras**.
2. Eliminamos una de las dos partes en las que ha quedado dividida la estructura.
3. Aplicamos en la otra parte **las tres ecuaciones de equilibrio**.

### Ejemplo Resuelto: Método de Ritter (Clic para desplegar)

Empleando el método de las secciones, o de Ritter, calcula las tensiones de las barras CE, ED y DF de la siguiente estructura de barras, donde A es un apoyo libre y G es un apoyo articulado.

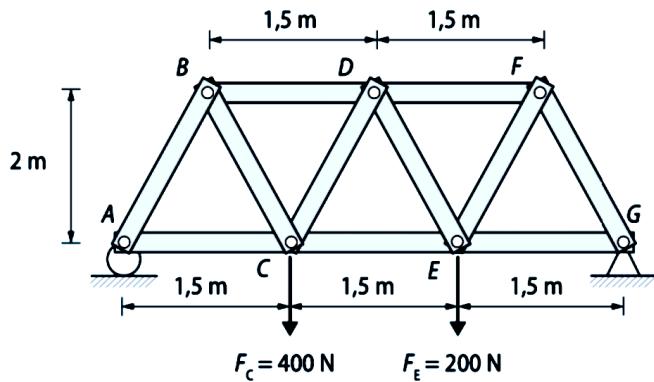


Figure 5.8: Estructura propuesta

## Comprobación de isostaticidad

Se trata de una estructura isostática exteriormente, ya que hay igual número de incógnitas ( $R_{Ay}$ ,  $R_{Gx}$ ,  $R_{Gy}$ ) que de ecuaciones ( $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$ ;  $\sum M = 0$ ), y también es isostática interiormente, ya que el número de barras  $b = 11$  cumple  $b = 2n - 3$  (siendo  $n = 7$  el número de nudos).

### 1. Cálculo de Reacciones

Calculamos primero las **reacciones** con las ecuaciones de equilibrio de la estructura global:

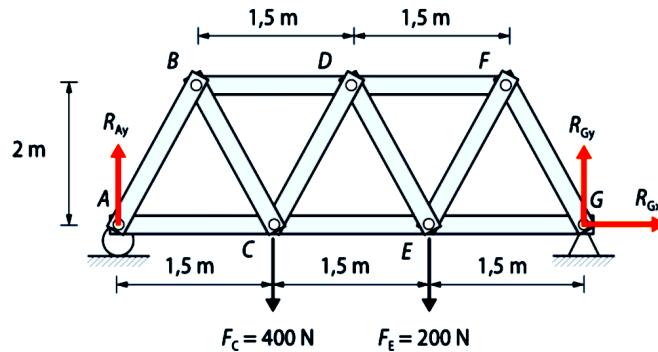


Figure 5.9: Diagrama global

Con la suma de momentos en G podemos calcular directamente la reacción  $R_{Ay}$ :

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow R_{Ay} \cdot 4,5 - 400 \cdot 3 - 200 \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 333,33 \text{ N}$$

Con la suma de fuerzas verticales calculamos la reacción  $R_{Gy}$ :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Gy} = 600 - 333,33 = 266,66 \text{ N}$$

Por último, la reacción  $R_{Gx}$ , es claramente nula al ser la única fuerza horizontal:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Gx} = 0 \text{ N}$$

### 2. Aplicación del Método de Ritter

A continuación realizamos la sección de la estructura por tres barras, tal y como se ve en la imagen:

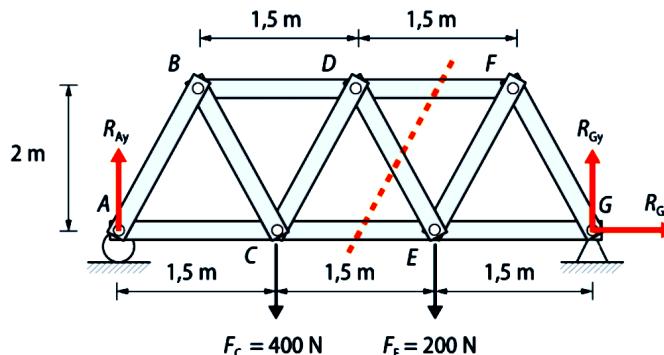


Figure 5.10: Corte de la sección

Cogemos el lado izquierdo del corte, realizamos el diagrama de cuerpo libre y dibujamos las tensiones de las barras. Escogemos todas las tensiones como de tracción, es decir, salen del nudo. Si luego nos salen negativas, será que en realidad son de compresión:

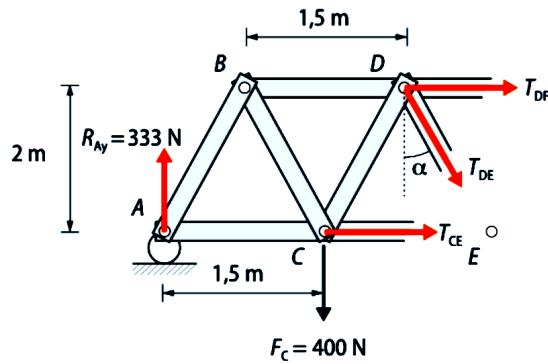


Figure 5.11: Diagrama de cuerpo libre de la sección

**Cálculo de  $T_{DF}$ :** Ponemos la ecuación de momento nulo en el nudo E. Como las tensiones  $T_{CE}$  y  $T_{DE}$  pasan por él, no generan momento y nos las quitamos. Por lo tanto, podemos calcular directamente la tensión  $T_{DF}$ :

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 333,33 \cdot 3 - 400 \cdot 1,5 + T_{DF} \cdot 2 = 0 \Rightarrow T_{DF} = -200 \text{ N}$$

Como sale negativa, resulta que es un esfuerzo de **compresión**.

**Cálculo de  $T_{DE}$ :** Con el equilibrio de fuerzas en el eje vertical, podemos calcular la tensión  $T_{DE}$ :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - F_C - T_{DE} \cos \alpha = 0$$

El ángulo  $\alpha$  lo podemos calcular fácilmente de la geometría de la estructura:

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{0,75}{2} \right) = 20,55^\circ$$

Por lo tanto:

$$333,33 - 400 - T_{DE} \cos 20,55^\circ = 0 \Rightarrow T_{DE} = -71,20 \text{ N}$$

De nuevo sale negativa, por lo que es un esfuerzo de **compresión**.

**Cálculo de  $T_{CE}$ :** Por último, con la suma de fuerzas horizontales obtenemos la tensión que nos falta,  $T_{CE}$ :

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \Rightarrow T_{CE} + T_{DF} + T_{DE} \sin 20,55^\circ = 0 \\ T_{CE} - 200 - 71,2 \sin 20,55^\circ &= 0 \Rightarrow T_{CE} = 224,99 \text{ N} \end{aligned}$$

En esta ocasión, al salir positiva, es un esfuerzo de **tracción**.

## 5.5 Método gráfico de Cremona

El método de Cremona es un procedimiento gráfico basado en el método de los nudos.

Consiste en lo siguiente:

1. Dibujamos la estructura indicando las **cargas** y calculando las **reacciones**.
2. Asignamos un número a cada **zona del perímetro externo** situada entre dos fuerzas (ya sean cargas o reacciones).
3. Asignamos un número a cada **zona interna** situada entre las barras de la estructura.
4. Dibujamos el **polígono de fuerzas exteriores y reacciones**.
5. Consideramos cada nudo aisladamente, estableciendo **dos ecuaciones de equilibrio para cada nudo**. Comenzaremos por un nudo en el que concurren dos barras.
6. Operamos con nudos sucesivos, eligiéndolos de forma que al resolverlos sólo existan dos barras cuyas fuerzas sean desconocidas.
7. Determinamos las incógnitas teniendo en cuenta que **las fuerzas exteriores e interiores constituyen polígonos cerrados**.
8. Iniciamos la construcción de gráficas. Dibujaremos **polígonos cerrados de fuerzas para cada uno de los nudos**, combinados de forma que **cada fuerza actuante en una barra**, que será común a dos nudos, **solamente se represente una vez**.
9. Medimos las fuerzas en el polígono de Cremona y las pasamos a una tabla. Las tensiones que se **acerquen** al nudo serán de **compresión** y las que se **alejen** serán de **tracción**.

Como siempre, lo veremos mejor con un ejemplo resuelto.

#### Ejemplo Resuelto: Método de Cremona (Clic para desplegar)

Empleando el método gráfico de Cremona, calcula las tensiones de las barras de la siguiente estructura de barras, donde A es un apoyo articulado y D es un apoyo libre.

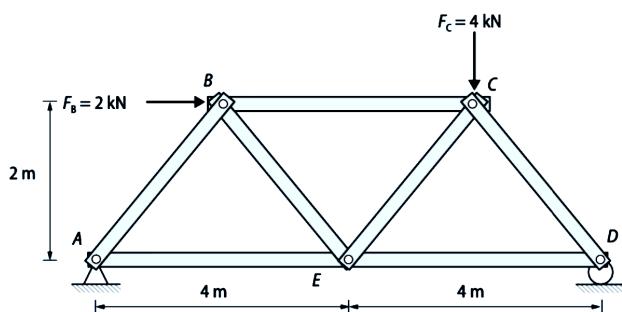


Figure 5.12: Estructura propuesta

#### Comprobación de isostática

Se trata de una estructura isostática exteriormente, ya que hay igual número de incógnitas ( $R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Dy}$ ) que de ecuaciones ( $\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M = 0$ ).

También es isostática interiormente, ya que el número de barras  $b = 7$  cumple  $b = 2n - 3$  (siendo  $n = 5$  el número de nudos).

#### 1. Cálculo de Reacciones

Calculamos primero las **reacciones** con las ecuaciones de equilibrio de la estructura global:

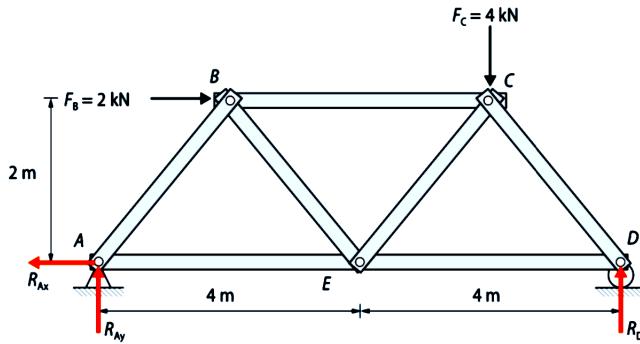


Figure 5.13: Diagrama global con reacciones

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 \Rightarrow R_{Dy} \cdot 8 - 4 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_{Dy} = 3,5 \text{ kN} \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow R_{Ay} = 4 - R_{Dy} = 0,5 \text{ kN} \\ \sum F_x &= 0 \Rightarrow R_{Ax} = 2 \text{ kN}\end{aligned}$$

## 2. Numeración de Zonas (Notación de Bow)

Numeramos las barras y asignamos un número a cada zona del perímetro externo situado entre dos fuerzas (acciones o reacciones) y luego a las zonas internas.

Las zonas del perímetro serán, en este caso, 1, 2, 3, 4 y 5, mientras que las zonas internas serán 6, 7 y 8:

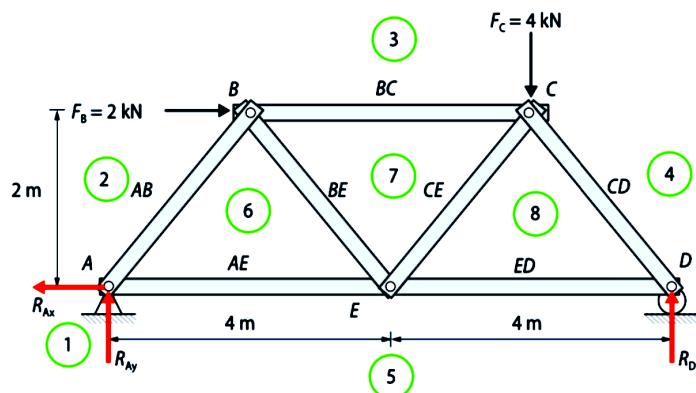


Figure 5.14: Numeración de zonas

## 3. Construcción del Polígono de Fuerzas (Cremona)

Ahora dibujamos el **polígono de fuerzas externas**, que estará formado por los números de las zonas externas (es decir, del 1 al 5). Para dibujarlo, operamos como sigue:

- Situamos el número 1.
- Trazamos desde el número 1 una línea paralela a la fuerza que hay entre 1 y 2 (en este caso  $R_{Ax}$ ), y elegimos una escala para marcar una distancia que corresponda al valor de dicha fuerza (por ejemplo, 1 cm = 1 kN).
- Una vez situado el número 2, repetimos el procedimiento anterior para situar el 3.

- Continuamos hasta llegar al último número (en este caso el 5), comprobando que desde él hacia el 1 el polígono queda **cerrado** (es decir, que terminamos de nuevo sobre el número 1).

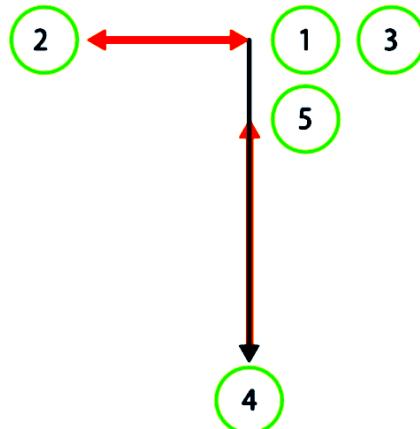


Figure 5.15: Polígono de fuerzas externas

Sobre el diagrama de Cremona, empezamos a dibujar los números de las zonas internas, correspondientes a las barras que concurren en un nudo **con sólo dos incógnitas**. Para ello, recorremos el nudo en **SENTIDO HORARIO**: mirando, por ejemplo, el **nudo A**, la numeración es 1-2-6-5. Lo que estamos haciendo es sumar las fuerzas que actúan en cada nudo en un determinado orden.

El nº 6 es el único que no está situado en el diagrama. Vemos cómo situarlo:

- La **barra AB** corresponderá en el diagrama a un segmento **entre 2 y 6**. Por tanto, trazamos desde 2 una línea paralela a la barra AB.
- La **barra AE** corresponderá en el diagrama a un segmento **entre 6 y 5**. Por tanto, trazamos desde 5 una línea paralela a la barra AE.
- En el punto donde se corten estas dos líneas, estará el punto 6.

Seguimos por el **nudo B**: dibujamos los segmentos de las barras del nudo B.

- La **barra BC** corresponderá en el diagrama a un segmento **entre 3 y 7**. Por tanto, trazamos desde 3 una línea paralela a la barra BC.
- La **barra BE** corresponderá en el diagrama a un segmento **entre 7 y 6**. Por tanto, trazamos desde 6 una línea paralela a la barra BE.
- En el punto donde se corten estas dos líneas, estará el número 7.

Seguimos con el **nudo C**:

- La **barra CD** corresponderá en el diagrama a un segmento **entre 4 y 8**. Por tanto, trazamos desde 4 una línea paralela a la barra CD.
- La **barra CE** corresponderá en el diagrama a un segmento **entre 8 y 7**. Por tanto, trazamos desde 7 una línea paralela a la barra CE.
- En el punto donde se corten estas dos líneas, estará el punto 8.

Finalizamos con el **nudo D**:

- La barra ED corresponderá en el diagrama a un segmento entre 5 y 8. Por tanto, unimos los puntos 5 y 8 del diagrama y obtendremos una línea paralela a la barra ED que nos representa ya el axil  $T_{ED}$ .

#### 4. Medición de Resultados

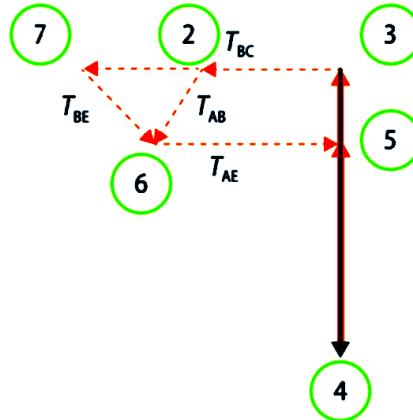


Figure 5.16: Diagrama de Cremona final

Directamente sobre el diagrama medimos las magnitudes de los axiles. Los que se acerquen al nudo B serán de compresión y los que se alejen serán de tracción:

- $T_{AB} = 0,707 \text{ kN}$  (compresión)
- $T_{AE} = 2,5 \text{ kN}$  (tracción)
- $T_{BC} = 3 \text{ kN}$  (compresión)
- $T_{BE} = 0,707 \text{ kN}$  (tracción)

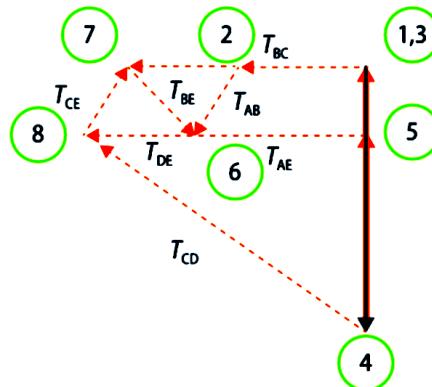


Figure 5.17: Diagrama con todos los puntos

Los valores que faltaban por medir son estos:

- $T_{CD} = 4,95 \text{ kN}$  (compresión)
- $T_{CE} = 0,707 \text{ kN}$  (compresión)
- $T_{ED} = 3,5 \text{ kN}$  (tracción)