Programación Entera vs Programación Lineal

José Luis Rodríguez

Septiembre 2023

1 Introducción

En este proyecto podemos observar una "actualización" del proyecto anterior en el cual era suficiente utilizando el método Simplex de la progrmación lineal ya que no era un problema complejo, pero en este proyecto podemos apreciar como aumentan las variables del problema como las restricciones que debemos cumplir, siendo una de ellas el uso de numeros enteros, por lo que la programación lineal no es la mas eficiente ya que utiliza variables continuas.

Observamos como se resuelve el problema utilizando el solucionador CBC de Programación Entera, el cual nos proporciona la solución del ejército mas óptimo mucho más rapido que utilizando la Programación Lineal y además utilizando CBC obtenemos la solución en número enteros como nos pide el problema.

2 Modelos de Programación Lineal

2.1 ¿Qué es la Programación Lineal?

La programación lineal es un método a través del cual se optimiza una función objetivo, bien sea maximizando o minimizando dicha función, de manera que las variables de tal función estén sujetas a una serie de restricciones expresadas a través de un sistema de ecuaciones o inecuaciones **lineales**.

Es importante considerar que lo que es programación lineal en investigación de operaciones está compuesta por dos elementos fundamentales: la región factible y las restricciones estructurales y de no negatividad.

A las restricciones se les llama restricciones de no negatividad y, se le conocen como condiciones del modelo que estipulan que las variables de decisión deben tener solo valores positivos o nulos. Al conjunto de valores que satisfacen todas las restricciones, se les denomina región factible, que se le cataloga como un espacio de solución o de todos los puntos posibles de un problema de optimización que satisface las restricciones del problema.

2.2 Ejemplo 1

Una empresa fabrica dos productos, A y B, y desea maximizar sus ganancias. Cada unidad de producto A genera una ganancia de \$6, y cada unidad de producto B genera una ganancia de \$8. La empresa tiene dos recursos: mano de obra y materiales, y los recursos disponibles son los siguientes:

- La mano de obra disponible es de 120 horas por semana.
- Los materiales disponibles son de 100 unidades por semana.

Además, se sabe que para fabricar una unidad de producto A se requieren 2 horas de mano de obra y 1 unidad de material, mientras que para fabricar una unidad de producto B se requieren 3 horas de mano de obra y 2 unidades de material.

El objetivo es determinar cuántas unidades de producto A y B deben fabricarse semanalmente para maximizar las ganancias.

1. **Variables**

$$x_1 : Cantidad\ de\ unidades\ de\ producto\ A\ a\ fabricar\ semanalmente.$$

$$x_2 : Cantidad\ de\ unidades\ de\ producto\ B\ a\ fabricar\ semanalmente.$$

2. **Restricciones**

$$Manodeobra : 2x_1 + 3x_2 \leq 120(horas\ disponibles).$$

$$Materiales : x_1 + 2x_2 \leq 100(unidades\ disponibles).$$

$$No\ se\ pueden\ fabricar\ cantidades\ negativas : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

3. **Función objetivo**

$$Maximizar Z = 6x_1 + 8x_2 (gananciassemanales).$$

4. **Solución mediante el método Simplex:**

Iteración	x_1	x_2	$S1$	$S2$	RHS
0	0	0	2	1	0
Función Objetivo	-6	-8	0	0	0
1	0	40	2	-1	60
Función Objetivo	0	320	0	-8	480

La solución óptima es fabricar 40 unidades de producto B para maximizar las ganancias semanales en \$480. Podemos observar como, la solución mas óptima no incluye ningún producto A.

Para ello, el método **SIMPLEX** es el mas óptimo debido a su capacidad para manejar restricciones lineales y resolver problemas de optimización lineal de manera eficiente.

2.3 Ejemplo 2

Una tienda de ropa vende dos tipos de prendas, camisetas (T) y pantalones (P). La tienda quiere maximizar sus ganancias diarias. Cada camiseta genera una ganancia de $10, y cada pantalón genera una ganancia de $15. La tienda tiene dos limitaciones principales:

- La cantidad de espacio en el estante es limitada, con un total de 20 pies cuadrados disponibles.
- La tienda solo puede vender un máximo de 30 prendas en un día.

Además, se sabe que una camiseta ocupa 1 pie cuadrado y un pantalón ocupa 2 pies cuadrados en el estante. La tienda también tiene una restricción de cantidad máxima de 15 camisetas y 10 pantalones por día.

El objetivo es determinar cuántas camisetas y pantalones debe vender la tienda cada día para maximizar sus ganancias.

1. **Variables de decisión**

$$x_T : Cantidad\ de\ camisetas\ vendidas\ diariamente.$$

$$x_P : Cantidad\ de\ pantalones\ vendidos\ diariamente.$$

2. **Restricciones**

   Espacio en el estante:

$$x_T + 2x_P \leq 20(pies\ cuadradosdisponibles\ en\ el\ estante).$$

   Límites de cantidad por tipo:

$$x_T \leq 15(máximo\ de\ 15\ camisetas\ vendidas\ diariamente)$$

$$x_P \leq 10(máximo\ de\ 10\ pantalones\ vendidos\ diariamente).$$

   No se pueden vender cantidades negativas:

$$x_T \geq 0,\ x_P \geq 0.$$

3. **Función objetivo**

$$Maximizar Z = 10x_T + 15x_P(ganancias\ diarias).$$

4. **Solución mediante el método Simplex**

Iteración	x_T	x_P	$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	RHS
0	0	0	1	2	1	0	20
Función Objetivo	-10	-15	0	0	0	0	0
1	0	15	1	0	-1	0	15
Función Objetivo	150	0	0	15	10	0	1500

La solución óptima es vender 15 camisetas y 10 pantalones diariamente para maximizar las ganancias diarias en $1500.

3 Modelos de Programación Entera

3.1 ¿Qué es la Programación Entera?

La Programación Entera es una técnica de optimización matemática que se utiliza cuando se deben tomar decisiones discretas y se busca encontrar la mejor asignación de recursos o selección de opciones, y donde las soluciones se restringen a números enteros. Es una herramienta poderosa para abordar una amplia gama de problemas de toma de decisiones en diversas aplicaciones, como por ejemplo: (TSP)"Problema del Agente Viajero", hace referencia a la problemática de encontrar la ruta más corta y, al mismo tiempo, la más eficiente, para llegar a un destino.

3.2 Ejemplo 1

El problema nos plantea encontrar la manera más efectiva de repartir 5 profesores entre 5 asignaturas posibles. Los profesores tienen preferencias (del 1 al 10, siendo 10 la máxima preferencia) de algunas asignaturas sobre otras pero tienen los conocimientos suficientes para impartir cualquier asignatura. En la siguiente tabla podemos ver las preferencias de cada profesor:

Cursos	Profesores				
	A	B	C	D	E
C1	5	8	5	9	7
C2	7	2	3	6	8
C3	9	10	8	9	8
C4	8	7	9	7	8
C5	6	9	9	10	5

Cabe anotar que un profesor solo puede impartir una asignatura y que queremos maximizar las preferencias lo máximo posible

1. **Variables**

   Las ecuaciones de las variables son las siguientes:

   $$X_{ij} = \begin{cases} 1, \ si \ se \ asigna \ un \ profesor \ a \ una \ asignatura \ operación \ j \\ 0, \ si \ no \ se \ asigna \end{cases}$$

   Con i= A, B, C, D y E y j= C1, C2, C3, C4 Y C5

2. **Restricciones**

   Las restricciones que debemos tener en cuenta son las siguientes:

   $$\sum_{i=A}^{E} x_{ij} = 1 \ Para \ todo \ j \ (\ Cada \ curso \ debe \ tener \ 1 \ profesor \ )$$

   $$\sum_{i=C1}^{C5} x_{ij} = 1 \ Para \ todo \ i \ (\ Cada \ profesor \ debe \ tener \ 1 \ curso \ )$$

3. **Función objetivo**

   Para maximizar el total de las preferencias de los profesores utilizaremos la siguiente ecuacion:

   $$MAX \sum_{i=A}^{E} \sum_{i=C1}^{C5} P_{ij} X_{ij}$$

   Donde P(i,j) es la preferencia del profesor i (en una escala de 1 a 10) por dar ese curso j. Por ejemplo, P(D,C3)=9.

4. **Solución**

   Tras utilizar la programació Entera, hemos obtenido que la solución más óptima maximizando las preferencias es la siguiente:

   Profesor A a C3

   Profesor B a C5

   Profesor C a C4

   Profesor D a C1

   Profesor E a C2

   Y el valor total óptimo de las preferencias totales es de 44.

   Para ello he utilizado el **solucionador IBM CPLEX** ya que tiene una interfaz fácil en python y es altamente eficaz en este problema para encontrar la asignación óptima de profesores a cursos que cumpla con la restricción de que las asignaciones sean números enteros ya que este solucionador está diseñado para manejar problemas de programación entera y es capaz de encontrar la solución óptima que cumpla con todas las restricciones, incluida la restricción de números enteros **(las preferencias solo admiten numeros enteros)**.

3.3 Ejemplo 2

El problema nos plantea en una oficina en la que necesitamos para cada día de la semana el número de trabajadores/as a tiempo completo de la siguiente tabla:

DÍA	TRABJADORES/AS
Lunes	15
Martes	13
Miércoles	15
Jueves	18
Viernes	14
Sábado	16
Domingo	10

Cada trabajador/a debe trabajar cinco días seguidos y descansar dos. El problema consiste en determinar el número de trabajadores/as que entran a trabajar cada día de la semana para garantizar el funcionamiento de la oficina. El objetivo es hacer frente a las necesidades de la oficina contratando un número mínimo de trabajadores/as.

1. **Variables**

   La ecuación de la variable que tenemos es la siguiente:

   $$X_j = numero\ de\ trabajadores\ que\ entran\ a\ trabajar\ al\ dia$$

2. **Restricciones**

   Las restricciones que debemos tener en cuenta son las siguientes:

   $$\sum_{i=j} X_{ij} = 5 para\ i\ =\ 1,\ 2, ..., n$$

   Donde n es el número de trabajadores

   $$x1 + x4 + x5 + x6 + x7 \geq 15$$

   $$x1 + x2 + x5 + x6 + x7 \geq 13$$

   $$x1 + x2 + x3 + x6 + x7 \geq 15$$

   $$x1 + x2 + x3 + x4 + x7 \geq 18$$

   $$x1 + x2 + x3 + x4 + x5 \geq 14$$

   $$x2 + x3 + x4 + x5 + x6 \geq 16$$

   $$x3 + x4 + x5 + x6 + x7 \geq 10$$

   $$x1, ..., x7 \geq 0\ y\ enteras$$

3. **Función Objetivo**

   Tenemos la siguiente ecuación que trata de minimizar el número de trabajadores a contratar satisfacciendo las necesidades de la oficina:

   $$MIN\ (Z = x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7)$$

4. **Solución**

   Utilizando el solucionador de programación entera **IBM CPLEX** se encuentra la solución óptima que minimice el número de trabajadores necesarios para cubrir las necesidades de la oficina cumpliendo con las restricciones establecidas.

4 Diferencias entre la Programación Lineal y la Programación Entera

La programación entera y la programación lineal son dos enfoques diferentes para resolver problemas de optimización . A continuación, se presentan algunas diferencias clave entre ambas:

Naturaleza de las variables: En la programación lineal, las variables pueden tomar valores continuos, es decir, cualquier número real dentro de un rango determinado. En cambio, en la programación entera, algunas o todas las variables deben tomar valores enteros. Esto significa que las soluciones óptimas deben ser números enteros.

Complejidad computacional: Resolver problemas de programación entera puede ser más complejo y computacionalmente costoso que resolver problemas de programación lineal . Esto se debe a la necesidad de examinar todas las posibles combinaciones de valores enteros para las variables , lo que puede llevar mucho tiempo en problemas con muchas variables y restricciones.

Aplicaciones específicas: La programación lineal se utiliza normalmente en problemas de optimización en los que las variables pueden tomar cualquier valor dentro de un rango continuo. Por otro lado, la programación entera se utiliza en situaciones en las que las variables deben ser números enteros, como la programación de horarios.

Flexibilidad en la modelización: La programación lineal permite modelar problemas de forma más flexible, ya que las variables pueden tomar cualquier valor dentro de un rango continuo. Esto puede adaptarse a situaciones en las que se requieren valores fraccionarios o decimales. En contraste, la programación entera puede ser más restrictiva en términos de las soluciones permitidas, ya que solo se aceptan valores enteros.

Herramientas y algoritmos: Existen algoritmos específicos para resolver problemas de programación lineal , como el método simplex y el método de punto interior. Por otro lado, la programación entera requiere algoritmos más avanzados, como el método de ramificación y acotación, para encontrar soluciones óptimas.

En resumen, la principal diferencia entre la programación entera y la programación lineal radica en la naturaleza de las variables y en las restricciones impuestas a las soluciones óptimas. La elección entre los dos enfoques depende de la naturaleza del problema y de las restricciones específicas que se deben cumplir.