http://files.profeolegme.webnode.mx/200000067-eff2bf1e65/razonamiento%20matematico.pdf

PROBLEMAS PARA RAZONAMIENTO MATEMÁTICO. INGRESO AL NIVEL SUPERIOR.

José Juan Muñoz León

2006

Dedicatoria

A mi padre y madre:

Por mostrarme con su ejemplo el camino a seguir. Por su apoyo incondicional.

A Paloma:

Por el gran amor brindado.

Agradecimientos

Al M. en C. Héctor Saiz Guerra:

Por su paciencia, dedicación y apoyo en la realización de este trabajo.

A la comisión revisora:

- M. en C. Eloísa Benitez Mariño
- Dr. Evodio Muñoz Aguirre
- Dr. José Rigoberto Gabriel Argüelles

Por sus comentarios y sugerencias, por el tiempo dedicado.

A los estudiantes de Bachilleres "Experimental" Gen. 2002 – 2005:

Por confiar en el proyecto, por participar activamente, por su tenacidad y esfuerzo.

A las maestras Maricela Martínez Martínez y María del Socorro Torres Morales:

Por permitir que este proyecto se realizara y por el apoyo que siempre brindaron al mismo.

A Luís Alfredo Dupont García:

Por su amistad, por mostrarme el camino que no hay que seguir. ¡Gracias mi gordo!

Introducción

En este trabajo se presenta un conjunto de problemas encaminado a desarrollar habilidades matemáticas en estudiantes del nivel medio superior. La finalidad de estos problemas es alcanzar un rendimiento académico adecuado en la prueba de ingreso al nivel superior.

En el capítulo I, se presenta la información general referente al organismo evaluador del nivel superior, CENEVAL, así como la metodología empleada para resolver los problemas propuestos. El objetivo principal de este capítulo es enmarcar teóricamente el estudio realizado, es por ello que se describe la estructura de EXANI II, su evaluación, así como los criterios para realizar y revisar reactivos de opción múltiple. Por otra parte, se describe la teoría de Polya para plantear y resolver problemas así como la adaptación de ella empleada para resolver reactivos de opción múltiple.

En el capítulo II, se presenta el conjunto de problemas elegidos para desarrollar habilidades matemáticas. El instrumento que se presenta fue aplicado en la población de estudiantes de la Escuela de Bachilleres “Experimental” con miras a incrementar el índice porcentual de ingreso al nivel superior.

Posteriormente, en los capítulos III y IV, se muestran los datos obtenidos a partir de la aplicación de *Problemas para Razonamiento Matemático. Ingreso al Nivel Superior* así como los resultados finales del índice de ingreso al nivel superior. En el capítulo final se dan las conclusiones del estudio realizado después de la aplicación del instrumento.

Justificación

A partir de 1998, la Universidad Veracruzana estableció al organismo CENEVAL como evaluador de los aspirantes a ingresar a alguna de las carreras que la universidad oferta.

CENEVAL (2005), denomina a dicha evaluación como EXANI II, Examen Nacional de Ingreso al Nivel Superior, y la define como una prueba de razonamiento y conocimientos básicos del nivel bachillerato, utilizada con fines de selección de ingreso al nivel de licenciatura. Está dirigido a egresados del nivel medio superior que solicitan ingreso a instituciones que hayan contratado los servicios del CENEVAL. En lo particular, la sección de razonamiento se refiere a dos tipos, el verbal y el matemático.

Entre los años 1998 – 2003, los índices de ingreso al nivel superior de la Escuela Secundaria y de Bachilleres "Experimental" rondaron el 30%, siendo generaciones de 80 estudiantes en promedio en donde el mayor número de aceptados al nivel superior fue de 23 alumnos.

Problemas para Razonamiento Matemático. Ingreso al nivel superior está enfocado a desarrollar habilidades en el estudiante de nivel medio superior, a partir de situaciones matemáticas similares a las que aparecen en un examen de CENEVAL, con miras a incrementar sus probabilidades de ingreso al nivel de licenciatura.

La hipótesis que se intentará demostrar consiste en que implementar un material referente a Problemas para Razonamiento Matemático en estudiantes del nivel preuniversitario incrementa sus probabilidades de ingreso al nivel superior. El proceso que se pretende diseñar consiste en establecer dos herramientas básicas en el desarrollo de la actividad docente, material referente a Razonamiento Matemático y un taller en el cual desarrollar ese material. El proceso deberá describirse en virtud de la implementación de dichos instrumentos en estudiantes de Bachilleres "Experimental" que cursen el último año de bachillerato. Habrá que verificar la utilidad del documento en cuanto a su estructura, a su mecanismo para desarrollar habilidades intelectuales, a la cantidad de material propuesto y a su dosificación. Por su parte el Taller de Razonamiento Matemático diseñado para implementar el material deberá observar variables de asistencia y rendimiento, para lo cual se realiza un análisis detallado a partir de CENEVAL y de su prueba de ingreso al nivel superior.

El instrumento propuesto, Problemas para Razonamiento Matemático, se aplicó en la población estudiantil de bachilleres "Experimental" egresada en el año 2005, y se propuso como meta para dicha generación incrementar sus probabilidades de ingreso al 60% del nivel superior. En los capítulos siguientes se presenta la información referente al experimento ejecutado.

Objetivos

Objetivo General

- Recopilar y seleccionar material referente a Razonamiento Matemático para estudiantes del nivel medio superior, con miras a incrementar sus posibilidades de ingreso a nivel superior.

Objetivos Específicos

- Incrementar el porcentaje de ingreso al nivel superior para estudiantes de Bachilleres "Experimental".

- Diseñar un proceso con el que los índices de ingreso al nivel superior mantengan un nivel adecuado.

- Mostrar, mediante la aplicación del material y la obtención de resultados, la necesidad de incluir "razonamiento" en las materias del nivel bachillerato para cubrir dicha sección en el examen general de ingreso al nivel superior.

1. Información General de CENEVAL y Algunos Métodos para Resolver Problemas

En este capítulo se presenta la información general acerca del examen denominado EXANI II, en cuanto a su estructura y a la metodología propuesta para resolver reactivos de opción múltiple; además de una breve descripción del experimento que se realizó con miras a incrementar el índice de ingreso al nivel superior de una escuela de nivel bachillerato.

1.1. Fundamentación

1.1.1. Constructivismo matemático

En general, según Kilpatrick (1993), el "constructivismo" designa una corriente filosófica cuyo planteamiento de los problemas epistemológicos se configura en torno al concepto de la *constructividad*.

Los dos principios del constructivismo son los siguientes:

1) El conocimiento es construido por el que conoce; no se puede recibir pasivamente del entorno.

2) El proceso de conocer es un proceso de adaptación del sujeto al mundo de su propia experiencia. Por lo tanto, no es posible descubrir un mundo independiente y pre-existente afuera de la mente del que conoce.

De acuerdo a esta teoría, el conocimiento se construye como un proceso activo en el que el sujeto se adapta a su propia experiencia. No es un proceso de adaptación a la “realidad”. Pero, además, este es un proceso de adaptación a lo que la experiencia dice que no es. El conocimiento se puede ver como un “modelo” de la experiencia y este modelo va cambiando a medida que la experiencia muestra que hay partes de él que no son correctas. Lo que conocemos son entonces las restricciones que nos impone la experiencia. Cambiamos nuestro modelo cuando hay algo en él que no concuerda con nuestras experiencias.

El término que involucra a esta teoría con las matemáticas es el término *resolución de problemas* que ha sido usado con diversos significados, que van desde trabajar con ejercicios rutinarios hasta hacer matemática profesionalmente.

Según Stanic y Kilpatrick (1988), “los problemas han ocupado un lugar central en el currículo matemático escolar desde la antigüedad, pero la resolución de problemas, no”. Sólo recientemente los que enseñan matemáticas han aceptado la idea de que el desarrollo de la habilidad para resolver problemas merece una atención especial. El termino *resolución de problemas* se ha convertido en un slogan que acompañó diferentes concepciones sobre qué es la educación, qué es la escuela, qué es la matemática y por qué debemos enseñar matemática en general y resolución de problemas en particular. Según este autor, la utilización de los términos "problema" y "resolución de problemas" ha tenido múltiples y a veces contradictorios significados a través de los años, como se describe brevemente a continuación:

Primer significado: resolver problemas como contexto.

Desde esta concepción, los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares, jugando cinco roles principales:

- *Como una justificación para enseñar matemática*: al menos algunos problemas relacionados con experiencias de la vida cotidiana son incluidos en la enseñanza para mostrar el valor de la matemática.
- *Para proveer especial motivación a ciertos temas*: los problemas son frecuentemente usados para introducir temas, con el convencimiento implícito o explícito de que favorecerán el aprendizaje de un determinado contenido.
- *Como actividad recreativa*: muestran que la matemática puede ser "divertida" y que hay usos entretenidos para los conocimientos matemáticos.
- *Como medio para desarrollar nuevas habilidades*: se cree que, cuidadosamente secuenciados, los problemas pueden proporcionar a los estudiantes nuevas habilidades y proveer el contexto para discusiones relacionadas con algún tema.
- *Como práctica*: la mayoría de las tareas matemáticas en la escuela caen en esta categoría. Se muestra una técnica a los estudiantes y luego se presentan problemas de práctica hasta que se ha dominado la técnica.

Sin embargo, en cualquiera de estas cinco formas, los problemas son usados como medios para algunas de las metas señaladas arriba. Esto es, la resolución de problemas no es vista como una meta en sí misma, sino como facilitador del logro de otros objetivos y tiene una interpretación mínima: resolver las tareas que han sido propuestas.

Segundo significado: resolver problemas como habilidad.

La mayoría de los desarrollos curriculares que ha habido bajo el término resolución de problemas son de este tipo.

La resolución de problemas es frecuentemente vista como una de tantas habilidades a ser enseñadas en el curriculum. Esto es, resolver problemas no rutinarios es caracterizado como una habilidad de nivel superior, a ser adquirida luego de haber resuelto problemas rutinarios (habilidad que a su vez, es adquirida a partir del aprendizaje de conceptos y habilidades matemáticas básicas).

Es importante señalar que, aún cuando en esta segunda interpretación del término los problemas son vistos como una habilidad en sí misma, las concepciones pedagógicas y epistemológicas que subyacen son precisamente las mismas que las señaladas en la interpretación anterior: las técnicas de resolución de problemas son enseñadas como un contenido, con problemas de práctica relacionados, para que las técnicas puedan ser dominadas.

Tercer significado: resolver problemas es "hacer matemáticas".

Hay un punto de vista particularmente matemático acerca del rol que los problemas juegan en la vida de aquellos que hacen matemática. Consiste en creer que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática realmente consiste en problemas y soluciones.

El matemático más conocido que sostiene esta idea de la actividad matemática es Polya. Nos hemos familiarizado con su trabajo a través del libro “How to solve it” (1954), en el cual introduce el término “heurística” para describir el arte de la resolución de problemas, concepto que desarrolla luego en “Matemática y razonamiento plausible” (1957) y “Mathematical Discovery” (1981).

La conceptualización de Polya sobre la matemática como una actividad se evidencia en la siguiente cita: “Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados, y casi todos los pasajes de este libro están destinados a mostrar que éste es el procedimiento normal. Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel.” (Polya, 1954)

Para Polya, la pedagogía y la epistemología de la matemática están estrechamente relacionadas y considera que los estudiantes tienen que adquirir el sentido de la matemática como una actividad; es decir, sus experiencias con la matemática deben ser consistentes con la forma en que la matemática es hecha.

Enseñar a partir de la resolución de problemas, tal como lo plantea Polya, se vuelve difícil para los docentes por tres razones diferentes:

1. Matemáticamente, porque los docentes deben poder percibir las implicaciones de las diferentes aproximaciones que realizan los alumnos, darse cuenta si pueden ser fructíferas o no, y qué podrían hacer en lugar de eso.
2. Pedagógicamente, porque el docente debe decidir cuándo intervenir, qué sugerencias ayudarán a los estudiantes, sin impedir que la resolución siga quedando en sus manos, y realizar esto para cada alumno o grupo de alumnos de la clase.
3. Personalmente, porque el docente estará a menudo en la posición (inusual e incómoda para muchos profesores) de no saber. Trabajar bien sin saber todas las respuestas, requiere experiencia, confianza y autoestima.

Por otra parte, distintos autores señalan que existe una urgente necesidad de proveer a los docentes con mayor información acerca de cómo enseñar a través de la resolución de problemas, destacándose tres aspectos principales a profundizar en la investigación:

1. El rol del docente en una clase centrada en la resolución de problemas: poca literatura relacionada con la investigación en la enseñanza a través de la resolución de problemas discute la especificidad del rol del docente.

2. Lo que realmente ocurre en las clases centradas en la resolución de problemas: no hay una descripción adecuada de lo que realmente ocurre en estas clases, a pesar de existir largas listas sobre los comportamientos de los docentes, sobre los comportamientos de los alumnos, sobre sus interacciones y la clase de atmósfera que existe.

*3. La investigación debe centrarse en los grupos y las clases como un todo, y no en los individuos aislados: g*ran parte de lo investigado en resolución de problemas matemáticos se ha centrado en los procesos de pensamiento usados por los individuos mientras resuelven problemas.

Sin embargo, queda pendiente profundizar la investigación centrándose en los grupos y en los ambientes de clase, indagando los procesos de enseñar y aprender matemática desde la perspectiva del aprendizaje situado.

La educación matemática debería proveer a los estudiantes de una concepción de la matemática, de un sentido de la disciplina (su alcance, su poder, sus usos, y su historia), y de una aproximación al hacer matemático, en el nivel adecuado a sus posibilidades. Desde esta perspectiva, la enseñanza debería ser encarada como una comprensión conceptual más que como un mero desarrollo mecánico de habilidades, que desarrolle en los estudiantes la habilidad de aplicar los contenidos que han aprendido con flexibilidad y criterio. Debería también proveer a los alumnos de la oportunidad de explicar un amplio rango de problemas y situaciones problemáticas, que vayan desde los ejercicios hasta los problemas abiertos y situaciones de exploración, ayudando a desarrollar "un punto de vista matemático" (Schoenfeld, 1992), caracterizado por la habilidad de analizar y comprender, de percibir estructuras y relaciones estructurales, de expresarse oralmente y por escrito con argumentos claros y coherentes. En suma, debería preparar a los estudiantes para convertirse, lo más posible, en aprendices independientes, intérpretes y usuarios de la matemática.

Para cumplir estos objetivos, la comunidad de práctica en la cual ellos aprenden matemáticas debe reflejar y sostener estas formas de pensar. Esto es, las aulas deben ser comunidades en las cuales la matemática adquiera sentido, y lo que como docentes esperamos de los estudiantes, sea realmente practicado (Schoenfeld, 1992).

1.1.2. CENEVAL

El Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A.C. (CENEVAL) ofrece servicios de evaluación a cientos de escuelas, universidades, empresas, autoridades educativas, organizaciones de profesionales del país y otras instancias particulares y gubernamentales.

En el terreno de la educación, como en todas las actividades humanas, la evaluación es el proceso que permite valorar los aciertos, reconocer las fallas, detectar potencialidades y planificar las acciones. Contar con la información válida y confiable garantiza tomar decisiones acertadas.

Las instituciones educativas buscan ofrecer programas académicos cada vez mejores, competir con otras en igualdad de circunstancias y atraer a los estudiantes más capaces. De ello dependen su prestigio y su captación de recursos.

El empresario necesita enriquecer su planta laboral con profesionales cuya capacidad haya sido validada y certificada. Las asociaciones de profesionales y las autoridades oficiales requieren contar con elementos de juicio confiables, objetivos y válidos. La evaluación externa brinda información útil y complementa las evaluaciones internas.

Desde su nacimiento en 1994, el CENEVAL ha cumplido con su misión al proveer al sistema de educación superior de México con mecanismos sólidos y confiables de evaluación para mejorar su calidad. Casi desde un principio también, primero como derivación natural de su objetivo inicial y después como un propósito con derecho propio, el Centro se ha ocupado de identificar y evaluar las competencias profesionales y ocupacionales de la población mexicana, así como de certificar las laborales.

El crecimiento ha sido notable; hoy por hoy, el CENEVAL es el principal centro del país en la evaluación externa de competencias, conocimientos y habilidades al servicio de la educación superior, y el que con mayor dedicación se ocupa del estudio, la medición y la certificación de las destrezas y las competencias de nuestra fuerza de trabajo. Es, en consecuencia, una fuente de información indispensable para la toma de decisiones sobre la educación y el capital humano de México.

El Centro desarrolla, principalmente, dos tipos de exámenes: los Nacionales de Ingreso (EXANI), que evalúan las habilidades y competencias fundamentales, así como los conocimientos indispensables que debe tener quien aspira a continuar sus estudios de educación media superior y superior, así como los Exámenes Generales para el Egreso de la Licenciatura (EGEL), que evalúan los conocimientos y la información indispensables que debe mostrar un recién egresado de los estudios de licenciatura.

Además, el CENEVAL cuenta con un amplio conjunto de exámenes que responden a necesidades y planteamientos específicos. Destacan los programas especiales que se han desarrollado para la acreditación del bachillerato y de ciertas licenciaturas por personas que adquirieron los conocimientos necesarios en forma autodidacta o a través de la experiencia laboral, con base en el Acuerdo 286 de la Secretaría de Educación Pública (SEP); los exámenes para la evaluación de las competencias profesionales, la práctica docente, la preparación para la docencia y el perfil profesional, y los procesos para la certificación de competencias laborales conforme a lo establecido por el Consejo Nacional de Normalización y Certificación (CONOCER).

Desde el año 1998 la Universidad Veracruzana contrató los servicios de CENEVAL para participar como organismo evaluador en el proceso de selección de aspirantes a ingresar al nivel superior en esta casa de estudios. La participación consiste en examinar de tal forma que se establezca un criterio eficaz para el ingreso, así como para establecer comparaciones con el resto de las instituciones del país que se evalúan con dicho organismo. La prueba que se aplica se denomina EXANI II, que se describe a continuación.

1.1.3. EXANI II. Examen Nacional de Ingreso a la Educación Superior. ¿Qué es?

El EXANI II es una prueba de razonamiento y conocimientos básicos del nivel bachillerato, utilizada con fines de selección de ingreso al nivel de licenciatura. Está dirigido a egresados del nivel medio superior que solicitan ingreso a instituciones que hayan contratado los servicios del CENEVAL.

El grupo de exámenes designado genéricamente como EXANI II revisa las habilidades intelectuales y los conocimientos de los sustentantes en base a la siguiente estructura:

ÁREAS	**REACTIVOS POR ÁREA**	**SECCIONES**	**REACTIVOS POR SECCIÓN**
Habilidades intelectuales	40	Razonamiento verbal	20
		Razonamiento matemático	20
Información	16	Mundo contemporáneo	16
Conocimientos	64	Ciencias naturales	16
		Ciencias sociales	16
		Matemáticas	16
		Español	16
TOTAL DE REACTIVOS	120		120

ESTRUCTURA DEL EXANI II

Estas secciones se desglosan de la siguiente manera:

Razonamiento verbal.

- Completamiento de frases y oraciones.
- Reconstrucción de textos.
- Analogías y relaciones.
- Inferencias lógicas y silogísticas.
- Comprensión de textos.

Razonamiento matemático.

- Identificación de patrones y algoritmos.

- Clasificación y análisis de datos, figuras y símbolos.
- Deducción e inducción.

Mundo contemporáneo.

- Acontecimientos recientes de México y del mundo en diversos ámbitos: social, económico, científico, político, ecológico, deportivo, del espectáculo, etc.

Ciencias naturales.

- *Física*: unidades de medida, mecánica, acústica, ondas, electricidad, cinemática, dinámica, óptica.
- *Química*: materia, estructura, elementos, tabla periódica, moléculas, enlaces, reacciones, balanceo de ecuaciones.
- *Biología*: origen de la vida, evolución, reinos de la naturaleza, biodiversidad, genética, ecología.
- *Psicología*: teorías y corrientes de pensamiento, autores.

Ciencias sociales.

- Historia de México y universal, teoría de la historia, geografía física y económica, demografía, teorías sociológicas, económicas, políticas y filosóficas, autores, conceptos, cronología.

Matemáticas.

- *Aritmética*: conjuntos numéricos, propiedades, relaciones, operaciones.
- *Álgebra*: monomios y polinomios, ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones, ecuaciones de segundo grado.
- *Geometría*: clasificación de ángulos, triángulos y polígonos, teorema de Pitágoras, semejanza.
- *Trigonometría*: funciones trigonométricas, relaciones.

- *Geometría analítica*: plano cartesiano, recta, circunferencia, parábola, elipse.
- Pre-cálculo: números reales, desigualdades, función, límite.
- Estadística: población y muestra, media, mediana y moda, desviación estándar, probabilidad elemental, permutaciones y combinaciones.

Español

- Vocabulario, sinónimos y antónimos, sintaxis, verbo y adverbio, preposiciones y conjunciones, ortografía, acentuación, concordancia de género y número, comprensión y análisis de textos, formas y corrientes literarias, poesía y prosa, autores, música de concierto, obras y compositores, pintura.

El EXANI II posee un banco de reactivos clasificados por sección y tema, con los datos de su nivel taxonómico, grado de dificultad y relación discriminativa. Cada versión del EXANI II se integra con reactivos que no hayan sido utilizados en versiones recientes y de manera que su grado de dificultad sea equivalente a las anteriores. Entre 10% y 15% del examen está formado por reactivos nuevos que se pilotean y no se toman en cuenta para la calificación de los sustentantes. Si el desempeño en tales reactivos está dentro de los criterios establecidos, se integran al banco, si no es así, se desechan o se modifican para volver a ser piloteados en versiones futuras.

El Examen Nacional de Ingreso a la Educación Superior (EXANI-II) fue creado y diseñado en lo fundamental por la Coordinación Nacional para la Planeación de la Educación Superior (CONPES).

Se estructura y elabora en el CENEVAL, con base en las normas, políticas y criterios que establece su Consejo Técnico, el cual está integrado por académicos e investigadores de reconocido prestigio en los ámbitos de la educación y la evaluación del aprendizaje escolar, representantes de instituciones de educación superior de alcance nacional y representantes de los órganos gubernamentales encargados de los asuntos educativos de los estados.

EXANI II tiene criterios de calificación unívocos y precisos, lo cual permite realizar procesos de calificación rápidos y confiables por medio de sistemas automatizados; ello es indispensable cuando se requiere evaluar a decenas de miles de sustentantes y ofrecer resultados rápidamente. Además exigen del sustentante su máximo rendimiento en la

tarea o tareas que se le piden que ejecute, contiene reactivos de diferentes grados de dificultad y tienen un tiempo límite suficiente para poder contestar el instrumento en su totalidad.
Son exámenes de opción múltiple, es decir, cada pregunta se acompaña de cinco opciones de respuesta, de las cuales sólo una es la respuesta correcta.

1.1.4. Razonamiento matemático

En lo particular, CENEVAL proporciona un temario para razonamiento matemático que se ejecuta en cada aplicación de EXANI II. En el siguiente esquema se muestra cada tema con su carga de reactivos correspondiente.

TEMAS	Reactivos	Nivel taxonómico
Algoritmos y propiedades	4 a 6	3 a 5
Cálculo	1 a 3	2 a 4
Clasificación y analogías	1 a 2	3 a 4
Deducción	1 a 2	3
Discernimiento	1 a 3	2 a 5
Gráficas	1 a 2	3 a 4
Identificación y comparación	3 a 4	2 a 3
Planteo y resolución	4 a 6	3 a 5
Total	20	

CARGA DE REACTIVOS

Los niveles taxonómicos de la habilidad cognoscitiva de carácter académico, según CENEVAL, son los siguientes:

NIVEL 1. Conocimiento. Este se re...ere a la capacidad de recuperar información: el sujeto percibe, identifica, reconoce o recuerda. Ejemplos de este nivel son los datos concretos, las definiciones, los hechos, las rutinas o procedimientos, convenciones, categorías, tendencias, criterios, principios y teorías.

NIVEL 2. Comprensión. En este nivel lo característico es la actividad del sujeto, en el sentido de que puede dar una respuesta original, con lo cual denota la capacidad de actuar por sí mismo, de abstraer, de explicar lo que ha aprendido. En este nivel se consideran tanto la capacidad de expresarse con las propias palabras como la traducción, la interpretación, la interpolación y la extrapolación.

NIVEL 3. Aplicación. En este tercer nivel se considera la capacidad que el sujeto demuestra para aplicar o ejecutar lo aprendido. Son características de este nivel el planteo y resolución de problemas con base en la aplicación de procedimientos o algoritmos.

NIVEL 4. Análisis. Este nivel implica la capacidad del individuo para identificar y descomponer los elementos y relaciones que configuran lo aprendido, es decir, distinguir componentes y su concatenación.

NIVEL 5. Síntesis. Aquí se agrupan las situaciones que demandan del sujeto la capacidad para proponer algo en forma original, para coordinar, integrar, combinar o reestructurar. Requiere la capacidad para relacionar y organizar de manera diferente, personal, nueva.

NIVEL 6. Evaluación o valoración. En este nivel el sujeto debe mostrar un juicio de valor respecto a hechos, propuestas, argumentos, situaciones, proyectos, conocimientos.

1.1.5. Reactivos

Los cuestionamientos propuestos en EXANI II, corresponden a la estructura de lo que se denomina reactivo de opción múltiple, los cuales se conforman por:

- La base, que es el enunciado que presenta la situación, caso o problema planteado explícita o implícitamente en una pregunta, afirmación o enunciado incompleto.

- Las opciones, se entienden como las posibles respuestas, entre las cuales una responde correctamente al enunciado o pregunta y las otras son respuestas incorrectas llamadas distractores.

Para elaborar un reactivo CENEVAL sugiere:

- En cuanto a su escritura:

    - El lenguaje usado en la redacción de un problema debe ser apropiado para la materia que cubre, particularmente en los que se refiere al vocabulario técnico.
    - La redacción debe ser clara y sencilla. El problema no debe medir habilidad para comprender estructuras gramaticales complejas, excepto cuando se está midiendo esta habilidad en particular.
    - La gramática debe verificarse en todo momento. Particularmente, evitar errores gramaticales de puntuación y de ortografía, así como abreviaturas.
    - El uso complicado de gerundios, participios, artículos y preposiciones debe evitarse. La complejidad del problema no dependerá de la redacción sino del nivel taxonómico para el cual fue diseñado el reactivo.
    - En lo posible, habrá que favorecer el empleo de conceptos conocidos en lugar de sinónimos o vocabulario rebuscado. Permitiendo la comprensión del enunciado.
    - Los artículos o preposiciones que acompañan a los sustantivos deberán formar parte de la base. Si no son iguales para todas las opciones, deben ser colocados en cada una de ellas.
    - Habrá que considerar el tiempo de lectura por reactivo, utilice la información necesaria pero suficiente, para minimizar el tiempo.
    - No elabore reactivos que evalúen sólo el sentido común del sustentante. Es necesario también verificar su nivel conceptual así como el conocimiento previo.
    - Tome en cuenta el nivel escolar y el de maduración de los examinados.

- En cuanto al contenido:
    - Tome como referencia la tabla de especificaciones.
    - Elabore reactivos con base en los aprendizajes importantes y significativos de la asignatura.

- Evite aumentar la dificultad, esto es, no elija estímulos oscuros y menos significativos del conocimiento.
- Incluya una sola idea al elaborar el reactivo.
- Evite evaluar conceptos de manera textual.
- Evite evaluar contenidos intrascendentes o triviales.
- No emplee preguntas capciosas.
- Los reactivos que evalúan comprensión siempre deben ser originales para evitar respuestas aprendidas de memoria.
- En la mayoría de los casos el problema debe contener sólo el material relevante a su solución. Esta regla no rige aquellos casos en los que se quiere determinar si el alumno puede evaluar la relevancia de ciertos datos.
- Cada reactivo debe ser independiente uno de otro, sin que la información contenida en uno sugiera la solución de otro; debe ser lo suficientemente diferente de cualquier otro reactivo, sin traslaparse en contenido.

1.1.6. Evaluación CENEVAL

La escala de calificación en EXANI II, se basa en puntajes donde la máxima calificación posible corresponde a 1300 puntos y la mínima a 700 puntos.

La información del siguiente cuadro ejemplifica la información respecto al resultado que CENEVAL envía una vez aplicado el examen.

Nombre:	**Alumno 42**
Lugar que ocupó en la aplicación de Pre – EXANI II en Bachilleres "Experimental":	**10**
Calificación global:	**976** Puntuación más alta obtenida por un aspirante: 1045 Puntuación más baja obtenida por un aspirante: 780

Razonamiento verbal:	**1122** Puntuación más alta obtenida por un aspirante: 1122 Puntuación más baja obtenida por un aspirante: 789
Razonamiento matemático:	**1086** Puntuación más alta obtenida por un aspirante: 1128 Puntuación más baja obtenida por un aspirante: 807
Mundo contemporáneo:	**973** Puntuación más alta obtenida por un aspirante: 1191 Puntuación más baja obtenida por un aspirante: 782
Ciencias naturales:	**950** Puntuación más alta obtenida por un aspirante: 1175 Puntuación más baja obtenida por un aspirante: 775
Ciencias sociales:	**875** Puntuación más alta obtenida por un aspirante: 1000 Puntuación más baja obtenida por un aspirante: 750

Matemáticas:	**850** Puntuación más alta obtenida por un aspirante: 1200 Puntuación más baja obtenida por un aspirante: 700
Español:	**935** Puntuación más alta obtenida por un aspirante: 1091 Puntuación más baja obtenida por un aspirante: 700

RESULTADOS CENEVAL

1.2. Metodología

1.2.1. Cómo plantear y resolver problemas

La heurística o ars inveniendi tenía por objeto el estudio de las reglas y de los métodos de descubrimiento y de la invención. La heurística moderna, inaugurada por Polya con la publicación de su obra *How to solve it* (Polya, 1945), trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones típicamente útiles en este proceso. Polya no definió lo que entendía por problema cuando escribió su libro en 1945. Sin embargo, en su libro Mathematical Discovery (Polya, 1961), se vio obligado a proporcionar una definición. Pero no para empezar su disertación, sino en el capítulo 5, y después de una amplia exposición práctica sobre algunos procesos que intervienen en la resolución de problemas: Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.

Otra definición, parecida a la de Polya es la de Krulik y Rudnik: Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cuál no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma (Krulik y Rudnik, 1980).

De ambas definiciones se infiere que un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes:

1. Aceptación. El individuo o grupo, debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas como internas.

2. Bloqueo. Los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan.

3. Exploración. El compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

Para George Polya (1945), la resolución de un problema consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases bien definidas:

Comprender el problema.

¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?

Concebir un plan.

¿Se ha encontrado con un problema semejante?
¿Conoce un problema relacionado con este?
¿Podría enunciar el problema de otra forma?
¿Ha empleado todos los datos?

Ejecutar el plan.

¿Son correctos los pasos dados?

Examinar la solución obtenida.

¿Puede verificar el resultado?
¿Puede verificar el razonamiento?

Las fases anteriores caracterizan claramente al resolutor ideal, competente. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas, al puro estilo socrático, cuya intención clara es actuar como guía para la acción. Los trabajos de Polya, se pueden considerar por lo tanto, como un intento de describir la manera de actuar de un resolutor ideal.

Una pregunta, ¿por qué es tan difícil entonces, para la mayoría de los humanos, la resolución de problemas en matemáticas? Los trabajos de Schoenfeld (1985), son por otro lado, la búsqueda inagotable de explicaciones para la conducta de los resolutores reales de problemas.

Propone un marco con cuatro componentes que sirva para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas.

- Recursos cognitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor.
- Heurísticas: reglas para progresar en situaciones dificultosas.
- Control: Aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles.
- Sistema de creencias: Nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y como trabajar en ella.

Cada uno de tales componentes explica las carencias, y por lo tanto, el poco éxito en la resolución de problemas de los resolutores reales. Así, cuando a pesar de conocer las heurísticas no se sabe cuál utilizar o cómo utilizarla se señala la ausencia de un buen control o gestor de los recursos disponibles.

Pero las heurísticas y un buen control no son suficientes, pues puede que el resolutor no conozca un hecho, algoritmo o procedimiento específico del dominio matemático del problema en cuestión. En este caso se señala la carencia de recursos cognitivos como explicación al intento fallido en la resolución.

1.2.2. Leer, comprender, plantear y resolver / elegir

Para los fines de este material se ha establecido un mecanismo similar al que propuso Polya, en el cual se describe un proceso que únicamente difiere con el anteriormente expuesto en que aquí los problemas serán reactivos de opción múltiple. Esto último indica que es posible no resolver sino hallar, mediante la elección, la respuesta correcta a cada caso.

Etapa 1. Leer. En esta etapa se intenta hacer énfasis en que la lectura correcta del problema acarrea beneficios en la solución del mismo. Hay que resaltar los signos de puntuación, comas, puntos, etc., así como la ortografía ya que omitir alguno de esos detalles puede originar un resultado incorrecto.

Etapa 2. Comprender. Consiste en analizar el enunciado a detalle, se sugiere responder preguntas como:

¿Qué estoy buscando?,

¿Qué características tiene lo que busco?,

¿Es un número?,

¿Una frase?,

¿Un entero o fracción?,

¿Una expresión algebraica?

Con el objetivo de idear algún plan de solución.

Etapa 3. Plantear. Para esta etapa es necesario haber decidido algún mecanismo de solución. En general se presentan dos tipos de procesos, el primero parte de plantear mediante el uso de matemáticas, y el segundo en virtud de la habilidad o razonamiento matemático. El más usual es el segundo puesto que es posible hallar la solución correcta dibujando, esquematizando, o simplemente pensando en la solución, esquivando las “terribles” matemáticas.

Etapa 4. Resolver / elegir. El mecanismo que resuelve lo hace una vez que se ha planteado el problema mediante alguna ecuación, algún gráfico, o en general, mediante algún recurso matemático.

Por otra parte, el mecanismo que elige es más sencillo en su aplicación ya que permite partir de las opciones múltiples para llegar a la respuesta correcta. Esto significa que es posible agotar cada inciso mediante la pregunta:

¿Qué pasa si la respuesta es. . . ?

Así sucesivamente hasta determinar la respuesta.

Cada uno de los métodos requiere que se ejecuten con todo detalle las etapas preliminares puesto que de ello dependerá el éxito en la solución del problema.

A continuación se mostrarán las etapas recién propuestas para resolver problemas, aplicadas a casos específicos.

Los ejemplos que se analizarán presentan en mayor grado dificultad para la ejecución de cada una de las etapas, es por ello que se escogieron para describir su solución en virtud de las etapas anteriores. Además serán problemas consecutivos y que aparecen en la misma aplicación de algún examen, intentando verificar el proceso mediante la comparación de los enunciados propuestos.

EJEMPLO

EJEMPLO 1	EJEMPLO 2
¿Cuánto es la mitad de cuatro elevado al doble de tres, menos la raíz cúbica de ciento veinticinco? a)2043 b)2048 c)4096 d)2034 e)2096	¿Cuánto es la mitad de cuatro, elevado al doble de tres, menos la raíz cúbica de ciento veinticinco? a) 59 b) 95 c)2048 d) 69 e) 13

Etapa 1. **Leer**.

La pregunta que se plantea en cada caso es casi idéntica, sin embargo, aparece "," después de "cuatro" en el segundo ejemplo, lo cual acarrea cambios radicales en la lectura del enunciado y en la solución del mismo. La herramienta que permite ejecutar de manera correcta esta etapa dice que después de coma detendremos un momento la lectura. Además debemos pensar de quién estamos hablando.	
EJEMPLO 1	**EJEMPLO 2**
No hay coma. En la lectura debemos referirnos a: "la mitad de ***cuatro elevado al doble de tres,…"***	Hay coma. En la lectura debemos referirnos a: "la mitad de ***cuatro***,…"

Etapa 2. **Comprender**.

¿Qué estamos buscando? Un número que corresponde a la frase "cuánto es…" *¿Qué características tiene lo que buscamos?* Es un número. Positivo puesto que las cinco opciones lo son. El número buscado debe satisfacer varias condiciones.	
EJEMPLO 1	**EJEMPLO 2**
Condición 1. La mitad… **Condición 2. Cuatro elevado al doble de tres…** Condición 3. La raíz cúbica de 125…	**Condición 1. La mitad de cuatro…** **Condición 2. Elevado al doble de tres…** Condición 3. La raíz cúbica de 125…
Lo expuesto anteriormente permite decidir por un planteamiento matemático para determinar la solución de cada caso. El detalle de la etapa 1 permitirá diferenciar los ejemplos propuestos.	

Etapa 3. **Plantear.**

EJEMPLO 1	EJEMPLO 2
¿Cuánto es la mitad de cuatro elevado al doble de tres, menos la raíz cúbica de ciento veinticinco?	¿Cuánto es la mitad de cuatro, elevado al doble de tres, menos la raíz cúbica de ciento veinticinco?
Planteamiento $\frac{(4)^6}{2} - \sqrt[3]{125}$	Planteamiento $\left(\frac{4}{2}\right)^6 - \sqrt[3]{125}$

Etapa 4. **Resolver**.

EJEMPLO 1	EJEMPLO 2
¿Cuánto es la mitad de cuatro elevado al doble de tres, menos la raíz cúbica de ciento veinticinco?	¿Cuánto es la mitad de cuatro, elevado al doble de tres, menos la raíz cúbica de ciento veinticinco?
Solución $\frac{(4)^6}{2} - \sqrt[3]{125}$ $= \frac{4096}{2} - 5$ $= 2048 - 5$ $= 2043$	Solución $\left(\frac{4}{2}\right)^6 - \sqrt[3]{125}$ $= (2)^6 - 5$ $= 64 - 5$ $= 59$

El diseño de las etapas propuestas corresponde a las necesidades establecidas en exámenes de opción múltiple, y su ejecución correcta trae consigo beneficios en la solución general de este tipo de pruebas. El entrenamiento en este tipo de situaciones debe alcanzar niveles óptimos una vez que se haya resuelto totalmente Problemas para Razonamiento Matemático.

Es importante mencionar que alguno de los ejemplos utilizados para aplicar las etapas de solución no debería aparecer, en un examen, con 59 y 2043 como opciones de respuesta, dado que los criterios de CENEVAL para un reactivo indican que la respuesta debe ser única, además de que el problema debe representar su grado de dificultad en su base. De aparecer las dos respuestas para el mismo reactivo complicaría su solución en virtud de saber si la etapa de lectura se desarrollo de manera correcta. Así, con uno sólo de los resultados se confirmaría o se desmentiría la etapa inicial propuesta, generando una solución correcta.

1.3. Desarrollo de la propuesta

1.3.1. Descripción del instrumento

Problemas para Razonamiento Matemático. Ingreso al Nivel Superior está diseñado de tal manera que su similitud respecto a los reactivos que aparecen en EXANI II permite mejorar el rendimiento académico de un estudiante preuniversitario. La similitud se basa en la información presentada anteriormente en cuanto a temas propuestos para la sección de razonamiento matemático, y en cuanto a la elaboración de reactivos con criterios de CENEVAL.

Dicho material presenta 160 reactivos de opción múltiple. El objetivo es que, mediante la práctica, se desarrolle un mecanismo que permita determinar solución correcta a situaciones matemáticas del nivel medio superior. Los problemas propuestos han sido cuidadosamente seleccionados para no superar dicho nivel. Además las respuestas que se presentan también han sido analizadas con tal de no utilizar conceptos o herramientas matemáticas de grado superior al requerido en el bachillerato.

El orden temático propuesto en el documento se debe al diseño que CENEVAL propone en sus exámenes. Si bien los temas propuestos parecen no ser similares, mucho menos idénticos a los originales, el objetivo es alcanzar a cubrirlos en la sección de habilidad matemática, una vez que se ha practicado lo suficiente con problemas de ejecución simple, es decir, problemas con ecuaciones lineales, con ecuaciones cuadráticas y con geometría.

Los problemas que aparecen en el instrumento han sido piloteados en poblaciones de diferente grado dentro de nivel bachillerato. Los resultados de su aplicación han sido tales que el grado de dificultad de cada reactivo es adecuado para el nivel, según el nivel de razonamiento empleado para su solución y el nivel taxonómico propuesto por CENEVAL para los EXANI II.

1.3.2. Taller de razonamiento matemático

La aplicación del *Problemas para Razonamiento Matemático. Ingreso al nivel Superior* consistió en implementar un curso donde se expusieran y analizaran el total de los reactivos propuestos en el documento, verificando la utilidad del mismo mediante el resultado que los aspirantes obtengan en la prueba denominada EXANI II.

El taller se ejecutó con el alumnado de la Escuela de Bachilleres "Experimental", en la generación 2004 – 2005, explorando el material en sesiones de dos horas de duración, y se verificó mediante el examen correspondiente al ingreso, en las escuelas de nivel superior de la localidad, Universidad Veracruzana, Escuela Normal y Tecnológico de Xalapa. En las dos primeras se aplica EXANI II y en la tercera el examen propuesto por COSNET.

Cabe resaltar que en los últimos años el porcentaje de ingreso de Bachilleres "Experimental" al nivel superior era de aproximadamente el 20%, por lo que la meta que se fijó para satisfacer las necesidades escolares fue el 60%.

El proceso que se siguió para alcanzar la meta consistió en los siguientes puntos:

- 30 sesiones fuera del horario normal de clases, de dos horas de duración, para abordar los problemas recopilados.
- Aplicación de 6 exámenes de diagnóstico. 3 de ellos únicamente en la sección de razonamiento matemático.
- Aplicación de Pre – EXANI II.
- Solución de guías de ingreso al nivel universitario en las secciones de Matemáticas y Razonamiento Matemático. UNAM, CENEVAL, UAEP.

2. Problemas para Razonamiento Matemático

En este capítulo se presentan cerca de 160 ejercicios que fueron empleados en el instrumento para incrementar el índice de ingreso al nivel superior de la Escuela Bachilleres "Experimental". Se resolvieron la mitad de los ejercicios, tal cual se presenta en este capítulo, mientras que el resto de ellos se propusieron para su solución individual.

2.1. Razonamiento Matemático

Definiremos una situación problemática como un espacio de interrogantes que posibilite, tanto la conceptualización como la simbolización y aplicación significativa de los conceptos para plantear y resolver problemas de tipo matemático.

En lo sucesivo aparecerán diversas cuestiones que intentan desarrollar habilidades de lectura, comprensión, planteamiento y elección – solución, mediante situaciones que tienen alguna relación con las matemáticas.

Los mecanismos para resolver son muy diversos. Prácticamente todos los problemas encuentran solución mediante procedimientos matemáticos, sin embargo, los requisitos pueden no ser del nivel medio superior, por lo cual se ha presentado una solución idónea para el nivel preuniversitario. En particular, en algunos casos procederemos mediante las posibles respuestas, eligiendo e intentando mostrar, mediante diversos argumentos, si es o no correcta la respuesta elegida.

Por último se señala que este material tiene un diseño basado en problemas resueltos y problemas propuestos. Una vez expuestos los primeros, el estudiante debe tener la habilidad para hallar solución a los segundos. Es inútil el desarrollo de habilidades sin al menos intentar cada uno de los problemas que aparecen en la sección de problemas propuestos.

2.2. PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON ECUACIONES LINEALES.

2.2.1. Problemas sin opción múltiple

1. Un número es equivalente al cuádruplo de otro y la suma de ellos es 80. Halle ambos números.

Solución:

El problema consiste en hallar un par de números que tienen una relación numérica entre sí. Como ambos números son desconocidos asignaremos variables cualesquiera para proceder.

Sean x y y el par de números buscados.

El enunciado, "la suma de ambos es 80", implica necesariamente la ecuación $x + y = 80$.

Sin embargo, el problema en su primer enunciado define que "un número es igual al cuádruplo de otro". Así, deberíamos entender que el cuádruplo de y es 4 veces y, en otros términos, $4y$. Volviendo al enunciado del problema se genera la ecuación $x = 4y$.

El proceso que ha concluido hasta el momento ha sido el de la lectura – comprensión. Enseguida, en virtud de las ecuaciones generadas, procederemos a plantear el problema.

"Un número es igual al cuádruplo de otro" implica que $x = 4y$ y "la suma de ambos es 80" implica la ecuación $x + y = 80$.

Ahora bien, para hallar los números tendremos que ejecutar algún proceso algebraico. La sugerencia es sustituir el valor de la variable x, en la ecuación $x + y = 80$, para luego despejar la variable y, es decir,

$$x + y = 80$$

$$4y + y = 80$$

$$5y = 80$$

$$y = \frac{80}{5}$$

$$y = 16$$

El proceso ha determinado el valor $y = 16$, sin embargo resta encontrar el valor de x, puesto que son los números buscados. De manera sencilla se puede sustituir el valor de y en la ecuación $x = 4y$, esto es,

$$x = 4(16)$$

$$x = 64$$

Evidentemente la suma de ambos números corresponde a 80, y el primero, 64, es el cuádruplo del segundo, 16. Por lo tanto, los números buscados son 64 y 16.

2. Raúl tiene 14 años menos que David y ambas edades suman 56 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

Solución:

El problema deberá concluir una vez que se determinen las edades de los dos individuos en cuestión. Para comenzar debemos asignar variables algebraicas a cada uno de ellos.

Sean r la edad de Raúl y d la edad de David.

En el enunciado es necesario comprender que David es mayor de edad que Raúl. De hecho que su diferencia de edades es 14 años. Así, en un ejemplo numérico, si David tiene 24 años entonces Raúl debe tener 10 años.

Por otra parte, la suma de las edades de Raúl y David debe ser 56.

Ahora bien, para plantear el problema debemos establecer una relación entre las variables que corresponda a lo que se lee en el enunciado.

La primera oración del problema, "Raúl tiene 14 años menos que David", implica algebraicamente la ecuación $r+14=d$, o bien $r=d-14$. Además, "La suma de las edades es 56", genera la ecuación $r+d=56$.

Después de haber planteado el problema, se debe continuar con la solución del mismo. En este caso tenemos un par de ecuaciones lineales que se podrían representar, sustituyendo el valor de la variable d en la ecuación $r+d=56$, mediante $r+(r+14)=56$, que es la ecuación lineal a resolver.

Algebraicamente el proceso es simple, hay que despejar la variable única que aparece en la ecuación, es decir,

$$r+(r+14)=56$$

$$r+r+14=56$$

$$2r+14=56$$

$$2r=56-14$$

$$2r=42$$

$$r=\frac{42}{2}$$

$$r=21$$

Para terminar, habrá que sustituir el valor numérico de la variable r en la ecuación $r+14=d$, la cual generará el valor de la variable d que corresponde a la edad de David. El proceso es el siguiente:

$$r+14=d$$

$21+14=d$

$35=d$

Según la asignación de variables propuesta, la edad de Raúl es 21 años y la edad de David es 35 años. Es importante verificar que las condiciones del problema se cumplan, en este caso es evidente que la suma de ambas edades es 56 años, y que Raúl es 14 años menor que David.

3. Un número es más grande que otro en 7 unidades. El doble del mayor excede al triple del menor en 2. Hallar ambos números.

Solución:

En este caso la solución del problema es un poco más complicada. Lo leído indica que debemos hallar un par de números, que llamaremos a y b, en donde uno de ellos es mayor que el otro.

Sea a el mayor de los números buscados y b el menor de ellos.

La lectura permite determinar que el mayor de los números lo es en 7 unidades. Para comprender esa frase, es conveniente ejemplificar numéricamente. Si el mayor de los números es 10 entonces el menor de ellos debe ser 3, puesto que el mayor es "más grande" en 7 unidades.

En términos algebraicos podríamos decir que $a=b+7$ o bien que $a-7=b$, ambas ecuaciones son equivalentes según el ejemplo anterior.

La dificultad del problema consiste en comprender el segundo enunciado. Recordemos que a es el mayor de los números y b el menor. Así, el doble del mayor, $2a$, excede o es más grande que el triple del menor, $3b$, en 2 unidades. Esto, en términos algebraicos, representa que $2a-2=3b$ o bien que $2a=3b+2$.

Podemos plantear entonces el problema a partir de un par de ecuaciones, que serían $a=b+7$ y $2a-2=3b$.

Para hallar los números debemos, de la misma forma que en los casos anteriores, sustituir el valor de la variable a en la segunda ecuación $2a-2=3b$, esto es,

$2a-2=3b$

$2(b+7)-2=3b$

$2b+14-2=3b$

$12=3b-2b$

$12=b$

Para determinar el valor de a, debemos trabajar con la ecuación $a=b+7$, sustituyendo el valor numérico que hemos encontrado, es decir,

$a=b+7$

$a=12+7$

$a=19$

Los números buscados son 19 y 12.

El primero es mayor que el segundo en 7 unidades. Además el doble del mayor, 38, excede o es más grande, que el triple del menor, 36, en 2 unidades, lo cual se observa de manera clara.

4. Hallar tres números enteros consecutivos, cuya suma sea 204.

Solución:

Para resolver este problema es importante recordar que números enteros son todos aquellos de la colección $Z=\{-\infty,\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots,\infty\}$.

Por otra parte, debemos hallar tres números de dicha colección que cuenten con la característica de ser consecutivos. Ejemplificando, tendríamos que un número entero consecutivo a 3 sería 4, consecutivo a 10 sería 11, consecutivo a 533 sería 534. Sin embargo, ¿cuál sería un número entero consecutivo a –10? Según el orden establecido, si pensamos en –11 entonces se generaría un error. Observemos que el consecutivo siempre se encuentra a la "derecha", pensando en la recta numérica. Esto significa que el entero consecutivo a –10 es –9, de la misma forma, el consecutivo a –533 es –532.

Una vez que se ha comprendido el concepto de número entero consecutivo procederemos a plantear algebraicamente.

Sea x el primer número entero. Así para generar el siguiente debemos agregar la unidad, es decir, si el número consecutivo a 14 es 14 + 1 entonces el número entero consecutivo a x sería $x+1$. De la misma forma, el consecutivo a $x+1$, sería $x+2$.

Esto implica que x, $x+1$, $x+2$, son números enteros consecutivos.

Recordando el enunciado inicial, la suma de x, $x+1$, $x+2$, debe ser igual a 204, lo cual indica que la ecuación lineal que se deberá resolver es $x+(x+1)+(x+2)=204$.

El proceso algebraico se indica en seguida.

$$x+(x+1)+(x+2)=204$$

$$x+x+1+x+2=204$$

$$3x+3=204$$

$$3x=204-3$$

$$3x=201$$

$$x=\frac{201}{3}$$

$$x=67$$

Los tres números buscados serían 67, 68 y 69. La suma de ellos corresponde a 204, como se exigen en el problema y evidentemente son números enteros consecutivos.

2.2.2 Problemas con opción múltiple.

En esta sección se presentarán cinco opciones de respuesta para cada caso, tal y como aparecerán en la mayoría de los exámenes de selección al nivel superior. En algunos casos se partirá de las soluciones para determinar cuál es la correcta. Debemos observar lo conveniente que puede ser resolver un problema en virtud de sus soluciones.

5. Diana tiene 6 monedas más de 25 centavos que de 10 centavos. Si Diana junta el total de monedas obtiene \$ 9.20, ¿cuántas monedas tiene de cada clase?

a) 22 monedas de 10 centavos y 28 de 25 centavos
b) 22 monedas de 25 centavos y 28 de 10 centavos
c) 25 monedas de 10 centavos y 10 de 25 centavos
d) 28 monedas de 10 centavos y 22 de 15 centavos
e) 20 monedas de 10 centavos y 26 de 25 centavos

Solución:

En este caso hablamos de un par de monedas que definiremos en seguida. Sea x el número de monedas de 10 centavos, así $x+6$, será el número de monedas de 25 centavos, puesto que Diana tiene 6 más de 25 centavos que de 10.

Ahora bien, en el enunciado, la cantidad económica que Diana tiene, $ 9.20 (o bien 920 centavos), se obtiene a partir de la suma del total de monedas, esto es, $10(x)+25(x+6)=920$.

El planteamiento del problema corresponde a la ecuación $10(x)+25(x+6)=920$, que se resuelve mediante el siguiente proceso algebraico.

$10x+25x+150=920$

$35x+150=920$

$35x=920-150$

$35x=770$

$x=\frac{770}{35}$

$x=22$

Lo que hallamos es el número de monedas de 10 centavos que Diana tiene. Ahora como $x+6$ es el número de monedas de 25 centavos, entonces se deduce dicho número sustituyendo, esto es,

$x+6=22+6=28$

Por lo tanto Diana tiene 22 monedas de 10 centavos, y 28 monedas de 25 centavos.

Es claro que hay 6 monedas más de 25 centavos que de 10 centavos y que 22 monedas de 10 centavos hacen $ 2.2, mientras que 28 monedas de 25 centavos forman $ 7.0, lo cual suma la cantidad final de Diana $ 9.2.

6. Un entero supera en 4 a otro. Encuentre ambos si un cuarto del menor es igual a un quinto del mayor.

a) 16 y 12 b) 25 y 21 c) 20 y 16 d) 20 y 18 e) 24 y 20

Solución:

Sean a y b dos números enteros. Si uno supera a otro entonces podremos establecer que a es mayor que b. Así la frase "un entero supera en 4 a otro" representaría la ecuación $a-4=b$.

Por otra parte se lee que "un cuarto del menor", es decir, $\frac{1}{4}b$, es igual a "un quinto del mayor", esto es, $\frac{1}{5}a$. En términos algebraicos, podríamos establecer que $\frac{1}{4}b=\frac{1}{5}a$.

El par de ecuaciones que plantean el problema pueden ser $a-4=b$ y $\frac{b}{4}=\frac{a}{5}$. Ahora bien, el proceso para determinar las soluciones a este problema consiste en sustituir el valor de la variable b, en la igualdad $\frac{b}{4}=\frac{a}{5}$. En seguida el método.

$$\frac{b}{4}=\frac{a}{5}$$

$$\frac{a-4}{4}=\frac{a}{5}$$

$$5(a-4)=4a$$

$$5a-20=4a$$

$$5a-4a=20$$

$$a=20$$

Hemos determinado el valor del mayor de los números buscados. Para hallar el otro valor sustituiremos en $a-4=b$.

$$20-4=b$$

$$b=16$$

Por lo tanto los números buscados son 20 y 16, el primero supera en 4 al otro, y un cuarto del menor es igual a un quinto del mayor.

7. Isabel tiene actualmente la mitad de la edad de Olivia, y dentro de doce años tendrá $\frac{5}{6}$ de la que Olivia tenga entonces. ¿Cuáles son las edades actuales de Isabel y Olivia?

a) 3 y 6 años b) 6 y 3 años c) 4 y 7 años d) 5 y 8 años e) 12 y 15 años

Solución:

De manera similar a los casos anteriores definiremos las edades de Isabel y Olivia a partir de una variable.

Sea x la edad de Isabel. Luego, la edad de Olivia será $2x$, puesto que Isabel tiene la mitad de años respecto a Olivia.

Por su parte dentro de doce años dichas variables cambiarán por $x+12$ para Isabel, y $2x+12$ para Olivia.

Para plantear el problema correctamente habrá que considerar el dato que menciona "dentro de doce años, Isabel, tendrá $\frac{5}{6}$ de la edad de Olivia", así la igualdad que resulta es

$$x+12=\frac{5}{6}(2x+12),$$

Procederemos a la solución de dicha ecuación. Hallaremos el valor de x, que corresponde a la edad de Isabel.

$$x+12=\frac{5}{6}(2x+12)$$

$$x+12=\frac{10x+60}{6}$$

$$6x+72=10x+60$$

$72-60=10x+6x$

$12=4x$

$\frac{12}{4}=x$

$3=x$

Por lo tanto la edad de Isabel es 3 años, y la edad de Olivia corresponderá a 6 años puesto que Isabel tiene la mitad de años que Olivia. Debemos pues señalar como correcta la respuesta del inciso a.

8. La suma de la base y la altura de un triángulo es 28 pulgadas. Determinar el área del triángulo si su base es de 8 pulgadas menos que el doble de su altura.

a) 86 in^2 b) 126 in^2 c) 116 in^2 d) 106 in^2 e) 96 in^2

Solución:

En este caso la solución requiere saber la base del triángulo y su altura para después sustituir en la fórmula correspondiente al área.

Llamaremos a y b, altura y base respectivamente. La suma de a y b corresponde a 28, lo cual algebraicamente significa que $a+b=28$. Por otra parte, la base b, es 8 pulgadas menos que $2a$, lo cual genera la ecuación $b=2a-8$.

El proceso algebraico es similar a los casos anteriores.

$a+b=28$

$a+(2a-8)=28$

$a+2a-8=28$

$3a=28+8$

$3a=36$

$a=\frac{36}{3}$

$a = 12$

La base del triángulo se determina de la siguiente forma:

$b = 2a - 8$

$b = 2(12) - 8$

$b = 24 - 8$

$b = 16$

Por lo tanto, la altura del triángulo es 12 pulgadas y la base es igual a 16 pulgadas. Sin embargo el problema exige calcular el área, para lo cual recordaremos que $A = \frac{(16)(12)}{2} = 96$.

El área del triángulo es igual a 96 pulgadas cuadradas, debemos marcar la respuesta del inciso e.

9. La suma de las edades de tres personas es 88 años. La mayor tiene 20 años más que la menor y la de en medio 18 años menos que la mayor. Hallar las respectivas edades.

a) 44, 26, 24 b) 40, 22, 20 c) 42, 24, 22 d) 48, 20, 20 e) 46, 24, 18

Solución:

En este caso la solución es más complicada puesto que debemos hallar tres datos según el enunciado. Para plantear el problema definiremos las variables a, b, c, para las edades de las tres personas. Además dichas variables relacionan en orden al mayor, mediano y menor de edad respectivamente.

De la primera frase podemos escribir que $a + b + c = 88$. En seguida, “la mayor”, es decir, a, tiene 20 años más que la menor, lo cual significa que $c = a - 20$. Por último tenemos que la persona de en medio, es decir, b, tiene 18 años menos que la mayor, esto es, $b = a - 18$.

En la ecuación $a+b+c=88$ podemos sustituir el resto de las ecuaciones para generar $a+(a-18)+(a-20)=88$, que debemos solucionar para hallar la mayor de las edades.

$a+a-18+a-20=88$

$3a-38=88$

$3a=88+38$

$3a=126$

$a=\frac{126}{3}$

$a=42$.

La mayor de las personas tiene 42 años de edad, la de en medio, b, tiene $b=42-18$, que corresponde a 24 años, y por último la menor de las tres personas, que se representa con la letra c, tiene $c=42-20$, que corresponde a 22 años.

El inciso que responde correctamente este problema es el inciso c, donde las edades respectivas son 42, 24 y 22 años.

10. La suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180°. El mayor excede al menor en 35° y el menor excede en 20° a la diferencia entre el mayor y el mediano. Hallar los ángulos.

a) 80°, 35°, 65° b) 70°, 55°, 55° c) 80°, 55°, 45° d) 70°, 65°, 45° e) 70°, 45°, 150°

Solución:

Para este problema, relacionado con ecuaciones lineales, procederemos a responder a partir de las soluciones propuestas.

Supondremos que la respuesta correcta es la del inciso c. La siguiente tabla permite ilustrar de mejor manera el mecanismo.

Condición	Planteamiento numérico	
La suma de ángulos internos de un triángulo es 180°.	80 + 55 + 45 = 180	Se cumple

El mayor, 80, excede al menor, 45, en 35.	80 – 45 = 35 80 excede en 35 a 45	Se cumple
El menor excede en 20 a la diferencia entre 80 y 55.	80 – 55 = 25 45 excede en 20 a 25	Se cumple

Luego, dado que las tres condiciones del problema se satisfacen, debemos señalar como correcta la respuesta del inciso c.
En los incisos a, b, d, y e siempre la diferencia entre el mayor y el menor es diferente de 35° lo cual respalda la respuesta del inciso c.

2.3 PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON ECUACIONES CUADRÁTICAS.

En esta sección nos dedicaremos a plantear problemas mediante la ecuación general de segundo grado. Lo novedoso es interpretar las soluciones que se generan puesto que en cualquier caso hallaremos un par de ellas.

Para resolver, debemos generar una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y posteriormente determinar alguno de los métodos de solución para dicha ecuación.

11. La suma de dos números naturales es 17. La diferencia de sus cuadrados supera en 19 al producto de los números. Determine ambos números.
a) 12 y 5 b) 10 y 7 c) 9 y 8 d) 11 y 6 e) 13 y 4

Solución:
Definamos x, y como dos números naturales cualquiera. Como la suma de ellos es 17, sin más, podemos expresar tal situación mediante $x + y = 17$. La diferencia entre sus cuadrados, es decir, $x^2 - y^2$, supera en 19 al producto de los números, xy, lo cual queda expresado a partir de la ecuación $x^2 - y^2 = xy + 19$.
La igualdad anterior plantea el problema, el proceso algebraico se expone a continuación.

De la expresión $x+y=17$ podemos despejar una variable, $y=17-x$. Dicho despeje se deberá sustituir en la ecuación $x^2-y^2=xy+19$, esto es,

$$x^2-y^2=xy+19$$

$$x^2-(17-x)^2=x(17-x)+19$$

$$x^2-(289-34x+x^2)=17x-x^2+19$$

$$x^2-289+34x-x^2=17x-x^2+19$$

$$x^2+34x-x^2+x^2-17x=19+289$$

$$x^2+17x=308$$

$$x^2+17x-308=0$$

La última ecuación, $x^2+17x-308=0$, es la que plantea correctamente el problema. Ahora bien, para resolverla utilizaremos la fórmula general de segundo grado, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, en donde sustituiremos los valores $a=1, b=17, c=-308$, que corresponden a los coeficientes de la igualdad inicial.

$$x=\frac{-(17)\pm\sqrt{(17)^2-4(1)(-308)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-17\pm\sqrt{208+1232}}{2}$$

$$x=\frac{-17\pm\sqrt{1521}}{2}$$

$$x=\frac{-17\pm 39}{2}$$

$$x_1=\frac{-17+39}{2}=\frac{22}{2}=11 \qquad x_2=\frac{-17-39}{2}=\frac{-56}{2}=-28$$

Existen dos valores de x y debemos escoger sólo uno de ellos. Para ello recordemos que estamos en búsqueda de dos números naturales, es decir, mayores que cero, lo cual implica que habría que desechar $x_2 = -28$, puesto que no es un número natural.

Así, uno de los números es 11 y el otro se obtiene por sustitución en la igualdad $y = 17 - x$, generando el número 6.

Ambos números suman 17, y la diferencia de sus cuadrados, $11^2 - 6^2 = 121 - 36 = 85$, supera en 19 al producto de los números, $(11)(6) = 66$, lo cual se comprueba fácilmente. Debemos señalar como correcta la respuesta del inciso d.

12. La diferencia de las edades de Pedro y Jorge es 9. Pedro es el mayor y se sabe que la suma de los cuadrados de las edades es igual a 305. Hallar las edades de Pedro y Jorge.

a) 7 y 16 años b) 16 y 7 años c) 12 y 3 años d) 15 y 8 años e) 8 y 15 años

Solución:

Sea p la edad de Pedro y j la edad de Jorge, así $p - j = 9$. Se sabe además que Pedro es el mayor, por eso escribimos $p - j = 9$ y no $j - p = 9$ dado que obtendríamos una diferencia negativa.

Por otra parte el enunciado "la suma los cuadrados de las edades es 305", representa la igualdad $p^2 + j^2 = 305$.

Así, podemos sustituir el despeje $p = 9 + j$, de la siguiente forma:

$$p^2 + j^2 = 305$$

$$(9 + j)^2 + j^2 = 305$$

$$81 + 18j + j^2 + j^2 = 305$$

En seguida simplificaremos la ecuación hasta llegar a una del tipo $ax^2 + bx + c = 0$

$$81 + 18j + 2j^2 = 305$$

$$2j^2 + 18j + 81 - 305 = 0$$

$$2j^2 + 18j - 224 = 0$$

Esta ecuación puede simplificarse aún más dividiendo entre 2 cada término, generando la igualdad $j^2 + 9j - 112 = 0$, en donde $a = 1, b = 9, c = -112$.

Para resolver dicha ecuación utilizaremos nuevamente la fórmula general de segundo grado, $j = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, sustituyendo los valores que acabamos de definir.

$$j = \frac{-(9) \pm \sqrt{(9)^2 - 4(1)(-112)}}{2(1)} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 448}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-9 \pm 23}{2}$$

$$j_1 = \frac{-9 + 23}{2} = \frac{14}{2} = 7 \qquad\qquad j_2 = \frac{-9 - 23}{2} = \frac{-32}{2} = -16$$

Es importante señalar que la edad de Jorge no puede ser –16 años, por lo cual esa solución se descarta.

Por lo tanto la edad de Jorge es 7 años y la edad de Pedro, se obtiene por sustitución en la ecuación $p = 9 + j$, generando que Pedro tiene 16 años de edad.

Es importante señalar que las condiciones del problema se satisfacen, es decir, Pedro es mayor que Jorge en 7 años, y la suma de los cuadrados de los edades es 305, es decir, $16^2 + 7^2 = 305$.

Habrá que señalar como correcta la respuesta del inciso b.

13. Hallar tres números consecutivos tales que el cociente del mayor entre el menor equivale a 3/10 del número intermedio.

a) 5, 6, 7 b) 4, 5, 6, c) 6, 7, 8 d) 2, 3, 4 e) 1, 2, 3

Solución:

Según el problema 4, tres números consecutivos son $x, x+1, x+2$. Habrá que señalar que el mayor de ellos sería $x+2$, el intermedio $x+1$, y el menor x. Así, el cociente entre el mayor y el menor, es decir, $\frac{x+2}{x}$, es igual a tres décimos del intermedio, $\frac{3}{10}(x+1)$.

En términos algebraicos tendríamos la ecuación $\frac{x+2}{x}=\frac{3}{10}(x+1)$, que se transforma a una cuadrática mediante el siguiente proceso.

$$\frac{x+2}{x}=\frac{3x+3}{10}$$

$$10(x+2)=x(3x+3)$$

$$10x+20=3x^2+3x$$

$$0=3x^2+3x-10x-20$$

$$0=3x^2-7x-20$$

$$3x^2-7x-20=0$$

Utilizando la fórmula general definiendo $a=3, b=-7, c=-20$, se obtienen dos soluciones, a saber, $x_1=4$ y $x_2=\frac{-10}{12}$. Ahora, para elegir la adecuada debemos señalar que no existe un número consecutivo al propuesto en la fracción, mientras que por el contrario si lo hay para 4.

Por lo tanto los números buscados son 4, 5 y 6, que aparecen en el inciso b. Se verifica también que el cociente entre el mayor y el menor, $\frac{6}{4}$, equivale a $\frac{3}{10}(5)$, es decir, $\frac{6}{4}=\frac{15}{10}$, lo que asegura la solución como correcta.

14. Una persona compró cierto número de libros por $180. Si hubiera comprado seis libros menos por el mismo dinero entonces cada libro le habría costado $1 más. ¿Cuántos libros compró y cuánto le costó cada uno?

a) 63, $5 b) 5, $63 c) 5, $36 d) 36, $5 e) 32, $4

Solución:

Sea x el número de libros que compró la persona en cuestión. El costo de cada libro será $\frac{180}{x}$ puesto que de haber comprado 10 libros entonces cada uno de ellos le habría costado \$ 18.

Algebraicamente tendríamos que si hubiera comprado seis libros menos por el mismo dinero, $\frac{180}{x-6}$, entonces, cada libro le habría costado un peso más, $\frac{180}{x}+1$.

La ecuación que se genera, resolviendo la suma de fracciones $\frac{180}{x}+1$, es $\frac{180}{x-6}=\frac{180+x}{x}$, la cual debe reducirse hasta llegar a una de segundo grado.

$$x(180)=(x-6)(180+x)$$

$$180x=x^2+174x-1080$$

$$0=x^2+174x-180x-1080$$

$$0=x^2-6x-1080$$

$$x^2-6x-1080=0$$

En este caso utilizaremos el método por factorización para generar el resultado. Debemos hallar un par de números que multiplicados sean -1080 y sumados sean -6, esto es, $x^2-6x-1080=(x-36)(x+30)$.

Por lo tanto las dos soluciones que surgen, igualando a cero cada factor, son $x_1=36$ y $x_2=-30$. Sin embargo es imposible comprar -30 libros por lo que se debe descartar la segunda opción.

Así el número de libros comprado fue 36, y su costo, dividiendo 180 entre 36, es de \$ 5. Lo cual aparece en la respuesta del inciso d.

Debemos notar que la respuesta del inciso c es similar pero incorrecta. En ese caso se compraron 5 libros de 36 pesos, ¿qué pasaría si compramos seis libros menos? Es imposible comprar -1 libro por lo que la respuesta se descarta, quedando como única respuesta la del inciso d.

15. Una excursión costó \$ 300. Si hubieran ido 3 estudiantes menos entonces el costo por estudiante habría sido de \$ 5 más, ¿cuántos estudiantes fueron a la excursión?

a) 15 b) 16 c) 12 e) 14 f) 20

Solución:

Sea w el número de estudiantes que fueron a la excursión. Si suponemos que fueron 10 estudiantes entonces el costo para cada uno de ellos sería de \$ 30, en otros términos, $\frac{300}{w}$, sería el costo por estudiante en la excursión.

Por otra parte si hubieran ido 3 estudiantes menos, es decir, $w-3$, entonces el costo por estudiante, $\frac{300}{w-3}$, habría sido \$ 5 más, $\frac{300}{w}+5$.

Algebraicamente tendríamos la igualdad $\frac{300}{w-3}=\frac{300+5w}{w}$ que se justifica resolviendo la suma de fracciones indicada.

Ahora bien, el proceso para determinar el valor de la variable es idéntico a los casos anteriores.

$$\frac{300}{w-3}=\frac{300+5w}{w}$$

$$300w=(w-3)(300+5w)$$

$$300w=5w^2+285w-900$$

$$0=5w^2+285w-300w-900$$

$$0=5w^2-15w-900$$

$$5w^2-15w-900=0$$

Esta última ecuación puede simplificarse dividiendo entre 5 cada término, resultando $w^2-3w-180=0$

Utilizando el método por factorización, la expresión $w^2-3w-180=(w-15)(w+12)$, lo cual genera el par de soluciones correspondientes a la ecuación de segundo grado, $w_1=15$ y $w_2=-12$.

La interpretación de ambas soluciones diría que no es posible que vayan –12 estudiantes a la excursión.

Por lo tanto el número de estudiantes es de 15, de hecho cada uno paga un total de $20. La respuesta correcta es la del inciso a.

16. Un caballo costó cuatro veces lo que sus arreos y la suma de los cuadrados del precio del caballo y el precio de los arreos es $ 860625. ¿Cuánto costó el caballo y cuánto los arreos?

a) C $900, A $225 b) C $720, A $180 c) C $860, A $215 d) C$1400, A$350 e) C $225, A $900

Solución:

Para el último caso relacionado con las ecuaciones cuadráticas utilizaremos las respuestas para determinar cuál es la correcta.

Supongamos que la respuesta correcta es la del inciso a. Así el caballo costaría $ 900 y los arreos $ 225.

La siguiente tabla permitirá demostrar si es o no correcta la respuesta del inciso a.

Condición	Planteamiento numérico	
El caballo cuesta cuatro veces lo que sus arreos	(4)(225) = 900	Se cumple
La suma de sus cuadrados es $ 860625	$(900)^2 + (225)^2$ = 810000 + 50625 860625	Se cumple

Como ambas condiciones se satisfacen podemos estar seguros que la respuesta es la del inciso a.

Sin embargo la respuesta del inciso e, parece tener la misma información, veamos mediante el mismo mecanismo si se cumplen las hipótesis del problema.

En la respuesta del inciso e, el caballo cuesta $ 225 y sus arreos cuestan $ 900

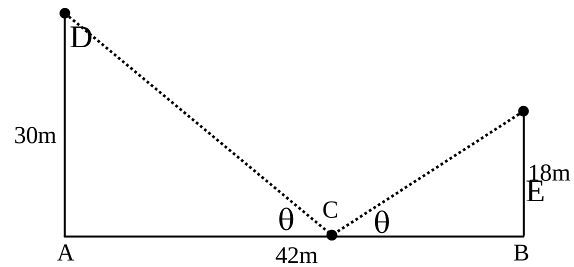
Condición	Planteamiento numérico	
El caballo cuesta cuatro veces lo que sus arreos	$(4)(900) = 225$ Error $(4)(900) = 3600$	No se cumple
La suma de sus cuadrados es $ 860625	$(900)^2 + (225)^2 = 810000 + 50625$ 860625	Se cumple

Luego de la información presentada en las tablas se tiene que la respuesta correcta es la del inciso a. Recordemos que la respuesta es única, lo que indica que una vez que se encontró la correcta puede detenerse la búsqueda.

2.4 PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON GEOMETRÍA.

Para los casos geométricos es fundamental lograr un esquema de la situación. En caso que éste se presente como parte del problema habrá que observar detenidamente y aceptar como cierta cualquier inferencia que se haga sobre el dibujo. Las aplicaciones que son frecuentes para solucionar estos casos se relacionan con conceptos básicos como el teorema de Pitágoras, semejanza de triángulos, etc.

17. En la figura se muestran dos torres, A y B, la separación entre ambas es de 42 m. Ambas tienen un reflector que les permite buscar a los presidiarios cuando se fugan. Si un presidiario es localizado en la línea que une las torres. ¿Qué distancia habrá de la torre B al punto donde fue localizado, para que los triángulos sean semejantes?



a) 15.8 m b) 18.0 m c) 21.0 m d) 26.2 m e) 30.0 m

Solución:

En este caso la figura y las soluciones serán muy útiles para definir la situación de manera correcta. El triángulo DAC es rectángulo y de la misma manera lo es el triángulo EBC. Además los mismos triángulos comparten un ángulo en C, que tiene la misma medida.

Lo que hemos demostrado hasta el momento es que los triángulos tienen dos ángulos iguales, lo cual asegura que son semejantes.

Por su parte podemos establecer una relación entre sus lados, de tal forma que si Δ DAC $\cong$ Δ EBC entonces $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{EC}$.

Observando la figura es posible determinar que el segmento AD mide 30 metros, es decir, la altura de la torre A, y que el segmento BE mide 18 metros, altura de la torre B.

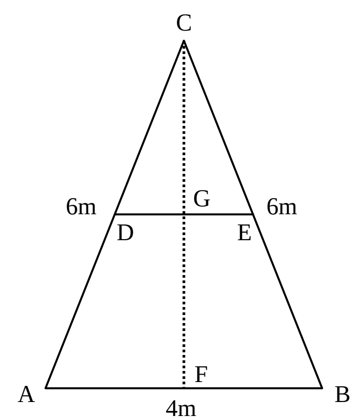
Ahora verificaremos si la respuesta puede ser la del inciso a.

Si dicho inciso es correcto entonces la medida del segmento BC sería 15.8 metros y como consecuencia la medida del segmento AC sería 26.2 metros, lo cual surge de restar la medida total desde A hasta B, 42 metros, y la medida del segmento AC .

Por otra parte, como las razones entre lados de triángulos semejantes son iguales tendríamos que $\frac{AD}{BE} = \frac{30}{18}$, es decir, 1.66, debería ser igual al cociente $\frac{AC}{BC} = \frac{26.2}{15.8}$, que corresponde a 1.658.

Por lo tanto, como los cocientes son iguales y hablamos de triángulos semejantes podemos aceptar que la distancia de B hasta donde fue localizado el presidiario es 15.8 metros. La respuesta correcta es la del inciso a.

18. Se tiene el triángulo isósceles ABC, cuyos lados son: AB=4m, BC=6m, AC=6m. Se tiene que el segmento DE que es paralelo a AB, la altura es perpendicular a la base, E y F son puntos medios de BC y BA respectivamente. ¿Cuánto tiene de longitud el segmento DE?



a) 1.0 m b) 2.0 m c) 2.5 m d) 3.0 m e) 3.2 m

Solución:

Los dos ángulos que tienen medidas iguales son el $\angle$AFC para el primer triángulo, y el $\angle$DGC para el segundo triángulo. Además se determina según la definición de ángulos internos que la medida de $\angle$FAC es la igual a la medida de $\angle$GDC.

Luego entonces, los triángulos AFC y DGC son semejantes dado que hemos mostrado un par de ángulos iguales.

De la misma manera que el problema anterior, podemos escribir que si ΔAFC $\cong$ ΔDGC, lo cual se verificó anteriormente, entonces $\frac{AF}{DG} = \frac{FC}{GC} = \frac{AC}{DC}$.

Según se observa en la figura, la medida del AF sería 2 metros puesto que F es el punto medio del segmento AB. Además la medida de AC es 6 metros, lo cual implica que el segmento DC mide 3 metros, ya que D divide en partes iguales al segmento AC.

Luego la ecuación $\frac{AF}{DG} = \frac{AC}{DC}$ generará el valor del segmento DG, que es la mitad del segmento DE. Sustituyendo valores llegamos a la ecuación $\frac{2}{DG} = \frac{6}{3}$, de donde DG es igual a 1, por lo que el segmento DE mide 2 metros.

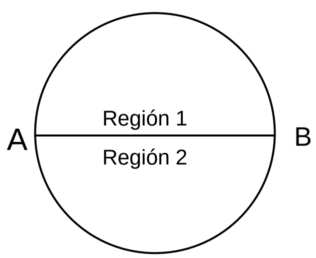
Debemos marcar como correcta la respuesta del inciso b.

19. En una circunferencia si se unen 2 puntos se forman 2 regiones, si se unen 3 puntos, de las diferentes maneras posibles, se forman 4 regiones. ¿Cuántas regiones se forman si se unen 5 puntos cualquiera de todas las formas posibles?

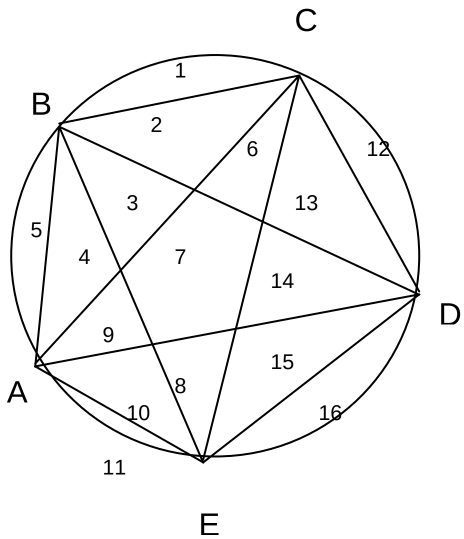
a) 5 b) 6 c) 8 d) 10 e) 16

Solución:

Se verifica que si se unen dos puntos de una circunferencia entonces se forman dos regiones.

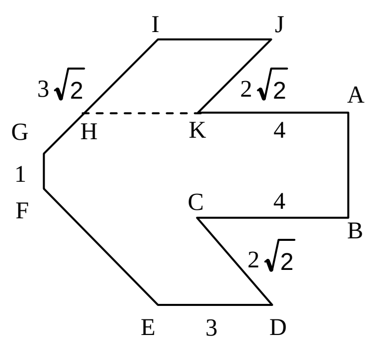


Bajo el mismo argumento debemos dividir la circunferencia a partir de 5 puntos en donde cada punto esté unido con el resto, posteriormente contar cada región. Llamaremos a los puntos A, B, C, D y E, y colocaremos un número en cada región.



Por lo tanto se forman 16 regiones si se unen 5 puntos de todas las formas posibles dentro de una circunferencia. La respuesta correcta es la del inciso e.

20. En la figura mostrada $\overline{GI}$ es paralela $\overline{JK}$, calcular el perímetro del polígono formado por los segmentos $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$ y $\overline{KH}$.



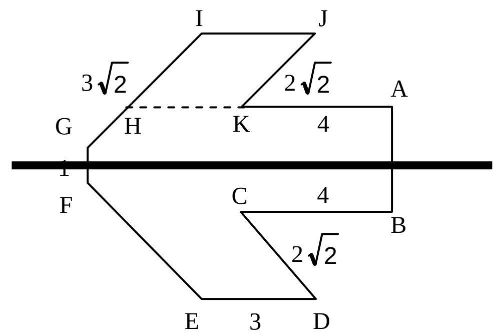
a) $2\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $3+2\sqrt{2}$ d) $4+2\sqrt{2}$ e) $6+4\sqrt{2}$

Solución:

Es claro que el perímetro del polígono se determinará sumando las medidas de los lados $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$ y $\overline{KH}$.

Según se observa, el lado $\overline{JK}$ tiene una medida igual a $2\sqrt{2}$.

Para determinar las medidas de los lados $\overline{IJ}$ y $\overline{KH}$, en la figura propuesta trazaremos un eje de simetría.



Dicho eje nos permite observar que el segmento $\overline{ED}$ mide lo mismo que el $\overline{IJ}$. Además, que $\overline{IJ}$ es igual a $\overline{KH}$, por lo que resta sólo un valor por determinar, el de $\overline{HI}$.

Sin embargo, como la figura en cuestión es un paralelogramo, podemos decir, sin temor a equivocarnos, que $\overline{HI}$ mide $2\sqrt{2}$. Por lo tanto la medida de los lados que forman al paralelogramo $KHIJ$, son:

$\overline{IJ} = 3$

$\overline{JK} = 2\sqrt{2}$

$\overline{KH} = 3$

$\overline{HI} = 2\sqrt{2}$

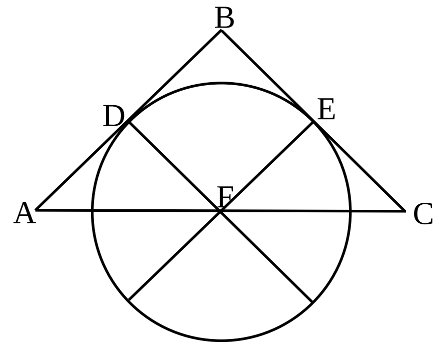
El perímetro se obtendrá mediante la suma de los lados, lo cual corresponde al siguiente procedimiento.

$\overline{IJ} + \overline{JK} + \overline{KH} + \overline{HI} = 3 + 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} = 6 + 4\sqrt{2}$.

La respuesta correcta aparece en el inciso e.

21. El triángulo ABC es isósceles, su base es 4 y sus lados son iguales a $2\sqrt{2}$, las mediatrices a los lados AB y BC cortan a estos en los puntos D y E. Las mediatrices se cortan en el punto F, que es punto medio de $\overline{AC}$ y a su vez es el

centro del círculo que es tangente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, en los puntos D y E. ¿Cuánto vale el área de este círculo?

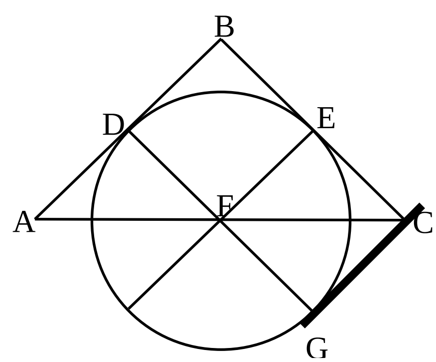


a) πu^2 b) $3/2\pi u^2$ c) $2\pi u^2$ d) $4\pi u^2$ e) $8\pi u^2$

Solución:

Para hallar el área de un círculo debemos saber primero su radio. Procederemos a determinarlo.

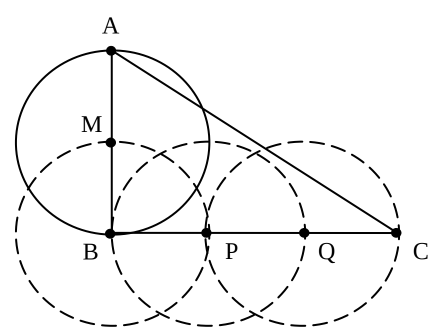
El primer mecanismo consiste en observar que DBCG forman un paralelogramo, en donde BC es paralelo a DG y DB es paralelo a CG. En la figura faltaría agregar una siguiente línea.



Las líneas BC y DG tendrían la misma medida, es decir, $2\sqrt{2}$, puesto que el segmento BC es uno de los lados del triángulo isósceles. Por otra parte, como F pasa por el segmento DG y es el centro de la circunferencia, entonces podemos asegurar que el segmento DF sería igual a al FG, en otros términos, que el radio de la circunferencia sería igual a la mitad de segmento DG. Esto indica que $DF = r = \frac{DG}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Luego, el área del círculo está dada por la fórmula $A = \pi r^2$, de donde surge el valor 2π u², que aparece en el inciso c.

22. En la figura se muestra el triángulo rectángulo en B. El punto M bisecta al lado $\overline{AB}$ y los puntos P y Q trisectan al lado $\overline{BC}$. Si A_C es el área del círculo centrado en M y A_T es el área del triángulo ABC, encuentra la afirmación que las compara correctamente. Nota: todas las circunferencias tienen el mismo diámetro.



a) $A_C > A_T$ b) $A_C = \frac{1}{3}A_T$ c) $A_C < A_T$ d) $A_C = A_T$ e) $A_C = \frac{1}{2}A_T$

Solución:

Asignemos un valor numérico al segmento MB para proceder.

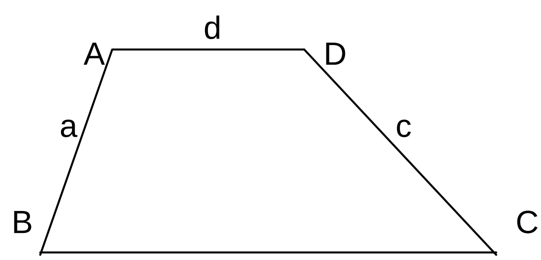
Sea MB = 2. Así el radio de la circunferencia con centro en M sería precisamente 2, lo que indica que el área de la misma circunferencia sería $A_c = \pi r^2 = (3.14)(2)^2 = (3.14)(4) = 12.56$ unidades cuadradas.

Por su parte el triángulo tiene una base que corresponde al triple del radio de la circunferencia centrada en M ya que todas las circunferencias tienen el mismo diámetro. Por lo tanto la base del triángulo es 6 unidades, mientras que su altura corresponde a la medida del segmento AB, que según se observa es 4.

Luego, $A_T = \frac{ba}{2} = \frac{(6)(4)}{2} = \frac{24}{2} = 12$ unidades cuadradas.

Lo que hemos probado se satisface para cualquier caso numérico. Esto indica que el área del círculo es mayor que el área del triángulo. Por lo tanto la respuesta correcta se encuentra en el inciso a, $A_C > A_T$.

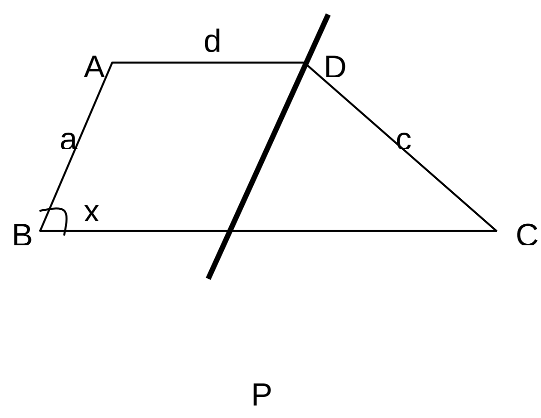
23. En el trapecio irregular ABCD el ángulo ADC es el doble del ángulo ABC. Los lados AB, CD y DA miden a, c y d respectivamente. ¿Cuánto mide el lado BC?



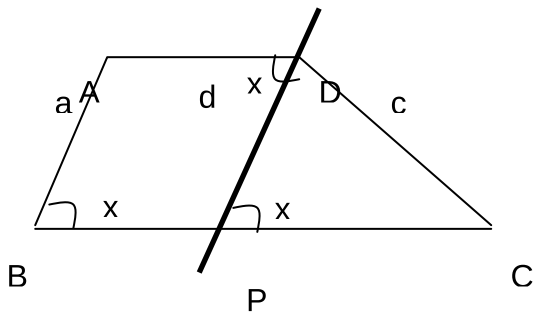
a) BC = d + b   b) BC = a + b   c) BC = d + c   d) BC = d + d   e) BC = d + a

Solución:

Tracemos una recta paralela al segmento AB, y llamémosla DP. Además x será el ángulo interno en B. En la figura original debemos agregar la siguiente información.



Según la construcción, las rectas AB y DP son rectas paralelas, lo cual implica que el ∠ABC = ∠DPC. Por otra parte, la clasificación de ángulos menciona que ángulos alternos internos tienen la misma medida, alternos respecto a la diagonal (recta DP) e internos respecto a las rectas AD y BC. En la figura tendríamos tres ángulos que tienen ya la misma medida, los denotados con la letra x.

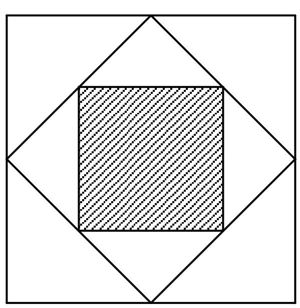


Según el enunciado original el ángulo ADC es el doble del ángulo ABC, por lo tanto si el segundo se ha llamado x entonces el primero tendría que llamarse 2x.

Luego, hemos probado que el triángulo DPC tiene dos ángulos iguales, a saber $\angle$DPC y el $\angle$CDP, lo cual indica que dicho triángulo es isósceles, en donde los lados iguales serían los segmentos CD y CP.

Por último, como se puede observar en la figura los segmentos BP y CP miden d y c respectivamente. Así, la respuesta sería que BC = d + c, lo cual aparece en el inciso c.

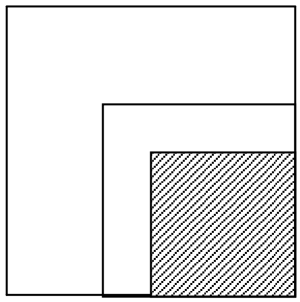
24. Si el lado del cuadrado más grande mide 4 unidades, ¿cuánto mide el área de la región sombreada?



a) 2 u^2 b) 10 u^2 c) 8 u^2 d) 4 u^2 e) $\sqrt{8}$ u^2

Solución:

Habría varias formas de resolver este problema. Una muy simple sería ordenar los cuadrados de manera que sea más visible su semejanza, es decir,



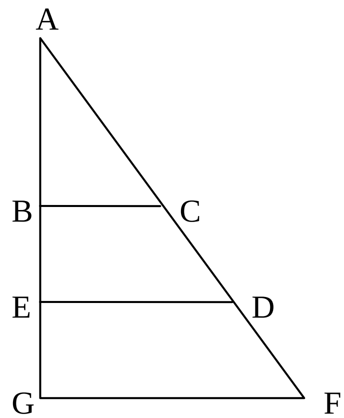
en donde se observa que el lado del cuadrado sombreado corresponde a 2 unidades, lo cual implica que el mismo cuadrado tiene de área 4 unidades cuadradas.

Otro camino más formal sería establecer el teorema de Pitágoras para hallar la medida de los lados de cada cuadrado. Por ejemplo, el lado del segundo cuadrado se obtendría mediante la igualdad $c^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, lo cual implica que el lado tendría por medida $c = \sqrt{8}$.

De manera similar se obtendría la medida del lado del cuadrado sombreado, en donde $c^2 = \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2 = = \frac{8}{4} + \frac{8}{4} = \frac{16}{4} = 4$, lo cual implica que el lado tendría por medida $c = 2$.

Mostrando, nuevamente, que el área de la figura sombreada sería 4 unidades cuadradas. Inciso d.

25. En la figura se tiene que 3DE = 5CB y que 4FG = 5DE. Si AG = 30 cm, la longitud de BE es:



a) 5 cm   b) 10 cm   c) 48/5 cm   d) 72/5 cm   e) Ninguna de la anteriores

Solución:

Como CB || DE || FG, tenemos:

Δ CBA semejante con Δ DEA semejante con Δ FGA. Por lo tanto las razones entre los lados correspondientes de cada triángulo mantienen constante su razón, es decir,

$$\frac{AE}{AG} = \frac{DE}{FG} \qquad \frac{AB}{AE} = \frac{CB}{DE}$$

$$\frac{AE}{30} = \frac{4}{5} \qquad \frac{AB}{24} = \frac{3}{5}$$

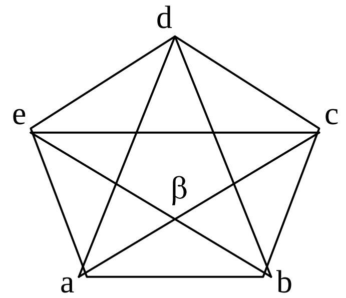
$$AE = 24\,\text{cm} \qquad AB = \frac{72}{5}\,\text{cm}$$

Lo cual implica que BE = AE – AB

$$BE = 24 - \frac{72}{5} = \frac{48}{5}\ \text{cm}$$

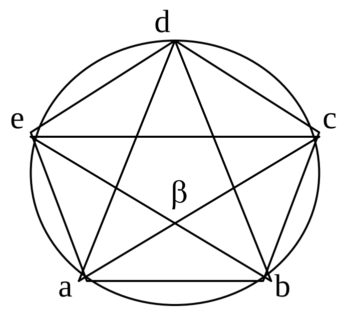
La respuesta correcta aparece en el inciso c.

26. Al trazar las diagonales de un polígono regular de 5 lados, se forma una estrella como en la figura. Entonces el ángulo β mide:



a) 36°
b) 45°
c) 60°
d) 72°
e) Ninguna de las anteriores

Solución:
Recordemos que todo polígono regular puede inscribirse en una circunferencia.



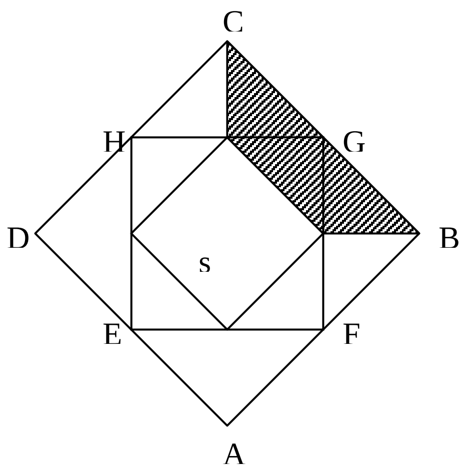
En este casi, cada uno de los cinco lados del pentágono subtiende arcos de magnitud idéntica a 72°, que resulta de dividir el total, 360°, entre 5.
Esto implica que el arco AB mide 72° y además que el arco EC es igual a la suma de los arcos CD + DC, en números se obtiene que el arco EC mide 144°.
Para un ángulo β como el de la figura se cumple la fórmula:

$$\beta = \frac{AB + EC}{2}$$ (semisuma de los arcos que describe)

$$\beta = \frac{72 + 144}{2} = \frac{216}{2} = 108°$$

Luego, la medida del ángulo señalado denotado con β corresponde a 108°, señalando como correcta la respuesta del inciso E.

27. ABCD es un cuadrado de lado a; por los puntos medios se trazan nuevos cuadrados. Entonces, el área del cuadrilátero sombreado mide:



a) $\frac{a^2}{8}$

b) $\frac{3a^2}{16}$

c) $\frac{5a^2}{32}$

d) $\frac{5a^2}{8}$

e) $\frac{a^2}{9}$

Solución:

Los triángulos EAF y DAB son semejantes con proporciones $\frac{EF}{DB} = \frac{EA}{DA}$, pero $\frac{EA}{DA} = \frac{1}{2}$, y que E es punto medio.

Esto implica que $EF = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, lo cual se obtiene también por el Teorema de Pitágoras sobre el triángulo AFE.

Por otra parte, el cuadrado más pequeño de lado s, tiene diagonal igual a EF, luego $s^2 + s^2 = EF^2 \Rightarrow s = \frac{a}{2}$.

La región sombreada, tiene área A, que puede obtenerse como

$$A = \frac{áreaABCD \quad - \quad \text{Área cuadrado de lado s}}{4}$$

$$A = \frac{1}{4}\left(a^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{3}{16}a^2.$$

Lo cual indica el área de la región sombreada, señalando la respuesta del inciso b.

2.5 PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON HABILIDAD MATEMÁTICA.

En seguida los problemas requerirán de mayor concentración ya que los problemas expuestos elevan su nivel taxonómico. Dejaremos de lado las ecuaciones y dibujos, y se resolverá mediante habilidades y razonamientos matemáticos. La sugerencia es observar siempre el tipo de respuesta que se propone puesto que en la mayoría de los casos esto nos ayudará a determinar la correcta. Además, hay que intentar imaginar cada situación para comprender de mejor manera lo planteado.

El primer tipo de problemas a resolver tiene que ver con series numéricas. En cada uno de los siguientes casos la solución consiste en establecer una regla que permita generar el siguiente número. Es importante señalar que dichas reglas se basan, en la mayoría de los casos, en las operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división, la clave es observar cada serie e intentar varias propuestas. La paciencia en estos casos es fundamental.

28. 3, 4, 8, 9, 18, 19...

a) 20 b) 36 c) 38 d) 37 e) 35

Solución:

Para llegar de 3 al número siguiente, 4, la primera idea consiste en sumar la unidad, es decir, 3 + 1 = 4, sin embargo, 4 + 1, no sumarían el 8 que está en la siguiente posición. Así debemos pensar en una estrategia distinta para obtener, a partir de 4, el número 8. Parecería que si multiplicamos 4 x 2 entonces llegaríamos a 8.

Posteriormente si a 8 le agregamos el número 1 entonces obtenemos 9, que es el siguiente número, sucesivamente, multiplicando 9 x 2, llegamos a 18, y entonces estamos ya ejecutando la misma regla para varios casos. En síntesis

Números de la serie	Regla para generar la serie
3	3 + 1 = 4
4	4 x 2 = 8
8	8 + 1 = 9
9	9 x 2 = 18
18	18 + 1 = 19
19	19 x 2 = 38

Luego entonces parecería que el número que sigue en la serie sería el producto de 19 y 2, lo cual generaría el número 38 que está marcado con el inciso (c).

29. 3, 5, 9, 17, 33…

a) 66 b) 34 c) 60 d) 65 e) 63

Solución:

La regla parece ser sencilla, en este caso habrá que multiplicar cada número por 2 y posteriormente, al resultado restarle la unidad, esto es:

Números de la serie	Regla para generar la serie	
3	3 x 2 = 6	6 – 1 = 5
5	5 x 2 = 10	10 – 1 = 9
9	9 x 2 = 18	18 – 1 = 17
17	17 x 2 = 34	34 – 1 = 33
33	33 x 2 = 66	66 – 1 = 65
65		

El número que sigue a 33 es, según la regla, el 65 que está marcado en el inciso d.

30. 1, 3, 7, 15, 31...

a) 60 b) 35 c) 65 d) 64 e) 63

Solución:

El análisis en este caso parece ser igual de sencillo que en los casos anteriores. ¿Cómo llegar del número 1 al número 3?

Según lo expuesto en el problema anterior, la suma debería ser la primera opción, entonces, es claro que la regla inicial podría ser, 1 + 2 = 3, sin embargo para generar el siguiente número la misma regla se hace insuficiente, ya que 3 + 2 = 5 y deseamos obtener el número 7.

Así debemos proponer una segunda alternativa que genere el dato indicado según la serie.

Sin más, en la tabla podríamos escribir los siguientes pasos para obtener el número indicado en la serie propuesta.

Números de la serie	Regla para generar la serie
1	1 x 2 = 2 2 + 1 = 3
3	3 x 2 = 6 6 + 1 = 7
7	7 x 2 = 14 14 + 1 = 15
15	15 x 2 = 30 30 + 1 = 31
31	31 x 2 = 62 62 + 1 = 63
63	

Podemos concluir que la regla consistía en multiplicar cada número por 2 y posteriormente agregar el número 1, así el dato que continua en la serie es el número 63, que aparece en la respuesta del inciso e.

31. 9, 21, 33, 45...

a) 56 b) 54 c) 58 d) 55 e) 57

Solución:

La serie parece obtenerse de manera más sencilla. La primera intención será siempre averiguar si mediante la suma es posible generar el número que sigue a 9 en la serie propuesta, es decir, 21.

Si sumamos 9 + 12, entonces llegamos al resultado 21, que es el número que sigue en la serie. Para verificar si ese es el proceso indicado entonces habría que sumar 21 + 12 y averiguar si el resultado es 33.

En la tabla, la regla que parecería ser correcta indica que a cada número de la serie debe sumarse el número 12 con tal de generar el consecutivo en la misma serie, esto es,

Números de la serie	Regla para generar la serie
9	9 + 12 = 21
21	21 + 12 = 33
33	33 + 12 = 45
45	45 + 12 = 57
57	

Así el número que sigue a la serie es 57, el cual aparece en el inciso e.

32. 1/3, 1/9, 1/27...

a) 1/51 b) 1/81 c) 1/30 d) 1/33 e) 1/35

Solución:

Para este caso debemos recordar que la multiplicación de fracciones se hace de la forma $\frac{a}{b} x \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Particularmente, parece que cada número propuesto en la serie se multiplica por la fracción $\frac{1}{3}$. En la tabla tendríamos lo siguiente.

Números de la serie	Regla para generar la serie
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} x \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} x \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$
$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27} x \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$
$\frac{1}{81}$	

Por lo tanto la respuesta correcta es la del inciso b.

33. 2, 4, 3, 9, 4, 16, 5...

a) 10 b) 18 c) 15 d) 20 e) 25

Solución:

Parecería ser un poco más complicada la serie propuesta en este caso, sin embargo, observando detenidamente, es sencillo inferir que el número buscado es el cuadrado de 5. Es decir, la regla parece definirse mediante el enunciado "el cuadrado de". Visualizar cada caso a partir una tabla es recomendable.

Números de la serie	Regla para generar la serie
2	El cuadrado de 2 es
4	
3	El cuadrado de 3 es
9	
4	El cuadrado de 4 es
16	
5	El cuadrado de 5 es
25	

La respuesta correcta es la marcada con el inciso e. Hay que notar que los números 2, 3, 4 y 5 tienen una relación de orden, de menor a mayor, agregando siempre la unidad, el número que seguiría a 25 sería 6, en virtud del mismo orden, lo cual no afecta el resultado.

34. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,

a) 25 b) 31 c) 29 d) 33 e) 26

Solución:

Para la serie propuesta debemos observar detenidamente que se trata de una lista ordenada de números primos. El siguiente número primo a 23 sería 29, puesto que dicho número únicamente se divide entre él mismo y entre la unidad. ¿31 también es número primo? Si lo es. Mantenemos que la respuesta es 29 ya que 29 antecede a 31 y hablamos de una lista ordenada.

Por lo tanto la respuesta es la del inciso c.

35. ¿Cuánto es la mitad de cuatro elevado al doble de tres, menos la raíz cúbica de ciento veinticinco?

a) 1448 b) 277 c) 386 d) 2048 e) 2043

Solución:

Según la lectura, el número cuatro está elevado a la sexta potencia, es decir, el doble de tres. Además la raíz cúbica de 125 corresponde a 5. La coma que aparece indica que debemos separar cada situación para resolver correctamente.

Luego, la situación numérica que se ha propuesto en el enunciado corresponde a $\frac{4^6}{2}-5$, elevando y reduciendo según se indica se llega al número 2043. El procedimiento se expone a continuación.

$\frac{4^6}{2}-5=\frac{4096}{2}-5=2048-5=2043$. La respuesta correcta es la del inciso e.

36. ¿Cuánto es la mitad de cuatro, elevado al doble de tres, menos la raíz cúbica de ciento veinticinco?

a) 1448 b) 59 c) 386 d) 2048 e) 2043

Solución:

Parecería que el problema anterior y el propuesto son idénticos, pero no es así. Aparece una coma separando cada frase lo cual trae cambios radicales en la solución.

La mitad de cuatro, que es 2, debe elevarse a la sexta potencia, que corresponde al doble de 3, y por último hay que restar 5, que surge de extraer la raíz cúbica al número 125.

De esta forma, el procedimiento que determina la respuesta es el siguiente.

$$\left(\frac{4}{2}\right)^6 - 5 = (2)^6 - 5 = 64 - 5 = 59\,.$$

Por lo tanto el número que responde correctamente es 59, el cual aparece en el inciso b.

37. Un equipo de voleibol lleva perdidos 8 de 22 partidos jugados. Si gana los siguientes 6, ¿cuál será su porcentaje final de victorias?

a) 28.57 b) 51.85 c) 63.63 d) 69.17 e) 71.42

Solución:

Es fundamental ejecutar una tabla de partidos bajo las tres características, jugados, ganados y perdidos. El dato adicional consiste en recordar que en el voleibol no existen partidos empatados. Así, según el problema, se podría generar la siguiente tabla.

Partidos jugados	Partidos ganados	Partidos perdidos
22		8

La diferencia entre el número de partidos jugados y el número de partidos perdidos, 22 – 8, generaría el número de partidos ganados, es decir, 14.

Posteriormente habría que agregar el dato que menciona que el equipo ganó los siguientes 6 juegos, en la tabla, se obtendría la siguiente información.

Partidos jugados	Partidos ganados	Partidos perdidos
22 + 6	14 + 6	8

Evidentemente la cantidad de partidos jugados se debe aumentar en 6 porque los juegos que se ganan se deben de jugar primero. Además como se ganaron esos juegos la cantidad de partidos ganados aumentó a 20. Luego entonces el porcentaje final de victorias se calcula dividiendo el total de partidos ganados, 20, entre el total de partidos jugados, 28, y multiplicando por 100, es decir, $\left(\frac{20}{26}\right)(100) = (0.7142)(100) = 71.42$, lo cual aparece en el inciso e.

38. ¿Cuáles son las edades, en años, de tres amigos, si su suma es 72 y su producto resulta mayor que 13600? Al mayor de ellos le falta una pierna.

a) 25, 25, 22 b) 24, 24, 24 c) 23, 23, 26 d) 22, 22, 28 e) 18, 24, 30

Solución:

En este caso utilizaremos las respuestas propuestas para generar el resultado correcto, lo cual es permitido ya que en cualquier examen de admisión existe el mismo formato de pregunta. Analizaremos la respuesta del inciso (a).

Dicha respuesta debería generar una suma igual a 72. Las edades 25, 25 y 22, satisfacen esa condición, es decir, 25 + 25 + 22 = 72. Además el producto entre las mismas edades resulta ser mayor que 13600, esto es, 25 x 25 x 22 = 13750. ¿Debemos marcar la respuesta del inciso (a)? Falta una última condición por analizar. El dato “al mayor de ellos le falta una pierna” implica que uno, y sólo uno, de los tres amigos es cojo, pero también, que uno, y sólo uno, de ellos es mayor. Así la respuesta del inciso (a) es incorrecta ya que habría dos amigos con la misma edad.

El análisis correspondiente al inciso (b) es similar al anterior. Sin embargo es aún más fácil observar que de aceptar dicha respuesta entonces habría 3 amigos con la misma edad, lo cual está prohibido porque uno de ellos es mayor.

En el caso del inciso (c), la suma de las tres edades resulta igual a 72, es decir, en la suma 23 + 23 + 26 = 72 se satisface la condición inicial, posteriormente, en el producto de las edades tenemos que 23 x 23 x 26 = 13754, lo cual implica que el producto entre las edades es mayor que 13600. Por último, es claro que la edad del mayor, es 26 años, y las edades de los otros dos amigos son 23 y 23 años, lo cual no genera alguna contradicción. Queda pendiente analizar los casos (d) y (e). En el primer caso, (d), el producto de las edades resulta ser menor que 13600, es decir, 22 x 22 x 28 = 13552, lo cual es indicador para no elegir esa respuesta. En el caso (e) el producto, 18 x 24 x 30 = 12960, lo cual es menor que lo propuesto inicialmente.

Así la repuesta que debemos elegir, según lo analizado anteriormente, es la del inciso (c).

39. ¿Qué probabilidades existen de que el premio mayor del próximo sorteo de la lotería termine en cero?

a) .00 b) .10 c) .25 d) .50 e) .35

Solución:

Las posibilidades de que el premio mayor de la lotería termine en cero son 1 de 10. Por definición, la probabilidad de un evento es el cociente entre casos favorables y casos posibles. ¿Cuáles son las posibles opciones en el último número cuando se juega a la lotería? La respuesta son los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, es decir, hay 10 casos posibles por uno favorable, el que pide que el número que salga en la última posición sea 0. Esto es un décimo o uno de cada diez, lo cual se indica en el inciso b.

40. El señor A tiene un auto que vale $10000. Lo vende al señor B con una ganancia del 10%. Si el señor B lo vende al señor A con una pérdida del 10% entonces

a) A no gana algo

b) A no gana nada

c) A gana $ 100

d) A gana $ 1000

e) A gana $ 900

Solución:

Cuando el señor A vende su auto, con ganancias del 10%, está vendiendo en $ 11000. Eso significa que lleva ganados $ 1000. Sin embargo cuando el señor B lo regresa al señor A perdiendo el 10%, B habrá vendido en $ 9900, ya que el 10% de $ 11000 son $ 1100.

Esto último significa que el señor A ganó $ 100 pesos más, ya que su auto originalmente estaba valuado en $ 10000.

Así el señor A gana $ 1100, respuesta que no aparece en alguna casilla. Debemos analizar cuidadosamente el par de respuestas marcadas con los incisos a y b.

En el inciso b, la frase A no gana nada es la que debemos marcar como correcta. El análisis es el siguiente. En la frase “el señor A gana nada” debemos entender que “el señor A gana cero”, pero a dicha frase le antecede una negación, por lo tanto debemos entender que "el señor A no gana cero”, lo cual es cierto, el señor A no gana cero, de hecho, el señor A gana $ 1100.

La teoría dice que la negación de una negación es la afirmación del contenido, esto implica que la frase propuesta en el inciso b, se traduciría como “el señor A gana algo”, de hecho gana $ 1100.

La respuesta correcta es la del inciso b.

41. En una tómbola todas las esferas son rojas excepto tres, todas las esferas son azules excepto tres, y todas las esferas son amarillas excepto tres. ¿Cuántas esferas hay en la tómbola? Nota: La última esfera es transparente

a) 4 b) 3 c) 8 d) 6 e) 2

Solución:

Supondremos que la respuesta correcta es la del inciso d, es decir, hay 6 esferas en la tómbola. La frase inicial, “todas las esferas son rojas excepto tres”, define como 3 el número de esferas rojas en la tómbola. En el siguiente enunciado se definen como 3 el número de esferas azules y ya no quedaría lugar para las esferas amarillas. Son 3 las esferas rojas, 3 las azules, formarían 6. Analizaremos ahora la respuesta marcada en el inciso a. Parecería que el número de esferas rojas es 1, el número de esferas azules es 1 y que el número de esferas amarillas es 1 también. Todas excepto tres, genera la diferencia entre 4 y 3, que es 1. Es claro que la última esfera es a la que hace referencia la nota.

Por lo tanto el número de esferas en la tómbola es 4. La respuesta correcta es la del inciso a.

42. En un zoológico hay 40 animales. Se sabe que por lo menos uno es hembra y que de cada dos animales por lo menos uno es macho. ¿Cuántos de los animales son machos?

a) 1 b) 19 c) 20 d) 21 e) 39

Solución:

Imaginemos los 40 animales. La frase “por lo menos uno es hembra” significa que hay una hembra pero que podría haber más, de hecho podrían ser 40 hembras, no se ha dicho lo contrario.
Sin embargo, poco después dice que en cada pareja de animales por lo menos hay un macho, ¿puede entonces haber 2 hembras? La respuesta es no. De permitir dos hembras en el zoológico entonces esos animales podrían formar una pareja de hembras, lo cual está prohibido ya que en cada pareja por lo menos uno es macho.
Ahora ¿podría haber 3 o más hembras?, evidentemente si permitimos la existencia de más hembras entonces podrían formarse varias parejas de hembras lo cual no es posible por la segunda condición del problema.
Luego entonces, el número de hembras es 1, lo cual indica que el resto son machos, es decir, hay 1 hembra y 39 machos en el zoológico. La respuesta que debemos marcar es la del inciso e.

43. En una clase hay 47 alumnos. Se sabe que por lo menos hay una niña y en cualquier par de alumnos hay por lo menos un niño. ¿De cuántas maneras distintas se puede elegir una pareja en la que haya una niña y un niño?

a) 1 b) 23 c) 46 d) 69 e) 92

Solución:

Nuevamente la labor inicial consiste en imaginar la situación planteada. Se sabe que por lo menos hay una niña y esto implica que hay una niña pero que podría haber más, por lo menos es una. De manera similar al problema anterior, ¿podría haber dos niñas? La respuesta es no, recordemos que en cada par debe haber por lo menos un niño. De permitir dos niñas en el grupo, ellas, podrían formar una pareja en donde la condición de “por lo menos un niño” no se cumpla. Es claro que no pueden ser ni 3 ni más niñas porque se formarían varias parejas de niñas lo cual no es permitido.
Así, en el grupo hay 1 niña y el resto, 46, son niños.
Pero el problema radica en determinar la cantidad de parejas diferentes que se pueden formar con 1 niña y 46 niños.
La respuesta es 46 puesto que cada niño formaría una pareja diferente con la niña del grupo. Inciso c.

44. María apuesta su dinero y gana el triple de lo que tenía, posteriormente pierde 40 pesos quedándole un total de 80 pesos, ¿cuánto dinero tenía María al principio?

a) $ 20 b) $ 40 c) $ 50 d) $ 30 e) $ 60

Solución:

Analicemos algunas de las respuestas. Si aceptamos como correcta la respuesta del inciso b entonces María tendría $ 40 más el triple de lo que tenía, $ 120; por lo tanto después de haber ganado tendría $ 160. Posteriormente María pierde $ 40 lo cual hace una diferencia de $120. ¡Contradicción!. María termina con 80 pesos en la bolsa, lo cual quiere decir que la respuesta correcta no es la del inciso b.

En un segundo intento analizaremos la respuesta del inciso d.

Parecería que de $ 30 iniciales el triple es $ 90, lo cual implica que María tendría la suma de $ 120. Luego, como pierde $ 40, habría que comprobar que la diferencia entre $ 120 y $ 40 sea lo que le quedó, un total de $ 80 pesos, lo cual asegura la respuesta.

Por lo tanto la respuesta correcta es la del inciso d.

De hecho, fácilmente, pudimos haber planteado este problema mediante la ecuación $x+3x-40=80$, en donde, x sea el dinero que tenía María en un principio.

Resolviendo dicha ecuación tendríamos,

$$4x-40=80$$

$$4x=80+40$$

$$4x=120$$

$$x=\frac{120}{4}$$

$$x=30$$

Lo anterior solo es un método alterno para hallar la solución. María tenía $ 30 como se indica en el inciso d.

45. ¿Cuál es la mitad de la tercera parte del mayor número impar menor que 20 que no es primo?

a) 19/6 b) 17/6 c) 15/2 d) 5 e) 5/2

Solución:

El número impar menor que 20 que no es primo no puede ser 19, ya que es primo, tampoco puede ser 18 puesto que es par, 17 también es primo y 16 es par.
Así el número impar menor que 20 que no es primo es 15, puesto que se divide entre 1, 3, 5, 15 y por supuesto es impar.
Además la tercera parte de 15 resulta de dividir 15 entre 3, generando el número 5 y su mitad correspondería a la fracción 5/2, que aparece en el inciso e.

46. En una reunión, el anfitrión, advirtió que hubo 45 apretones de mano, ¿cuántas personas asistieron a la reunión?

a) 10 b) 12 c) 11 d) 9 e) 8

Solución:

Si aceptamos la respuesta del inciso d entonces el invitado que llegó en el noveno lugar daría 8 apretones de mano, puesto que no se saluda a él mismo. El invitado que llegó en octavo lugar daría 7 apretones de mano, puesto que aún no estaba presente el noveno. Así, el invitado que llegó en séptimo lugar saludaría a 6 personas, el sexto invitado saludaría a 5 personas, el quinto a 4 y así sucesivamente.
Esto indica que deberíamos sumar los apretones que cada invitado da cuando llega a la reunión, es decir, si la respuesta fuese la marcada con el inciso d entonces, $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$, debería ser igual a 45, pero no es así, la suma resulta ser 36. Por lo tanto la respuesta no es la del inciso d.
Como la sumatoria es menor que el total de apretones requerido, entonces supondremos que la respuesta es mayor que 9, así que pensemos en la opción marcada con el inciso a.
Si 10 personas fueron a la reunión entonces el décimo invitado saludó a 9 personas, el noveno a 8, el octavo a 7, y así sucesivamente, esto es, $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$, lo cual debería ser igual a 45. Resolviendo la suma es posible determinar que, efectivamente, 10 personas fueron a la reunión. Debemos marcar la respuesta del inciso a.

47. Ramiro fue condenado a 6 años por asesinato, pero ganó $ 10,000 por el "trabajo". Si su esposa legítima gasta $100 al mes, ¿cuánto dinero le quedará cuando salga de la cárcel?

a) $ 0 b) $ 280 c) $ 2800 d) $ 3600 e) No se puede saber

Solución:

En 6 años el número de meses que transcurre es de 72. Si la esposa gasta $ 100 al mes entonces después de ese tiempo habrá gastado $ 7200 pesos. Cuando Ramiro salga de la cárcel le quedarán $ 2800, que surge de restar los $ 10000 iniciales y $ 7200. Inciso b.

48. Paco se robó la bicicleta de Jesús. Paco se va en friega con la bicicleta a 35 Km/hr. Jesús carga su 357 mágnum en 8 segundos. ¿Qué tan lejos va a estar Paco cuando Jesús le dispare? Nota: Paco viaja en línea recta y su velocidad no cambia.

a) 77. 77 metros b) 7.77 metros c) 777.7 metros d) 77.77 kilómetros e) 280 kilómetros

Solución:

Debemos recordar que dentro de la física hay un movimiento denominado MRU, en el cual la velocidad es constante y la trayectoria es una línea recta, la fórmula general de dicho desplazamiento corresponde a la expresión $v = \frac{d}{t}$, en donde, se involucra velocidad, distancia y tiempo respectivamente.

En este caso, como el dato buscado corresponde a la distancia, habrá que generar una expresión para encontrar dicha variable; sin más $d = vt$.

Ahora bien, el tiempo que Paco viaja es el mismo en el que Jesús carga su pistola, es decir, 8 segundos. Por otra parte la velocidad de Paco, 35 km/hr, deberá transformarse al sistema internacional dividiendo dicho valor entre 3.6. Así la velocidad de Paco es 9.72 m/s.

Por último, sustituiremos en la ecuación $d = vt$ en donde los datos son ya conocidos, es decir, $d = (9.72m/s)(8) = 77.76$ m.

Por aproximación el dato que resulta es similar al que aparece en el inciso a, que es la respuesta que debemos marcar en este problema.

La respuesta del inciso d es incorrecta pues las unidades deben ser metros y no kilómetros.

49. Cuatro niños se dividen una bolsa de canicas, a uno le toca la mitad, a otro una cuarta parte, al tercero una quinta y al último le tocan 7. El número total de canicas es:

a) 100 b) 120 c) 140 d) 180 e) 250

Solución:

Procederemos analizando las posibles opciones de respuesta. Algebraicamente podría resolverse el problema a partir de la ecuación $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+7=x$ en donde la variable representa la cantidad de canicas.

Elegiremos a la respuesta del inciso c. Así el número de canicas sería 140. Verificaremos ahora si las condiciones del problema se cumplen.

Según el enunciado, al primer niño le toca la mitad de canicas, es decir, 70; al segundo niño le toca una cuarta parte, es decir, 35; al tercer niño le toca una quinta parte que corresponde a 28 y al último niño le tocan 7.

Si la respuesta es correcta entonces la sumatoria de los datos anteriores debe ser 140, esto es, $70+35+28+7=140$

Por lo tanto la respuesta correcta es la del inciso c, 140 canicas.

50. La media aritmética de un conjunto de 30 números es 10. Si quitamos el número 68 de ese conjunto entonces la media aritmética de los restantes es:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

Solución:

Se tienen 30 números en un conjunto. El promedio, o media aritmética, es 10, lo cual indica que la sumatoria del total de números debió haber sido 300, ya que $\frac{300}{30}=10$.

El enunciado indica que se debe eliminar del conjunto de 30 números el 68, por lo tanto la nueva suma correspondería a 232.

Para calcular el promedio de los números restantes tendremos que dividir 232 entre 29 ya que es la cantidad de números bajo la eliminación del 68, es decir, $\frac{232}{29}$, lo cual corresponde a 8, que es la respuesta correcta y que aparece marcada con el inciso b.

51. Dos relojes se pusieron en hora a las 3 p.m. de cierto día. El primero se adelanta un minuto cada dos horas y el segundo se atrasa un minuto cada 3 horas. ¿Qué diferencia habrá entre los dos relojes a las 9 a.m. del día siguiente?

a) 3 minutos b) 8 minutos c) 13 minutos d) 15 minutos e) 18 minutos

Solución:

El número de horas que transcurre entre las 3 de la tarde y las 9 de la mañana del día siguiente es 18. Luego, si el primer reloj se adelanta un minuto cada dos horas significa que se habrá adelantado 9 minutos en total, que resulta de dividir el número de horas, 18, y el número de minutos, 2. Por lo tanto el primer reloj marcará las 9:09 a.m.

El segundo reloj se atrasa un minuto cada 3 horas lo cual implica que después de 18 horas se habrá atrasado por 6 minutos, marcando las 8:54 a.m.

La diferencia entre ambos relojes sería de 15 minutos. La respuesta correcta es la del inciso d.

52. Una pelota se deja caer desde una altura de 30m. Al primer rebote alcanza una altura ¾ veces de la altura total, al segundo rebote alcanza una altura ¾ veces la altura del primer rebote, y así sucesivamente. ¿Qué altura alcanza la pelota al cuarto rebote?

a) 26.66 m b) 22.50 m c) 16.87 m d) 9.49 m e) 7.11 m

Solución:

En el primer rebote la altura alcanzada por la pelota es de 0.75 veces la altura inicial, 30 metros.

Esto significa que la altura del primer rebote fue $(0.75)(30) = 22.5$ metros. La cantidad 0.75 es equivalente a la fracción ¾.

En el segundo rebote el mecanismo es similar, es decir, la altura será 0.75 veces la altura del primer salto, es decir, 22.5. La altura del segundo rebote será de $(0.75)(22.5) = 16.87$ metros.

El proceso deberá repetirse hasta llegar al cuarto rebote. Es importante señalar que el rebote varía en relación a la altura del rebote anterior.

La altura del tercer rebote será $(0.75)(16.875) = 12.65$ metros, y la altura del cuarto y último rebote será $(0.75)(12.656) = 9.49$ metros, que aparece en el inciso d.

53. El valor de B varía en proporción directa con el de A; cuando B = 4, A = 20. ¿Cuánto valdrá A, si B vale 10?

a) 2 b) 8 c) 25 d) 50 e) 100

Solución:

En este caso podemos plantear de manera simple una regla de tres directa. Representaremos con x a la incógnita que hace referencia al valor de A.

Valor de B	Valor de A
4	20
10	x

Para resolver, debemos multiplicar 10 y 20 y en seguida dividir el resultado entre 4, lo cual genera el número 50 que aparece en el inciso d.

54. La cuarta potencia de la mitad de la raíz cúbica de 1000 es

a) 625 b) 825 c) 925 d) 525 e) 725

Solución:

Para comprender este problema debemos aceptar que la raíz cúbica de 1000 es 10. Posteriormente la mitad de la raíz cúbica de 1000, es 5. Para resolver el problema debemos hallar la cuarta potencia de 5, que corresponde a multiplicar 5 x 5 x 5 x 5 = 625.

Por lo tanto la respuesta correcta es la que aparece en el inciso a.

55. En una boda el novio juntó en su saco la mitad de la quinta parte de lo que gastó en el pastel y en el vestido de la novia. Si el vestido costó el doble que el pastel, y el pastel costó $ 1000, ¿cuánto junto el novio?

a) $ 400 b) $ 300 c) $ 3000 d) $ 1500 e) $ 2600

Solución:

Es sencillo saber que el vestido costó $ 2000, puesto que su valor fue el doble del pastel, cuando este último tuvo un valor de $ 1000. Entonces la cantidad que representan el pastel y el vestido juntos es de $ 3000. La quinta parte de $ 3000 es $ 600 y la mitad de $ 600 es $ 300. Lo cual aparece en el inciso b.

56. En una fábrica de camisas se establece que el promedio para que las costureras peguen los botones debe ser de 2.5 minutos por prenda. Un ingeniero industrial realiza un estudio de tiempos y movimientos a 6 costureras, obteniendo las siguientes mediciones: 3 min, 2.8 min, 2.4 min, 2.05 min, 2.75 min. ¿Cuál debe ser el tiempo de la sexta costurera para no rebasar el promedio establecido?

a) 2.00 min b) 2.16 min c) 2.20 min. d) 2.40 min. e) 2.50 min.

Solución:

El promedio se obtiene sumando el total de datos y dividiendo entre el número de ellos. Como debemos hallar el tiempo para no rebasar el promedio supondremos que la posible solución deberá ser la menor de los propuestas, es decir, aceptaremos la respuesta del inciso a, se verificará a continuación si es o no la correcta.

$$\Pr omedio = \frac{3+2.8+2.4+2.05+2.75+2.00}{6} = \frac{15}{6} = 2.5$$

Si sustituimos algún tiempo mayor al propuesto en el inciso a entonces el promedio aumentará, de hecho rebasará el establecido, lo cual no es deseado.

Por lo tanto la respuesta correcta es la del inciso a.

57. Considera la lista: 289, 49, 25, 121. De los números: 119, 36, 244, 169, 144. ¿Cuál puede pertenecer a la lista?

a) 119 b) 36 c) 244 d) 169 e) 144

Solución:

Los casos suelen complicarse y abarcar varios conceptos matemáticos. En este caso la serie consiste de números primos cualesquiera elevados al cuadrado, es decir,

Números de la serie	Regla para generar la serie
289	289 es el cuadrado de 17. 17 es primo ya que únicamente se divide entre la unidad y él mismo.
49	49 es el cuadrado de 7. 7 es primo, los números 1 y 7 son sus únicos divisores.
25	25 es el cuadrado de 5 5 es primo, los números 1 y 5 son sus únicos divisores.
121	121 es el cuadrado de 11 11 es primo, los números 1 y 11 son sus únicos divisores.

El siguiente número no podría ser 119 puesto que no es un cuadrado de algún número. Aunque 36 si lo es, tendríamos que 6 no es primo, lo dividen el 1, 2, 3 y el propio 6.

En la lista, el número que sigue es el marcado en el inciso d, que es 169. Las condiciones expuestas en la anterior tabla argumentan la respuesta. 169 es el cuadrado de 13 y además 13 es primo, los números 1 y 13 son sus únicos divisores. La respuesta correcta es la del inciso d. Queda en el lector averiguar porqué no son posibles las respuestas de los incisos c y e.

58. ¿Cuál de los siguientes números no tiene un número primo de divisores enteros positivos?

a) 3 b) 5 c) 16 d) 40 e) 49

Solución:

El enunciado menciona al conjunto de los números primos, que según el problema anterior son aquellos que cuentan con dos divisores únicos y diferentes a saber, la unidad y el propio número. Ahora bien, para resolver el problema es conveniente analizar que se está en búsqueda de un número que NO tenga un número primo de divisores enteros positivos.

La tabla siguiente nos permitirá comprender de mejor manera tal enunciado.

Números propuestos	¿Quiénes son todos sus divisores?	¿Cuántos son sus divisores?	El número de divisores, ¿es primo?
3	1, 3	2	Si
5	1, 5	2	Si
16	1, 2, 4, 8, 16	5	Si
40	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40	8	No
49	1, 7, 49	3	Si

La tabla muestra que el 40 es el único número de los propuestos que no cuenta con un número primo de divisores. En otras palabras al 40 lo dividen 8 números y 8 no es primo, como se pide en el enunciado. Por lo tanto la respuesta correcta es la del inciso d.

59. Junto a cada número se indica la cantidad de cifras que en él ocupan el mismo lugar que en otro número oculto. Con base en esa información descubra ese número entre las opciones.

01234 (3)
56784 (2)
94814 (2)
94186 (2)

a) 91284 b) 01284 c) 01264 d) 01714 e) 31714

Solución:

Haremos el análisis del problema en virtud de las soluciones propuestas.
En el caso del inciso a debemos hallar 3 números que aparezcan en el número oculto, es decir, 91284, y que ocupen la misma posición que el número que se presenta como dato inicial.
La tabla nuevamente nos permite visualizar tal situación.

Del número

0	**1**	**2**	3	**4**

aparecen 3 cifras en el número oculto ocupando la misma posición. Si el número oculto es el del inciso a

9	**1**	**2**	8	**4**

es evidente, que dichas cifras serían 1, 2 y 4. Que aparecen en la segunda, tercera y quinta posición respectivamente.

Para el segundo dato, tendríamos que hallar dos cifras que ocupen la misma posición en el dato original y en el número oculto. Esto es,

5	6	7	**8**	**4**

9	1	2	**8**	**4**

Las posiciones cuarta y quinta están ocupadas por las mismas cifras, según se observa 8 y 4.
Continuando con el análisis de la respuesta del inciso a, tendríamos que en el tercer dato los números 9 y 4 aparecen en la primera y última posición respectivamente. Lo cual indica que se satisface la condición de tener 2 cifras en la misma posición. Por último es sencillo observar que el cuarto dato y el número propuesto comparten en la misma posición un par de números que son el 9 que aparece en la primera posición, y el 8 que aparece en la cuarta.
Por lo tanto el número oculto según la codificación propuesta sería 91284, dado que es el único que satisface las condiciones del problema. Respuesta inciso a.

60. De la siguiente sucesión: 4, 9, 14, 19, 24. ¿Qué número ocupará el lugar 100 de la sucesión?

a) 499 b) 444 c) 599 d) 549 e) 694

Solución:

Debemos determinar el procedimiento que permite construir la sucesión y así conocer el número que ocupará el lugar número 100. La regla parece ser "suma 5", es decir, si a cada número de la lista se le agrega 5 entonces el resultado será el número consecutivo en la sucesión.

Para responder al número que ocupe la posición 100 de la serie existirían dos mecanismos. En el primero se construye una tabla generando cada uno de los números. Evidentemente esto sería tardado pero tendría un alto grado de efectividad.

Por otra parte debemos observar que para encontrar el segundo número es posible escribir que $9 = 5(1) + 4$, el cual ocupa el segundo lugar de la serie. De la misma forma, para generar 14 tendríamos que $14 = 5(2) + 4$, ocupando el tercer lugar de la serie.

Luego podríamos construir la tabla siguiente

Números de la serie	Lugar que ocupa en la serie	Regla para generar la serie
4	1	
9	2	$9 = 5(1) + 4$
14	3	$14 = 5(2) + 4$
19	4	$19 = 5(3) + 4$
24	5	$24 = 5(4) + 4$
29	6	$29 = 5(5) + 4$
...	...	...
x	100	$x = 5(99) + 4$

Sabiendo lo anterior, para hallar el número que ocupa el lugar 100 de la sucesión multiplicamos 5 por 99 y le sumamos 4, obteniendo así 499. La regla que encontramos exige restarle uno al número del lugar que ocupa el que estamos buscando.

Por lo tanto la respuesta aparece marcada con el inciso a.

61. Encuentra un entero positivo tal que el resultado de multiplicar su mitad y su tercera parte sea él mismo.

a) 5 b) 6 c) 4 d) 8 e) 9

Solución:

Sea n el número buscado. Así $\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n}{2}\right)=n$, correspondería a la expresión algebraica que sintetiza el enunciado. Luego $\frac{n^2}{6}=n$, por lo que $n^2=6n$, por lo tanto $n=6$. Inciso b.

62. El papá de Emigdio tiene 45 años. Es quince años mayor que dos veces la edad de Emigdio. ¿Cuántos años tiene Emigdio?

a) 5 b) 16 c) 14 d) 15 e) 18

Solución:

Sea x la edad de Emigdio. Entonces tendremos que 45, la edad del papá, es 15 años mayor que el doble de la edad de Emigdio, 2x. Así, 45 = 15 + 2x, de donde se desprende que el valor de x es 15. La respuesta correcta aparece en el inciso d.

63. En la televisión de Alejandra se reciben los canales del 2 al 42. Si Alejandra enciende la televisión en el canal 15 y aprieta 518 veces el botón para subir canales, ¿en qué canal quedará la televisión cuando se detenga?

a) 41 b) 42 c) 23 d) 35 e) 39

Solución:

Para que Alejandra llegue por primera vez al canal 2, es necesario que apriete el botón 28 veces. Por otra parte, cada vez que da una vuelta completa iniciando en el canal 2 hasta el canal 42 y terminando otra vez en el canal 2, Alejandra debe apretar el botón 41 veces. Entonces, después 28 + (41 x 11) = 479 veces que aprieta el botón estará en el canal 2. Ahora, si aprieta el botón 39 = 518 – 479 veces llegará al canal 41. Por lo tanto, la televisión quedará en el canal 41. Inciso a.

64. El área de un cuadrado mide 4225 metros cuadrados. ¿Cuánto medirá el área de un triángulo con base igual al lado y altura equivalente a 1/5 del lado?

a) 122.5 m^2 b) 522 m^2 c) 422.5 cm^2 d) 224.5 m^2 e) 422.5 m^2

Solución:

Para obtener la medida del lado deberíamos extraer la raíz cuadrada del número 4225, lo cual nos genera que el lado del cuadrado mide 65 metros.

Por su parte, para calcular el área del triángulo debemos saber la medida de su base y de su altura. El lado es igual a 65 metros mientras que la altura equivale a 65/5, lo cual es 13 metros.

El área del triángulo corresponde a $A = \frac{bxh}{2} = \frac{65x13}{2} = 422.5$ metros cuadrados. Inciso e.

65. En un salón hay 20 estudiantes. Se sabe que por lo menos dos están aprobados y que de cada tres estudiantes por lo menos uno está reprobado. ¿Cuántos de los alumnos están aprobados?

a) 18 b) 14 c) 19 d) 2 e) 10

Solución:

No podría haber en el salón tres estudiantes aprobados, puesto que ellos formarían una terna de aprobados, mientras que se condiciona que por cada tres estudiantes al menos uno esté reprobado. Lo anterior permite asegurar que sólo hay 2 estudiantes aprobados, y el resto están reprobados. Respuesta del inciso d.

66. En una tómbola todas las esferas son rojas excepto tres, todas las esferas son azules excepto tres, y todas las esferas son amarillas excepto tres. ¿Cuántas esferas hay en la tómbola? Nota: La última esfera es transparente

a) 4 b) 3 c) 8 d) 6 e) 2

Solución:

Supondremos que la respuesta correcta es la del inciso d, es decir, hay 6 esferas en la tómbola. La frase inicial, “todas las esferas son rojas excepto tres”, define como 3 el número de esferas rojas en la tómbola. En el siguiente enunciado se definen como 3 el número de esferas azules y ya no quedaría lugar para las esferas amarillas. Son 3 las esferas rojas, 3 las azules, formarían 6.

Analizaremos ahora la respuesta marcada en el inciso a. Parecería que el número de esferas rojas es 1, el número de esferas azules es 1 y que el número de esferas amarillas es 1 también. Todas excepto tres, genera la diferencia entre 4 y 3, que es 1. Es claro que la última esfera es a la que hace referencia la nota.

Por lo tanto el número de esferas en la tómbola es 4. La respuesta correcta es la del inciso a.

67. En una reunión todos los asistentes se saludaron entre sí. ¿Cuántas personas había ahí, si en total se dieron 66 saludos?

a) 10 b) 12 c) 11 d) 9 e) 8

Solución:

Si aceptamos la respuesta del inciso d entonces el invitado que llegó en el noveno lugar daría 8 apretones de mano, puesto que no se saluda a él mismo. El invitado que llegó en octavo lugar daría 7 apretones de mano, puesto que aún no estaba presente el noveno. Así, el invitado que llegó en séptimo lugar saludaría a 6 personas, el sexto invitado saludaría a 5 personas, el quinto a 4 y así sucesivamente.

Esto indica que deberíamos sumar los apretones que cada invitado da cuando llega a la reunión, es decir, si la respuesta fuese la marcada con el inciso d entonces, 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1, debería ser igual a 66, pero no es así, la suma resulta ser 36. Por lo tanto la respuesta no es la del inciso d.

Como la sumatoria es menor que el total de apretones requerido, entonces supondremos que la respuesta es mayor que 9, así que pensemos en la opción marcada con el inciso b.

Si 12 personas fueron a la reunión entonces el doceavo invitado saludó a 11 personas, el onceavo a 10, el décimo a 9, y así sucesivamente, esto es, 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1, lo cual debería ser igual a 66. Resolviendo la suma es posible determinar que, efectivamente, 12 personas fueron a la reunión. Debemos marcar la respuesta del inciso a.

68. Dos relojes se pusieron en hora a las 3 p.m. de cierto día. El primero se adelanta un minuto cada dos horas y el segundo se atrasa un minuto cada 3 horas. ¿Qué diferencia habrá entre los dos relojes a las 9 a.m. del día siguiente?

a) 3 minutos b) 8 minutos c) 13 minutos d) 15 minutos e) 18 minutos

Solución:

El número de horas que transcurre entre las 3 de la tarde y las 9 de la mañana del día siguiente es 18. Luego, si el primer reloj se adelanta un minuto cada dos horas significa que se habrá adelantado 9 minutos en total, que resulta de dividir el número de horas, 18, y el número de minutos, 2. Por lo tanto el primer reloj marcará las 9:09 a.m.

El segundo reloj se atrasa un minuto cada 3 horas lo cual implica que después de 18 horas se habrá atrasado por 6 minutos, marcando las 8:54 a.m.

La diferencia entre ambos relojes sería de 15 minutos. La respuesta correcta es la del inciso d.

69. En el hipódromo se sabe que:

- **Negro es más veloz que Palomino**
- **Azafrán es más veloz que Cubilete, pero a diferencia de Negro, es más lento que Palomino**
- **Negro es más lento que Melodía, y**
- **Cubilete es más veloz que Azabache**

¿Cuáles son los dos caballos más lentos?

a) Palomino y Azafrán b) Cubilete y Palomino c) Azabache y Melodía d) Cubilete y Azabache e) Azafrán y Melodía

Solución:

Asignaremos letras para cada caballo, así Negro será N, Palomino será P, Azafrán, A, Cubilete, C, Melodía, M, y Azabache, Az.

Por otra parte, según la información que aparece en el problema se puede generar una relación de orden de la siguiente manera.

Frase	Interpretación
Negro es más veloz que Palomino	$N > P$
Azafrán es más veloz que Cubilete, pero más lento que Palomo	$P > A > C$
Nubio es más lento que Melodía	$N < M$
Cubilete es más veloz que Azabache	$C > Az$

Esto último implica que M > N > P > A > C > Az. Luego, los dos caballos más lentos son Cubilete y Azabache, que aparece como respuesta en el inciso d.

70. ¿Cuál es el tercero de cinco número enteros consecutivos, tales que su suma sea 695?

a) 128 b) 134 c) 139 d) 140 e) 145

Solución:

Algebraicamente, cinco números enteros consecutivos serían x, x + 1, x + 2, x + 3, x + 4. Cuando se suman todos los números el resultado debe ser igual a 695, lo cual se reduce a la igualdad

$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 695$

Resolviendo dicha ecuación tendríamos que x = 137. Sin embargo estamos en búsqueda del tercero de cinco números consecutivos, en donde si el primero es 137 entonces el tercero será, agregando la unidad, 139, que aparece en el inciso e.

71. Un comerciante decidió vender a $15.60 la docena de alcachofas. ¿Cuánto cobró a la clienta que compró cien alcachofas?

a) $ 86 b) $ 112 c) $ 120 d) $ 130 e) $144

Solución:

Obtendremos, mediante una regla de tres directa, el valor de una alcachofa. Así el valor de la alcachofa será de $1.3. Cuando la clienta decide comprar 100 alcachofas deberá pagar $ 130, que aparece en el inciso d.

72. Un caracol está en el fondo de un pozo de 12 metros y decide salir. Por el día sube 5 metros y por la noche baja 2 metros, por lo tanto saldrá en

a) 3 días b) 5 días c) 4 días d) 2 días e) 6 días

Solución:

A partir de la lectura se puede inferir que el caracol, cada día subía 3 metros. El argumento es el siguiente. Cuando había luz natural, el caracol lograba elevarse 5 metros, sin embargo cuando llegaba la noche, el mismo, descendía 2 metros según la lectura. Cada

24 horas sucede que se eleva 5 metros y baja 2, lo cual indica que, al día en realidad el caracol logra elevarse la diferencia entre los datos anteriores, 3.

Ahora el problema consiste en determinar el número de días en los cuales el caracol saldrá, para lo cual debemos considerar la altura del pozo, 12 metros.

Si cada 24 horas el caracol logra elevarse 3 metros, según lo anteriormente expuesto, entonces cuando el número de horas sea 48, es decir, el doble de horas, entonces el número de metros será el doble también, esto se observa de mejor manera en la siguiente tabla.

Número de días	**Altura alcanzada cada día**
1 día	3 metros
2 días	6 metros
3 días	9 metros
4 días	12 metros

Dada esta información es simple observar que cada día el caracol se eleva 3 metros por lo cual, el día 4, llegará a los 12 metros de altura que es precisamente la altura del pozo.

Así la respuesta que debe marcarse como correcta es 4 días, es decir, inciso (c).

73. Un hombre tiene 20 años más que su hijo y en 5 años su edad será el triple que la de su hijo. ¿Cuál es la edad actual del padre?

a) 30 b) 5 c) 25 d) 40 e) 34

Solución:

Sea P la edad del padre y H la edad del hijo. Entonces si el padre tiene 20 años más que el hijo:

$H + 20 = P$

Y si en 5 años más la edad del padre será el triple que la del hijo:

$3\,(H + 5) = P + 5$

Por lo tanto, se tiene el sistema de ecuaciones:

$H + 20 = P$

$3H + 15 = P + 5$

Que encuentra soluciones en $H = 5$ y $P = 25$.

Sin embargo la pregunta es ¿cuál es la edad actual del padre? A lo cual debemos responder 25 años. Inciso c.

74. En un curso de 50 personas, 25 alumnos obtuvieron 5.2 de promedio; 20 alumnos obtuvieron promedio de 5.7 y los demás promedio de 6.4. El promedio del curso fue:

a) 5.7 b) 5.76 c) 5.52 d) 5.60 e) 5.80

Solución:

Se pide el promedio del curso, por lo tanto hay que ponderar cada promedio por el número de alumnos que lo tuvo, es decir:

$$\Pr = \frac{(25 \cdot 5.2) + (20 \cdot 5.7) + (5 \cdot 6.4)}{50} = 5.52$$

Para generar el promedio fue necesario sumar cada calificación según el número de ocasiones que se apareció, para dividir dicha suma entre el total de estudiantes que fue de 50. El resultado obtenido indica 5.52, lo cual aparece en el inciso c.

75. En una celebración cada uno de los asistentes entregó un regalo a cada uno de los restantes. Terminando el evento, se habían contado un total de 110 regalos. El número de personas que asistió a la celebración fue:

a) 5 b) 6 c) 10 d) 11 e) 15

Solución:

Supongamos que a la celebración asistieron n personas. Cada una de ellas entregó un regalo a cada una de las restantes (nadie se autorregaló), es decir, cada persona entregó (n-1) regalos, con lo cual el número de regalos contados fue de:

$n(n - 1)= 110$

$n^2 - n - 110 = 0$

de donde la solución positiva de dicha ecuación sería 11.

Así la persona 11, regalo 10 veces, lo mismo que hizo la persona 10, y así sucesivamente. Luego, el total de personas que asistió a la celebración es de 11. Inciso d.

76. Si P representa la probabilidad de que México clasifique para el próximo Mundial de Futbol y Q la probabilidad de que no clasifique, entonces:

i. $P + Q = 1$ ii. $P \geq 0$ iii. $Q \leq 1$

a) Sólo i b) Sólo ii c) Sólo i y ii d) Sólo ii y iii e) i, ii y iii

Solución:

Veamos cada caso para así poder determinar cuál de ellos se cumple según las condiciones del problema.

Según uno de los teoremas de Bernoulli para la probabilidad, un evento es mutuamente excluyente si la ocurrencia del evento preliminar no incide en la ocurrencia de un evento secundario, esto es, si ocurre P no pasa algo con Q. Por otra parte la probabilidad de un evento seguro es la unidad, debe ser claro que México puede clasificar al mundial o puede no clasificar. Así la suma de los eventos P y Q, según el teorema de Bernoulli y la deducción anterior deberá ser 1. Lo cual satisface el primer punto.

Para el segundo y tercer punto la situación es aún más clara puesto que P debe ser, según definición estrictamente mayor o igual que cero. Lo mismo Q, que debe ser, según definición, estrictamente menor o igual que 1. Es importante señalar que ambos casos se acotan por sí solos puesto que hablamos de probabilidad, es decir, P no puede ser 2 porque en probabilidad siempre estaremos entre 0 y 1.

Luego, la respuesta es la del inciso e.

77. La señora González tiene 5 hijas, cada una de ellas tiene 4 hijas y cada una de ellas tiene 3 hijas. ¿Cuántas descendientes tiene la señora González?

a) 95 b) 65 c) 45 d) 85 e) 90

Solución:

La señora González tiene 5 hijas y como cada hija tiene 4 hijas entonces, la señora tendrá 20 nietas. Consecuentemente, mediante un argumento similar, la señora deberá tener 60 bisnietas.

Luego, tienen $5 + 20 + 60 = 85$ descendientes. Debemos señalar como respuesta la del inciso d.

78. Renata marca un número de dos dígitos en su calculadora, lo multiplica por 3, le suma 12 y divide el resultado entre 7. El número resultante es de dos dígitos y termina en 5. ¿Cuál fue el número que marcó?

a) 30 b) 21 c) 53 d) 13 e) 31

Solución:

Supongamos que el número que marcó Renata es $10a + b$ y que el resultado que obtiene al final es $10c + 5$. De acuerdo a las operaciones que realizó, se tiene que:

$3(10a + b) + 12 = 7(10c + 5)$

$30a + 3b + 12 = 70c + 35$

Para que el número de la izquierda termine en 5 es necesario que $b = 1$, entonces se reduce la ecuación a $30a = 70c + 20$. Como $30a \leq 270$, tenemos que $c \leq 3$.

Si $c = 3$, $a = 23/3$ que no es entero. Por otra parte, si $c = 2$, $a = 16/3$ que tampoco es entero.

Por último, si $c = 1$, $a = 3$, luego la única solución es 31, que aparece en el inciso e.

Mucho más simple que lo anterior era partir de las opciones de respuesta y observar que la única que satisface lo leído totalmente es precisamente 31.

79. En una caja de Leche se lee la siguiente información nutricional:

"Cada 100 ml. De leche contiene:

Sodio: 48 mg.

Potasio: 165 mg.

Calcio: 128 mg.

Fósforo: 103 mg.

Magnesio: 12 mg."

¿Cuánto magnesio contiene una taza de leche de un cuarto de litro?

a) 0.3 g b) 4.8 mg c) 12 mg d) 30 mg e) 48 mg

Solución:

Un cuarto de litro de la taza corresponden a 250 ml. El mecanismo para hallar solución a este problema consiste en establecer una regla de tres directa que involucre a las variables mencionadas, es decir, si 100 ml de leche contienen 12 mg de magnesio entonces, ¿cuánto magnesio habrá en 250 ml de leche?

El resultado es 30 mg de magnesio. La respuesta correcta es la del inciso d.

80. Si n es un número natural tal que n ≥ 1, entonces, la suma de éste con su sucesor y su antecesor siempre será divisible por:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 9

Solución:

El primer número que satisface la desigualdad n ≥ 1, es el propio 1. Luego la suma de 1 con su sucesor, 2, y su antecesor, 0, es de 3. El resultado de la suma será divisible entre 3.

Sin embargo vale la pena explorar varios casos mas para tener la certeza de la respuesta.

Así, el número 2 también cumple con n ≥ 1, la suma que se expone en la lectura corresponde a 2 + 3 + 1, lo cual es 6, y nuevamente es divisible entre 3.

Veamos en caso siguiente. El número 3 es mayor o igual que 1. Por su parte, la suma indicada tiene por resultado 9, lo cual también se divide entre 3.

Según los casos se indica que cada sumatoria tiene una característica especial, se divide entre 3. El resultado indica que la respuesta es correcta para el inciso b.

81. Si x y y son números reales distintos de cero y distintos entre sí. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es(son) verdadera(s), conociendo la relación $x^2 + x = y^2 + y$?

I. $x = 2$ y $y = -3$

II. $x - y$ es un número impar

III. $x^2 y - xy$ es siempre divisible por 3

a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III d) I y II e) I, II y III

Solución:

Factorizando la relación:

$$x^2 + x = y^2 + y$$

$$x^2 - y^2 + x - y = 0$$

$$(x - y)(x + y + 1) = 0$$

Pero como $x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0$ y entonces para que la expresión sea igual a cero, el otro factor está “obligado a ser cero: $x = -1 - y$.

Por lo tanto:

I. VERDADERO: Si $x = 2$ entonces $y = -3$

II. VERDADERO: Si x es un número par, y siempre es impar, y si x es impar, y es par. Por lo tanto $x - y$ siempre es la suma o resta de un par con un impar y por ende siempre es impar.

III. VERDADERO: Factorizando, la expresión queda $(x-1)xy$. Como $-y$ es el sucesor de x y $x-1$ es el antecesor de x, tenemos el producto de tres números consecutivos. Luego, no existen tres números consecutivos de manera que uno de ellos no sea múltiplo de 3, lo que implica que el producto de tres números de los cuales uno de ellos es divisible por 3, también es divisible por 3. Nota: Los signos no interesan, sólo interesa el valor de los números.

82. Una persona deposita una cierta cantidad de dinero en el banco al 15% de interés anual. Si después de un año retira $ 13294, el monto depositado inicialmente es:

a) $ 11299	b) $ 11560	c) $ 11742	d) $ 11327	e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Este es un problema de interés simple. Entonces si llamamos x a la cantidad inicial de dinero depositado, tenemos la ecuación:

$$x + 0.15x = 13294$$

$$x = \frac{13294}{1.15}$$

$$x = 11560$$

La cantidad depositada inicialmente fue $ 11560.

83. Dada la relación $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Si R_1 y R_2 disminuyen en un 10%. ¿Qué ocurre con R?

a) Aumenta 10%	b) Aumenta 20%	c) Aumenta 15%	d)Disminuye 15%	e)Disminuye 10%

Solución:

Si R_1 y R_2 disminuyen en un 10% cada uno significa que R_1 pasa a ser $(R_1 - 0.1R_1)$ y que R_2 pasa a ser $(R_2 - 0.1R_2)$. Por lo tanto, la expresión dada se transforma en:

$$\frac{1}{R_1 - \frac{1}{10}R_1} + \frac{1}{R_2 - \frac{1}{10}R_2} = \frac{10}{9R_1} + \frac{10}{9R_2} = \frac{10}{9}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Y como sabemos que $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, entonces:

$$\frac{10}{9}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{10}{9}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{\frac{9R}{10}} = \frac{1}{R - \frac{1}{10}R} = \frac{1}{R - 0.1R}$$

Es decir R disminuye en un 10%. Inciso e.

2.6 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Iniciaron una competencia 25 personas y se les unieron otras 3 personas. Si sólo llegaron a la meta 12 personas, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el número de personas que NO llegaron a la meta?

a) 25 – (3 – 12) b) 25 + (3 + 12) c) (25 + 3) – 12 d) (25 – 3) + 12 e) (25 – 3) – 12

2. ¿Cuál expresión es la mayor si a y b son números enteros positivos?

a) a b) b c) $a - b$ d) $b - a$ e) $a + b$

3. Si p es positivo y q = 1 – (1/p), cuando aumenta p, entonces q

a) llega a ser uno b) llega a ser 0 c) se queda igual d) disminuye e) aumenta

4. Un avión voló durante 10 horas a una velocidad promedio de 540 kilómetros por hora. ¿Cuántos kilómetros recorrió?

a) 5.4 b) 54 c) 540 d) 5400 e) 54000

5. La igualdad $a - b = b - a$ es cierta si

a) $a > b$ b) $a = b$ c) $a < b$ d) $a = 2b$ e) $a = -2b$

6. ¿Cuál de los siguientes números es divisible por 3 y por 5, pero NO por 2?

a) 685 b) 750 c) 880 d) 975 e) 1000

7. Si el día primero de un mes es lunes, ¿cuál es el mayor número de miércoles que puede haber en un mes de 31 días?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

8. El área de un rectángulo es 128 metros cuadrados. Si el largo mide 16 metros, ¿cuántos metros mide el ancho?

a) 4 b) 8 c) 16 d) 32 e) 48

9. Julio ahorró $ 20 en 8 semanas. Si continúa ahorrando a esa razón, ¿cuánto ahorrará en 20 semanas?

a) 50 b) 48 c) 44 d) 40 e) 28

10. Si 1 de cada 15 niños de un pueblo pertenece a una organización juvenil, ¿cuántos de los 600 niños del pueblo son miembros de la organización?

a) 10 b) 20 c) 36 d) 38 e) 40

11. Jennifer recibe 5 puntos cada vez que entrega una tarea completa y 3 puntos si la entrega es incompleta. Recibió 45 puntos en total. Si entregó 6 tareas completas, ¿cuántas tareas incompletas entregó?

a) 3 b) 5 c) 13 d) 15 e) 27

12. Si p es un entero positivo divisible por 3, ¿cuál de los siguientes NO es divisible por 3?

a) $3p$ b) $2p$ c) 3^p d) $6p + 9$ e) $p + 1$

13. En la expresión $ax^{71} + bx^{51} + 6 = 10$, ¿cuál es el valor de $a + b$, si $x = 1$?

a) 60 b) 16 c) 10 d) 4 e) 1.6

14. La suma de dos números es 150 y la mitad del mayor es k. ¿Cuál es el otro número?

a) $2k$ b) $2(k + 1)$ c) $150 - k$ d) $150 + k$ e) $150 - 2k$

15. De una hoja de papel de 10 centímetros de largo y 8 de ancho se desean obtener triángulos de 4 centímetros cuadrados de área. El mayor número de triángulos que se obtendrá es

a) 20 b) 10 c) 8 d) 5 e) 2

16. Una escuela tiene 1000 estudiantes de los cuales 300 son de primer año; 500 son varones y 200 son estudiantes varones de primer año. ¿Cuántos estudiantes no son ni varones no de primer año?

a) 800 b) 700 c) 500 d) 400 e) 300

17. ¿Cuántos números reales tienen la propiedad de que su cuarta parte es igual a su cuadrado?

a) Ninguno b) Uno c) Dos d) Tres e) Cuatro

18. Para que los tres puntos (6,10), (26,5) y (m,18) sean colineales m debe valer:

a) 4 b) 1/4 c) – 26 d) – 1/26 e) 38

19. El radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 18x + 6y + 41 = 0$ es:

a) 4 b) 9 c) 5 d) 7 e) 8

Para los ejercicios 20 al 24 escoja la pareja de números propuestas que sea continuación de cada una de las series enlistadas.

20. 128, 137, 146, 155,...

a) 164, 173 b) 163, 172 c) 164, 172 d) 165, 175 e) 160, 175

21. 215, 325, 435, 545,...

a) 645, 745 b) 655, 765 c) 654, 755 d) 635, 735 e) 654, 745

22. 3/2, 9/3, 12/4, 15/5,...

a) 18/6, 21/7 b) 18/5, 21/6 c) 16/6, 18/7 d) 16/7, 18/8 e) 20/6, 25/7

23. 1/1, 1/2, 1/6, 1/24,...

a) 1/30, 1/36 b) 1/30, 1/120 c) 1/120, 1/720 d) 1/30, 1/36 e) 1/25, 1/30

24. 0.4, 0.8, 1.6, 3.2,...

a) 6.4, 11.8 b) 6.4, 13.8 c) 6.4, 12.8 d) 3.4, 6.8 e) 4, 8

25. La mitad del triple de 120 es:

a) 170 b) 150 c) 190 d) 180 e) 360

26. La edad de Javier es el triple de la de Miguel y Arturo es mayor por 6 años que Miguel. Si Miguel tiene 3 años de edad, entonces:

a) Javier es mayor que Arturo b) Arturo es mayor que Javier c) Arturo y Javier tienen la misma edad d) No se sabe algo e) Miguel es mayor que Javier

27. Si a una fiesta asiste Raúl con su esposa y sus 4 hijos, cada hijo con su respectiva esposa y dos amigos. ¿Cuántas personas asisten a la fiesta?

a) 18 b) 20 c) 16 d) 14 e) 22

28. ¿Cuál es la mitad de la tercera parte del mayor número impar menor que 20 que no es primo?

a) 19/6 b) 17/6 c) 15/2 d) 5 e) 5/2

29. Ana tiene 6 años de edad, Paty es menor que Lulú por 8 años y la edad de Lulú es el triple de la de Ana, ¿cuál es la edad de Paty?

a) 9 b) 8 c) 18 d) 10 e) 6

30. Martín es menor que Jesús y Daniel es mayor que Jesús, ¿cuál es el mayor?

a) No se sabe b) Martín c) Jesús d) Daniel e) Los 3 son de la misma edad

31. Mi primo es el nieto de la madre del hermano de mi:

a) Madre b) Hermana c) Madrina d) Prima e) Sobrina

32. Joaquín tiene una caja grande con 4 medianas dentro, 3 chicas en cada una de las medianas y 6 todavía más pequeñas en cada una de las chicas; entonces el total de cajas que Joaquín tiene es:

a) 88 b) 89 c) 90 d) 54 e) 62

33. Un plomero tiene un tubo de 30 metros. Si diariamente corta un pedazo de 2 metros terminará de cortarlo en:

a) 14 días b) 16 días c) 18 días d) 15 días e) 10 días

34. La media aritmética de un conjunto de 30 números es 10. Si quitamos el número 68 de ese conjunto, entonces la media aritmética de los restantes es:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

35. Un bote de 20 litros se llena de agua; luego se sacan 4 litros y se reemplazan con alcohol; después se sacan 4 litros de la mezcla y se reemplazan con alcohol. La cantidad de litros de agua que queda en la mezcla final es:

a) 16/5 b) 16/9 c) 4/5 d) 36/5 e) 64/5

36. Un contenedor que tiene 50 metros de largo, 20 metros de ancho y una profundidad de 2 metros va a ser llenado hasta ¾ de su capacidad. El volumen de agua que se requiere es:

a) 2000 m^3 b) 1750 m^3 c) 1650 m^3 d) 1500 m^3 e) 1250 m^3

37. Un tanque de Guerra de la armada norteamericana es capaz de correr a velocidad promedio de 90 km/hr durante 4 horas y media, y otro lo hace a 40 km/hr durante 10 horas y cuarto. Luego…

a) Los dos recorren igual distancia

b) El segundo recorre poco más que el primero

c) El primero recorre poco más que el segundo

d) El primero recorre mucho menos que el segundo

e) El segundo recorre mucho menos que el primero

38. El perímetro de un cuadrado tiene el mismo número de metros que los metros cuadrados de su área. ¿Cuál es ésta?

a) 1 m^2 b) 2 m^2 c) 4 m^2 d) 8 m^2 e) 16 m^2

39. Para preparar un compuesto químico se han utilizado 20 gramos de sal y 100 gramos de agua. ¿A qué porcentaje aproximado de salinidad ha quedado la solución?

a) 100% b) 80% c) 25% d) 20% e) 16%

40. Después de una noche de juego, el Lic. Gómez y el Gral. Hernández han apostado cien mil pesos a una carta, Si gana Gómez se levantará de la mesa con el doble de lo que tendrá el general. Si gana este último, los dos tendrán igual cantidad. ¿Cuánto tiene sobre la mesa cada uno de ellos?

a) $ 300 000 y $ 100 000 b) $ 500 000 y $ 300 000 c) $ 300 000 y $ 500 000 d) $ 700 000 y $ 500 000 e) Cada uno tiene $ 300 000

41. Cuando mi hermana nació yo tenía 7 años, hoy tengo el triple de la edad que ella tenía hace siete años y dentro de siete años la suma de nuestras edades será siete por siete, ¿qué edad tendré yo dentro de 7 años?

a) 20 b) 21 c) 24 d) 28 e) 35

42. Un granjero tiene 37 animales entre conejos y gallinas. Todos estos animales juntos suman 100 patas. ¿Cuántos conejos y gallinas tiene?

a) 12 conejos y 25 gallinas
b) 13 conejos y 24 gallinas
c) 15 conejos y 22 gallinas
d) 17 conejos y 20 gallinas
e) 20 conejos y 17 gallinas

43. Un planteamiento posible para conocer los números de conejos y gallinas en el problema anterior es:

a) $4x + 2(37 – x) = 100$
b) $4x + 2(37x) = 100$
c) $4x – 2 (37 + x) = 100$
d) $4x – 2 (37x) = 100$
e) $4x + 2 (37) x = 100$

44. A una fiesta asistieron 17 personas. Carola bailó con seis muchachos, Silvia con Siete, Mireya con Ocho, y así sucesivamente hasta llegar a Rita quien bailó con todos los muchachos. ¿Cuántos muchachos había en la fiesta?

a) 7	b) 8	c) 9	d) 10	e) 11

45. Del teorema: *Si los dos términos de un quebrado se multiplican o dividen por un mismo número, el quebrado no se altera,* se desprenden las siguientes afirmaciones, excepto:

a) Al multiplicar el denominador por un número, el quebrado queda dividido por el mismo número

b) Al dividir el numerador por un número, el quebrado queda multiplicado por dicho número

c) Al multiplicar el numerador por un número, el quebrado queda multiplicado por el mismo número

d) Al dividir el denominador por un número, el quebrado queda multiplicado por el mismo número

e) Al dividir el numerador por un número, el quebrado queda dividido por el mismo número

46. Rosa tiene tantas hermanas como hermanos, pero cada hermano tiene sólo la mitad de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hermanos y hermanas hay en la familia?

a) Cuatro hermanas y cuatro hermanos	b) Cuatro hermanas y tres hermanos	c) Cuatro hermanos y tres hermanas	d) Tres hermanos y tres hermanas	e) Dos hermanas y tres hermanas

47. Alfredo tenía tres suéteres de lana por cada uno que tenía de estambre. En su cumpleaños le regalaron uno de lana y dos de estambre. Si ahora su guardarropa tiene 2/3 de suéteres de lana, ¿cuántos suéteres tiene en total?

a) 6	b) 7	c) 9	d) 12	e) 15

48. Con base en los datos del problema anterior, ¿cuántos suéteres de lana tiene José después de su cumpleaños?

a) 3	b) 4	c) 6	d) 9	e) 10

49. En una urna de 9 esferas numeradas de 1 al nueve. ¿Qué probabilidad hay de que al sacar con los ojos cerrados un par, éste sume 15?

a) 2/9	b) 4/30	c) No se sabe pues saldrá al azar	d) 1/18	e) 4/36

50. Un avión y un barco salen a las 6 de la mañana. Cada 18 minutos sale un avión y cada 2 horas un barco. ¿A qué hora volverán a salir simultáneamente un avión y un barco?

a) A las 12 del día	b) A las 4 de la tarde	c) A las 6 de la tarde	d) A las 9 de la noche	e) A las 12 de la noche

51. La suma de las edades de dos hermanos no gemelos es de 32 años, ¿qué resultado obtendremos si restamos ahora de la suma total la diferencia de edades?

a) Sólo si las edades son 12 y 20, podemos restas la diferencia del total y obtener el doble de la edad del menor

b) Sea cual sea la diferencia, al restarla del total no obtendremos el doble de la edad de ninguno de ellos

c) Obtendremos el doble de la edad del menor sólo si el mayor tiene menos de 24 años

d) Sea cual sea la diferencia, al restarla del total siempre obtendremos el doble de la edad del menor de ellos

e) Obtendremos el doble de la edad del menor sólo si este tiene menos de 10 años

52. Si a es un número tal que $a < 0$, entonces:

a) $1/a > 0$	b) $1/a < 0$	c) $1/a = 0$	d) $1/a > 1$	e) $1/a = 1$

53. Si en un recipiente tenemos 6 canicas rojas, 4 blancas y 5 azules, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer una con los ojos cerrados, ésta sea blanca?

a) 2/5	b) 4/15	c) 1/3	d) 3/5	e) 2/3

54. ¿Qué probabilidad tenemos de que la primera carta que saquemos de una bajara de 52, sea un as?

a) ¼	b) 1/13	c) 1/26	d) 1/52	e) 1/104

55. Si son las 15 horas con 48 minutos y 15 segundos, ¿cuánto tiempo falta para que den las 8:00 p.m.?

a) 5 horas, 11 minutos y 45 segundos

b) 15105 segundos

c) 144000 segundos

d) 3 horas y 705 segundos

e) 250 minutos y 45 segundos

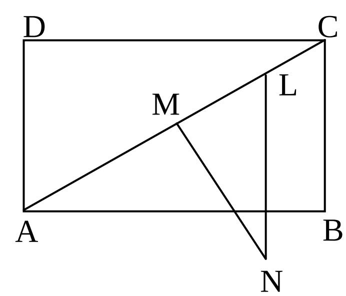
56. ¿Cuál de las siguientes cantidades quedaría más a la izquierda en la representación de una recta numérica?

a) 10^{-10} b) 1^{1} c) $4^{1/4}$ d) $8.5^{8.5}$ e) $3^{-1/3}$

57. Sea ABCD un rectángulo con BC = 2AB y sea BCE un triángulo equilátero. Si M es el punto medio de CE, ¿cuánto mide el ángulo CMD?

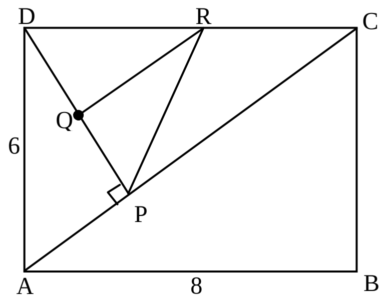
a) 65° b) 75° c) 45° d) 35° e) 55°

58. En el rectángulo ABCD, el segmento $\overline{MN}$ es perpendicular a la diagonal $\overline{AC}$ en su punto medio M. Además, la recta $\overline{LN}$ es paralela al lado $\overline{CB}$. Si se sabe que $\angle$ACB=57°, encuentra $\angle$LNM



a) 30° b) 33° c) 45° d) 57° e) 60°

59. En la figura ABCD es un rectángulo en el que $\overline{AB}$=8 y $\overline{BC}$=6; además DP es perpendicular a la diagonal AC y $\overline{QR}$ es un segmento paralelo a AC con Q como punto medio de $\overline{DP}$. Encuentra la longitud del segmento $\overline{PR}$.



a) 2.4 b) 3.2 c) 3.6 d) 4.0 e) 5.0

60. Seleccione la forma adecuada de hacer afirmativa la siguiente frase, sin cambiar su sentido original: Al no ignorar.

a) Al no estar enterado b) Al saber c) Al no saber d) Al carecer de conocimiento e) Al saber que ignora

61. Todo triángulo equilátero es equiángulo. Todo triángulo equiángulo es equilátero. Luego, ___________

a) un equiángulo es triángulo sólo si es equilátero

b) un triángulo es equilátero sólo si es equiángulo

c) un triángulo puede ser equiángulo

d) un equilátero siempre es triángulo

e) sólo es triángulo un equilátero si es equiángulo

62. Seleccione la opción que se sigue de la afirmación: *El número de los ángeles es par*.

a) No es cierto, los ángeles no existen

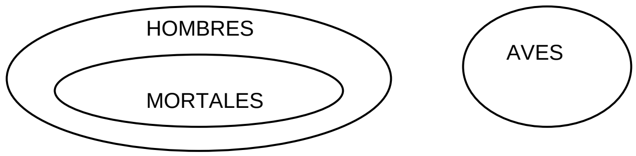
b) la mitad de los ángeles son también un número par

c) el número de ángeles es divisible entre dos

d) Los ángeles no se pueden dividir

e) No es cierto, los ángeles son incontables

63. De acuerdo al siguiente esquema se puede afirmar que:



a) Las aves son mortales

b) Todos los hombres son mortales

c) Hombres y aves son mortales

d) Ni las aves ni todos los hombres son mortales

e) Los mortales son hombres y aves

64. Escoja la forma adecuada de hacer afirmativa la frase, sin cambiar su sentido original:

A no estar libre de duda.

a) Al no dudar b) Al estar seguro c) Al dudar libremente d) Al estar dudoso e) Al no estar seguro

65. ¿Cuál de los siguientes enunciados define correctamente al Teorema de Pitágoras?

a) En un triángulo equilátero, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa

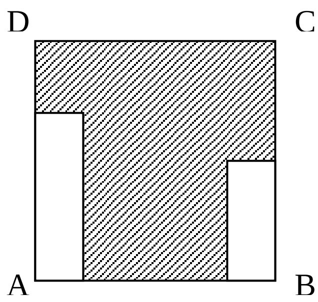
b) En un triángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa

c) En un triángulo rectángulo, la suma de los catetos al cuadrado es igual al doble de la hipotenusa

d) En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa

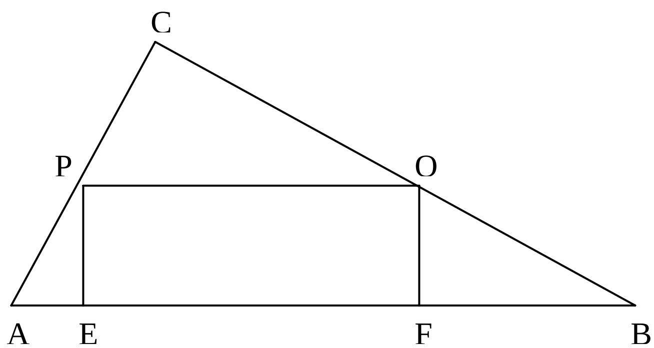
e) En un triángulo, el cuadrado de la suma de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa

66. En el interior de un cuadrado ABCD de lado a, se introdujeron 2 rectángulos como lo indica la figura. El perímetro de la parte sombreada es



a) 2a b) 3a c) 4a d) 3, 5a e) Falta información

67. Sea Δ ABC rectángulo en C. Sean P y Q puntos medios de los lados AC y BC respectivamente. Si EFQP es un rectángulo, AC = 6 cm y BC = 8 cm, entonces el área del rectángulo EFQP es:



a) 6 cm^2 b) 9 cm^2 c) 75/4 cm^2 d) 12 cm^2 e) Ninguna de las anteriores

68. En un polígono regular se pueden trazar 27 diagonales. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un polígono?

a) 360° b) 1080° c) 1260° d) 1800° e) Falta información

69. Si β es un ángulo tal que $0 < \beta < \alpha$, y tanto α como β son ángulos obtusos, el complemento del suplemento de β se mueve entre:

a) 90° y 180° b) 0° y 90° c) 0° y α - 90° d) 180° - α y 90° e) α - 90° y 90°

70. ¿En cuál de los siguientes casos es posible construir Δ un cualquiera?

i. Teniendo sus tres ángulos interiores.

ii. Teniendo dos lados y el ángulo que comprenden.

iii. Teniendo dos de sus tres alturas y un lado.

a) Sólo i b) i y ii c) ii y iii d) i, ii y iii e) Ninguna de las anteriores

71. La pendiente de la recta que pasa por los puntos A(1,2) y B punto medio del trazo CD, donde C(3,7) y D(5,1) es:

a) 2/3 b) -2/3 c) 3/2 d) -3/2 e) 0

72. Dos grillos cantan durante diez segundos. Uno canta cada 48 segundos y el otro cada 56 segundos. Si a las 12 horas 48 minutos 52 segundos empezaron a cantar juntos, la siguiente vez que comiencen al mismo tiempo serán las:

a) 12 horas 49 minutos 40 segundos

b) 12 horas 54 minutos 28 segundos

c) 12 horas 50 minutos 40 segundos

d) 12 horas 50 minutos 36 segundos

e) 12 horas 54 minutos 38 segundos

73. El menor de los números que arroja residuo 3 al dividirlo por 9, 13 y 17 es:

a) 120 b) 3981 c) 1992 d) 156 e) Ninguna de las anteriores

74. Si n y m son dos números primos entre sí, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es (son) verdadera(s)?

i. El mínimo común múltiplo entre n y m es nm.

ii. n y m no tienen divisores comunes, excepto el 1.

iii. Ambos números son primos.

a) Sólo i b) Sólo ii c) Sólo iii d) i y ii e) Ninguno de los anteriores

75. La expresión mayor, cuando $m = -1/2$ es:

a) m b) $-m^2$ c) m^3 d) $-(2m)^2$ e) $2m^3$

76. Un kilo de manzanas vale 25% más que un kilo de naranjas y éste vale 10% más que un kilo de peras. Si las peras valen $ 100 el kilo, cuatro kilos de manzanas valen:

a) $ 137.5 b) $ 550 c) $ 135 d) $ 142 e) Ninguna de las anteriores.

77. Si $x < y$, ¿cuál (es) de los siguientes números son SIEMPRE negativos?

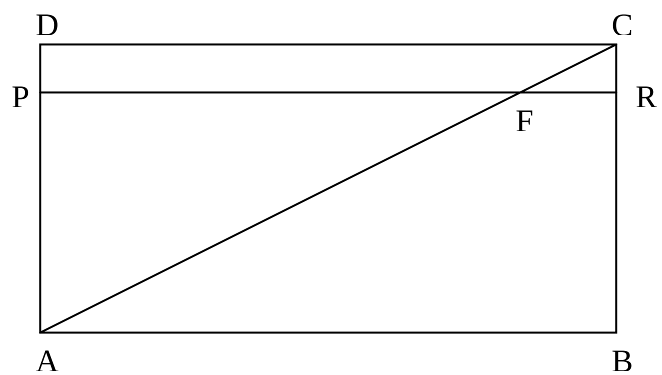
I. xy^2

II. $x - y$

III. $xy - x^2$

a) Sólo I b) Sólo II c) II y III d) I y II e) I, II y III

78. En el rectángulo ABCD de la figura, AB || PR. Si FC = 5 cm, RF = 4 cm y AF = 10 cm. ¿Cuánto vale el perímetro del rectángulo ABCD?



a) 24 cm b) 36 cm c) 42 cm d) 54 cm e) 72 cm

79. En una elección, 8 candidatos se presentan postulando a 3 cargos diferentes. ¿Cuál es el número de resultados distintos que pueden producirse? Nota: Una persona no puede tener más de un cargo.

a) 10 b) 56 c) 60 d) 336 e) Ninguna de las anteriores

80. Se lanza un dado 6 veces. La probabilidad de que el quinto lanzamiento salga un seis es:

a) $1/6^6$	b) $1/6^5$	c) 5/6	d) 1	e) 1/6

Clave de respuestas.

1. c	21. b	41. d	61. b
2. e	22. a	42. b	62. c
3. d	23. c	43. a	63. d
4. d	24. c	44. e	64. d
5. b	25. d	45. b	65. d
6. d	26. c	46. b	66. c
7. d	27. a	47. e	67. d
8. b	28. c	48. e	68. c
9. a	29. d	49. d	69. c
10. e	30. d	50. a	70. c
11. b	31. a	51. b	71. a
12. e	32. a	52. b	72. e
13. d	33. a	53. b	73. c
14. e	34. b	54. b	74. d
15. a	35. d	55. b	75. c
16. d	36. b	56. a	76. b
17. c	37. b	57. b	77. b
18. c	38. e	58. b	78. c
19. d	39. e	59. d	79. d
20. a	40. d	60. b	80. e

3. Prueba de la Propuesta

En este capítulo se presenta la descripción del experimento que se realizó en la generación 2002 – 2005 de bachilleres Experimental, así como el análisis de resultados que generó dicho experimento. La información genera las primeras conjeturas acerca del ingreso al nivel superior.

3.1. Diseño y descripción del experimento

Problemas para Razonamiento Matemático. Ingreso al Nivel Superior se aplicó a estudiantes de la Escuela Secundaria y de Bachilleres "Experimental" en el periodo comprendido entre septiembre de 2004 y mayo de 2005. Concretamente, con los estudiantes de la generación 2002 – 2005, que cursaron el último año de bachillerato y tenían intenciones de ingresar al nivel superior.

La matrícula de estudiantes inscritos para los dos semestres finales del bachillerato, fue de 87 estudiantes en la generación. De ellos, 3 argumentaron no tener intenciones o posibilidades de ingresar al nivel superior, por lo cual el taller se inició con 84 estudiantes.

El material se desarrolló en 30 sesiones, en las cuales se abordaron el total de los reactivos propuestos en el material, así como una serie de evaluaciones exploratorias del nivel desarrollado en razonamiento matemático y otras áreas propuestas en EXANI II. Las sesiones presenciales se desarrollaron durante sábados consecutivos desde el mes de septiembre del 2004 y hasta el primer fin de semana de mayo del 2005, con duración de dos horas cada una, en las cuales se intentó explicar, al menos, 8 problemas por sesión. El resto de los días laborales del taller se contempló para las evaluaciones anteriormente mencionadas.

La dosificación de problemas se indicó respecto a la numeración, es decir, en la primera sesión se abordaron problemas entre el 1 y 9, los primeros ocho se resolvieron durante clase, mientras que el último se propuso para trabajo individual. De la misma manera, en la segunda sesión, se resolvieron los problemas del 9 al 17, dejando el problema 18 como actividad extraclase, así sucesivamente. El documento se redactó pensando en que pudiera revisarse de manera autónoma, es decir, sin la necesidad de asistir al taller.

Las evaluaciones aplicadas de manera interna, durante el taller, sirvieron de indicador de la mejora en el rendimiento de cada estudiante en las distintas áreas propuestas por EXANI II en su evaluación. Sin embargo, se pensó que sería bueno comparar el rendimiento de los asistentes al taller con el de alumnos de otras instituciones. Es por ello que se decidió contratar los servicios de CENEVAL en cuanto a la aplicación de una prueba que permitiera comparar con los resultados de otros estudiantes.

Esta evaluación externa, denominada Pre – EXANI II, se aplicó en febrero del año 2005 para 71 estudiantes de la institución. Los datos evaluados por CENEVAL en esa aplicación son los que más adelante se compararán con los resultados obtenidos por las generaciones 2000 – 2003 y 2001 – 2004.

La meta propuesta, después de haber analizado detalladamente a la población estudiantil de la generación 2002 – 2005, consistió en incrementar al 60% los índices de ingreso al nivel superior de bachilleres "Experimental".

Para ello se muestra un análisis detallado de la aplicación del material en el "Taller de Razonamiento Matemático". Se analizan por principio variables como la asistencia y el rendimiento académico dentro del taller, para posteriormente relacionarlas con el ingreso al nivel superior.

La variable "ingreso al nivel superior" se presentará respecto a los porcentajes alcanzados en las dos generaciones anteriores a la 2002 – 2005. Para lo cual es necesario recalcar que los resultados expuestos serán de EXANI II para la generación 2000 – 2003 y para la generación 2001 – 2004, mientras que para la generación analizada, los resultados ocupados serán de Pre – EXANI II.

En resumen, la prueba de la propuesta, que inició con la aplicación de "Problemas para Razonamiento Matemático", consistió en presentar un análisis estadístico de los resultados obtenidos en el ingreso al nivel superior a partir de dicho material. Dentro del experimento se observó que hay dos circunstancias que determinan el ingreso al nivel superior, la asistencia al taller de razonamiento matemático y el aprovechamiento académico dentro del mismo, las cuales se intentan describir para diseñar un proceso que mantenga los porcentajes de ingreso en un nivel adecuado.

3.2. Análisis de resultados

3.2.1. Asistencia

Del total de la población en cuestión, 84 estudiantes, únicamente 44 asistieron con regularidad al taller, mientras que el resto sólo asistió a la aplicación de algunos exámenes. Se estableció que la asistencia debió ser de al menos un 80% para considerarla regular.

La siguiente base de datos presenta la información en cuanto al porcentaje de asistencia al taller incluyendo las sesiones de exámenes, así como su resultado en la aplicación de EXANI II y COSNET.

	Porcentaje de asistencia al taller	Status
ALUMNO 1	**83.33%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 2	**86.66%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 3	**100%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 4	**100%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 5	**80%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 6	40%	RECHAZADO
ALUMNO 7	53.33%	RECHAZADO
ALUMNO 8	**83.33%**	**ACEPTADO (ITSX)**
ALUMNO 9	**90%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 10	76.66%	RECHAZADO
ALUMNO 11	**80%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 12	73.33%	RECHAZADO
ALUMNO 13	**100%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 14	63.33%	RECHAZADO
ALUMNO 15	**100%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 16	**100%**	**RECHAZADO**
ALUMNO 17	73.33%	RECHAZADO
ALUMNO 18	66.66%	RECHAZADO
ALUMNO 19	**80%**	**ACEPTADO (ITSX)**
ALUMNO 20	____________	_____________
ALUMNO 21	**86.66%**	**ACEPTADO (ENV)**
ALUMNO 22	**100%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 23	**100%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 24	66.66%	RECHAZADO
ALUMNO 25	33.33%	RECHAZADO
ALUMNO 26	**83.33%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 27	0%	RECHAZADO
ALUMNO 28	33.33%	RECHAZADO
ALUMNO 29	33.33%	RECHAZADO
ALUMNO 30	**100%**	**ACEPTADO (ENS) ACEPTADO (ENV) ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 31	**100%**	**ACEPTADO (UV)**

ALUMNO 32	40%	RECHAZADO
ALUMNO 33	40%	RECHAZADO
ALUMNO 34	**83.33%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 35	**100%**	**ACEPTADO (UV)** **ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 36	**80%**	**ACEPTADO (UV)**
ALUMNO 37	**86.66%**	**ACEPTADO (UV)** **ACEPTADO (ENV)**
ALUMNO 38	30%	RECHAZADO
ALUMNO 39	**83.33%**	**ACEPTADO (ENS)**
ALUMNO 40	33.33%	RECHAZADO
ALUMNO 41	____________	____________
ALUMNO 42	90%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 43	73.33%	RECHAZADO
ALUMNO 44	40%	RECHAZADO
ALUMNO 45	33.33%	RECHAZADO
ALUMNO 46	100%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 47	83.33%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 48	0%	RECHAZADO
ALUMNO 49	0%	ACEPTADO (ENV)
ALUMNO 50	73.33%	RECHAZADO
ALUMNO 51	100%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 52	40%	RECHAZADO
ALUMNO 53	90%	ACEPTADO (UV) ACEPTADO (UV)
ALUMNO 54	90%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 55	66.66%	RECHAZADO
ALUMNO 56	____________	____________
ALUMNO 57	26.66%	RECHAZADO
ALUMNO 58	100%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 59	73.33%	RECHAZADO
ALUMNO 60	40%	RECHAZADO
ALUMNO 61	100%	ACEPTADO (UV) ACEPTADO (UV)

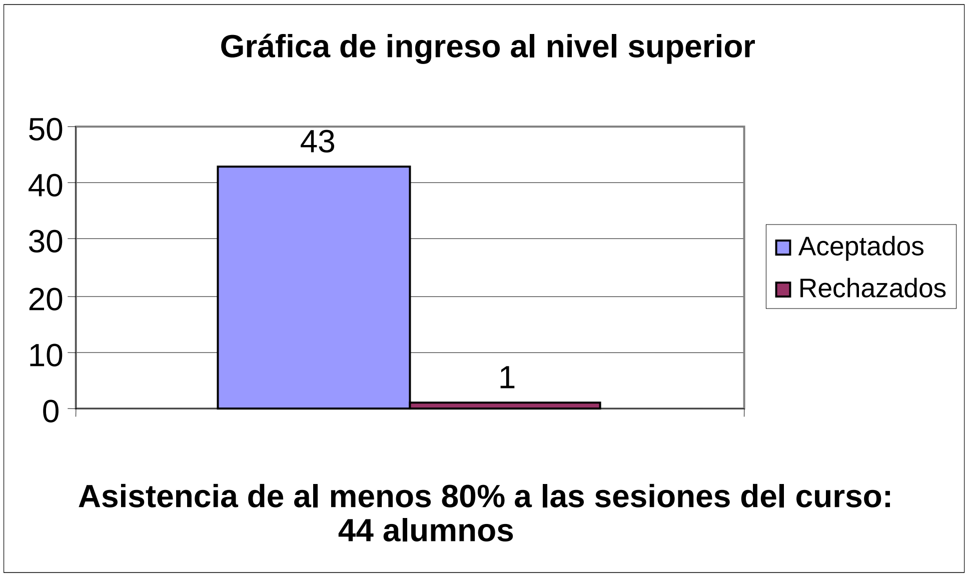
ALUMNO 62	80%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 63	86.66%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 64	60%	RECHAZADO
ALUMNO 65	100%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 66	0%	RECHAZADO
ALUMNO 67	90%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 68	33.33%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 69	100%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 70	100%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 71	0%	RECHAZADO
ALUMNO 72	10%	RECHAZADO
ALUMNO 73	80%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 74	0%	RECHAZADO
ALUMNO 75	30%	RECHAZADO
ALUMNO 76	100%	ACEPTADO (UV) ACEPTADO (UV)
ALUMNO 77	0%	RECHAZADO
ALUMNO 78	80%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 79	80%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 80	60%	RECHAZADO
ALUMNO 81	56.66%	RECHAZADO
ALUMNO 82	73.33%	RECHAZADO
ALUMNO 83	86.66%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 84	50%	RECHAZADO
ALUMNO 85	100%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 86	100%	ACEPTADO (UV)
ALUMNO 87	73.33%	RECHAZADO

* Única persona que con al menos 80% de asistencia al curso no ingresó al nivel superior.

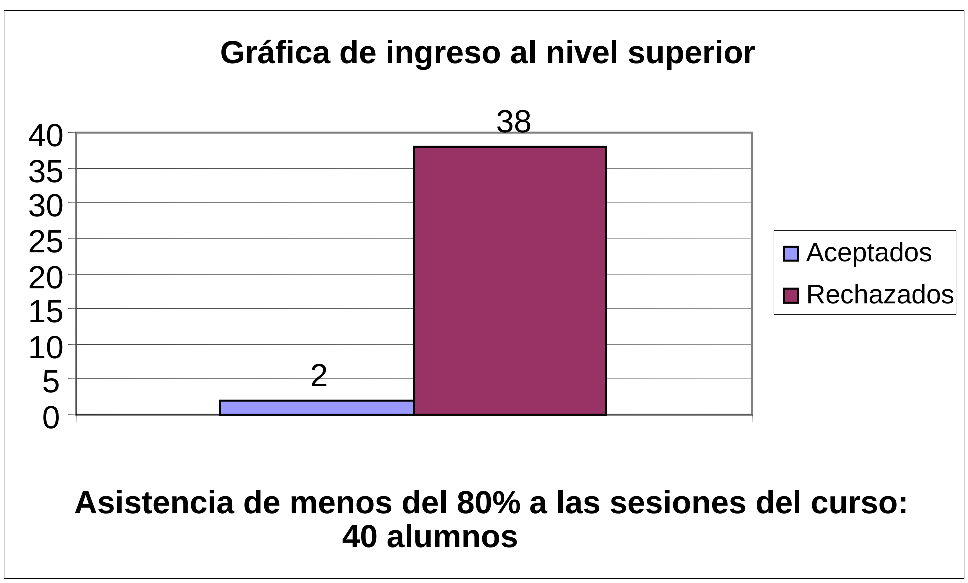
** Aparece raya en los tres alumnos que desde un principio no intentaron ingresar al nivel superior.

Las siguientes gráficas comparan la asistencia al curso contra el ingreso al nivel superior. Se muestra que una asistencia de al menos 80% al curso incide directamente sobre el resultado final.

Gráfica 1



Gráfica 2



El análisis anterior indica que la población total se dividió en dos grupos. El primero de ellos se formó con 44 alumnos que asistieron a por lo menos 24 sesiones del curso. El resultado final de ese grupo fue de un ingreso del 97.77% al nivel superior. Hay que hacer notar que algunos de los alumnos de este grupo fueron aceptados en dos, o incluso tres instituciones del nivel superior lo cual nunca había sucedido para estudiantes de Bachilleres “Experimental”. Para el segundo grupo, de 40 alumnos, el contraste es evidente. Únicamente dos personas lograron ingresar al nivel superior sin haber asistido regularmente al taller. Estos dos estudiantes asistieron únicamente a dos sesiones del taller aunque participaron en Pre – EXANI II. En consecuencia, según la información presentada, asistir regularmente al Taller de Razonamiento Matemático es un factor determinante para ingresar a la Universidad Veracruzana. Únicamente un participante del taller con asistencia de al menos 80% no logró ingresar al nivel superior.

3.2.2. Rendimiento académico en cada aplicación de examen. (Excepto Pre – EXANI II)

Dentro del curso se aplicaron 4 exámenes internos. El primero fue un examen exploratorio aplicado en la sesión inicial. Posteriormente se aplicó un examen de selección que ubicó el desarrollo de habilidades matemáticas y verbales a partir de 50 reactivos. Finalmente se aplicaron 2 evaluaciones similares a las propuestas por CENEVAL en cuanto a número de reactivos, 180, tiempo para resolver, 210 minutos, y dificultad de los reactivos.

Tabla de resultados. En escala 0 a 10. Rendimiento académico en razonamiento matemático a continuación.

NOMBRE	Examen 1 (15 Reactivos)	Examen 2 (40 Reactivos)	Examen 3 (24 Reactivos)	Examen 4 (24 Reactivos)
GRUPO 501				
ALUMNO 1	**2.66**	**3.5**	**5.41**	**6.25**
ALUMNO 2	**0**	**3**	**4.16**	**5**
ALUMNO 3	**3.33**	**5**	**4.58**	**5.41**
ALUMNO 4	**2**	**3.75**	**3.75**	**4.58**
ALUMNO 5	**2**	**2.5**	**5**	**4.58**
ALUMNO 6	0.66	2	4.16	4.58
ALUMNO 7	1.33	2	3.33	4.16
ALUMNO 8	**1.33**	**2.75**	**3.75**	**4.16**
ALUMNO 9	**4**	**4**	**4.58**	**5**
ALUMNO 10	2.66	3.25	4.16	4.16
ALUMNO 11	**3.33**	**4.25**	**3.75**	**4.16**

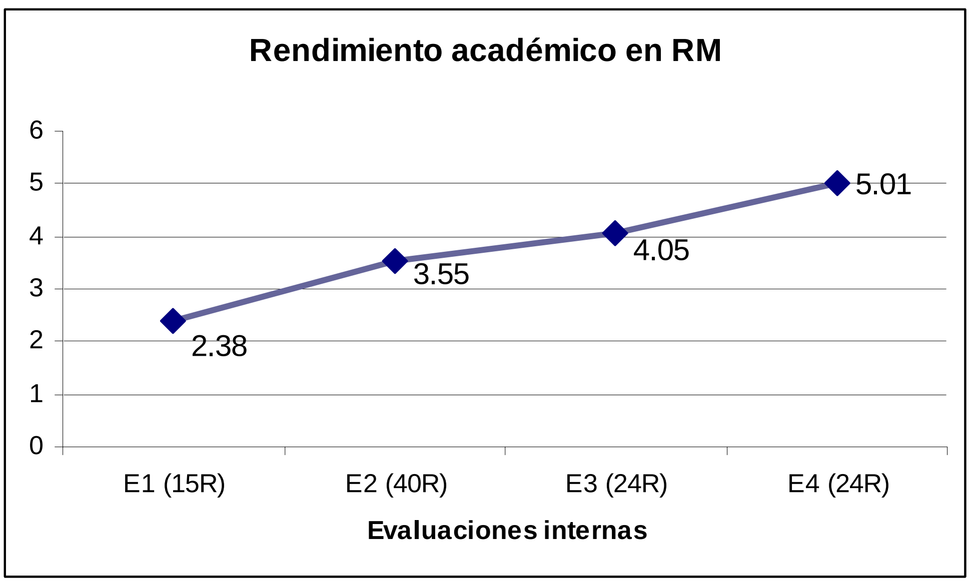
ALUMNO 12	2	3	3.75	4.58
ALUMNO 13	**4.66**	**4**	**4.16**	**5**
ALUMNO 14	N/P	N/P	2.5	3.33
ALUMNO 15	**4**	**4.5**	**5.41**	**6.66**
ALUMNO 16	1.33	3.75	4.16	5.83
ALUMNO 17	1.33	3.5	3.75	4.16
ALUMNO 18	2.66	3.5	3.75	4.58
ALUMNO 19	**1.33**	**2.5**	**3.33**	**5**
ALUMNO 20	--------	--------	--------	--------
ALUMNO 21	**1.33**	**2.5**	**4.16**	**5**
ALUMNO 22	**3.33**	**3.75**	**3.75**	**5.83**
ALUMNO 23	**3.33**	**4.25**	**4.58**	**6.25**
ALUMNO 24	N/P	N/P	N/P	N/P
ALUMNO 25	N/P	1.75	2.5	2.5
ALUMNO 26	**2.66**	**5**	**5.41**	**5.83**
ALUMNO 27	2.66	4.5	5.83	6.25
ALUMNO 28	N/P	N/P	N/P	3.33
ALUMNO 29	0	2	3.33	4.16
ALUMNO 30	**4**	**5.25**	**5.41**	**6.25**
ALUMNO 31	**3.33**	**4**	**4.16**	**5.83**
ALUMNO 32	2.66	3.25	4.16	5.83
ALUMNO 33	4.66	4.75	4.16	6.25
ALUMNO 34	**1.33**	**N/P**	**2.5**	**4.16**
ALUMNO 35	**4**	**4.25**	**4.16**	**5.83**
ALUMNO 36	**3.33**	**4.75**	**5.41**	**6.25**
ALUMNO 37	**3.33**	**4.75**	**4.58**	**6.25**
ALUMNO 38	1.33	3	3.33	4.16
ALUMNO 39	**2.66**	**3.25**	**3.75**	**5.41**
ALUMNO 40	4.66	4.75	4.16	5.83
ALUMNO 41	--------	--------	--------	--------
ALUMNO 42	**2.66**	**2.5**	**3.33**	**5.41**
ALUMNO 43	1.33	2.5	3.33	5.83
ALUMNO 44	2	3	3.75	6.25
ALUMNO 45	2	2.75	3.75	4.16

ALUMNO 46	**2.66**	**3.25**	**4.16**	**3**
ALUMNO 47	**2.66**	**3.75**	**4.16**	**5.41**
ALUMNO 48	0	2	2.5	2.5
ALUMNO 49	**4**	**4**	**3.75**	**5.41**
ALUMNO 50	3.33	2.5	3.75	3.33
ALUMNO 51	**3.33**	**2.5**	**4.58**	**5.41**
ALUMNO 52	3.33	2.75	3.33	3.75
ALUMNO 53	**3.33**	**4.25**	**4.16**	**5.83**
ALUMNO 54	**1.33**	**3.25**	**3.75**	**3.75**
ALUMNO 55	0.66	2.75	3.33	3.75
ALUMNO 56	--------	--------	--------	--------
ALUMNO 57	0.66	2	2.5	3.33
ALUMNO 58	**1.33**	**4.25**	**4.16**	**4.58**
ALUMNO 59	0.66	2	2.5	3.33
ALUMNO 60	2	3.75	4.16	5
ALUMNO 61	**2.66**	**3.75**	**4.16**	**5.41**
ALUMNO 62	**4.66**	**5**	**5.41**	**7.08**
ALUMNO 63	**0.66**	**2.75**	**4.16**	**6.66**
ALUMNO 64	1.33	3	3.75	5.41
ALUMNO 65	**2**	**2.75**	**3.75**	**4.16**
ALUMNO 66	2	3.25	3.33	5.41
ALUMNO 67	**4**	**4.5**	**5**	**6.25**
ALUMNO 68	**3.33**	**4.25**	**5**	**5.41**
ALUMNO 69	**2.66**	**4.75**	**5.41**	**5.83**
ALUMNO 70	**2.66**	**N/P**	**3.33**	**5.83**
ALUMNO 71	2.66	3.25	3.75	4.16
ALUMNO 72	N/P	N/P	N/P	3.33
ALUMNO 73	**0**	**2.75**	**3.33**	**5.73**
ALUMNO 74	N/P	N/P	N/P	N/P
ALUMNO 75	3.33	5	4.16	5.83
ALUMNO 76	**4**	**5.25**	**5.83**	**7.08**
ALUMNO 77	2.66	3.75	4.16	4.58
ALUMNO 78	**2.66**	**3.75**	**4.16**	**5.83**
ALUMNO 79	**2.66**	**3.75**	**4.58**	**6.25**
ALUMNO 80	1.33	3.5	3.33	4.58

ALUMNO 81	1.33	4	4.16	3.33
ALUMNO 82	0.66	2.75	3.33	3.33
ALUMNO 83	**0**	**3.75**	**3.33**	**4.16**
ALUMNO 84	2	3.75	4.16	4.58
ALUMNO 85	**3.33**	**4**	**4.16**	**5.83**
ALUMNO 86	**4**	**5.25**	**5.83**	**7.08**
ALUMNO 87	3.33	5.25	5	5.41
PROMEDIO	**2.38**	**3.55**	**4.05**	**5.01**

Las evaluaciones fueron aplicadas en las sesiones 1, 12, 20 y 28, respectivamente; en fechas, el día 11 de septiembre de 2004 se aplicó la evaluación número 1, el día 11 de diciembre de 2004 se aplicó la segunda, el 12 de marzo de 2005 la tercera y el 7 de mayo de 2005 la cuarta y última.

Gráfica 3



La información presentada en el gráfico indica un incremento notable en el rendimiento académico para la sección de razonamiento matemático. Es importante mencionar que entre la segunda y tercera prueba se aplicó Pre – EXANI II, sus resultados permitieron generar acciones de mejora en la aplicación del material. Sin embargo el resultado de dicha aplicación resaltaba una proximidad a la media, establecida por CENEVAL, mostrando un resultado preliminar a la aplicación de EXANI II.

El análisis de cada aplicación permitió también establecer que un motivo para incrementar las probabilidades de ingreso al nivel superior parece fue incrementar el rendimiento académico general para exámenes de 180 reactivos, y más aún, en la parte correspondiente a razonamiento matemático.

3.3. Análisis de datos

La siguiente información presenta el índice de ingreso a la Universidad Veracruzana para las generaciones 2000 – 2003, 2001 – 2004 y 2002 – 2005. Además se establece una relación entre el nivel obtenido en el examen de ingreso y el resultado en la sección de razonamiento matemático. Se intenta mostrar que mientras más elevado sea el resultado de los estudiantes en la sección de razonamiento matemático, mayores serán sus probabilidades de ingreso al nivel superior.

3.3.1. Generación 2000 - 2003

La tabla 1 muestra la información general del porcentaje de ingreso a la U.V., para estudiantes de bachilleres "Experimental".

Tabla 1

Número de estudiantes en inscritos en Bachilleres "Experimental":	79
Número de aspirantes a la U. V. de Bachilleres "Experimental" :	71
Número de aceptados en al menos una carrera de la U. V.:	25
Porcentaje de ingreso de Bachilleres "Experimental" a la U. V.:	35.21%

Fuentes: Bachilleres "Experimental" y COREXANI 2003.

Respecto a la evaluación, la tabla 2 presenta la siguiente información:

Tabla 2

Media en la sección de Razonamiento Matemático para aspirantes de Bachilleres "Experimental":	**43.87**
Media en la sección de Razonamiento Matemático para aceptados de cualquier bachillerato:	**52.23**
Media de estudiantes de Bachilleres "Experimental" aceptados en la U.V.: (25 aceptados)	**49**

Fuente: COREXANI 2003.

Según se observa en la tabla 2, los estudiantes que egresaron de bachilleres "Experimental" en el año 2003 y fueron aspirantes a ocupar un lugar en la U.V., estuvieron, aproximadamente, 10 puntos por debajo de la media aritmética que obtuvieron quienes fueron aceptados. Parece que una de las causas para lograr el ingreso es tener un resultado elevado, o más cercano a la media, en la sección de Razonamiento Matemático, ya que quienes egresaron de bachilleres "Experimental" y lograron el objetivo de ingresar se acercaron a 3 puntos de la media establecida. Parece que, en razonamiento matemático, mientras más cercano sea el resultado al establecido como promedio general de aceptados, las probabilidades de ingreso se incrementan.

3.3.2. Generación 2001 - 2004

La tabla 3 presenta la información de ingreso a la U.V., para egresados de bachilleres "Experimental" en el año 2004. Es importante mencionar que el índice de ingreso disminuyó respecto a la generación anterior en casi 6 puntos porcentuales. Este fenómeno venía ocurriendo en dos años anteriores para los estudiantes de la institución en cuestión, por lo cual se emprendió el proyecto que se basa en el desarrollo de habilidades matemáticas para incrementar el índice de ingreso al nivel superior. (Ver tabla).

Tabla 3

Número de estudiantes en inscritos en Bachilleres "Experimental":	82
Número de aspirantes a la U. V. de Bachilleres "Experimental" :	75
Número de aceptados en al menos una carrera de la U. V.:	22
Porcentaje de ingreso de Bachilleres "Experimental" a la U. V.:	29.33%

Fuentes: Bachilleres "Experimental" y COREXANI 2004.

Respecto a la evaluación, la tabla 4 presenta la siguiente información:

Tabla 4

Media en la sección de Razonamiento Matemático para aspirantes de Bachilleres "Experimental":	**43.62**
Media en la sección de Razonamiento Matemático para aceptados de cualquier bachillerato:	**52.45**
Media de estudiantes de Bachilleres "Experimental" aceptados en la U.V.: (22 aceptados)	**50.45**

Fuente: COREXANI 2004.

La tabla 4 presenta un fenómeno similar al que ocurrió en la generación 2001 – 2004. De total de aspirantes a la U.V., los egresados de bachilleres "Experimental" que lograron ser aceptados obtuvieron un resultado próximo al establecido por CENEVAL como promedio en razonamiento matemático, mientras que la población en general de la institución se alejó casi 10 puntos respecto al mismo dato. Nuevamente, parece que el resultado de razonamiento matemático incide sobre el ingreso a la universidad. Quienes fueron aceptados obtuvieron un resultado ligeramente inferior a la media.

3.3.3. Generación 2002 - 2005

Para los estudiantes egresados en el año 2005 se implementó el "Taller de Razonamiento Matemático" así como el material "Problemas para Razonamiento Matemático" que se presentó en el capítulo 2 de este trabajo. La meta interna fue incrementar al 60% los índices de ingreso al nivel superior mediante el entrenamiento en situaciones matemáticas similares a las que aparecen en EXANI II, aplicado en la Universidad Veracruzana y en la Escuela Normal Veracruzana, y en el examen aplicado para ingresar a los institutos tecnológicos diseñado por COSNET.

La tabla 5 presenta la información general de ingreso a la U.V., el número de aceptados a esa casa de estudios se incrementó en 15 estudiantes, excluyendo de esta lista a los 11 estudiantes que fueron aceptados en la Escuela Normal Veracruzana (ENV), Escuela Normal Superior (ENS), e Instituto Tecnológico de Xalapa (ITESX).

Tabla 5

Número de estudiantes en inscritos en Bachilleres "Experimental":	87
Número de aspirantes a la U. V. de Bachilleres "Experimental" :	74
Número de aceptados en al menos una carrera de la U. V.:	40
Porcentaje de ingreso de Bachilleres "Experimental" a la U. V.:	54.04%

Fuentes: Bachilleres "Experimental" y Dirección de Administración Escolar UV.

Respecto a la evaluación, la tabla 5 presenta información referente a Pre – EXANI II, y no a EXANI II como en los casos anteriores. Esto se debe a que no se cuenta con la información que provee COREXANI 2005, lo cual impide un análisis similar al que se describió para las generaciones anteriores; sin embargo los datos utilizados en esta sección también corresponden a CENEVAL, y sólo difieren en el número de preguntas respecto a algunas secciones.

Tabla 6

Media en la sección de Razonamiento Matemático para estudiantes de Bachilleres "Experimental" en la prueba Pre – EXANI II.	**39.89**
Media para Pre – EXANI II en la sección de razonamiento matemático.	**40.62**
Media para estudiantes de Bachilleres "Experimental" aceptados en la U.V., en la prueba Pre – EXANI II: (40 aceptados).	**45.11**

Fuente: CENEVAL. Pre – EXANI II.

Como se comentó anteriormente, los datos mostrados para las primeras dos generaciones fueron obtenidos de COREXANI en sus versiones 2003 y 2004, en donde la aplicación de EXANI II consta de 20 reactivos para la sección de razonamiento matemático y se observa que la media obtenida por los alumnos aceptados en la Universidad Veracruzana es menor que la media general de ingreso en ambos casos.

Por su parte, la información presentada para la generación 2002 – 2005 se deriva de la aplicación de Pre – EXANI II, en donde la sección de razonamiento matemático consta de 30 reactivos. Los datos fueron enviados por CENEVAL a Bachilleres "Experimental" como parte del resultado de la evaluación.

Se debe comentar que la media para Pre – EXANI II en la sección de razonamiento matemático es un dato que CENEVAL proporciona para comparar el rendimiento de los sustentantes de la prueba en general contra quienes presentaron el examen en la aplicación de bachilleres "Experimental".

Se puede observar que el rendimiento promedio en la sección de razonamiento matemático es casi la media general. Esto significa que la población de bachilleres "Experimental" logró, mediante el entrenamiento propuesto en el Taller de Razonamiento Matemático, incrementar su rendimiento en dicha sección de la prueba. Lo más relevante de la aplicación fue que cierta parte de la población ya estaba por arriba del promedio establecido por CENEVAL, lo cual no ocurría ni siquiera en el examen de ingreso. (Ver tabla 2 y 4).

Esto último permitió establecer bases para lograr la meta de incrementar el índice de ingreso al 60% como se había propuesto inicialmente.

El último dato de la tabla 6 permite decir que quienes ingresaron a la Universidad

Veracruzana obtuvieron algún beneficio del Taller de Razonamiento
Matemático puesto que parecía que un resultado mayor al de la media en la sección de razonamiento matemático incrementaba las probabilidades de ingreso a la universidad, lo cual se vuelve a verificar.

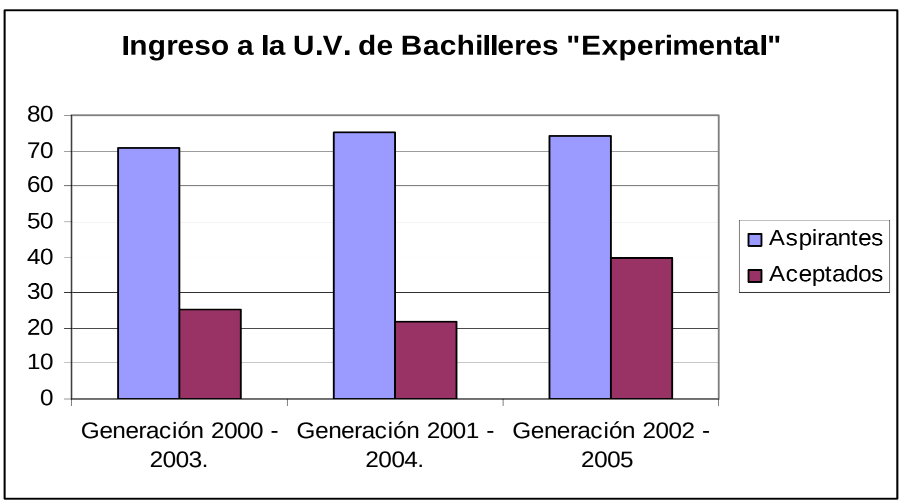
Las tablas y gráficas siguientes muestran el resultado obtenido.

Tabla 7

DATOS GENERALES	Aspirantes	Aceptados	Porcentaje
Generación 2000 - 2003.	71	25	35.21%
Generación 2001 - 2004.	75	22	29.33%
Generación 2002 - 2005	74	40	54.04%

Fuente: Bachilleres "Experimental".

Gráfica 4



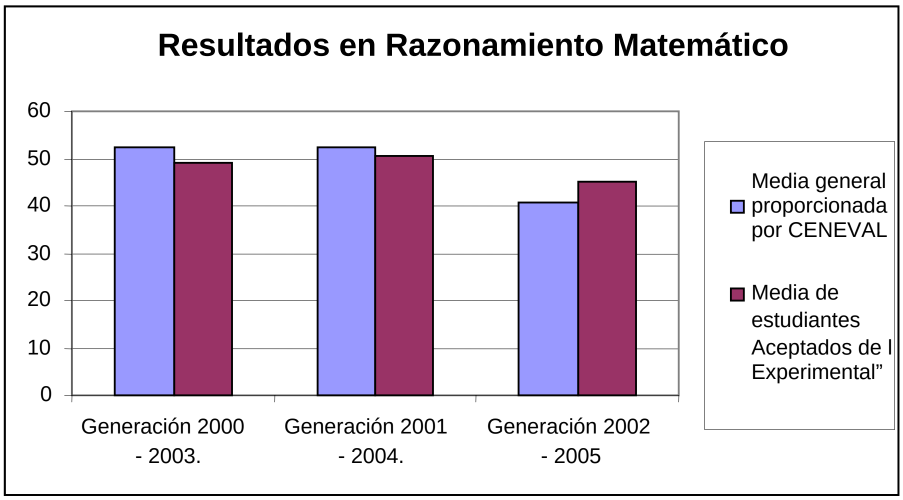
En seguida se muestra la relación encontrada entre el nivel de ingreso a alguna de carreras ofertadas por la Universidad Veracruzana y el resultado obtenido en la sección de razonamiento matemático para las evaluaciones mencionadas anteriormente, EXANI II y Pre – EXANI II.

Tabla 8

DATOS GENERALES	Media de CENEVAL	Media de estudiantes aceptados
Generación 2000 - 2003.	52.23	49
Generación 2001 - 2004.	52.45	50.45
Generación 2002 - 2005	40.62	45.11

Fuente: CENEVAL. Pre – EXANI II.

Gráfica 5



La gráfica muestra que únicamente la generación 2002 – 2005 obtuvo un resultado mayor, en la sección de razonamiento matemático, en relación con la media correspondiente a cada aplicación.

Así, según los datos mostrados, el resultado final del porcentaje de ingreso a la Universidad Veracruzana, 54.04%, para Bachilleres “Experimental” se logró en base al desarrollo de habilidades matemáticas que se buscó con el uso de “Problemas para Razonamiento Matemático”.

3.4. Información general de la aplicación. Ingreso a escuelas del nivel superior

Los datos de la sección anterior corresponden únicamente al ingreso en la Universidad Veracruzana, sin embargo la población de Bachilleres “Experimental” consideró entre sus opciones algunas licenciaturas ofertadas en el Instituto Tecnológico de

Estudios Superiores de Xalapa (ITESX), en la Escuela Normal Veracruzana "Enrique C. Rebsamen" (ENV), o bien en la Escuela Normal Superior "Manuel Suárez Trujillo" (ENS). El estudio estaría incompleto si no se presentan los resultados obtenidos en esta aplicación. Los datos de la tabla 9 fueron obtenidos a partir de las listas de aceptados de dichas instituciones.

Tabla 9

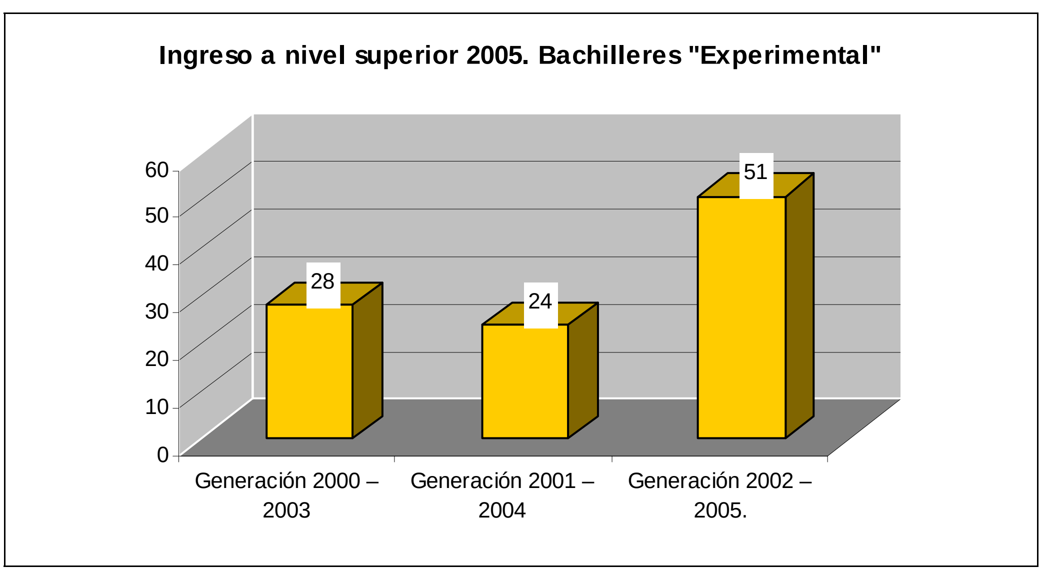
Egresados de la generación 2002 – 2005:	87
Solicitantes de ingreso al nivel superior:	84
Solicitantes de ingreso a la Universidad Veracruzana:	74 Aceptados: 40
Solicitantes de ingreso a ENV y ENS:	15 Aceptados: 7
Solicitantes a otras escuelas de nivel superior: (ITESX y Escuela Industrial)	4 Aceptados: 4
ÍNDICE GENERAL DE INGRESO AL NIVEL SUPERIOR:	60.71%

Fuente: Bachilleres "Experimental". Listas de ingreso al nivel superior.

La tabla muestra el resultado final obtenido para estudiantes de bachilleres "Experimental" en el ingreso al nivel superior. Como se observa en la tabla 9, la meta de pasar del 30% de ingreso al 60% fue superada y parecería, según lo mostrado en esta sección, que se debió, a la implementación del Taller de Razonamiento Matemático y a la aplicación del material denominado "Problemas para Razonamiento Matemático".

La gráfica final muestra el incremento obtenido respecto a las generaciones anteriores.

Gráfica 6

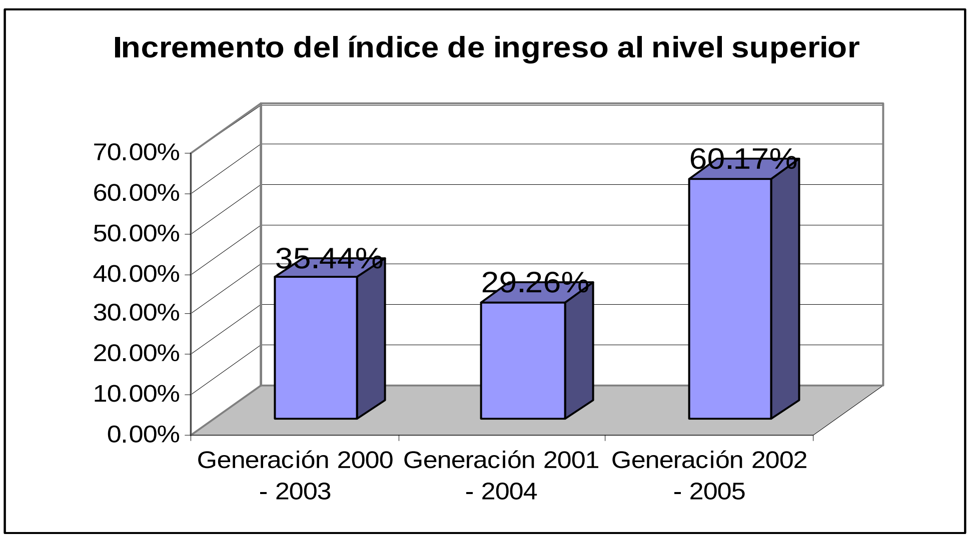


4. Conclusiones

Por último se exponen las conclusiones finales del experimento realizado. Las gráficas que se presentan permiten una mejor explicación de los resultados obtenidos. Por otra parte se propone la continuidad del trabajo con miras a incrementar el índice de ingreso al nivel superior mediante las habilidades matemáticas y materias complementarias.

4.1. Conclusiones generales

La implementación del material "Problemas para Razonamiento Matemático" durante el último año de bachillerato en la generación 2002 – 2005 de bachilleres "Experimental", tuvo como resultado incrementar al 60.17% el índice de ingreso al nivel superior. En los últimos dos años el porcentaje de ingreso al nivel superior fue de 35.44% y de 29.26%, para las generaciones 2000 – 2003 y 2001 – 2004, respectivamente. Ver gráfica.



Fuente: Bachilleres "Experimental". Listas de ingreso al nivel superior.

Como se observa en la gráfica, el índice porcentual de la generación 2001 – 2004, fue inferior que el de la generación egresada en el año 2003. Los resultados en años anteriores habían sido aproximados al 35% por lo que el problema del bajo índice de ingreso al nivel superior parecía que iba en aumento por lo que debía atenderse de manera inmediata. Cabe señalar que en la localidad existen escuelas en donde su porcentaje de ingreso al nivel superior oscila en el 80%, por lo que incrementar las probabilidades de ingreso de los estudiantes de bachilleres “Experimental” se hizo una tarea primordial. El gráfico, en su tercera barra, muestra que se duplicó el porcentaje final de ingreso y esto último se logró mediante la solución de los ejercicios propuestos en *Problemas para Razonamiento Matemático* dentro del Taller de Razonamiento Matemático, y la aplicación de Pre – EXANI II.

Cabe resaltar que el resultado obtenido ha tenido como consecuencia una mayor demanda de parte de la población que desea ingresar al nivel medio superior, esto significa que bachilleres “Experimental” ha sido reconsiderada por los padres de familia y por los propios estudiantes de secundaria como una opción favorable para continuar sus estudios hacia el nivel superior.

La institución oferta año con año 120 plazas y en los últimos dos periodos de preinscripción sólo fueron ocupados 112 lugares. Para este año 2005, la población inscrita fue de 120 y hubo 20 estudiantes rechazados. Parecería que esta demanda se debe en parte a los comentarios que se hacen respecto al resultado obtenido del índice de ingreso al nivel superior.

Por otra parte, el resultado parece demostrar la validez de la hipótesis planteada inicialmente respecto a que desarrollar habilidades matemáticas mediante ejercicios similares a los propuestos por CENEVAL, incrementa las probabilidades de ingreso al nivel superior.

Es importante mencionar que la Dirección General de Educación Terminal y Bachilleratos (DGETyB) propone 4 temas a desarrollar durante los 2 años del tronco común del bachillerato, álgebra elemental, estadística, probabilidad y cálculo diferencial e integral. Para los objetivos del curso, únicamente, se desarrollaron problemas que hacían referencia al razonamiento, omitiendo el estudio detallado de los cuatro temas propuestos anteriormente.

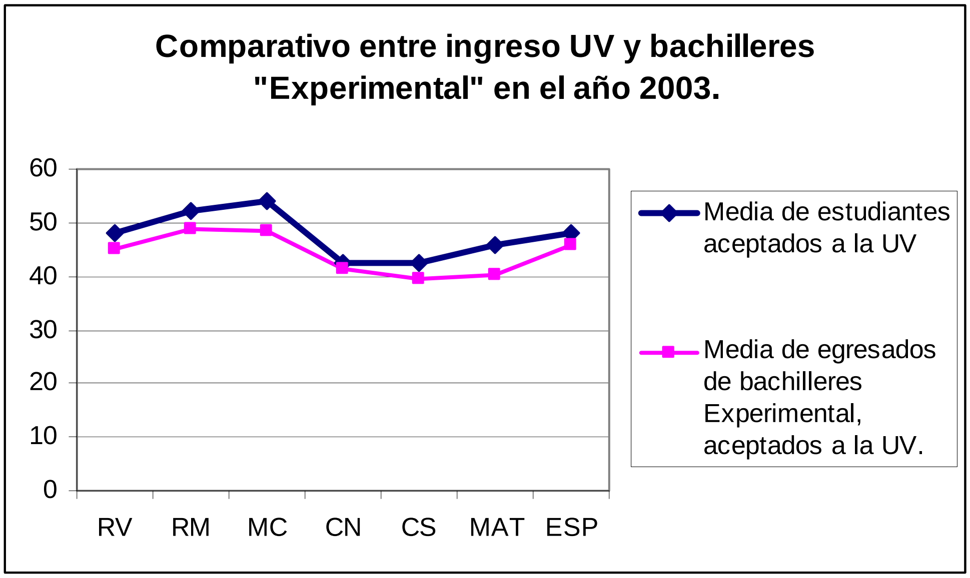
4.2. Conclusiones específicas

El planteamiento inicial, consistente en desarrollar habilidades matemáticas en estudiantes de bachillerato, contribuyó en gran medida a lograr su ingreso al nivel superior. Los datos que se presentan en la tabla siguiente argumentan esta situación.

Tabla 1

Ingreso 2003.	RV	RM	MC	CN	CS	MAT	ESP
Media general de aceptados.	48.08	52.23	54.06	42.58	42.44	45.73	48.17
Media de bachilleres "Experimental" aceptados.	45.25	49	48.44	41.46	39.56	40.37	45.76

Gráfica 1



Fuente: COREXANI ingreso. 2003. Bachilleres "Experimental".

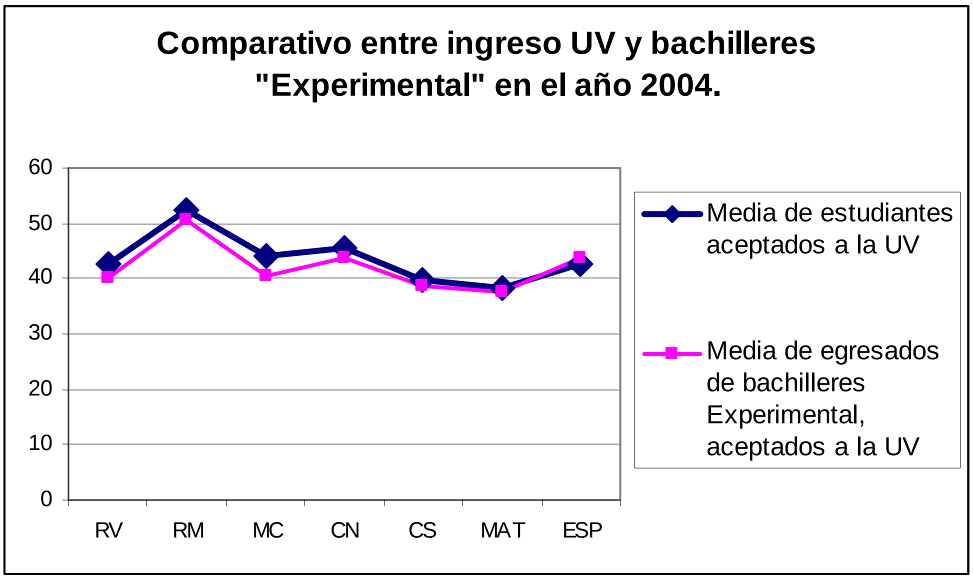
La tabla 1 presenta los datos referentes al ingreso a la UV y los compara con el resultado obtenido por los estudiantes egresados de bachilleres "Experimental" que lograron ingresar a alguna de las carreras de la universidad, en año 2003. Por su parte, en la gráfica se aprecia mejor lo sucedido respecto a esta evaluación. Se observa claramente que el resultado promedio obtenido por los estudiantes egresados de "Experimental" siempre es inferior al obtenido en general en esa aplicación.

De hecho sólo se acerca en la sección correspondiente a ciencias naturales.

Tabla 2

Ingreso 2004.	RV	RM	MC	CN	CS	MAT	ESP
Media general de aceptados	42.62	52.45	43.99	45.71	39.85	38.2	42.6
Media de bachilleres "Experimental" aceptados	40.22	50.45	40.35	43.56	38.76	37.69	43.84

Gráfica 2



Fuente: COREXANI ingreso. 2004. Bachilleres "Experimental".

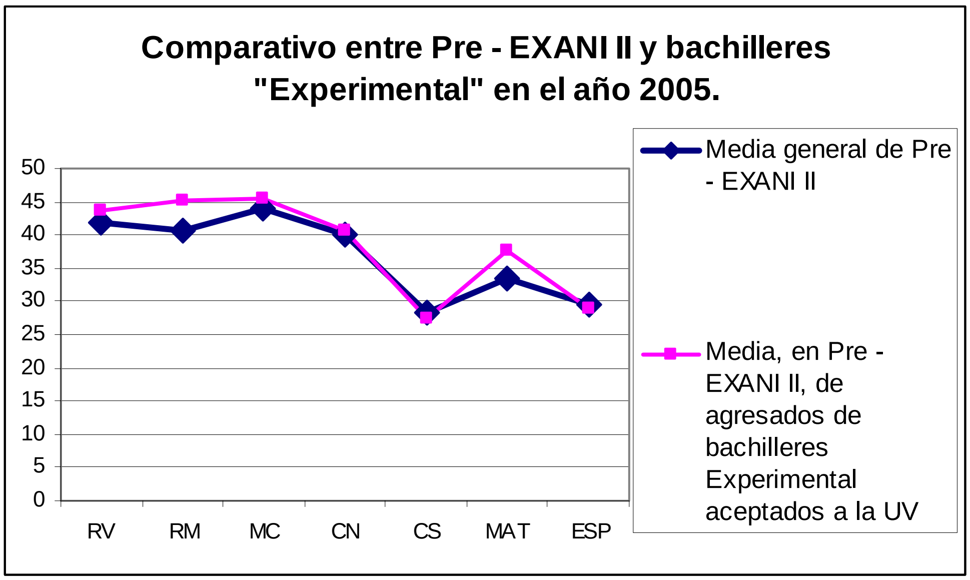
De la misma forma se observa que el resultado obtenido en el año 2004 es inferior que la media general en todos los casos, excepto en español, donde se rebasó el promedio en un punto.

La tabla 3 presenta los resultados obtenidos en la aplicación de Pre – EXANI II para los asistentes al Taller de Razonamiento Matemático. Como se explicó en el capítulo III, esta información, aunque no se basa en la misma prueba que la información de las tablas anteriores, tiene un alto grado de confiabilidad puesto que también es elaborada por CENEVAL, cuenta con los mismos criterios de selección de problemas y de evaluación, y con las mismas secciones a evaluar. Estos datos muestran el resultado respecto a los exámenes de ingreso de los dos años anteriores en cada sección y anteceden a la prueba de selección que la UV propone para sus aspirantes. Como no hay resultados se supondrá, para hacer posible la comparación, que los resultados de Pre – EXANI II se mantuvieron en EXANI II.

Tabla 3

Ingreso 2005.	RV	RM	MC	CN	CS	MAT	ESP
Media general en Pre – EXANI II.	41.88	40.62	44.11	39.96	28.34	33.39	29.39
Media de aceptados UV de bachilleres Experimental, en Pre – EXANI II.	43.56	45.11	45.36	40.65	27.48	37.67	28.85

Gráfica 3



Fuente: CENEVAL. Pre – EXANI II. 2005. Bachilleres "Experimental".

Como se observa en la gráfica anterior, en el año 2005 se obtuvieron resultados por arriba de la media general en prácticamente todas las secciones de la prueba denominada Pre – EXANI II, lo cual parece se repitió en el examen de selección a la UV puesto que el porcentaje general de ingreso se incrementó, es decir, se muestra que estar por arriba del promedio general determina el ingreso al nivel superior, como mencionó en el capítulo anterior.

El modelo propuesto para lograr la meta del 60% como porcentaje de ingreso sólo resolvía situaciones matemáticas similares a las de cualquier examen de selección. De hecho se trató de desarrollar habilidades matemáticas en base a un proceso práctico, donde el estudiante se entrenó ejecutando las etapas para resolver problemas descritas en el capítulo anterior, leer, comprender, plantear y resolver / elegir.

Según las tablas y los gráficos anteriores, la solución de *Problemas para Razonamiento Matemático*, no sólo logró que se desarrollaran las habilidades de los estudiantes en esa sección, sino que también se generó un cambio notorio en el resto de las secciones de la prueba. Esto se debe a que el proceso propuesto para resolver problemas puede aplicarse a cualquier reactivo de opción múltiple. Luego, el resultado que se resalta consiste en que desarrollar habilidad matemática en estudiantes de bachillerato alcanza para desarrollar sus habilidades en el resto de las secciones del examen, lo cual se refleja en el índice porcentual de ingreso.

En resumen, el 60.17% de ingreso al nivel superior rebasa la meta planteada, y se logró mediante la aplicación del material implementado, lo cual da argumentos para considerar válida la hipótesis inicial: desarrollar habilidad matemática en bachilleres incrementa sus probabilidades de ingreso. Además, se rebasó el objetivo inicial puesto que únicamente se resolvieron situaciones matemáticas y, colateralmente, se notó que también se desarrollaron habilidades en secciones como razonamiento verbal, matemáticas, español, y ciencias naturales, lo cual posiblemente incide en el porcentaje de ingreso.

4.3. Comentarios finales y continuidad del trabajo

Para la generación 2003 – 2006 se ha propuesto incrementar el porcentaje de ingreso al nivel superior al 100%, para lo cual, además de *Problemas para Razonamiento Matemático* se ha diseñado un par de cursos extra clase donde se resuelve el problema referente al bajo índice de conocimiento en las secciones de inglés y en los módulos específicos que la UV asigna según el área académica que cada aspirante seleccione.

Adicionalmente, se ha decidido complementar el material referente a razonamiento matemático con problemas que involucran la habilidad verbal, para lo cual se han utilizado algunas de las diferentes guías de ingreso al nivel superior que se pueden encontrar en el país.

El apoyo por parte del personal directivo hacia este proyecto ha sido fundamental. Para el ciclo escolar en curso, el Taller ha cambiado su nombre por el de “Desarrollo de Habilidades del Pensamiento” y se desglosa en razonamiento matemático, verbal, inglés, y módulos específicos, todo esto con miras a lograr la meta del 100%. Además los estudiantes de la institución han recibido toda la información contenida en este documento respecto a los resultados de la generación recién egresada y están entusiasmados de poder formar parte del proyecto.

Respecto al material propuesto en este documento se debe comentar que la elección de los problemas no fue fácil, puesto que el campo del razonamiento matemático es muy vasto y cuenta con diferentes niveles de conocimiento. El camino seguido dependió de las necesidades de los estudiantes para ingresar al nivel superior, de los conocimientos requeridos para la solución, y de nuestras preferencias. Es claro que se omitieron una gran cantidad de ejercicios y que gradualmente el material deberá pulirse mediante la práctica. Claro que esto tiene como consecuencia que varios problemas se repitan bajo diferentes contextos, lo cual, lejos de ser perjudicial para los estudiantes, conduce a una comprensión más profunda de los temas.

5. Bibliografía

[1] ALBERRO, A. BULAJICH, R. GÓMEZ, J. RECHTMAN, A. (2005). *Problemas del calendario matemático 2005*. Subsecretaría de Educación Superior e Investigación Científica. México.

[2] CANTORAL, R. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Trillas. México.

[3] CENEVAL. (2005). *Guía del examen nacional de ingreso a la educación superior (EXANI II)*. México.

[4] CENEVAL. (2005). Taller de elaboración de reactivos 2005. México.

[5] CENEVAL. (2005). http://www.ceneval.edu.mx. Fecha de consulta: Junio 2005.

[6] CENEVAL, (2005). http://brae.ceneval.edu.mx. Fecha de consulta: Junio 2005.

[7] ELLIOT, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación – acción*. Madrid: Morata.

[8] JOHNSON, R. (1998). *Estadística Elemental*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

[9] MONTT, J. GUTIÉRREZ, M. (2005). *Prueba de conocimientos específicos de matemáticas*. Editorial Universitaria. Chile.

[10] NOVAK, J. (1984). *Aprendiendo a aprender*. Ediciones Martinez Roca. Barcelona.

[11] PIMM, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata.

[12] POLYA, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México. Editorial Trillas.