UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA
VICERRECTORADO ACADÉMICO
COORDINACIÓN DE EVALUACIÓN ACADÉMICA
ÁREA: INGENIERÍA
CARRERA: INGENIERÍA EN SISTEMAS

INSTRUCTIVO DE TRABAJO PRÁCTICO LAPSO 2025-2

Asignatura: Investigación de Operaciones I (Cód. 315)

Fecha de publicación: **En las primeras cinco semanas del lapso 2025-2**

Fecha tope de entrega al Asesor: **Semana 45 / 08-11-2025**

Nombre del estudiante: JOSE LUIS TINEO CASTRO

Cédula de identidad: V-7929916

Centro Local: METROPOLITANO

Carrera: **Ingeniería de Sistemas (Cód. 236)**

Número de originales:1

Dirección de correo electrónico:joseluistineo90@hgmail.com

Teléfono celular: 0412 8031454

RESULTADO DE LA CORRECCIÓN

Objetivos		5	6	9
No logrado: 0	Logrado: 1			

UTILICE ESTA MISMA PÁGINA COMO CARÁTULA DE SU TRABAJO PRÁCTICO

ESPECIFICACIONES DEL TRABAJO PRÁCTICO

M: 2, U: 5, O: 5

Una empresa fabrica dos productos, A y B. La producción de cada unidad de A requiere 2 horas de mano de obra y 1 kg de materia prima. La producción de cada unidad de B requiere 3 horas de mano de obra y 2 kg de materia prima. La empresa dispone de un total de 120 horas de mano de obra y 80 kg de materia prima. El beneficio por unidad de A es de $6 y por unidad de B es de $8. La empresa desea maximizar su beneficio.

Determine:

1. **Variables de Decisión.**
2. **Función Objetivo.**
3. **Restricciones.**
4. **El modelo matemático de Programación Lineal.**
5. **Resuelva el problema usando el método Simplex Revisado. Muestre las tablas necesarias y la secuencia de pivoteo.**

RESPUESTA OBJ #5

1.- Variables de Decisión:

X_1 : Cantidad de Unidades de Producto A, a elaborar**.**

X_2 : Cantidad de Unidades de Producto B a elaborar

2.- Función Objetivo:

Maximizar $Z = 6x_1 + 8x_2$

3.- Restricciones:

$2x_1 + 3x_2 \leq 120$ (Mano de Obra horas)

$x_1 + 2x_2 \leq 80$ (Mano de Obra horas)

$x_1 , x_2 \geq 0$ (No Negatividad)

Algoritmo Simplex Revisado según libro de Texto. TAHA pág 278, 9 ed. en Español.

7.2.2 Algoritmo simplex revisado

Paso 0. Construya una solución factible básica de inicio, y sean $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}_B$ su base asociada y el vector de coeficientes objetivo, respectivamente.

Paso 1. Calcule la inversa $\mathbf{B}^{-1}$ de la base $\mathbf{B}$ por medio de un método de inversión apropiado.[2]

Paso 2. Para cada vector *no básico* $\mathbf{P}_j$ calcule

$$z_j - c_j = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j$$

Si $z_j - c_j \geq 0$ en maximización (≤ 0 en minimización) para todos los vectores no básicos, deténgase; la solución óptima es $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $z = \mathbf{C}_B\mathbf{X}_B$.

En caso contrario, determine el vector de *entrada* P_j que tiene el valor $z_j - c_j$ más negativo (positivo) en caso de maximización (minimización) entre todos los vectores no básicos.

Paso 3. Calcule $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$. Si todos los elementos de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$ son negativos o cero, deténgase; la solución es no acotada. En caso contrario, use la prueba de relación para determinar el vector de *salida* $\mathbf{P}_i$.

Paso 4. Forme la siguiente base reemplazando el vector de *salida* $\mathbf{P}_i$ con el vector de *entrada* $\mathbf{P}_j$ en la base actual $\mathbf{B}$. Diríjase al paso 1 para iniciar una nueva iteración.

4.- Modelo Matemático de Programación Lineal:

Maximizar: $Z = 6x_1 + 8x_2$

Sujeto a: $2x_1 + 3x_2 \leq 120$

$x_1 + 2x_2 \leq 80$

$x_1 , x_2 \geq 0$

5.- Resolución por el método Simplex Revisado Matricial (aplicación del algoritmo):

Maximizar: $Z = 6x_1 + 8x_2$

Sujeto a: $2x_1 + 3x_2 = 120$

$x_1 + 2x_2 = 80$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Solución Básica Inicial (SBI): $X_1=0$, $X_2=0$, $S_1= 120$, $S_2= 80$.

Uso de terminología:

X_B = Solución básica.

VB = Variable Básica

VNB = Variable No Básica

B = Matríz Básica.

B^{-1}= Matriz inversa de B

b = Vector de recursos.

$(Z_j - C_j)$: Costo reducido

$P_{j:}$ Coeficiente de Variable No Básica, X_j en restricciones.

C_B= Vector de Costos Básicos

C_j = Coeficiente de VNB en la función Objetivo.

$P_{1:}$ $[2 , 1]^T$

$P_{2:}$ $[3 , 2]^T$

$P_{3:}$ $[1 , 0]^T$

$P_{4:}$ $[0 , 1]^T$

$C_{1:}$ 6

$C_{2:}$ 8

Usamos el editor de Ecuaciones 3.0 de Microsoft

B = **B^{-1} =**

C_B= (0,0,) Coeficientes de S1 y S2 en Z

$X_B = B^{-1} * b$ => * = $Z = C_{B\,*}\,X_B = 0$

<u>Hallemos costos reducidos (Z_j-C_j):</u>

Fórmula: Z_j-C_j= $C_B * B^{-1} * P_j - C_j$

<u>Para X_1</u> : Z_1-C_1 = (0, 0) * * - 6 = - 6

<u>Para X_2</u> : Z_2-C_2 = (0, 0) * * - 8 = - 8 (Entra X_2 la más Negativa)

Dirección: B^{-1} * PX_2 = * =

Prueba de la razón mínima:: = min () = min (40,40)

Como hay empate a 40 elegimos S_1(la primera)

- **Regla estándar: problema Primal:** Variable de salida: **La variable básica asociada al** menor θ min positivo **(para mantener la factibilidad).** En empates: **Se elige arbitrariamente Elegí S1 como variable de salida.**
  (Taha, pág 72, Cap 3,9na Ed en Español)

Actualizamos la Base y solución:

B = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; **C_B =** (8, 0) **;** **B^{-1} =** $\frac{1}{ad-bc} * \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{3} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

Nueva X_B = **B^{-1} * b =** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix}$ (esto es $\begin{pmatrix} X_2 \\ S_2 \end{pmatrix}$)

Verifiquemos Optimalidad: **Para X_1 y S_1** (VNB):

Fórmula: Z_j-C_j= C_B * B^{-1} * P_j- C_j

__En X1__: **P_1 =** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; **C_1 = 6** ∴ **Z_1-C_1** = (8,0) * $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ - 6 = 8 * $\frac{1}{3}$ + 0 * $\frac{-2}{3}$; 8 * 0 + 0 * 1 = ($\frac{8}{3}$,0)

($\frac{8}{3}$,0) * $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ = $\frac{16}{3}$ + 0 = $\frac{16}{3}$

$\frac{16}{3}$ - 6 = $\frac{-2}{3}$ (esto indica que X1 puede mejorar Z)

__En S1__: **P_{S1} =** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; **Cs_1 = 0** ∴ **Z_1-C_1 =** (8,0) * $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = 8 * $\frac{1}{3}$ + 0 * $\frac{-2}{3}$ = $\frac{8}{3}$ + 0 = $\frac{8}{3}$

Segunda componente $\frac{8}{3} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = 8 * 0 +0 * 1 = 0 + 0 = 0

Nos queda que **$C_B - B^{-1}$** **=** $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$ y resolviendo **$C_B - B^{-1} * P_{-1}$** $\left(\frac{8}{3}, 0\right) * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{8}{3}$

$\therefore$ **Z_1-C_1 =** $\frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$.

pero $\frac{8}{3} > 0$ No entra en la solución ya que en maximización buscamos costos reducidos negativos para mejorar Z. por tanto no entra S_1.

Analizamos lo siguiente: como **Z_1-C_1** = $\frac{-2}{3} < 0$ eso implica que X 1 pudiera entrar a la Base, veamos:

$B^{-1} * P_{-1}$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, (esto es $\begin{pmatrix} X_2 \\ S_2 \end{pmatrix}$), la variable de salida sería : X2 y $\theta = \frac{x_2}{\frac{2}{3}} = \frac{40}{\frac{2}{3}}$ = 60

Nueva Base **B** = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; **B^{-1}** = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$; **$X_B = B^{-1} * b$** = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \end{pmatrix}$ (esto es X1 y S2)

X1 = 60 ; S2 = 20 ; Z = 6(60)+ 8 (0) = 360 C_B = (6,0). $\rightarrow$ coef de x1 y s2.

Verifiquemos Optimalidad: **Fórmula costos reducidos: Z_j-C_j= $C_B * B^{-1} * P_j - C_j$**

$C_2 = 8$; $C_3 = 0$; $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Costos reducidos con C_B = (6,0). **$C_B * B^{-1}$** = (6,0) * $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ = (3,0)

Para X_2: **Z_2-C_2 =** (3,0) * $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ - 8 = 9 – 8 = 1 > 0

Para S_1: $\mathbf{Zs_1\text{-}Cs_1} = (3,0) * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 3 - 0 = 3 > 0$

Como todos los $Z_j - C_j \geq 0$ la solución es óptima.

Verifiquemos la factibilidad:

Restricción 1: $2x1 + 3x2 + S1 = 2(60) + 3(0) + S1 = 120 \rightarrow S_1 = 0$

Restricción 2: $X1 + 2X2 + S2 = 60 + 2(0) + 20 = 80 \rightarrow S_2 = 20$

Todas las variables son **NO** negativas: Se satisfacen las restricciones

$X1 = 60 \geq 0$

$X2 = 0 \geq 0$

Se usaron todas las horas de mano de obra $S1 = 0. \geq 0$

Sobran 20 Kg de materia prima $S2 = 20 \geq 0$

La solución Final factible y óptima es:

X1 = 60 (produciremos 60 unidades del producto A)

X2 = 0 (No Producimos unidades del producto B)

Z = 360. (Nuestro beneficio Máximo será de $360).

Nota: Tomando en consideración lo sugerido por el profesor Guillermo Mata vemos que este método es más eficiente, preciso y veloz que el simplex tradicional con Tableau el cual requiere varias iteraciones, lo comprobamos realizando el Simplex revisado tradicional y método gráfico.

M: 2, U: 6, O: 6

Una empresa tiene tres plantas (P1, P2, P3) con capacidades de producción de 60, 80 y 90 unidades, respectivamente. Estas unidades deben ser transportadas a cuatro almacenes (A1, A2, A3, A4) con demandas de 50, 70, 60 y 50 unidades, respectivamente. Los costos unitarios de transporte desde cada planta a cada almacén se muestran en la siguiente tabla:

Costos	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**
P1	8	6	10	9
P2	9	12	13	7
P3	7	11	9	10

1. **Determine la solución inicial usando el método de la Aproximación de Vogel (VAM). Muestre la tabla de asignaciones y el costo total.**
2. **Determine la solución óptima usando el método de los costos reducidos (o método MODI/stepping stone). Muestre todas las tablas de iteración y justifique los cálculos.**

Recomendaciones:

a) Solución inicial usando el método de la Aproximación de Vogel (VAM):

✔ Construya la tabla de transporte con las capacidades, demandas y costos.
✔ Determine la solución inicial usando el método de la Aproximación de Vogel (VAM). Muestre claramente los cálculos de penalizaciones / diferencias en cada paso y las asignaciones resultantes en cada etapa de la tabla.

Muestre la tabla de asignaciones final de VAM (con todas las cantidades asignadas en sus celdas correspondientes) y calcule el costo total de transporte para esta solución inicial.

b) Solución óptima usando el método de los costos reducidos (MODI / Stepping Stone):

✔ A partir de la solución inicial obtenida con VAM, aplique el método de los costos reducidos (MODI) para encontrar la solución óptima.

✔ Para cada iteración:

- ✧ Muestre la tabla de asignaciones actual.
- ✧ Determine y presente los valores de   y para las celdas básicas.
- ✧ Calcule y presente los costos reducidos () para todas las celdas no básicas.
- ✧ Si la solución no es óptima, identifique claramente la celda de entrada, trace el circuito de mejora y determine la cantidad a transferir.
- ✧ Actualice la tabla de asignaciones.

✔ Continúe este proceso de iteración hasta que todos los costos reducidos sean no negativos, lo que indicará la solución óptima.

✔ Presente la tabla de asignaciones final (óptima) y el costo total óptimo..

Algoritmo según libro de Texto TAHA pág. 190. 9 ed. Español

190 Capítulo 5 Modelo de transporte y sus variantes

$x_{12} = 15, x_{14} = 0, x_{23} = 15, x_{24} = 10, x_{31} = 5, x_{34} = 5$. El valor objetivo asociado es $z = 15 \times 2 + 0 \times 11 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 4 + 5 \times 18 = \$475$, el cual es mejor que la solución obtenida con el método de la esquina noroeste.

Método de aproximación de Vogel (MAV). Este método es una versión mejorada del método del costo mínimo que por lo general, pero no siempre, produce mejores soluciones iniciales.

Paso 1. Para cada fila (columna) determine una *medida de penalización* restando el elemento de costo unitario *mínimo* en la fila (columna) del *siguiente elemento de costo mínimo* en la misma fila (columna).

Paso 2. Identifique la fila o columna con la penalización máxima, que rompa los empates arbitrariamente. Asigne lo más posible a la variable con el costo unitario mínimo en la fila o columna seleccionada. Ajuste la oferta y la demanda, y tache la fila *o* columna satisfecha. Si una fila y una columna se satisfacen al mismo tiempo, sólo se tacha una de las dos, y a la fila restante (columna) se le asigna una oferta (demanda) cero.

Paso 3. **(a)** Si exactamente una fila o columna con oferta o demanda cero permanece sin tachar, deténgase.

(b) Si una fila (columna) con oferta (demanda) *positiva* permanece sin tachar, determine las variables básicas en la fila (columna) mediante el método del costo mínimo. Deténgase.

(c) Si todas las filas y columnas no tachadas tienen oferta y demanda cero (restantes), determine las variables básicas *cero* por el método del costo mínimo. Deténgase.

(d) De lo contrario, vaya al paso 1.

Apliquemos el Método VOGEL según libro de Texto UNA página 341:

Segundo Método: El método de Vogël.

Vamos a presentar a continuación el método de Vogël, el cuál a menudo conduce a una SBF que está mucho más cerca de la óptima, que la solución obtenida utilizando el método de la esquina noroeste. En este método se hace intervenir a los costos unitarios, cosa que no se hacía en el método de la esquina noroeste.

Los pasos son los siguientes:

i) Para cada fila, encuentre el menor costo c_{ij} y el que le sigue en orden c_{it}. Calcule la diferencia $c_{ij} - c_{it}$. De esta manera se obtienen m números (diferencias).

ii) Realice un procedimiento similar para cada una de las n columnas y de esta manera se obtienen n números más.

iii) Elija la mayor de las $m+n$ diferencias. Supongamos que la mayor de las diferencias esté asociada a la columna j y que el costo unitario menor de esa columna le corresponda a la celda (i,j). Asignemos a la variable x_{ij} la cantidad máxima permitida, o sea $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$.

iv) Tache la fila i o la columna j, dependiendo de cuál de ellas está satisfecha, y repita el proceso completo con la matriz de transporte que quede.

A cada paso, es necesario calcular un nuevo conjunto de diferencias. Cuando la diferencia máxima no es única, puede seleccionarse arbitrariamente o también la que corresponda al menor valor de $i + j$ cuando el empate sea entre todas las filas y columnas.

RESPUESTA

Objetivo #6 Problema de Transporte

Método de la Aproximación VOGEL (VAM) y Método MODI

1.- DATOS: Solución inicial.

	A1	A2	A3	A4	OFERTA	FILA PENALIZACION
P1	8	6	10	9	60	8-6=2
P2	9	12	13	7	80	9-7=2
P3	7	11	9	10	90	9-7=2
DEMANDA	50	70	60	50	**230**	
COLUM PENALIZ	8-7=1	11-6=5	10-9=1	9-7=2		

Mayor Penalización: Columna A2 = 5 (La diferencia entre los dos costos más bajos)

Asignación : Menor costo en A2: P1 $\longrightarrow$ A2 = 6 ; Asignación mínima (60,70) = 60

Siempre asignamos el mínimo entre oferta y demanda.

Ajustes: P1 Oferta agotada (60-60=0) Tachamos la fila 1

Demanda Restante: A2 = 70 – 60 = 10.

Iteración 2:

	$A_1^{(50)}$	$A_2^{(10)}$	$A_3^{(60)}$	$A_4^{(50)}$	OFERTA	FILA PENALIZACION
P2	9	12	13	7	80	9-7=2
P3	7	11	9	10	90	9-7=2
COLUMNA PENALIZACION	9-7=2	12-11= 1	13-9=4	10-7=3		

Mayor Penalización: Columna A3 = 4

Asignación : Menor costo en A3: P3 $\longrightarrow$ A3 = 9 ; Asignación mínima (90,60) = 60

Ajustes: A3 Demanda Satisfecha (90-90=0) Tachamos la columna 3

Oferta Restante: P3 = 90 – 60 = 30.

Iteración 3:

	$A_1^{(50)}$	$A_2^{(10)}$	$A_4^{(50)}$	OFERTA	FILA PENALIZACION
P2	9	12	7	80	9-7=2
P3	7	11	10	30	10-7=3
COLUMNA PENALIZACION	9-7=2	12-11=1	10-7=3		

Asignación : Menor costo en P3: P3 $\longrightarrow$ A1 = 7 ; Asignación mínima (30,50) = 30

Ajustes: P3 Oferta agotada (30-30=0) Tachamos la fila P3

Demanda Restante: A2 = 50 – 30 = 20.

Nueva Tabla: con las demandas pendientes de asignación

	$A_1^{(20)}$	$A_2^{(10)}$	$A_4^{(50)}$	OFERTA
P2	9	12	7	80

Criterio de "parada": Nos detenemos cuando solo nos quede una fila o columna sin tachar con oferta/demanda positiva. En ésta iteración solo queda la fila P2 con oferta 80 y demandas pendientes (A1:20; A2:10; A4:50). Se asigna directamente sin calcular penalizaciones

Iteración 4: (Para las Asignaciones Restantes)

Explicación con ejemplo:

El almacén A2 pide o demanda 70 cajas. La planta P1 solo puede producir u ofertar 60 cajas, y se las envía a bajo costo (6 UM/caja).Por lo tanto para la celda P1 $\longrightarrow$ A2 (60*6 = 360 UM).

Para las 10 cajas faltantes, debemos usar otra planta. La planta P2 puede enviarlas, pero a un costo mayor (12 UM/caja), porque no hay otra opción más barata disponible. serían: (10*12=120 UM).

P2 $\longrightarrow$ A1: 20 Unid (costo 9) porque A1 necesita 20 y es una ruta disponible.

P2 $\longrightarrow$ A2 : 10 Unid (costo 12) para cubrir lo que faltaba de A2 que eran 70.

P2 $\longrightarrow$ A4 ; 50 unid (costo 7) Para cubrir toda A4.

Para explicar lo que ocurre con Almacén uno (A1) veámoslo así con una analogía:
A1 pide o le demanda a Planta 3 (P3) 50 cajas, pero P3 puede enviar la oferta restante de sólo 30 “cajas" , las más baratas a 7 UM y se las asigna 30 * 7 = 210 UM, pero A1 aún requiere 20 cajas más, P3 agotó su stock en almacén, así que no le queda otra que pedirlas a Planta 2 (P2) que envíe esas 20 cajas restantes a 9 UM/caja y 20 * 9 = 180 UM/caja. De esa forma satisfacemos toda la demanda de 50 unidades en A1 usando dos plantas diferentes tal como hicimos en A2.

	$A_1^{(20)}$	$A_2^{(10)}$	$A_3^{(60)}$	$A_4^{(50)}$
P1		60*6=360		
P2	20*9=180	10*12=120		50*7=350
P3	30*7=210		60*9=540	

Costo Total Inicial: (60*6) + (20*9)+(10*12)+50(7)+(30*7)+(60*9) = 1760 UM

Paso 2: **Verificación de Optimalidad con el método MODI:**

1.- En la tabla final VAM buscamos las celdas con asignación:

	$A_1^{(20)}$	$A_2^{(10)}$	$A_3^{(60)}$	$A_4^{(50)}$
P1		60*6=360		
P2	20*9=180	10*12=120		50*7=350
P3	30*7=210		60*9=540	

Tenemos : P1 $\rightarrow$ A2 : 60 ; P2 $\rightarrow$ A1: 20 ; P2 $\rightarrow$ A2: 10; P2 $\rightarrow$ A4:50; P3 $\rightarrow$ A1:30; P3 $\rightarrow$ A3 :60

2.-Hallamos las variables duales (U_i y V_i) planteando ecuaciones para cada variable básica, es decir las que tienen asignación VAM. Primero fijamos **U_1 = 0 (arbitrario). Esto nos permite con ecuaciones simples, resolver el resto de las variables**

1) P1 $\rightarrow$ A2 $\Rightarrow$ U1 + V2 = 6 $\therefore$ **V2 = 6-0 =6** $\Rightarrow$ **V2 =6**

2) P2 $\rightarrow$ A2 $\Rightarrow$ U2 + V2 = 12 $\therefore$ **U2 = 12- 6 = 6** $\Rightarrow$ **U2=6**

3) P2 $\rightarrow$ A1 $\Rightarrow$ U2 + V1 = 9 $\therefore$ **V1 = 9- 6** $\Rightarrow$ **V1 =3**

4) P2 $\rightarrow$ A4 $\Rightarrow$ U2 + V4 = 7 $\therefore$ **V4 = 7-6 =1** $\Rightarrow$ **V4=1**

5) P3 $\rightarrow$ A1 $\Rightarrow$ U3 + V1 = 7 $\therefore$ **U3 = 7-3 =4** $\Rightarrow$ **U3=4**

6) P3 $\rightarrow$ A3 $\Rightarrow$ U3 + V3 = 9 $\therefore$ **V3 = 9-4= 5** $\Rightarrow$ **V3=5**

3.- Hallamos los costos reducidos (C_{ij}) para celdas NO básicas (sin asignación).

Fórmula: $C_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j) \Rightarrow C_{ij}$ **– U_i - V_i**

Tomo los costos de la tabla inicial para cada celda y en la fórmula sustituyo el valor obtenido para cada variable.

CELDA	$C_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j) \Rightarrow C_{ij} - U_i - V_j$	COSTO REDUCIDO (C_{ij})
P1 $\rightarrow$ A1	C_{11} = 8 – U1 –V1 $\Rightarrow$ 8-0-3 =5	5
P1 $\rightarrow$ A3	C_{13} = 10– U1 –V3 $\Rightarrow$ 10-0-4 =5	5
P1 $\rightarrow$ A4	C_{14} = 9 – U1 –V4 $\Rightarrow$ 9-0-1 = 8	8
P2 $\rightarrow$ A2	C_{22} = 12 –U2 – V2 $\Rightarrow$ 12-6-6= 0	0
P2 $\rightarrow$ A3	C_{23} = 13 –U2 – V3 $\Rightarrow$ 13-6-5= 2	2
P3 $\rightarrow$ A2	C_{32} = 11 – U3-V2 $\Rightarrow$ 11-4-6	1
P3 $\rightarrow$ A4	C_{34} = 10 –U3-V4 $\Rightarrow$ 10-4-1	5

Todos los Costos reducidos $\mathbf{C_{ij}} \geq \mathbf{0}$ $\forall$ las celdas No básicas **por tanto la solución es óptima**, caso contrario usaríamos el método Stepping Stone. Con MODI verificamos optimalidad.

Un costo reducido igual a 0 (cero) indica que existe una solución alternativa óptima, si trazamos su circuito de mejora, obtendríamos otra solución con el mismo costo 1760 UM.

M: 4, U: 9, O: 9

Una refinería de petróleo produce tres tipos de gasolina: Gasolina Estándar (GE), Gasolina Premium (GP) y Gasolina de Alto Octanaje (GAO), mediante la mezcla de diferentes componentes. La empresa desea determinar la combinación óptima de producción para maximizar su beneficio total.

Las ventas mensuales de Gasolina Premium (GP) están limitadas a un máximo de 400 barriles. Por cada cuatro barriles de Gasolina Estándar (GE) producidos, se obtiene un subproducto de Combustible para Aviación (CA), que se puede vender a una tasa de 30 Unidades Monetarias (UM) por barril. La demanda mensual más alta de este subproducto (CA) es de 120 barriles.

Las contribuciones por barril de los productos GE, GP y GAO son de 45 UM, 85 UM y 70 UM, respectivamente. Los requisitos de procesamiento en tres unidades de refinación (Cracking, Destilación y Reforma) se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Horas de proceso por barril de combustible y disponibilidad.

Unidad de Refinación	GE (Horas/barril)	GP (Horas/barril)	GAO (Horas/barril)	Horas disponibles al mes
Cracking	2	4	1	950
Destilación	3	-	2	650
Reforma	3	2	1	1200

Formule un modelo de programación lineal de este problema para encontrar la combinación óptima de productos de modo que se maximice la contribución total y establezca lo siguiente:

1. **Variables de Decisión (Precisando cada una de las variables).**
2. **Función Objetivo.**
3. **Restricciones. (Precisando cada una de las restricciones).**
4. **El modelo matemático de Programación Lineal.**
5. **Realizar un análisis de sensibilidad para este problema de programación lineal, evaluar cómo los cambios en los parámetros del problema (como los coeficientes de la función objetivo o las restricciones) afectan la solución óptima, requiriendo el uso de un software de programación lineal para la resolución y análisis general de los resultados.**

RESPUESTA OBJ #9

1.- Variables de Decisión:

X_1 : Barriles de GE (Gasolina Estándar)
X_2: Barriles de GP (Gasolina Premium)
X_3: Barriles de GAO (Gasolina de Alto Octanaje).

2.- Función Objetivo:

El combustible de avión (CA) es un subproducto de la gasolina estándar (GE), osea depende directamente de $X_{1,}$ no la tomaremos como una nueva variable x4, queremos simplificar no complicar más el problema añadiendo variables y aumentar redundancia innecesaria.

sabemos que obtenemos 1 barril de CA por cada 4 barriles de GE es decir: CA = $\frac{x_1}{4}$ = esto es:

$\frac{1}{4} * 30$ UM = 7.5 UM. Esa la contribución de CA , si le añadimos las 45 UM de GE obtendremos 52.5 X_1 y nos queda que:

$$\mathbf{Z = 52{,}5\, X_1 + 85\, X_2 + 70\, X_3}$$

3.- Restricciones: (* El límite de CA no excede la demanda máxima de 120 barriles).

1**.- Cracking :** $2 X_1 + 4 X_2 + X_3 \leq 950$
2**.- Destilación :** $3X_1 + 2X_3 \leq 650$
3**.- Reforma :** $3X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 1200$
4**.- Límites de Mercado de GP :** $X_2 \leq 400$ (mensual)

* **(** $\frac{x_1}{4} \leq 120$ UM) $\Rightarrow$ $X_1 \leq 480$

4.- Modelo Matemático de Programación Lineal:

$$\textbf{Max} \quad Z = 52{,}5\,X_1 + 85\,X_2 + 70\,X_3$$

Sujeto a: $2X_1 + 4X_2 + X_3 \leq 950$

$3X_1 + 2X_3 \leq 650$

$3X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 1200$

$X_2 \leq 400$

$X_1 \leq 480$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$ (No negatividad)

Cálculos:

1.- Fijamos $X_1 = 0$. Si observamos la tabla inicial producir gasolina Estándar consume 8 horas totales en cracking, destilación y Reforma y el beneficio es de 45 UM , al comparar preliminarmente con los otros dos tipos de gasolina y sus unidades de refinación vemos inmediatamente que no sería beneficioso producirla en tales condiciones (Por tanto No es rentable producir GE como veremos en los cálculos abajo). No fue sencillo llegar a esa conclusión hasta observar muy bien la tabla y confirmar con el software..

2.- Sustituimos $X_1 = 0$ en las restricciones:

Destilación: $3(0) + 2X_3 = 650 \Rightarrow X_3 = 325$ barriles de GAO

Cracking: $2(0) + 4X_2 + (325) = 950 \Rightarrow 0 + 4X_2 + 325 = 950 \Rightarrow X_2 = 156.25$ barriles GP

3.- Verificando Holguras:

Reforma: $2(156.25) + 325 = 637.50 \leq 1200$ (holgura = 562.50)

GP : $156.25 \leq 400$ (Holgura = 243.75).

CA (X1) $\Rightarrow$ holgura completa 480 ya que no produciremos GE.

Beneficio Total = Z = 52.5(0) + 85 (156.25) + 70 (325) = 36.031,25 UM

Análisis de Sensibilidad:

Precios sombra: **Cracking** (aumentando 1 hora = 951)

$4X_2+325 = 951 \Rightarrow X_2= 156 \Rightarrow \Delta Z = 85 * 0.25 = 21.25$ UM (0.25 es el cambio marginal en X2) y

Rango válido: [$325{,}1925$] horas

Destilación: Aumentando 1 hora: 651.

$2X_3 = 651 \Rightarrow X_3= 326.5 \Rightarrow \Delta Z = 70* 0.5 = 35$ UM.

Rangos de Optimalidad:

Para X_1 : Si C_1 aumenta a 85 UM:

Costo de oportunidad: 70 ($\frac{3}{2}$) = 105 UM $\Rightarrow$ Límite = 85 - 52.5 = 32.5 UM

Rango: [45,85] .

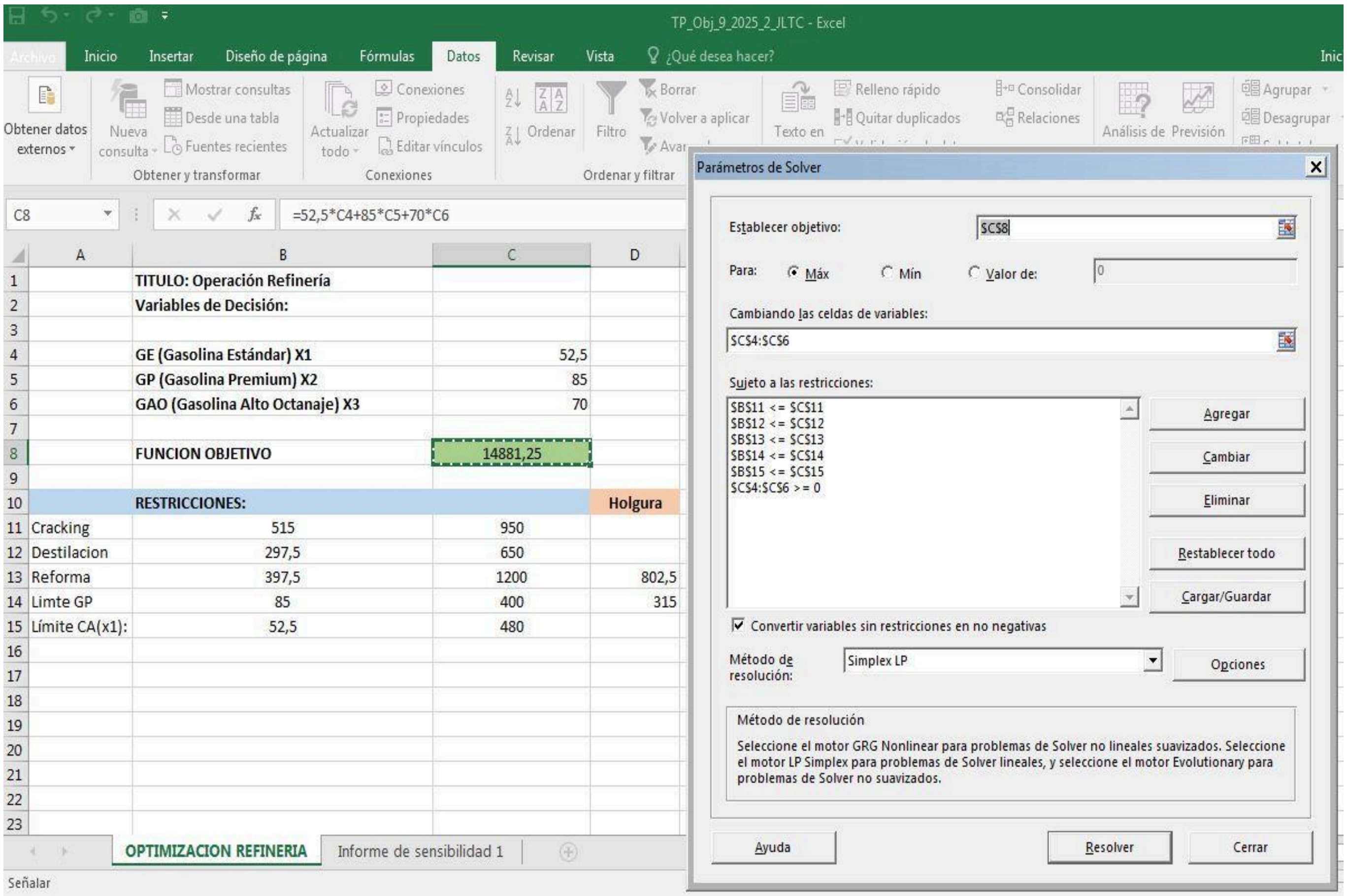
Por que X_1= 0 es óptimo?

Costo de producir GE: Cada X_1 reduce **X_3 en** $\frac{3}{2}$ barilles (por destilación)

Pérdida Neta = 70 * $\frac{3}{2}$ = 105 UM eso afecta la ganacia de (GE) en:

52.5 UM – 105 UM = -52.5 UM (pérdida)

Antes de ejecutar Solver Excel 2016



DESPUES DE EJECUTAR SOLVER EXCEL 2016 obtenemos:

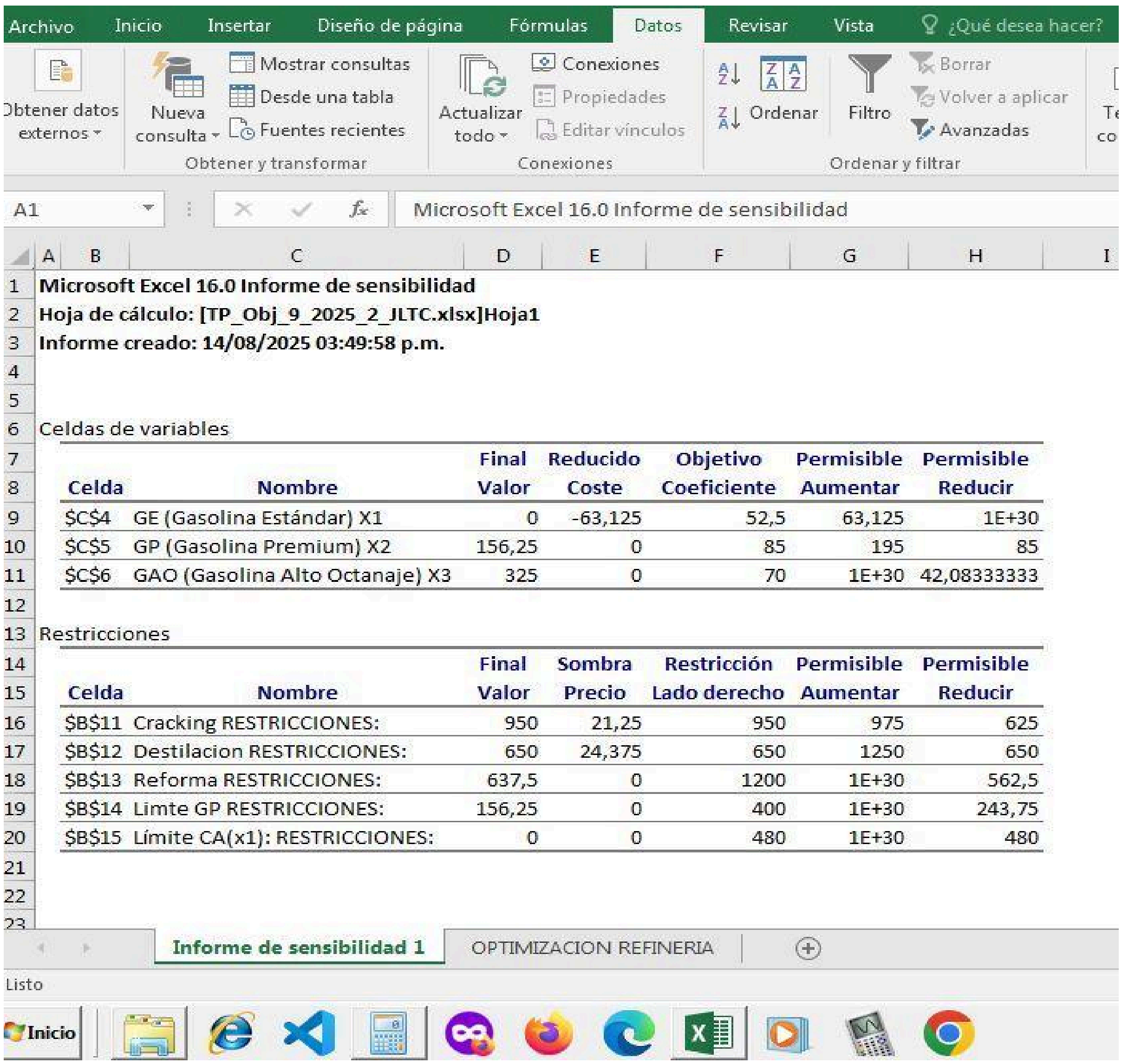
TITULO: Operación Refinería			
Variables de Decisión:			
GE (Gasolina Estándar) X1	0		
GP (Gasolina Premium) X2	156,25		
GAO (Gasolina Alto Octanaje) X3	325		
FUNCION OBJETIVO	36031,25		
RESTRICCIONES:		**Holgura**	
950	950	0	
650	650	0	
637,5	1200	562,5	
156,25	400	243,75	
0	480	480	

Estos archivos los alojé en mi repositorio Github:

https://github.com/joseluistineo90

Análisis de Sensibilidad

En el cálculo manual no consideré la restricción del cracking que también está activa y un cambio en la destilación afecta al mismo.



Microsoft Excel 16.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [TP_Obj_9_2025_2_JLTC.xlsx]Hoja1
Informe creado: 14/08/2025 03:49:58 p.m.

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
C4	GE (Gasolina Estándar) X1	0	-63,125	52,5	63,125	1E+30
C5	GP (Gasolina Premium) X2	156,25	0	85	195	85
C6	GAO (Gasolina Alto Octanaje) X3	325	0	70	1E+30	42,08333333

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
B11	Cracking RESTRICCIONES:	950	21,25	950	975	625
B12	Destilacion RESTRICCIONES:	650	24,375	650	1250	650
B13	Reforma RESTRICCIONES:	637,5	0	1200	1E+30	562,5
B14	Limte GP RESTRICCIONES:	156,25	0	400	1E+30	243,75
B15	Límite CA(x1): RESTRICCIONES:	0	0	480	1E+30	480

Observo que el precio sombra en la Destilación es menor al inicialmente estimado de 35 UM/h pero sigue siendo el recurso más crítico para invertirle y expandir

INTERPRETACION ECONOMICA Y RECOMENDACIONES

Siendo el problema maximizar el beneficio para una Refinería que produce tres tipos de gasolina, sujeto a restricciones de capacidad de procesamiento y límites de mercado: La resolución por el método analítico simplificado o mediante solver de Excel convergen hacia una solución óptima clara.

X_1 (Gasolina Estandar) GE = 0 barriles
X_2 (Gasolina Premium) GP = 156.25 barriles
X_3 (Gasolina Alto Octanaje) GAO = 325 barriles
Máximo Beneficio Total: Z = 36.031.25 UM

Interpretación Económica: La estrategia óptima para la refinería es cesar por completo la producción de (GE) y enfocar los recursos en la producción de (GAO) y en menor media (GP). Esta combinación aprovecha al máximo las capacidades de las unidades de refinación para generar el mayor ingreso posible. Producir (GE)) revela un “alto costo de oportunidad” (beneficio que se pierde al elegir GE sobre GAO o GP).

a).- Destilación (recurso crítico) : 650 horas disponibles requieren 3 horas y esto genera un “cuello de botella”.

b).- Desplazar la Producción: Las 3 horas usadas para producir un barril de (GE) dejan de estar disponibles para producir (GAO) que solo requiere 2 horas por barril en destilación, por lo tanto por cada barril (GE) se dejan de producir 1.5 barriles de (GAO) ($\frac{3}{2}$ horas = 1.5 horas) esto genera pérdida -52 UM.

Analisis de Sensibildad y Precios Sombra:

El informe de sensibilidad generado por Solver Excel nos permite entender el valor de los recursos y la estabilidad de la solución.

a) **Precios Sombra** (valores Duales): El precio sombra nos permite saber el valor marginal de un recurso osea cuánto aumenta el beneficio por cada unidad de recurso disponible (hora, en este caso).

Destilación: (Precio Sombra = 24.375 UM/h) Este es el resultado más relevante, por cada hora adicional de capacidad que se agregue a la unidad de destilación el beneficio total aumentará en 24.375 UM hasta un límite del aumento permitido en el rango de sensibilidad, esto va de 0 a 1900 horas, confirmando que la destilación es el recurso más valioso y el principal limitante de la ganancia.

Cracking: (Precio Sombra 21.25 UM/h): Una hora adicional de Cracking aumentaría la ganancia en 21.25 UM. En un rango de 325 a 1925 horas, en ese rango la solución óptima no cambia. Las variables básicas x2 y x3 siguen siendo positivas y las mismas. Si se pasa de 1925 habrá holgura y el precio sombra se vuelve cero y horas adicionales de cracking no aumentarían el beneficio. Es un recurso valioso, pero menos crítico que la destilación.

Reforma: (Límite de GP y CA precio Sombra = 0) Estos recursos no son restrictivos en la solución óptima actual ya que tienen holgura y aumentan su disponibilidad por ejemplo, más horas en Reforma o un límite mayor para GP no generaría ningún aumento en el beneficio ya que no estaríamos usando toda la capacidad disponible.

Rangos de Optimalidad:

Los rangos para los coeficientes de la función Objetivo (C_i) nos dicen cuánto puede cambiar el precio de cada producto sin que la estructura de la solución óptima cambie, es decir; sin que dejemos de producir GAO y GP o empecemos a producir GE.

Para X_3 (GAO 70 UM):

Producimos 325 barriles El rango de optimalidad va desde 70-42.083 = 27.917 UM como límite inferior; hasta el "infinito" (un rango generosamente amplio) y la solución óptima seguirá siendo X_1= 0 ; X_2= 156.25 y X_3 = 325. Esto indica que la decisión de procesar GAO es rentable, es una variable básica en la solución óptima y extremadamente robusta a mejoras en su rentabilidad., pero cuidado, como todo es mercado si los costos de producción aumentan o cae el precio de venta debemos revaluar el modelo

Para X2 (GP 85 UM)

Se producen 156.25 barriles de GP en un rango mínimo de (85-85) = 0 UM y máximo de (85+195) =280 UM, esto implica que ante fluctuaciones amplias del cambio de precio en el mercado petrolero la producción de GP seguirá siendo óptima, su costo reducido cero significa que el beneficio unitario de GP es exactamente el necesario para mantener la variable en la solución óptima. Si supera los 280 UM GP se volvería más rentable.

Para X_1 (GE 52.5 UM):

El análisis muestra que para producir GE se vuelva rentable y entre en la solución, su contribución por barril tendría que aumentar significativamente (más allá de 85 UM), el beneficio unitario debe aumentar en (85-52.5=32.5 UM) lo cual es muy improbable dado el mercado.

RECOMENDACIÓN ESTRATEGICA:

a) Reasignar la producción:

Implementar inmediatamente el plan óptimo, detener la producción de GE y maximizar la producción de GAO, complementando con GP hasta su límite de Mercado. Es oportuno asignar el escaso tiempo de destilación al producto más rentable por hora consumida (GAO).

b) Inversión en Expansión:

Aumentar la capacidad de la unidad de Destilación, el alto precio Sombra (85 UM/h) significa que cualquier inversión cuyo costo/h adicional sea menor a 24.375 UM, tendrá un retorno positivo inmediato. Por ejemplo, agregar 50h de capacidad generaría aproximadamente 1218.75 UM.

c) Negociación Comercial:

Se podría evaluar la subcontratación o la negociación de ser posible con otras refinerías para “alquilar tiempo de Destilación”, siempre que el costo sea menos a 24.375 UM/h.

d) Desarrollo del Producto:

Investigar reformulaciones o procesos que reduzcan el tiempo de Destilación requerido por la gasolina (GE), ya que incluso una reducción modesta podría hacerla rentable de nuevo.

En Conclusión

El modelo proporciona una solución operativa y además que sirve como una poderosa herramienta de análisis estratégica, identificando el "cuello de botella" principal y cuantificando el valor económico de su expansión. El uso de Excel solver me permitió refinar el análisis inicial y obtener resultados exactos ya que en el análisis numérico manual del proceso de destilación no tomé en cuenta el cracking y como afecta el aumento de un proceso en el otro de allí la discrepancia de 50 * 35 = 1750 UM y solver da el resultado exacto del precio sombra que es 24.375 UM/h No 35 UM/h como calculé inicialmente.

1.- No producir gasolina estándar (GE), la pérdida sería de 52.5 UM por cada barril.

2.- Invertir en destilación: Precio Sombra: 24.375 UM/hora adicional.

Ejemplo: Aumento 50 h $\Rightarrow$ 50 * 24.375 = 1218.75 UM.

Solución óptima: $X_1 = 0$; $X_2 = 156.25$; $X_3 = 325$

Sensibilidad: Destilación: 24.375 UM/h (Rango 0 -1900h)

Cracking: 21.25 UM/h (Rango 325 - 1925h) si lográramos un costo menor por hora adicional de cracking sería rentable hacerlo dentro del rango de 1925 horas.

FIN DEL TRABAJO PRACTICO