EJERCICIOS DE APROXIMACIÓN con Mínimos Cuadrados y Base de Funciones Trigonométricas

Tabla de contenido

Objetivos

Identificar el algoritmo básico de mínimos cuadrados usando base de funciones trigonométricas

Aproximar de funciones periódicas no continuas.

Encontrar contenido de frecuencias en funciones

- de combinación lineal de armónicas
- de funciones no periódicas
- de registros genéricos

Asociar con Transformada Discreta de Fourier

Planteo de Mínimos Cuadrados con funciones trigonométricas

Sea la función $\boldsymbol{y = g(t)}$, una función periódica con periodo igual a $\boldsymbol{T_P}$, dada en forma discreta mediante N puntos en el rango de un periodo, es decir que se conocen los pares ordenados *(t_n ; g_n=g(n))* con *n=1:N*. Las abscisas de los puntos datos son equidistantes de modo que el periodo a $\boldsymbol{T_P}$ está dividido en N intervalos iguales de longitud $\Delta \boldsymbol{t} = \boldsymbol{T_P/N}$.

Se busca una aproximación, como una representación continua, usando como base funciones trigonométricas en la forma

$$P(t) = a_0\,1 + \sum_{k=1}^{m} \left\{ a_k\ \cos[k\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1)] + b_k\ \sin[k\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1)] \right\}$$	(1)

que, haciendo uso de las identidades trigonométricas, es posible escribir como:

$$P(t) = a_0\,1 + \sum_{k=1}^{m} A_k\ \cos[k\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1) + \emptyset_k]$$ Con $A_k = \sqrt[2]{[(a_k)^2 + (b_k)^2]}$ y $\emptyset_k = atang(\frac{-b_k}{a_k})$	(2)

$\boldsymbol{A_k}$ y $\boldsymbol{\emptyset_k}$ se denominan respectivamente amplitud y fase de la armónica k-ésima.

De comparar la función discreta dato *(t_n ; g_n=g(n))* con *n=1:N*, con la representación continua dada por (1), en las abscisas datos dadas por

$t_n = t_1 + (n-1)\Delta t$ con n=1:N	(3)

se obtienen los N residuos

$$r_n = g_n - P(t_n) = g_n - \sum_{k=0}^{m} \varphi(n,k)\ \alpha_k$$	(4)

Y los coeficientes $\boldsymbol{\alpha_k}$ se obtiene de las condiciones de normalidad propias del método de mínimos cuadrados que es resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\Phi^T\Phi\,\vec{\alpha} = \Phi^T\vec{g}$$

Los coeficientes del término independiente $\vec{b} = \Phi^T\vec{g}$ son

$$\vec{b}(1) = \Phi^T\vec{g}(1) = \sum_{n=1}^{N} g(n)$$	$$\vec{b}(2k) = \Phi^T\vec{g}(2k) = \sum_{n=1}^{N} g(n)\ \cos[k\frac{2\pi}{N}(n-1)]$$ $$\vec{b}(2k+1) = \Phi^T\vec{g}(2k+1) = \sum_{n=1}^{N} g(n)\ \sin[k\frac{2\pi}{N}(n-1)]$$

EJERCICIO 1- función pulso finito de periodo T_P y duración $T_P/2$

Sea la función periódica con periodo $\boldsymbol{T_P}$=**10**

$$g(t) = \begin{cases} 1\ si\ t\ \in [0;\ T_P/2) \\ 0\ si\ t\ \in [\ T_P/2;\ \ T_P) \end{cases}$$

Para N=4, comprobar que

$$t_n = [\ 0;\ \ 2,5;\ \ \ 5;\ \ 7,5]$$
$$g_n = [\ 1;\ \ \ 1;\ \ \ 0;\ \ \ 0]$$

La Base para la aproximación por mínimos cuadrados es

$$B = \{\ 1,\ cos\left[k\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1)\right];\ \ sin\left[k\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1)\right]\}\quad \text{con k=1:1}$$

y los elementos de la Base evaluados en las abscisas discretas resultan las siguientes filas de la matriz $\boldsymbol{\Phi}$ para n=1:N

$$\Phi(n,:) = [1;\qquad \varphi_{2k}(t_n);\qquad \varphi_{2k+1}(t_n)]\quad \text{con k=1:1}$$

$$\Phi(n,:) = [\ 1;\ \ cos\left[k\frac{2\pi}{N}(n-1)\right];\ \ sin\left[k\frac{2\pi}{N}(n-1)\right]]\quad \text{con k=1:1}$$

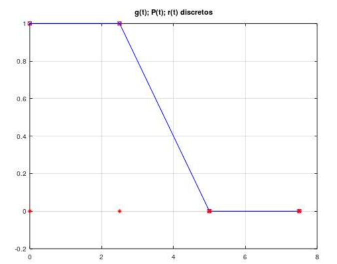
La matriz $\boldsymbol{\Phi}$ y el vector $\boldsymbol{\Phi^T\vec{g}}$ resultan

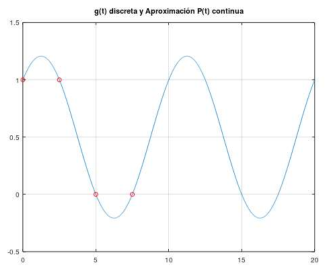
$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Phi^T\vec{g} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Luego de resolver las ecuaciones normales$\boldsymbol{\Phi^T\Phi\,\vec{\alpha} = \Phi^T\vec{g}}$, resultan

$$\vec{\alpha} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2/4 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2/4 \\ \sqrt[2]{[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2]} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ \sqrt[2]{2}/2 \end{Bmatrix}$$

Resulta un vector residuo con norma cuadrática $\|\vec{r}\|_2 = \boldsymbol{1.3E-16}$. En las siguientes figuras se presentan: a la izquierda las funciones discretas, y la derecha la aproximación continua P(t) obtenida conjuntamente con la g(t) discreta dato.





La representación continua es

$$P(t) = 0,5 \cdot\ 1 + 0,5\ \ cos[\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1)] + 0,5\ \ sin[\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1)]$$

$$P(t) = 0,5 \cdot\ 1 + \sqrt[2]{2}/2\ \ cos[\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1) - \ \pi/4\ ]$$

Para N=8, comprobar que

$$\boldsymbol{t_n} = [\,\mathbf{0};\ \ \mathbf{1,25};\ \ \mathbf{2,5};\ \ \mathbf{3,75};\ \ \mathbf{5};\ \ \mathbf{6,25};\ \ \mathbf{7,5};\ \ \mathbf{8,75}]$$
$$\boldsymbol{g_n} = [\,\mathbf{1};\ \ \mathbf{1};\ \ \mathbf{1};\ \ \mathbf{1};\ \ \mathbf{0};\ \ \mathbf{0};\ \ \mathbf{0};\ \ \mathbf{0}]$$

La Base para la aproximación por mínimos cuadrados es

$$\boldsymbol{B} = \{\,\mathbf{1},\ \boldsymbol{cos}\left[\boldsymbol{k}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T_P}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1})\right];\ \boldsymbol{sin}\left[\boldsymbol{k}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T_P}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1})\right]\}\quad \text{con k=1:3}$$

y los elementos de la Base evaluados en las abscisas discretas resultan las siguientes filas de la matriz $\boldsymbol{\Phi}$ para n=1:N

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{n},:) = [\mathbf{1};\qquad \boldsymbol{\varphi_{2k}}(\boldsymbol{t_n});\qquad \boldsymbol{\varphi_{2k+1}}(\boldsymbol{t_n})]\quad \text{con k=1:3}$$
$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{n},:) = [\,\mathbf{1};\ \boldsymbol{cos}\left[\boldsymbol{k}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\right];\ \boldsymbol{sin}\left[\boldsymbol{k}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\right]]\quad \text{con k=1:3}$$

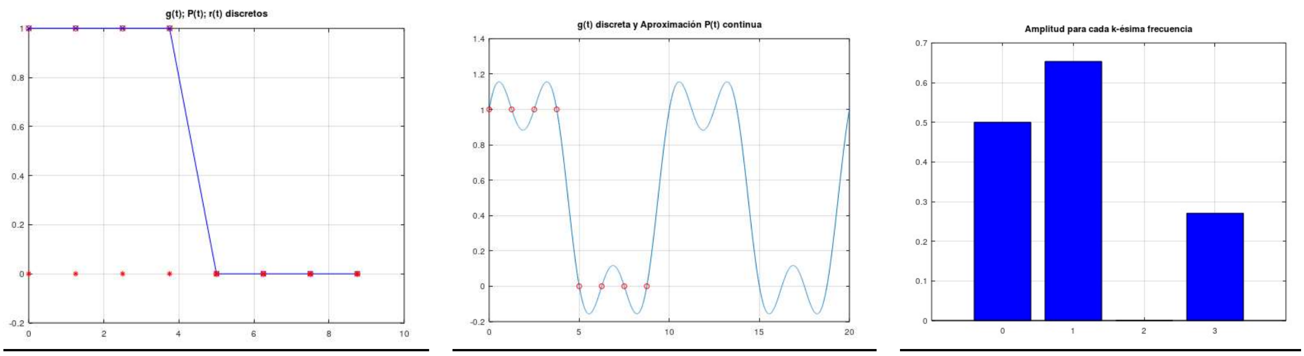
El vector $\boldsymbol{\Phi^T}\vec{\boldsymbol{g}}$ resulta

$$\boldsymbol{\Phi^T}\vec{\boldsymbol{g}} = \left[\mathbf{4}\quad \mathbf{1}\quad (\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{2}})\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{1}\quad (-\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{2}})\right]^{\boldsymbol{T}}$$

Luego de resolver las ecuaciones normales $(\boldsymbol{\Phi^T\Phi})\,\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\Phi^T}\vec{\boldsymbol{g}}$, resultan

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \left[\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}}\quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\quad \frac{(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{2}})}{\mathbf{4}}\quad \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{4}}\quad \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{4}}\quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\quad \frac{(-\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{2}})}{\mathbf{4}}\right]^{\boldsymbol{T}}$$
$$\boldsymbol{A_k} = [\boldsymbol{A_0}\quad \boldsymbol{A_1}\quad \boldsymbol{A_2}\quad \boldsymbol{A_3}] = [\mathbf{0,5}\quad \mathbf{0,6533}\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{0,2706}]$$

Resulta un vector residuo con norma cuadrática $\|\vec{\boldsymbol{r}}\|_2 = \mathbf{3.3}\boldsymbol{E}-\mathbf{16}.$ En las siguientes figuras se presentan: a la izquierda las funciones discretas, y en el centro la aproximación continua P(t) obtenida conjuntamente con la g(t) discreta dato. A la derecha se presentan los valores de amplitudes A_k, para cada k.



La representación continua es

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}}\cdot\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\,\boldsymbol{cos}\left[\mathbf{1}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T_P}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1})\right]+\frac{(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{2}})}{\mathbf{4}}\,\boldsymbol{sin}\left[\mathbf{1}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T_P}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1})\right]+\mathbf{0}\,\boldsymbol{cos}\left[\mathbf{2}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T_P}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1})\right]+\mathbf{0}\,\boldsymbol{sin}\left[\mathbf{2}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T_P}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1})\right]$$
$$+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\ \boldsymbol{cos}[\mathbf{3}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T_P}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1})]+\frac{(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{2}})}{\mathbf{4}}\ \boldsymbol{sin}[\mathbf{3}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T_P}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1})]$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}}\cdot\ \mathbf{1}+\mathbf{0,6533}\ \boldsymbol{cos}\left[\mathbf{1}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T_P}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1})+\mathbf{1.1781}\right]+\mathbf{0}\ \boldsymbol{cos}\left[\mathbf{2}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T_P}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1})-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\right]+$$
$$+\mathbf{0,2706}\ \boldsymbol{cos}[\mathbf{3}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T_P}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1})+\mathbf{0.3927}\,]$$

Se debe puede destacar que no hay contribución del múltiplo par (k=2) de la frecuencia $\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}/\boldsymbol{T_P}$

<u>Para N=32, comprobar que</u>

$$\boldsymbol{t(n) = 0 + (n-1)\left(\frac{Tp}{32}\right) \qquad n = 1{:}N = 32}$$

La Base para la aproximación por mínimos cuadrados es

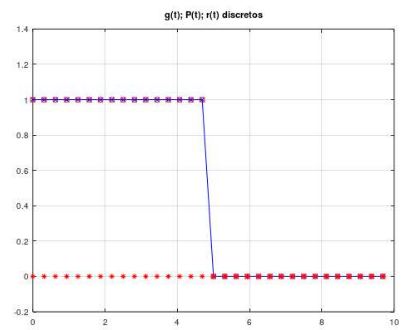
$$\boldsymbol{B = \{\, 1,\ cos\left[k\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1)\right];\ sin\left[k\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1)\right]\}} \quad \text{con k=1:15}$$

y los elementos de la Base evaluados en las abscisas discretas resultan las siguientes filas de la matriz $\boldsymbol{\Phi}$ para n=1:N

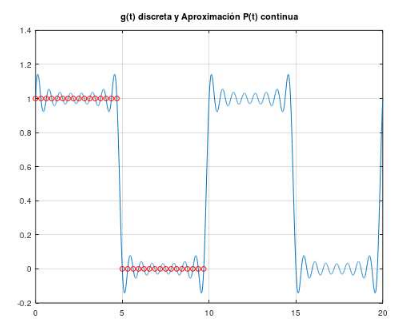
$$\boldsymbol{\Phi(n,:) = [1; \qquad \varphi_{2k}(t_n); \qquad \varphi_{2k+1}(t_n)]} \quad \text{con k=1:15}$$

$$\boldsymbol{\Phi(n,:) = [\ 1;\ cos\left[k\frac{2\pi}{N}(n-1)\right];\ sin\left[k\frac{2\pi}{N}(n-1)\right]]} \quad \text{con k=1:15}$$

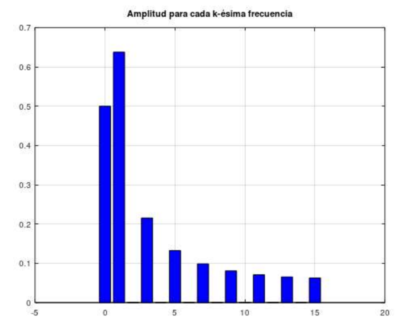
Luego de resolver las ecuaciones normales $(\boldsymbol{\Phi^T\Phi})\,\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\Phi^T}\vec{\boldsymbol{g}}$, resultan las siguientes gráficas para las funciones discretas, la aproximación continua P(t) y las amplitudes de cada armónica k (incluyendo la función base 1 en k=0). La norma cuadrática resulta $\|\vec{\boldsymbol{r}}\|_2 = \boldsymbol{4.4E-15.}$



funciones discretas con m=15

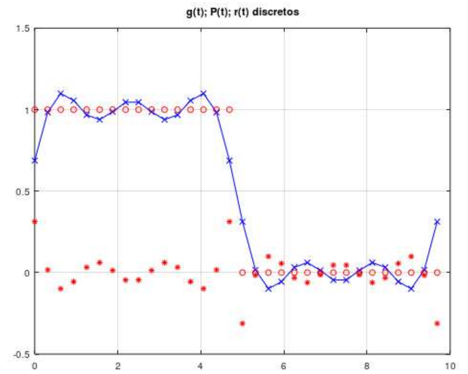


P(t) continua con m=15

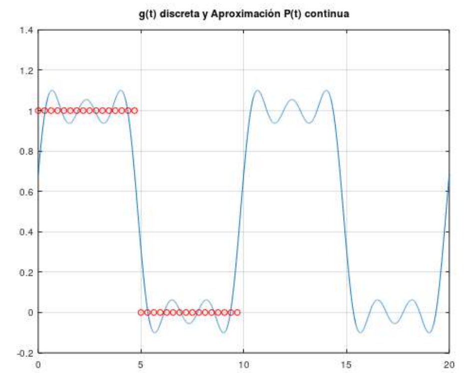


Amplitudes para cada k

Si para los mismos datos sólo se retienen en las aproximaciones la función base 1, y las armónicas con k=1:5 (es equivalente a considerar las 4 primeras amplitudes no nulas del diagrama de Amplitud en función de frecuencias), resultan las siguientes graficas; y a norma cuadrática resulta $\|\vec{\boldsymbol{r}}\|_2 = \boldsymbol{0,68674.}$



g(t), P(t) y r(t) discretas con m=5



P(t) continua con m=5

EJERCICIO 2- función "diente de sierra" de periodo T_P y duración $T_P/2$

Sea la función periódica con periodo $\boldsymbol{T_P}$=**10**

$$\boldsymbol{g(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{si\, t} \in [\boldsymbol{0}; \dfrac{\boldsymbol{T_P}}{\boldsymbol{2}}] \\ \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{si\, t} \in (\dfrac{\boldsymbol{T_P}}{\boldsymbol{2}};\ \boldsymbol{T_P}) \end{cases}$$

<u>Para N=16, comprobar que</u>

$$\boldsymbol{t(n) = 0 + (n-1)\left(\frac{Tp}{16}\right) \qquad n = 1{:}N = 16}$$

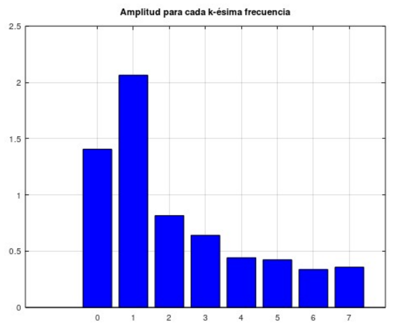
La Base para la aproximación por mínimos cuadrados es

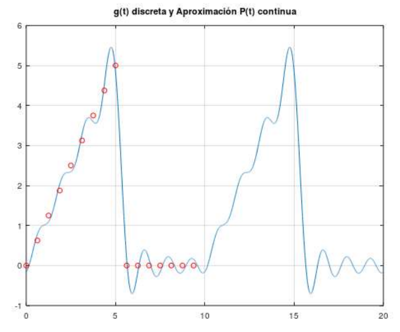
$$\boldsymbol{B} = \{\, \boldsymbol{1},\ \boldsymbol{cos}\left[\boldsymbol{k\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1)}\right];\ \boldsymbol{sin}\left[\boldsymbol{k\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1)}\right]\} \quad \text{con k=1:7}$$

y los elementos de la Base evaluados en las abscisas discretas resultan las siguientes filas de la matriz $\boldsymbol{\Phi}$ para n=1:N

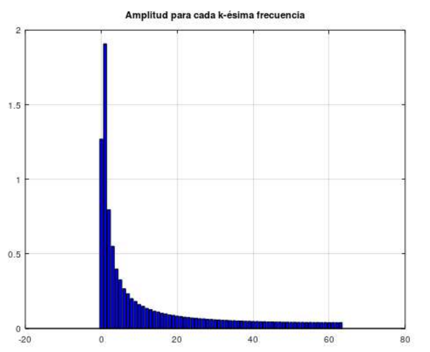
$$\boldsymbol{\Phi(n,:)} = [\ \boldsymbol{1};\ \boldsymbol{cos}\left[\boldsymbol{k\frac{2\pi}{N}(n-1)}\right];\ \boldsymbol{sin}\left[\boldsymbol{k\frac{2\pi}{N}(n-1)}\right]] \quad \text{con k=1:7}$$

Luego de resolver las ecuaciones normales $(\boldsymbol{\Phi^T\Phi})\,\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\Phi^T}\vec{\boldsymbol{g}}$, resultan las siguientes gráficas para las amplitudes de cada armónica k, para g(t) discreta y su aproximación continua P(t), incluyendo todas las frecuencias posibles (m=7)

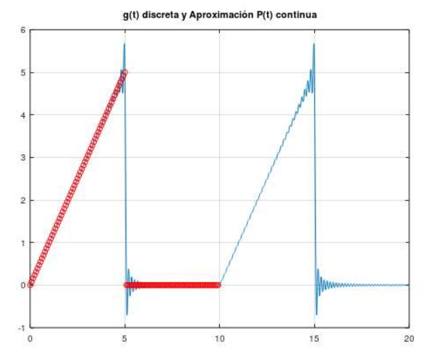




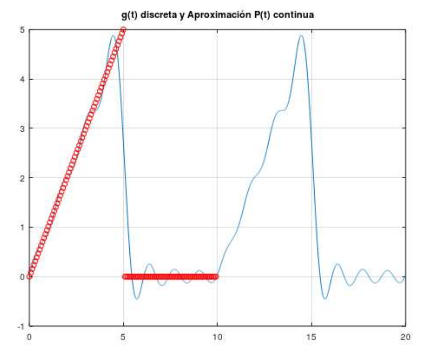
<u>Para N=128, comprobar que s</u>e obtienen las siguientes gráficas:



Amplitudes para cada k



P(t) continua con m=63



P(t) continua con m=7

EJERCICIO 3- Análisis Armónico de función combinación lineal de cosenos

Sea la función periódica

$$g(t) = 10\,cos(0.5\,t) + 2\,cos(5\,t)$$

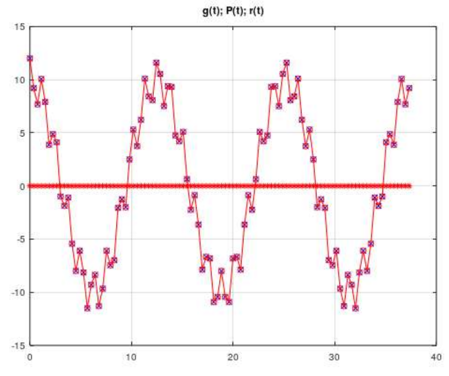
que **se discretiza con N=100**, en el intervalo $t \in [t0; tf)$.

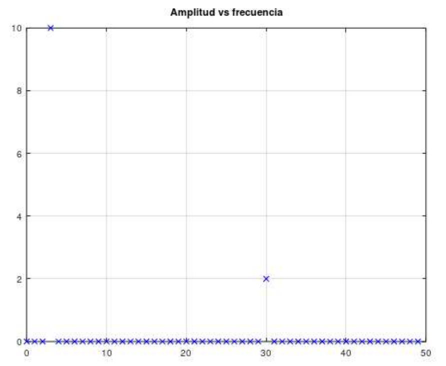
Para $t0 = 0$ y $tf = 3\,\frac{2\pi}{0.5}$, usando Mínimos cuadrados con base

$$B = \{\,1,\ cos\left[k\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1)\right];\ sin\left[k\frac{2\pi}{T_P}(t-t_1)\right]\}\quad \text{con k=1:m<50}$$

comprobar que con periodo $T_P = tf$

resultan $\Delta t = 0.37699$ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{100}$ $\qquad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{\Delta t} = 0.16667$

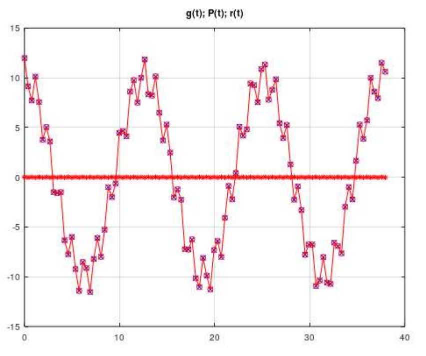


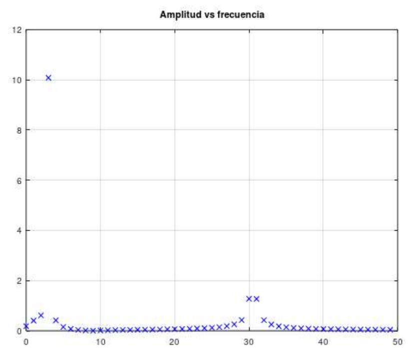


El diagrama de Amplitudes de las frecuencias indica que sólo hay dos frecuencias con amplitudes no nulas. Se trata de k=3 con amplitud 10 y de k=30 con amplitud 2. Para k=3 corresponde la frecuencia 3$\Delta\omega$**=0.5;** mientras que para k=30 le corresponde 3**0**$\Delta\omega$**=5.** Resulta que la aproximación de mínimos cuadrados coincide con la combinación lineal original.

Para $t0 = 0$ y $tf = 3.05\,\frac{2\pi}{0.5}$, usando Mínimos cuadrados con misma base anterior comprobar que con periodo $T_P = tf$

resultan $\Delta t = 0.38327$ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{100}$ $\qquad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{\Delta t} = 0.16393$





El diagrama de amplitudes indica que hay más de dos valores de k que tienen amplitudes no nulas. Sin embargo, las máximas amplitudes están entorno a k=3 y k=30, a las que les corresponden frecuencias **3**$\Delta\omega$ y 30$\Delta\omega$ respectivamente, que son muy próximas a las frecuencia originales.

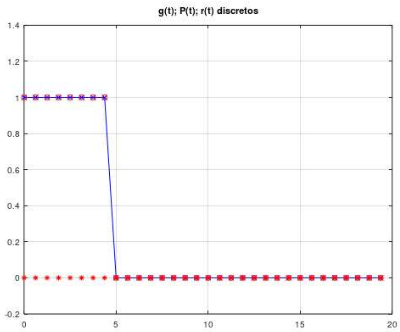
EJERCICIO 4- Análisis armónico de función pulso finito de duración T_d y periodo T_P creciente

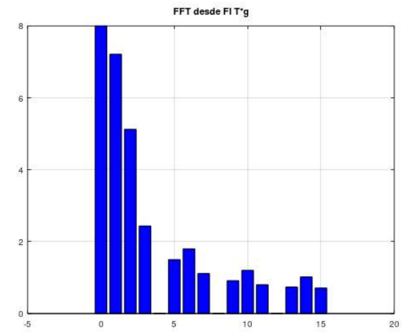
Sea la función pulso finito con duración $\boldsymbol{T_d}$ conocida y con valores discretos que la definen nula para tiempos discretos muy superiores a la duración no nula ($\boldsymbol{T_P}$>> $\boldsymbol{T_d}$)

$$\boldsymbol{g(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{1\ si\ t\ \in [0;\ T_d]} \\ \boldsymbol{0\ si\ t\ \in (\ T_d;\ \ T_P]} \end{cases}$$

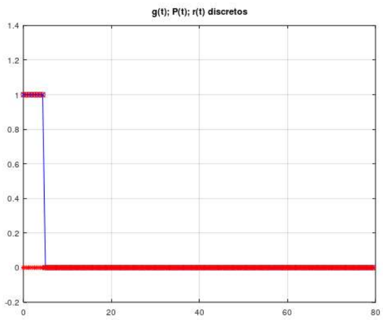
Para duración $\boldsymbol{T_d}$= 5, y asumiendo 8 intervalos en el intervalo $[\boldsymbol{0};\ \boldsymbol{T_d}]$ que definen un Δt=5/8 que se mantendrá constante hasta $\boldsymbol{T_P}$, aplicar el método de mínimos cuadrados con base de funciones trigonométricas

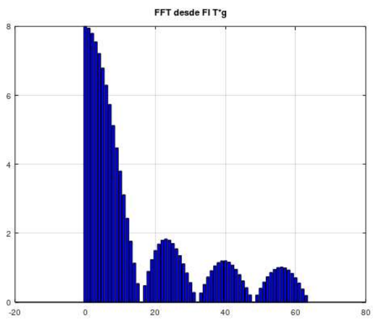
- Para $\boldsymbol{T_P = 4\,T_d}$, es $\boldsymbol{T_P}$=4*5=20, y manteniendo Δt=5/8 resulta N=4*8=32, comprobar que se obtienen las siguientes gráficas



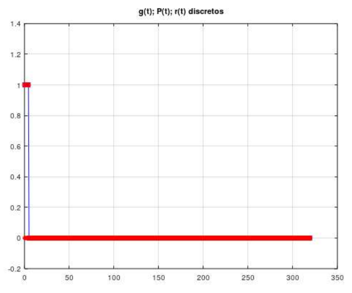


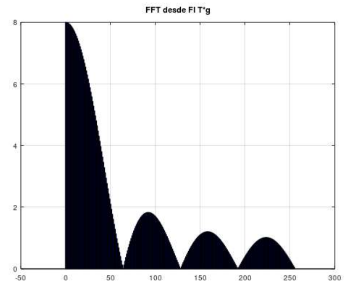
- Para $\boldsymbol{T_P = 16\,T_d}$, es $\boldsymbol{T_P}$=16*5=80, y manteniendo Δt=5/8 resulta N=16*8=128, comprobar que se obtienen las siguientes gráficas





- Para $\boldsymbol{T_P = 64\,T_d}$, es $\boldsymbol{T_P}$=64*5=320, y manteniendo Δt=5/8 resulta N=64*8=512, comprobar que se obtienen las siguientes gráficas





En las gráficas en función de la "frecuencia" k-ésima se puede observar que:

se densifican los valores considerados, ya que al aumentar N disminuye el valor del incremento de frecuencia;

se ha mantenido como valor de amplitud en las gráficas el resultado del término independiente $\vec{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{T}}\vec{\boldsymbol{g}}$, antes de dividirlo por N o N/2 según corresponda;

se tiene que la función tiende a la función seno(x)/x.

En las gráficas en función del tiempo, se observa que la función es cada vez menos periódica

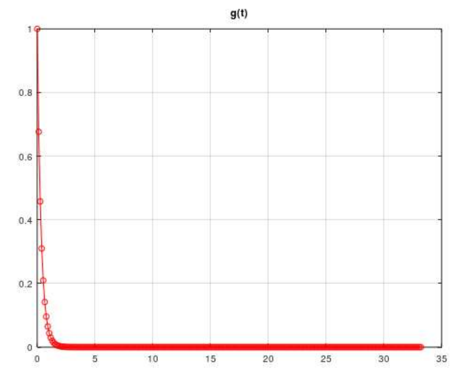
EJERCICIO 5- Análisis armónico de una función Exponencial

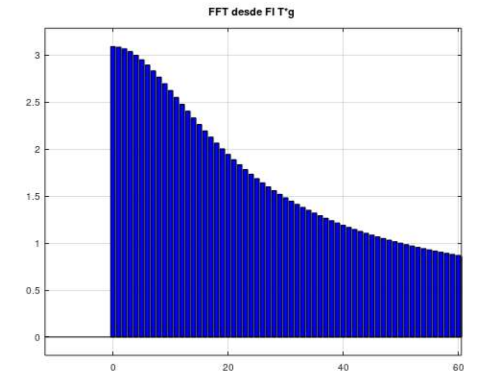
Sea la función

$$\boldsymbol{g(t) = e^{-a\,t}} \qquad \boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}; \boldsymbol{T_P}]$$

que para valores positivos de a, tiende a cero cuando t tiende a infinito. En particular para valores de $\boldsymbol{t} > \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{a}}$, la función toma valores menores a $(1/\boldsymbol{e^5}) \cong \mathbf{0.0067}$

Para $\boldsymbol{a} = \mathbf{3}$ y $\boldsymbol{T_P} = \mathbf{20}\ \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{a}}$, con N=256 intervalos equidistantes, se obtienen las siguientes gráficas

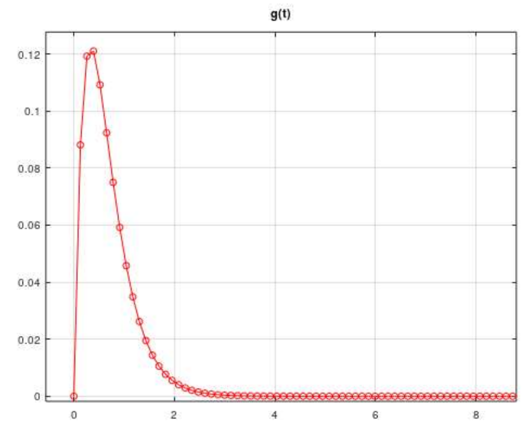


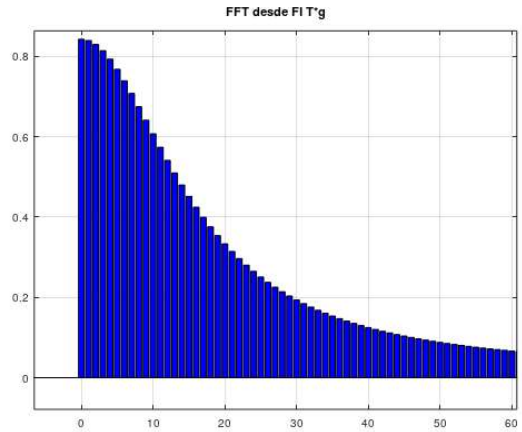


Para la función

$$\boldsymbol{g(t) = t\ e^{-a\,t}} \qquad \boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}; \boldsymbol{T_P}]$$

con iguales parámetros se obtienen las siguientes gráficas





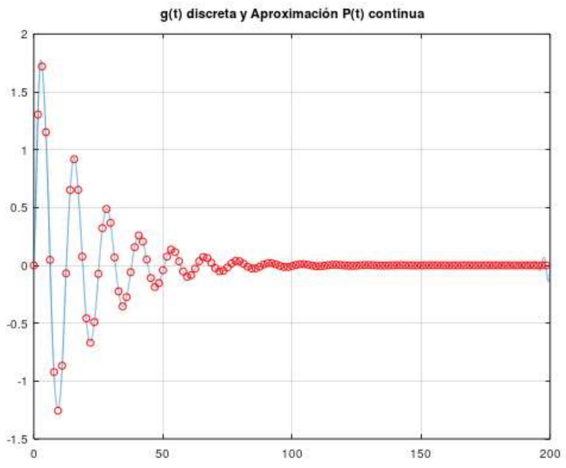
EJERCICIO 6- Análisis armónico de una función Exponencial por una función armónica

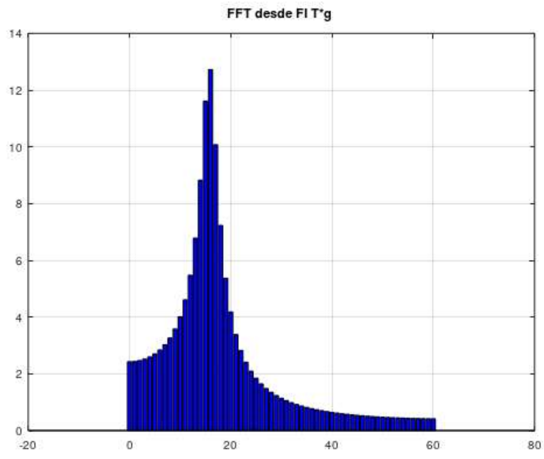
Sea la función

$$g(t) = \left(\frac{1}{\omega_d}\right) e^{-a\,t}\, sin(\omega_d\, t) \qquad t \in [0; T_P]$$

que para valores positivos de a, tiende a cero cuando t tiende a infinito. En particular para valores de $t > \frac{5}{a}$, la función toma valores menores a $(1/e^5) \cong 0.0067$

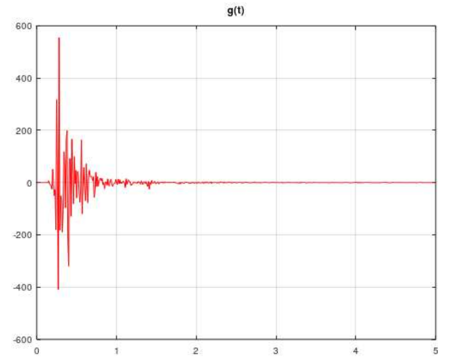
Para $a = 0.05$ y $T_P = 2\ \frac{5}{a}$, con N=128 intervalos equidistantes, se obtienen las siguientes gráficas

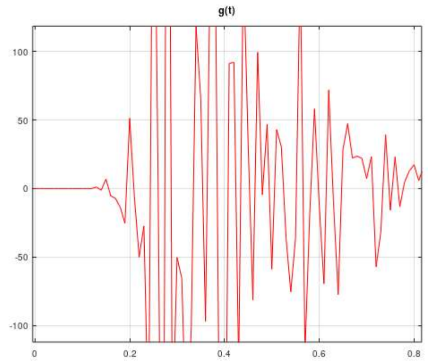




EJERCICIO 7- Análisis armónico de una función discreta obtenida de un registro

Sea la siguiente función discreta que ha sido obtenida mediante una adquisición digital de datos y tiene 500 registros de ordenadas de la función discreta a considerar, correspondientes a 500 abscisas que comienzan en t=0 y se incrementan en Dt=0.01. La frecuencia de muestreo resulta fs=1/Dt=100.

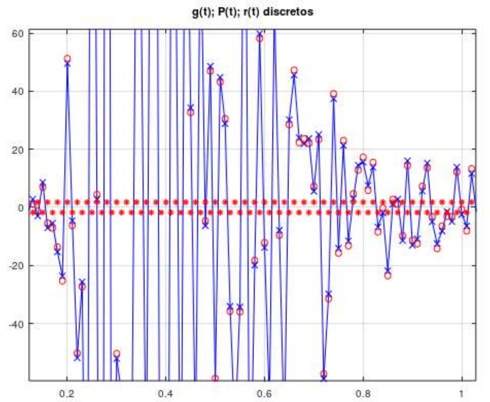


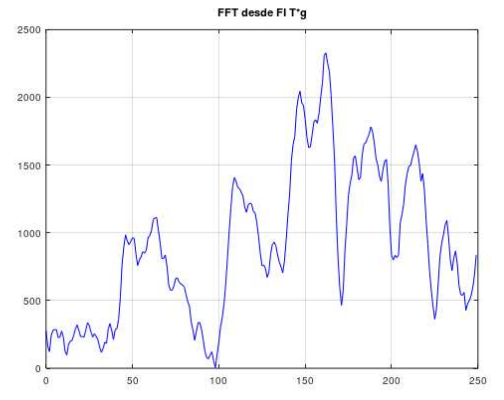


Para obtener la función discreta, se puede bajar el archivo "Registro_Ej_4_reducido.txt" del Campus Virtual, e incorporarlo en OCTAVE usando las siguientes líneas de código

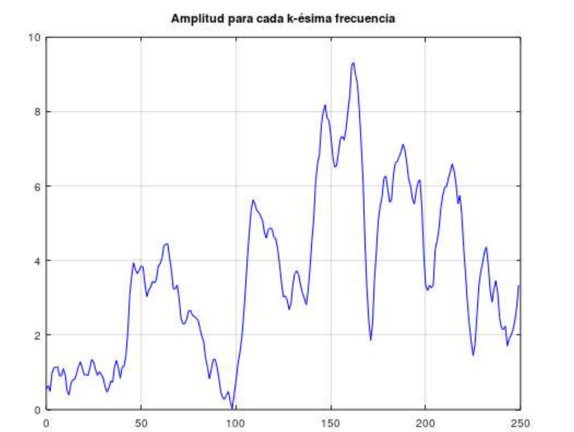
```
g=load("Registro_Ej_4_reducido.txt", "-ascii");
N=length(g);
```

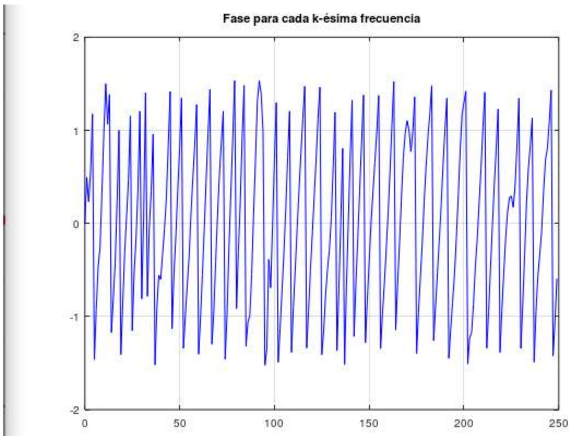
Haciendo uso de aproximación con funciones trigonométricas, comprobar las siguientes gráficas





Además, encontrar que el espectro de Amplitudes y de fases en función de las frecuencias k-ésimas son las siguientes gráficas



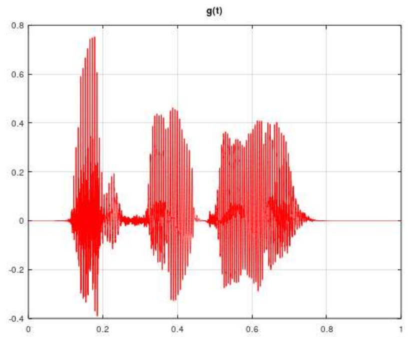


En las abscisas se tiene a los enteros k=0:248, que corresponden a los múltiplos de la frecuencia w0=2PI/500; o múltiplos de la frecuencia Dw=2PI/Tp= w0/Dt=2PI fs/N

Es oportuno destacar que las curvas que se observan en las figuras "*Amplitud para cada k-ésima frecuencia*" y "*FFT desde FIT*g*" son las mismas, pero con una escala distinta en el eje de ordenadas. El factor de escala para cualquier frecuencia es N/2=250; salvo para la frecuencia 0, cuyo factor de escala es N=500. Los factores de escala son los elementos de la diagonal principal de la matriz FIT*FI del proceso de Mínimos cuadrados.

EJERCICIO 8- Análisis armónico de una función discreta obtenida de un registro de voz

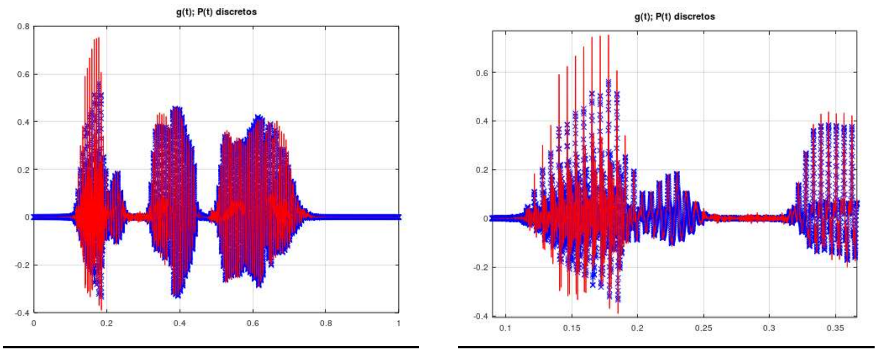
Sea la siguiente función discreta g(t) que ha sido obtenida mediante una adquisición digital de un sonido. Se ha usado una frecuencia de muestreo fs=16000 muestra por segundo, que hace un Dt=1/fs=6.25 E-5 seg. El registro tiene 16001 ordenadas que van desde t=0 hasta tf.



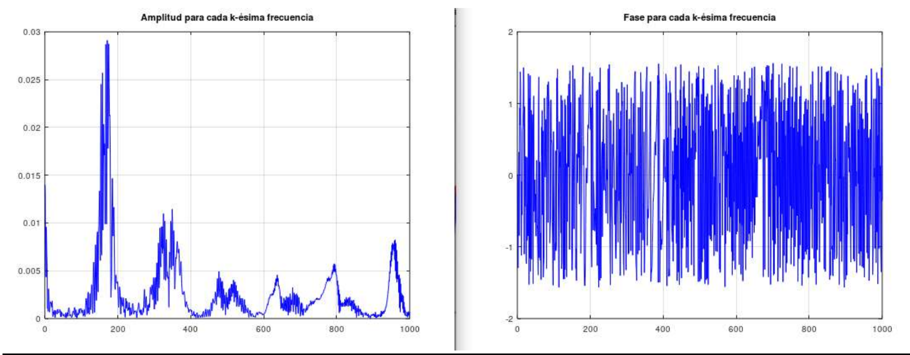
Las ordenadas están en el archivo "Registro_240901.txt". Se trata del sonido de una pablara de tres silabas.

Se busca una aproximación de mínimos cuadrados con base de funciones trigonométricas, con w0=2PI/16000, dw=w0/Dt y con distintos valores de m para los múltiplos de armónicas. Ello hace que la matriz Fi tenga 16000 filas por (2*m+1) columnas.

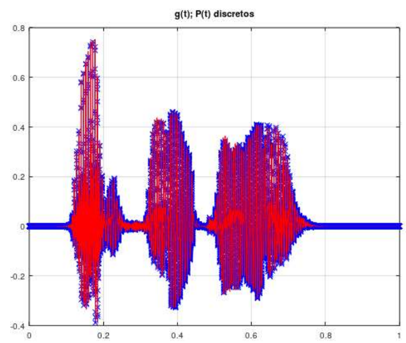
En las siguientes gráficas, cuando se **considera m=1000**, se puede observar la aproximación obtenida representada por cruces azules, conjuntamente con la función g(t) original en rojo. *Se puede observar que la aproximación P(t) es bastante similar en la segunda y tercera silaba, pero en la primera silaba la aproximación tiene menores amplitudes.*

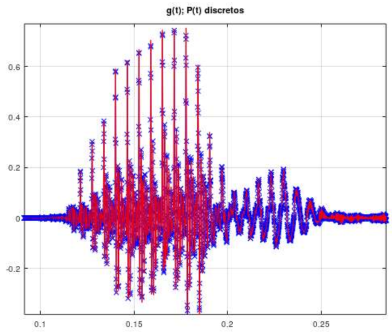


En las siguientes figuras se representa la amplitud y fase para cada una de las 1000 armónicas con se aproxima la función original.



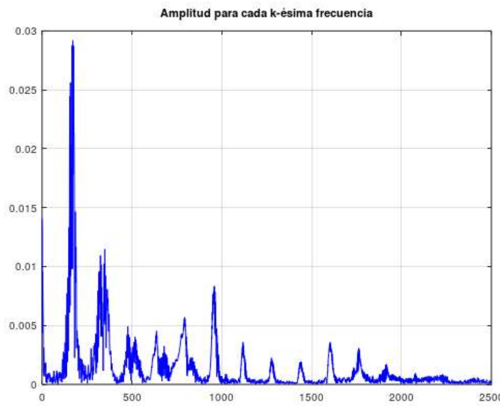
En las siguientes figuras se puede observar la aproximación P(t) que se logra **si se considera m=2500** armónicos que multiplican a w0 como funciones en la base trigonométrica.

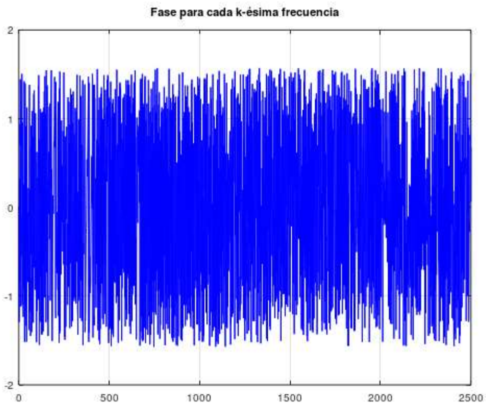




Se puede apreciar que las amplitudes en la primar silaba se aproximan mejor que al considerar m=1000.

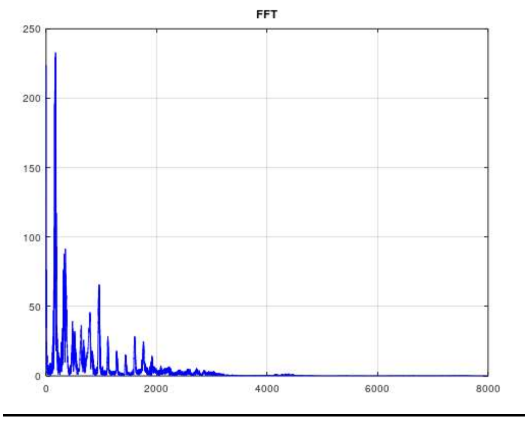
En las siguientes figuras se representa la amplitud y fase para cada una de las 2500 armónicas con se aproxima la función original.

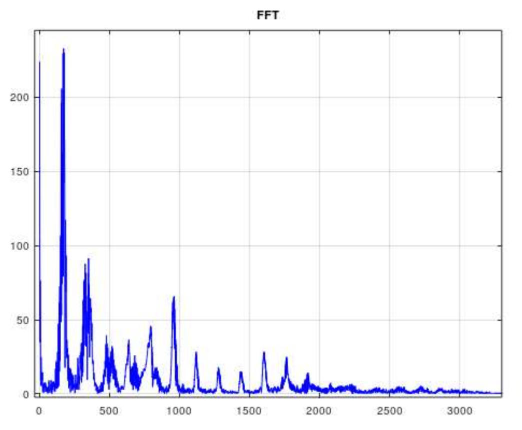


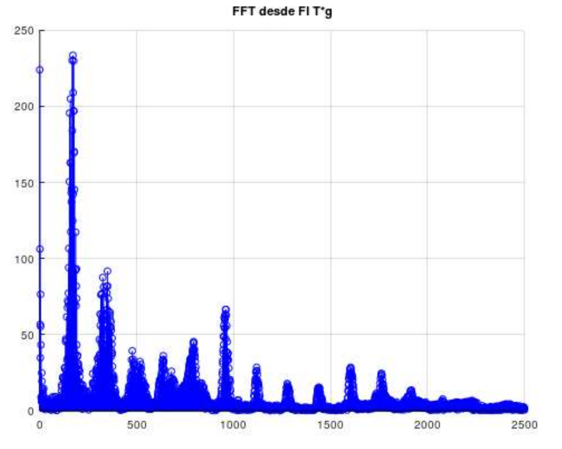


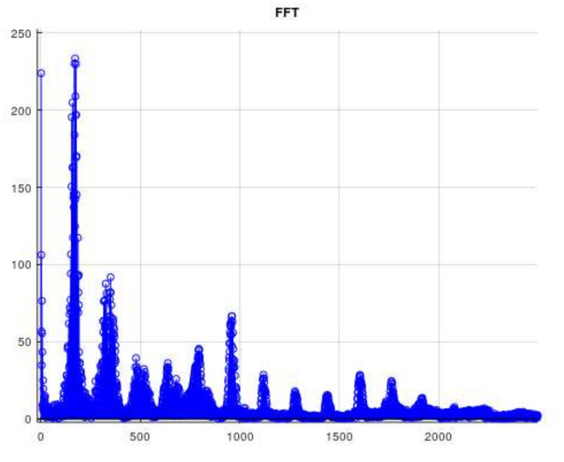
Al comparar las gráficas de Amplitudes para cada k é-sima frecuencia cunado se considera m=1000 y m=2500, se pude apreciar que entre 1000 y 2500 hay varios valores de k para los cuales las amplitudes no son despreciables. Esas contribuciones son las que mejoran la aproximación discreta obtenida con m=2500 con respecto a la obtenida con m=1000

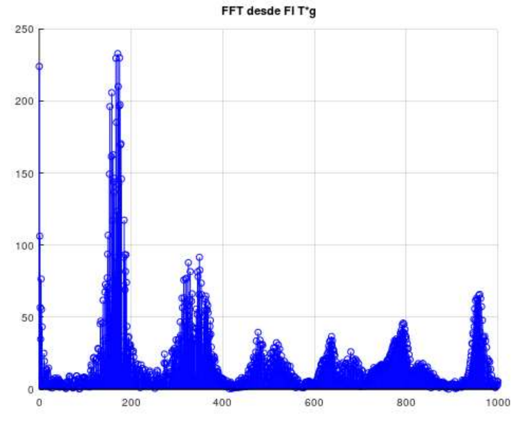
En las siguientes figuras se presentan las amplitudes obtenidas con el algoritmo FFT considerando los 16000 valores de la función discreta original, en el rango de 0 a 8000 veces dw= dw=w0/Dt. Se puede observar que hay valores de amplitudes "no nulos" hasta k igual a 4000; al menos hasta k=2000.

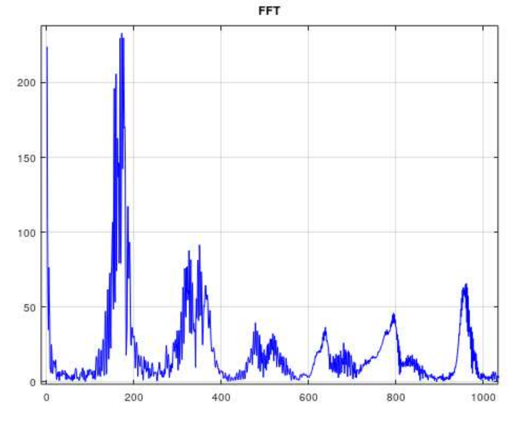












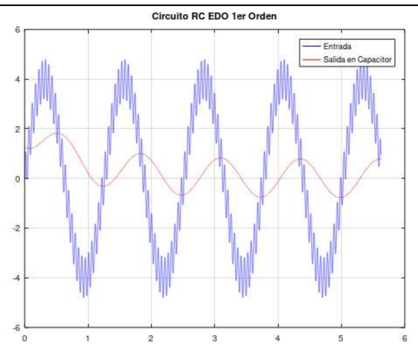
EJERCICIO 9- Análisis armónico de la entrada y la salida a una EDO de orden 1

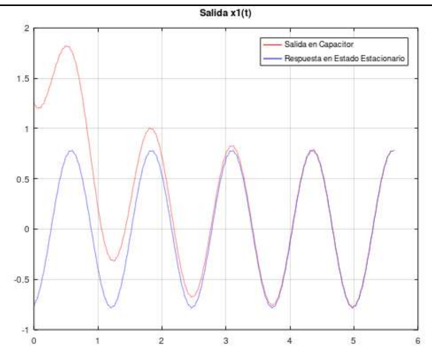
En la unidad temática EDO de Orden 1 y su uso como Filtros, se analizó el siguiente modelo matemático dado por

$$\frac{dx}{dt} + p\,x(t) = \sum_{j=1}^{NCL} A_j \sin(\omega_j\, t)$$	(1)

y su condición inicial en t=0: $x(0) = x_0 = 6$.

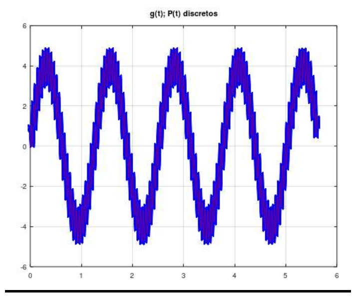
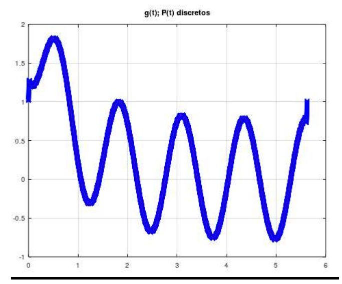
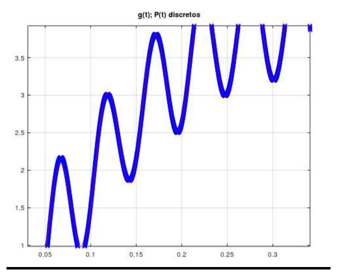
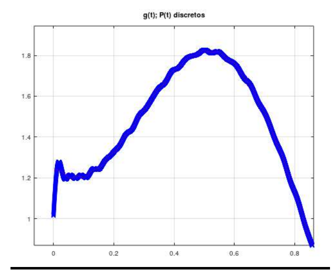
Particularmente, para los parámetros p=1.2; A1=4; w1=5; A2=0.8 y w2= 120, con $Dt = 6.25\,E - 5\;seg$, equivalente a una discretización de $fs = 16000 = 1/6.25\,E - 5$ (muestras por segundo), y aplicando el Método de Euler para resolver la EDO se obtienen las siguientes soluciones





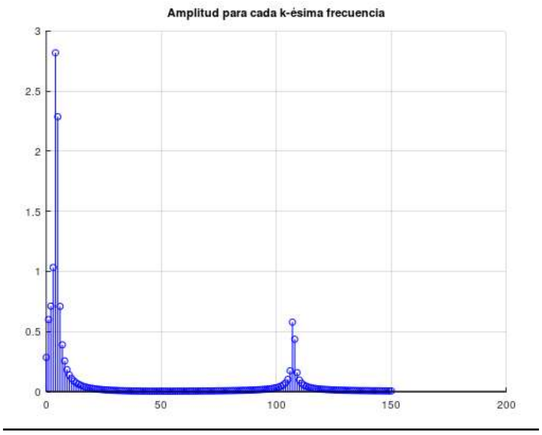
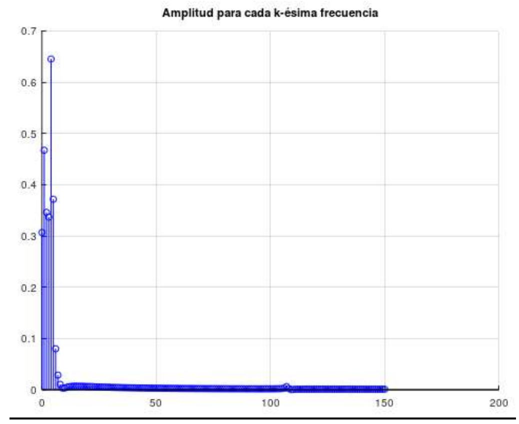
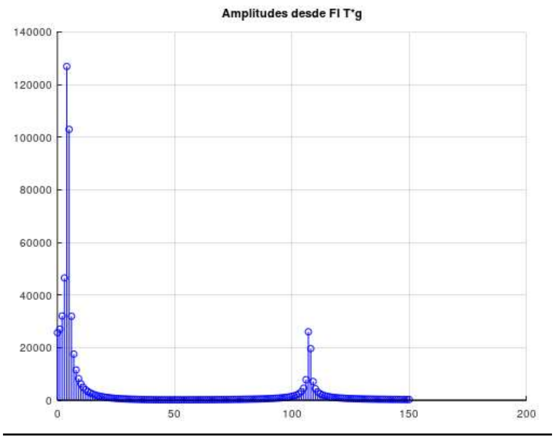
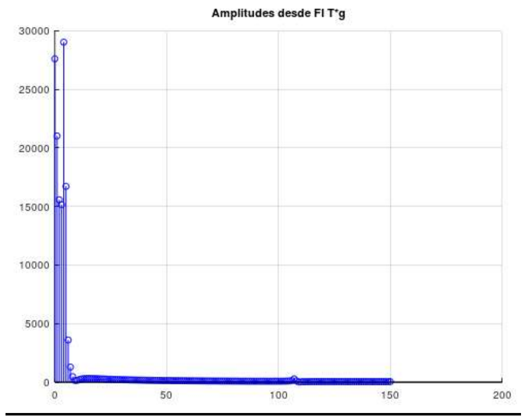
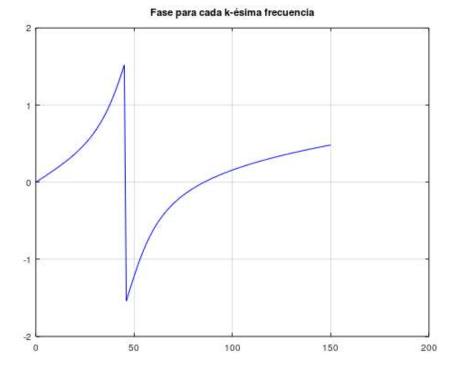
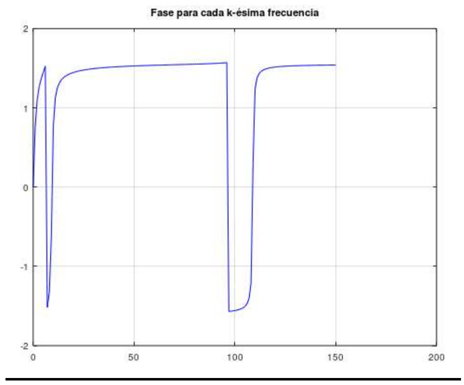
que se pueden obtener en los registros "EDO_Ord1_entrada.txt" y "EDO_Ord1_salida.txt"

Se busca una aproximación de mínimos cuadrados con base de funciones trigonométricas, con w0=2PI/90000, dw=w0/Dt=1.1170 y con m=150 para los múltiplos de armónicas. Ello hace que la matriz Fi tenga 90000 filas por 301 (2*m+1) columnas. Las aproximaciones obtenidas son las siguientes:

registro "EDO_Ord1_entrada.txt"	***Registro "EDO_Ord1_salida.txt"***
	
	

Se observa que tanto el registro de entrada como el de salida son aproximadas en forma muy precisa por la aproximación de mínimos cuadrados con funciones trigonométricas.

En las siguientes figuras se pueden observar y comparar las amplitudes y fases para cada una de las 150 armónicas (múltiplos de dw=2PI/Tp=xxx) que participan de la aproximación de ambos registros.

registro "EDO_Ord1_entrada.txt"	***Registro "EDO_Ord1_salida.txt"***
	
	
	

Se puede observar que en las amplitudes del registro de entrada hay dos grupos de armónicos con amplitudes "no nulas". Un grupo entorno a k=4 (que resulta entorno a la frecuencia 4*1.1170=4.4680) con amplitud cercana a 3; y otro grupo entorno a k=108 (que resulta entorno a la frecuencia 107*1.1170=119.52) con amplitud cercana a 0.6.

Es oportuno destacar que el registro de entrada es una digitalización de la combinación lineal de funciones seno con amplitudes Aj y frecuencias wj dadas por A1=4; w1=5; A2=0.8 y w2= 120. La aproximación por mínimos cuadrados refleja valores cercanos en un entorno a dichas frecuencias. No son exactos debido al valor dw que resultó para los registros con los que se trabajó.

Para el registro de salida en cambio sólo hay amplitudes “no nulas” para un grupo entorno a k=4 que resulta entorno a la frecuencia 4*1.1170=4.4680) con amplitud cercana a 0.7.

El efecto de la EDO de Orden 1 con p=1.2 es tal que si bien atenúa las contribuciones de las armónicas bajas con relación a la entrada; esa atenuación es muy superior para las armónicas altas. Produce un efecto de eliminar o filtrar la contribución de las armónicas altas, hecho que se manifiesta en las amplitudes de las armónicas que contribuyen a la aproximación.