

## **EJERCICIOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA**

### Tabla de contenido

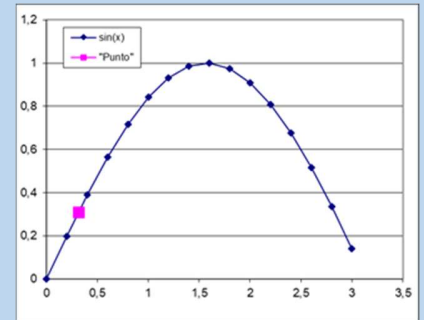
EJERCICIO 1- Derivación de la función seno en un punto .....	2
EJERCICIO 2- Derivación de la función $\cos(x)$ en todo el periodo .....	4
EJERCICIO 3- Derivación de la función Exponencial .....	4
EJERCICIO 4- Obtención de la función Derivada de $y_t = e^{-pt} \sin(w t)$ .....	4

EJERCICIO 1- Derivación de la función seno en un punto

Sea la función  $y = \sin(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , y se calcula la derivada primera en  $x = \pi/10$ .

El valor exacto de la derivada primera, es la función  $\cos(x)$  evaluada en  $x = \pi/10$ , Esto es:  $0,951 = \cos(\pi/10)$

Se usan dos aproximaciones para calcular la derivada numérica: la regla adelante con dos puntos y la central por tres puntos.



a) La Derivada Primera con dos puntos, y su error asociado son

$$f'_s = \frac{y_{s+1} - y_s}{\Delta x} \quad Er = -\frac{\Delta x}{2} f''_\xi = C \Delta x$$

Para distintos incrementos  $\Delta x$ , se obtienen las siguientes Tablas al evaluar la derivada primera en  $x = \pi/10$ .

dx	deriv 1 Adelant	Deriv Exacta	Error adelante
0,00001	0,951054971	0,951056516	1,5451E-06
0,0001	0,951041064	0,951056516	1,54524E-05
0,001	0,950901849	0,951056516	0,000154667
0,01	0,949495593	0,951056516	0,001560923
0,1	0,934034236	0,951056516	0,01702228

log(dx)	log(ErrorAdelante)	pend
-5	-5,811	
-4	-4,811	1,0
-3	-3,811	1,0
-2	-2,807	1,0
-1	-1,769	1,0

En la Tabla de la izquierda se pueden ver los distintos valores aproximados y los errores respecto a la solución exacta. En la Tabla de la derecha, se presenta las relaciones entre  $dx = \Delta x$  y el Error en escala logarítmica, donde se puede corroborar que la pendiente es 1.

Analizar la expresión del Error y responder

- ¿Hasta qué grado polinómico es exacta la Derivada Primera con dos puntos?
- Para la función  $y = \sin(x)$ , comparando los cálculos de la derivada primera en  $x = \pi/10$  y en  $x = \pi/1,8$ ; ¿Dónde es más precisa para igual  $\Delta x$ ?

b) La Derivada Primera Central con tres puntos, y su error asociado son

$$f'_s = \frac{-y_{s-1} + y_{s+1}}{2 \Delta x} \quad Er = \frac{\Delta x^2}{12} f'''_\xi = C \Delta x^2$$

Para distintos incrementos  $\Delta x$ , se obtienen las siguientes Tablas al evaluar la derivada primera en  $x = \pi/10$ . En la Tabla de la izquierda se pueden ver los distintos valores aproximados y los errores respecto a la solución exacta. En la Tabla de la derecha, se presenta las relaciones entre  $dx = \Delta x$  y el Error en escala logarítmica, donde se puede corroborar que la pendiente es 2

dx	deriv 1 Central	Deriv Exacta	Error Central	log(dx)	log(ErrorAdelante)	pend
0,00001	0,951056516	0,951056516	1,27978E-11	-5	-10,893	
0,0001	0,951056515	0,951056516	1,58515E-09	-4	-8,800	2,1
0,001	0,951056358	0,951056516	1,58509E-07	-3	-6,800	2,0
0,01	0,951040665	0,951056516	1,58509E-05	-2	-4,800	2,0
0,1	0,949472214	0,951056516	0,001584302	-1	-2,800	2,0

Corroborar los valores de las Tablas.

Analizar la expresión del Error y responder

- ¿Hasta qué grado polinómico es exacta la Derivada Primera Central con tres puntos?
- Para la función  $y = \sin(x)$ , comparando los cálculos de la derivada primera en  $x = \pi/10$  y en  $x = \pi/1,8$ ; ¿Dónde es más precisa para igual  $\Delta x$ ?

c) La Derivada Segunda Central con tres puntos, y su error asociado son

$$f_s'' = \frac{y_{s-1} - 2y_s + y_{s+1}}{\Delta x^2} \quad Er = \frac{\Delta x^2}{12} f_\xi'''' = C \Delta x^2$$

Para distintos incrementos  $\Delta x$ , se obtienen las siguientes Tablas al evaluar la derivada primera en  $x = \pi/10$ . Elaborar las Tablas para los distintos  $\Delta x$ ; y evaluar la pendiente del Error en escala logarítmica

$\Delta x$	Derivada 2 Central	Valor Exacto	Error absoluto	Log(dx)	Log Error	Pendiente
0.1		-0,30901699		-1		
0.01		-0,30901699		-2		
0.001		-0,30901699		-3		

Analizar la expresión del Error y responder

- ¿Hasta qué grado polinómico es exacta la Derivada Segunda Central con tres puntos?
- ¿Qué error se comete si se aplica la Derivada Segunda Central con tres puntos para evaluar la derivada segunda de un polinomio de grado 3?

EJERCICIO 2- Derivación de la función  $\cos(x)$  en todo el periodo

Sea la función  $y = \cos(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en el periodo  $[0; 2\pi]$ , discretizar con N intervalos y obtener la función derivada primera, y derivada segunda, usando reglas de derivación con orden de error igual a 2.

Usar  $N= 5; 10; 20$  intervalos iguales y comparar con la solución exacta

Graficar las funciones discretas y las exactas en las mismas graficas

EJERCICIO 3- Derivación de la función Exponencial

Sea la función  $y = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en el rango  $[0; 2]$ , discretizar con N intervalos y obtener la función derivada primera usando reglas de derivación con orden de error igual a 2, y de tipo central toda vez que sea posible

Usar  $N= 5; 10; 20$  intervalos iguales y comparar con la solución exacta

Graficar las funciones discretas y las exactas en las mismas graficas

EJERCICIO 4- Obtención de la función Derivada de  $y(t) = e^{-pt} \sin(w t)$

Conocida la función  $y(t) = e^{-0.5t} \sin(4t)$ , obtener la función derivada primera en el rango de  $t \in [0; 8]$  con reglas de derivación con orden de error igual a 2, y de tipo central toda vez que sea posible.

Usar  $N= 10; 50$  y  $100$  intervalos iguales y comparar con la solución exacta

Graficar las funciones discretas y las exactas en las mismas graficas