Trabajos Prácticos de EDO con Valores Iniciales
Métodos de Runge Kutta de Segundo Orden

Ejercicio 1

Las EDO de primer orden, con su valor inicial conocido, se las puede escribir en la siguiente forma

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)) \qquad \text{con} \qquad u(0) = u_o$$

Y es posible encontrar una solución numérica aproxima mediante los Métodos de Euler o de Ruge Kutta.

El algoritmo de los Métodos de Runge Kutta de segundo orden, se puede sintetizar de la siguiente forma:

Dado $(t_n, u(t_n) = (t_n, u_n)$, para n entero mayor o igual a cero; y elegidos Δt y ω

Se calcula $k_1 = \Delta t\, f(t_n, u_n)$

$$u_G = u_n + k_1/(2\omega)$$

$$t_G = t_n + \Delta t/(2\omega)$$

Se calcula $k_2 = \Delta t\, f(t_G, u_G)$

$$u_{n+1} = u_n + (1-\omega)\, k_1 + \omega\, k_2$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

- Interpretar geométricamente el Método de Euler Modificado ($\omega = 1$)
- Interpretar geométricamente el Método de Euler Mejorado ($\omega = 0{,}5$)
- Usando Serie de Taylor, justificar que el Error de Truncamiento Local de los Métodos de Runge Kutta es $E_{TL} = \frac{(\Delta t)^3}{2} \frac{d^3 u(t)}{dt^3}\Big|_{\xi}$; y por lo tanto es un método de segundo orden.

Ejercicio 2

Dada la siguiente EDO con su valor inicial

$$\frac{du(t)}{dt} - 2\ u(t) = -2\,t - 1 \qquad con \quad u(0) = 2$$

se puede probar que la solución exacta es $u_{ex}(t) = e^{2\,t} + t + 1$

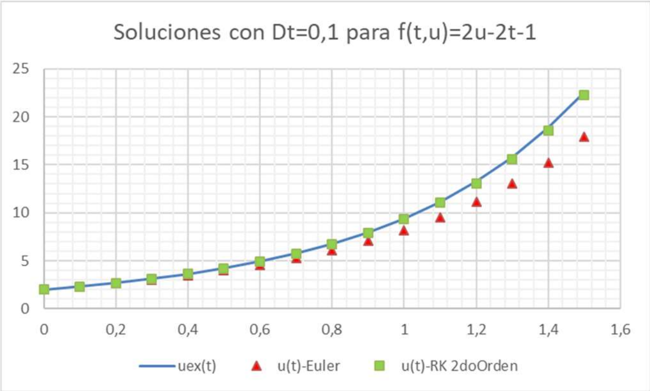
- Escribir la EDO de modo que se pueda definir la $f(t,u(t))$ necesaria para los métodos numéricos.
- Con Euler Mejorado, usando un Δt=0,25 calcular el valor aproximado de $u(0{,}5)$ y su error.
- Con Euler Modificado, usando un Δt=0,25 calcular el valor aproximado de $u(0{,}5)$ y su error.

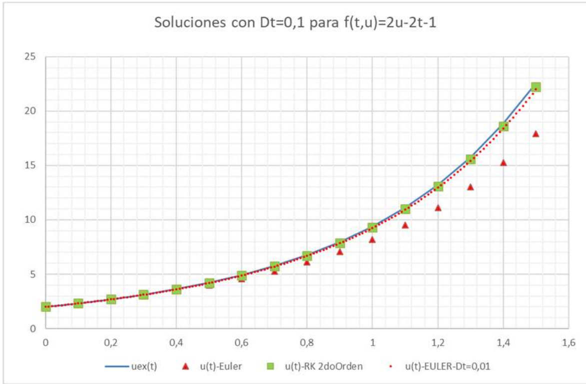
Tomar como error a diferencia en valor absoluto entre solución exacta y la solución numérica aproximada según cada método e incremento en t usado.

Comprobar que no hay diferencia significativa entre los métodos de Euler Mejorado y Euler Modificado.

Comparar los errores obtenidos con los métodos de Runge Kutta de segundo orden y con el método de Euler Adelante

- Realizar un código en OCTAVE y comprobar la siguiente gráfica





Ejercicio 3

Dada la siguiente EDO con su valor inicial

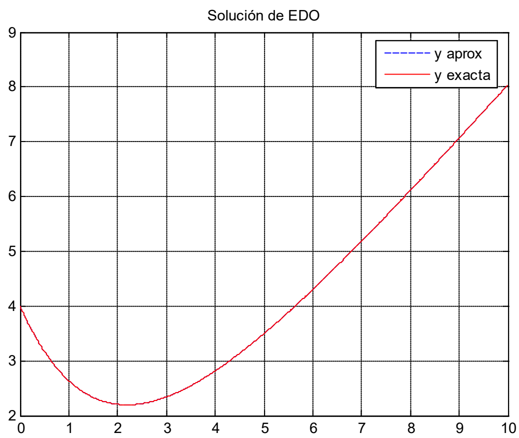
$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{2}\,u(t) = \frac{t}{2} \qquad con \quad u(0) = 4$$

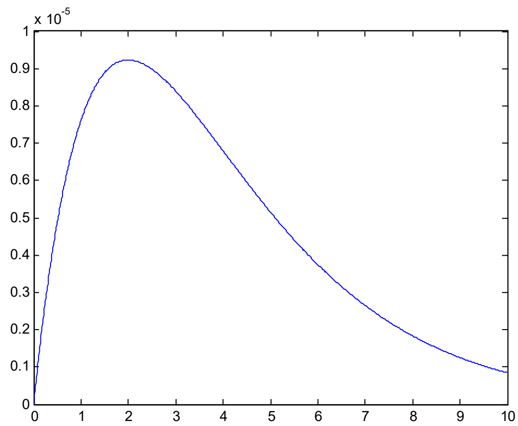
se puede probar que la solución exacta es $u_{ex}(t) = 6\ e^{-t/2} - 2 + t$

- Escribir la EDO de modo que se pueda definir la *f(t,u(t))* necesaria para los métodos numéricos.
- Con Euler Modificado, usando un Δt=0,25 calcular el valor aproximado de *u(0,5)* y su error.
- Con Euler Mejorado, usando un Δt=0,25 calcular el valor aproximado de *u(0,5)* y su error.
- Con Euler, usando un Δt=0,25 calcular el valor aproximado de *u(0,5)* y su error.

Tomar como error a diferencia en valor absoluto entre solución exacta y la solución numérica aproximada según cada método e incremento en t usado. Comparar los errores.

- Realizar un código en OCTAVE y comprobar las siguientes gráficas obtenidas con Δt=0.01





Asociar las magnitudes de la función error con la expresión del Error de Truncamiento Local del Método de Runge Kutta de Segundo Orden, y comparar con lo obtenido con el método de Euler

Ejercicio 4

Dada la siguiente EDO con su valor inicial

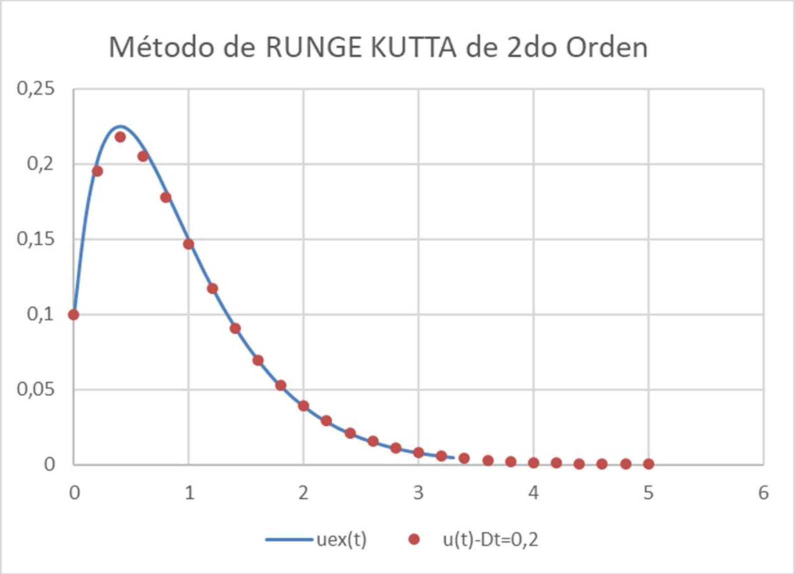
$$\frac{dy}{dt} + 2 \cdot y(t) = e^{-2t} \qquad con \qquad y(0) = 1/10$$

se puede probar que la solución exacta es $y_{ex}(t) = \frac{1}{10} e^{-2t} + t\ e^{-2t}$.

Con **método de Runge Kutta 2do orden, w=0,5** y **Δt=0.20** calcular el valor de la solución aproximada *en t=0,4* ***y(0,4)=0,218,*** y comparar con la solución exacta.

Realizar un código OCTAVE que, para distintos valores de Δt, permita:

- Con los datos anteriores, comprobar que es posible obtener la siguiente gráfica



- calcular la norma infinita de la función error.

Elegir un valor de Δt, tal que la norma infinita de la función error sea inferior al 1% del valor máximo de la función solución exacta.

Ejercicio 5

Dada la siguiente EDO con su valor inicial

$$\frac{du(t)}{dt} - 2\ t\ (u(t))^2 = 0 \qquad con \quad u(0) = 1$$

se puede probar que la solución exacta es $u_{ex}(t) = 1/(1 - t^2)$; que tiene una asíntota vertical en t=1

Realizar un código OCTAVE que, para distintos valores de Δt, permita:

- resolver la EDO con el método de Runge Kutta y graficar la solución aproximada y la exacta
- calcular la norma infinita de la función error

Ejercicio 6

Dada la siguiente EDO con su valor inicial

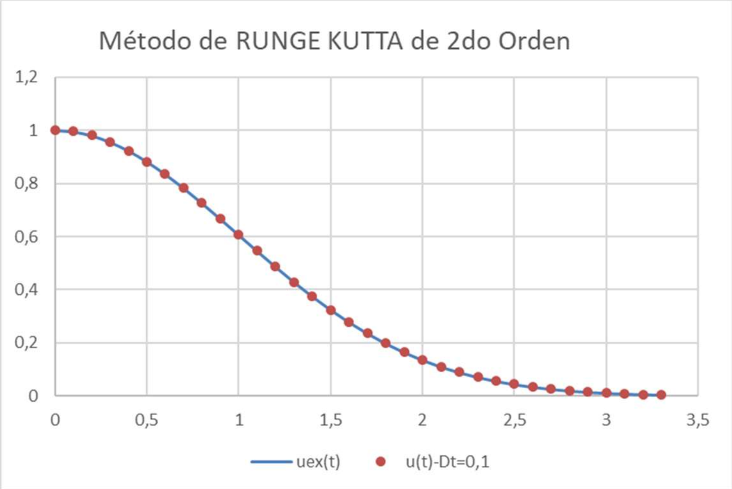
$$\frac{dy}{dt} + t \cdot y(t) = 0 \qquad con \qquad y(0) = 1$$

se puede probar que la solución exacta es $\quad y_{ex}(t) = e^{-\left(\frac{t^2}{2}\right)}$.

Con **método de Runge Kutta 2do orden, w=1** y **Δt=0.10,** calcular el valor de la solución aproximada *en t=0,2 y(0,2)=0,98,* y comparar con la solución exacta

Realizar un código OCTAVE que, para distintos valores de Δt, permita:

- Con los datos anteriores, comprobar que es posible obtener la siguiente gráfica



Ejercicio 7

Dada el siguiente sistema de EDO con valores iniciales

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{con} \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Aplicar el método de Euler en forma vectorial, con Δt, y comprobar los siguientes valores:

t	0	0,01	0,02
y1	5	4,635	4,2977
y2	3	2,8076	2,6292
k1 y1	0,01*(-10*5+4*3)=-0,38		
_y2	0,01*(-4*5+0*3)=-0,2		
tg	0+0,01/2=0,005		
yg1	5 -0,38/2= **4,81**		
yg2	3 -0,2/2= **2,9**		
k2 _y1	0,01*(-10***4,81**+4***2,9**)= -0,365		
y2	0,01*(-4***4,81**+0***2,9**)= -0,1924		
tg	0+0,01		
y1_(n+1)	5 -0,365= **4,635**		
y2_(n+1)	3 -0,1924= **2,8076**		

Elaborar un código en OCTAVE que verifique los valores anteriores

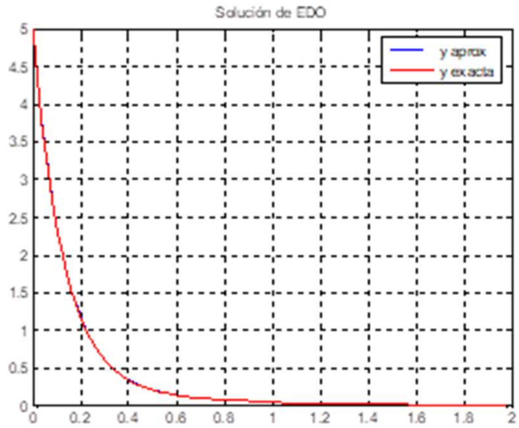
Con el código en OCTAVE elaborado, verificar con distintos valores de Δt, que la solución aproximada tiende a la solución exacta del problema dada por:

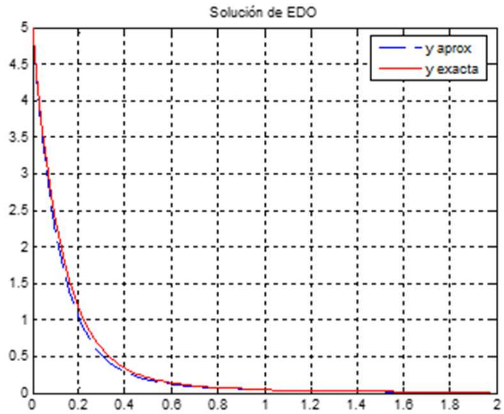
$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \cdot e^{-8\,t} + \frac{14}{3} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{Bmatrix} \cdot e^{-2\,t}$$

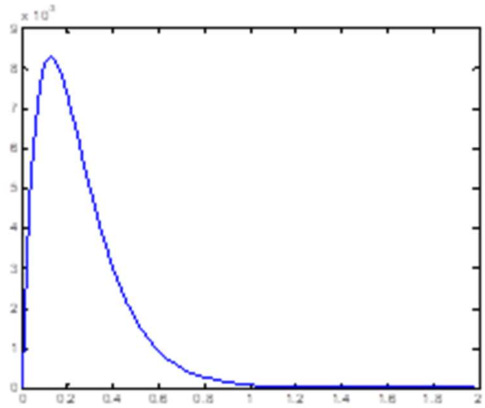
En particular para $\Delta t=0{,}02$, se pueden obtener las siguientes gráficas:

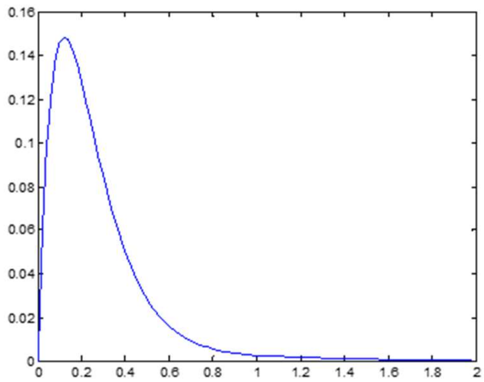
EULER MODIFICADO

EULER Adelante









Ejercicio 7

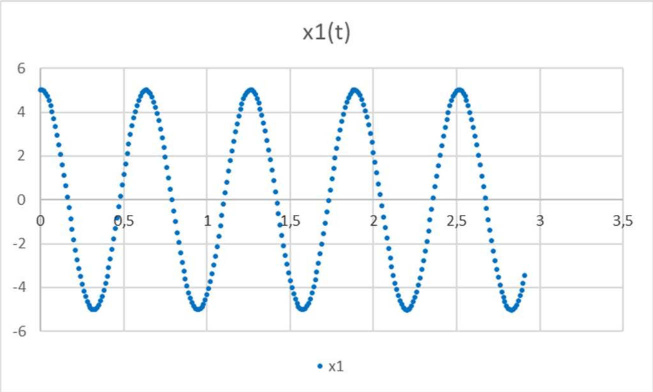
Dada el siguiente sistema de EDO con valores iniciales

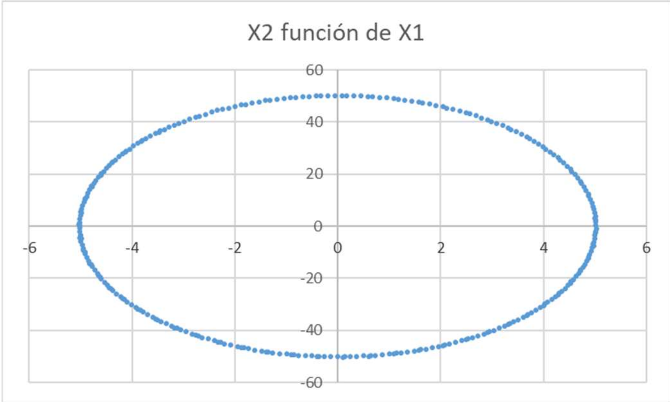
$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{con} \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Con Dt=0,01 comprobar que con el Método de Euler Mejorado (Runge Kutta de 2do orden con w=0,5), se obtiene las siguientes soluciones

t	x1	x2
0	5	3
1,00E-02	5,01E+00	-2,02E+00
2,00E-02	4,96E+00	-7,01E+00
3,00E-02	4,86E+00	-1,19E+01
4,00E-02	4,72E+00	-1,67E+01
5,00E-02	4,53E+00	-2,14E+01
6,00E-02	4,29E+00	-2,58E+01

En el intervalo [0; 2,91] de la variable independiente t; comprobar que en este caso, luego de aplicar el método 291 veces, la respuesta resulta:





Evolución de la variable X1 en función de t Diagrama en Espacio de Estados

De la gráfica de X1(t) se puede aproximar el período como 4 ciclos en 2,5 segundos; ya que son las veces que se repite el valor inicial 5 en dicho intervalo. Así el periodo aproximado es 0,625, frente a 0,628=2*PI/10 que es el valor exacto.

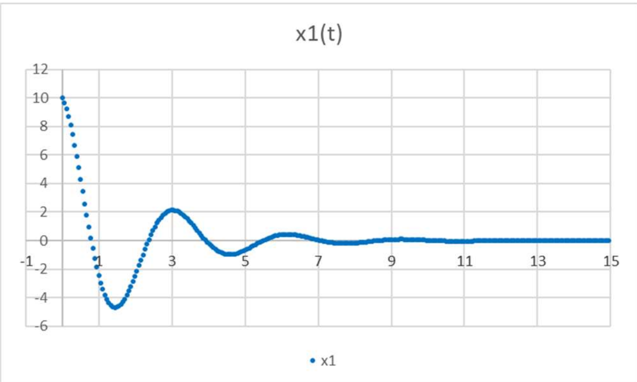
Comparar las soluciones obtenidas con el método de Runge Kutta de Segundo Orden y con el Método de Euler, usando en ambos casos Dt=0,01.

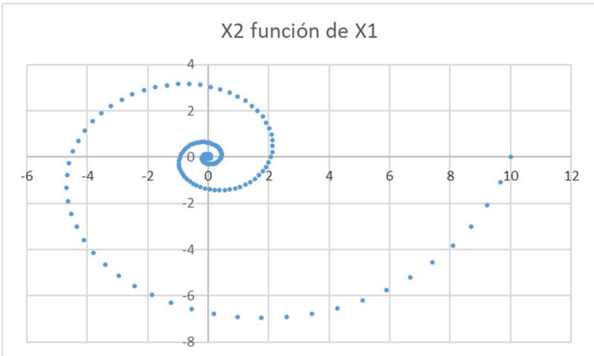
Ejercicio 8

Dada el siguiente sistema de EDO con valores iniciales

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & 2 \\ -2 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{con} \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Comprobar que con el Método de Runge Kutta de Segundo orden y Dt=5,5E-2, se obtienen las siguientes soluciones:





Evolución de la variable X1 en función de t Diagrama en Espacio de Estados

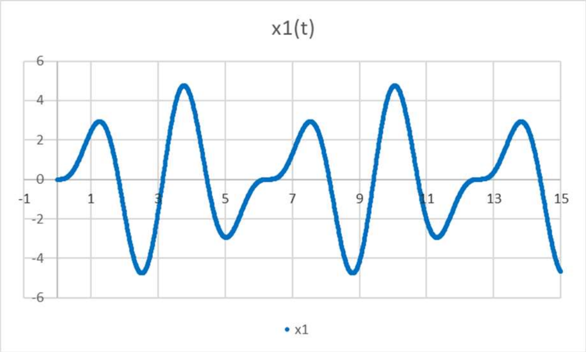
Comparar con las soluciones obtenidas con el Método de Euler con pasos Dt=5,5E-2 y Dt=5,5E-3.

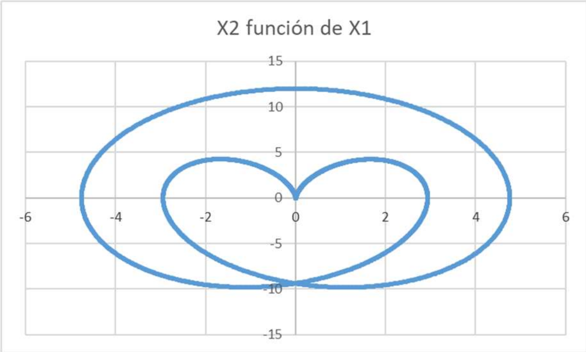
Ejercicio 9

Dada el siguiente sistema de EDO con valores iniciales

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} + seno(3\,t) \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} \quad \text{con} \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cuyas soluciones, obtenidas con el método de Runge Kutta de segundo orden y Δt=1E-2, se presentan en las siguientes gráficas.





Evolución de la variable X1 en función de t   Diagrama en Espacio de Estados

Buscar un valor de Dt, tal que la aproximación con el método de Euler sea similar a las figuras anteriores.