EJERCICIOS DE COMPARACIÓN entre TDF y Mínimos Cuadrados

Tabla de contenido

Objetivos

Identificar la Transformada Discreta de Fourier y su Inversa

Identificar los aspectos comunes de la TDF y el algoritmo básico de mínimos cuadrados usando base de funciones trigonométricas

Aproximar de funciones periódicas no continuas.

Encontrar contenido de frecuencias en funciones

- de funciones no periódicas
- de registros genéricos

Asociar la Transformada Discreta de Fourier con los parámetros que definen las respuestas a impulsos unitarios de EDO de Orden 1 y 2.

EJERCICIO 1- función pulso finito de periodo TP y duración TP/2

Sea la siguiente función discreta con periodo T_P=10 **definida con N=8 pares ordenados en el periodo**

$$\begin{array}{llllllllll} n = & [1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8] \\ \vec{t} = & [0.0 & 1.25 & 2.5 & 3.75 & 5.0 & 6.25 & 7.5 & 8.75] \\ \vec{g} = & [1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0] \end{array}$$

Las funciones de la base para la Aproximación por Mínimos Cuadrados usando funciones trigonométricas, evaluadas en las abscisas discretas, resultan las siguientes filas de la matriz $\boldsymbol{\Phi}$ para n=1:N

$$\boldsymbol{\Phi}(n,:) = [1; \quad \varphi_{2k}(t_n); \quad \varphi_{2k+1}(t_n)] \quad \text{con k=1:3}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(n,:) = [\,1;\ \cos\left[k\frac{2\pi}{N}(n-1)\right];\ \sin\left[k\frac{2\pi}{N}(n-1)\right]] \quad \text{con k=1:3}$$

El vector $\boldsymbol{\Phi}^T\vec{g}$ a comparar con la TDF resulta

$$\boldsymbol{\Phi}^T\vec{g} = \left[4 \quad 1 \quad (1+\sqrt{2}) \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad (-1+\sqrt{2})\right]^T$$

La TDF de una función discreta dada se define por

$$G(k) = \sum_{n=1}^{N} g(n)\, e^{-j\,k\frac{2\pi}{N}(n-1)}$$

En OCATVE está implementado este algoritmo y se lo invoca mediante "fft(nombre función, cantidad de puntos). Para este caso comprobar que con:

g_tdf = fft(g,N)

se obtiene para la función de variable compleja G(k), denominada "g_tdf"

4.00000 - 0.00000 i	**con módulo**	**4.00000**	**y fase**	**0.00000**
1.00000 + 2.41421 i		2.61313		-1.17810
0.00000 - **0.00000** i		0.00000		0.00000
1.00000 + **0.41421** i		**1.08239**		**-0.39270**
0.00000 - 0.00000 i		0.00000		0.00000
1.00000 - 0.41421 i		1.08239		0.39270
0.00000 + 0.00000 i		0.00000		0.00000
1.00000 - 2.41421 i		2.61313		1.17810

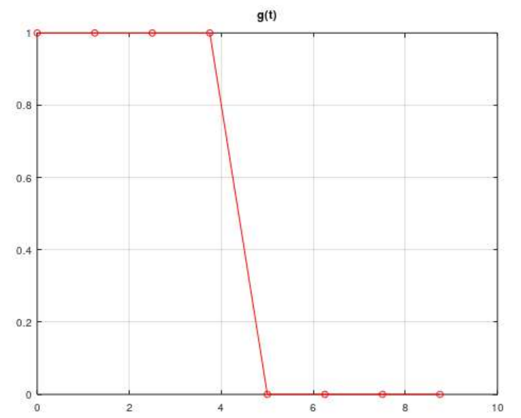
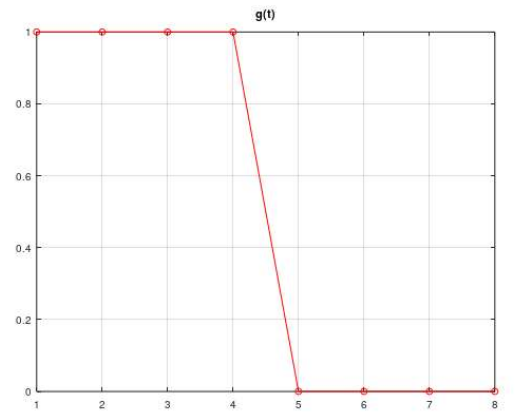
Los primeros N/2 valores complejos de g_tdf corresponden a los valores de las componentes del vector $\boldsymbol{\Phi}^T\vec{g}$ para k=1:3 (que son los posibles múltiplos de la armónica base 2PI/N). El resto de los valores de g_tdf, corresponden a los mismos valores de k, pero negativos. Es por ello que a efectos de visualizar el módulo de G(k) y/o la fase se puede dibujar solo los valores para N/2. En OCTAVE es bar (abs(g_tdf(1:N/2))

A partir de tener la función de variable compleja G(k), denominada "g_tdf", es posible obtener la g(n) mediante la Inversa de TDF. Para ello se deben considerar los N valores de G(k), para los k positivos y los negativos. Eso en OCTAVE es

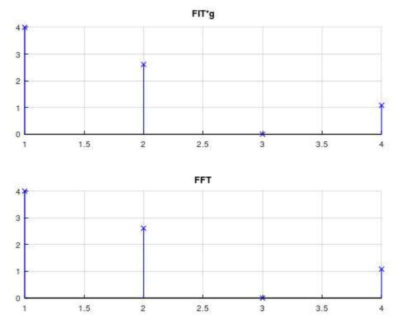
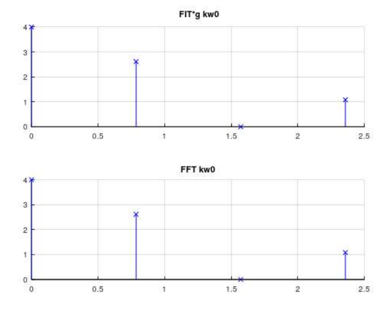
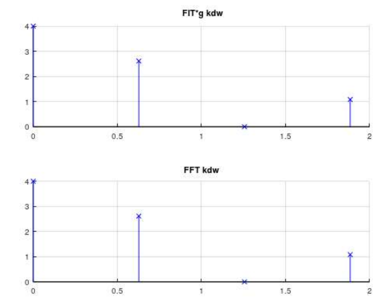
g_inv_tdf = ifft(g_tdf , N)

y se obtiene la misma $\vec{g} = [\,1;\ \ 1;\ \ 1;\ \ 1;\ \ 0;\ \ 0;\ \ 0;\ \ 0]$.

En las siguientes figuras se presenta la función discreta g(t) pulso finito, de periodo Tp=10 y duración Td=5.

	
Desde OCTAVE con …… plot (t,g,'-or')	Desde OCTAVE con …… plot (g,'-or')

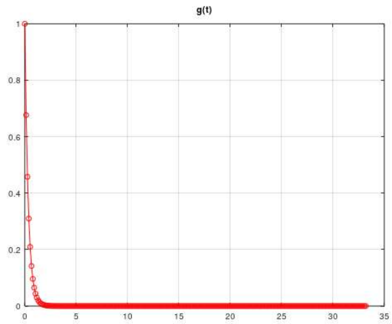
La diferencia entre las gráficas anteriores es el eje de las abscisas. A la izquierda se tiene en abscisas los valores de la variable t; que están en las componentes del arreglo $\vec{t}$. A la derecha se tiene en abscisas el número de componente del arreglo $\vec{t}$. En las siguientes figuras se presenta las Amplitudes obtenidas desde Mínimos Cuadrados (FIT*G) y desde TDF (FFT) como funciones de las componentes k, los armónicos de w0 (kw0), y de los armónicos de dw (kdw).

	
Para las componentes k = 1 2 3 4 Resulta con w0=2PI/N kw0= (k-1) *w0 = (k-1) 2PI/N kw0 = 0.00000 0.78540 1.57080 2.35619 resulta con dw=2PI/Tp=2PI/(N Dt) kdw= kw0/Dt kdw = 0.00000 0.62832 1.25664 1.88496	

EJERCICIO 2- función Exponencial

Sea la función

$$g(t) = e^{-a\,t} \qquad t \in [0; T_P]$$



que para valores positivos de a, tiende a cero cuando t tiende a infinito. En particular para valores de $t > \frac{5}{a}$, la función toma valores menores a $(1/e^5) \cong 0.0067$

Para $a = 3$ y $T_P = 20\,\frac{5}{a} = 33.333$, y con N=256 intervalos equidistantes, se tiene que Dt=Tp/N=0.13021 seg, la frecuencia de muestreo es fs=1/Dt=7.68 muestras por segundo. En la figura adjunta se muestra la versión discreta de la función g(t).

Las funciones de la base para la Aproximación por Mínimos Cuadrados usando funciones trigonométricas, evaluadas en las abscisas discretas, resultan las siguientes filas de la matriz $\boldsymbol{\Phi}$ para n=1:N

$$\Phi(n,:) = [1; \qquad \varphi_{2k}(t_n); \qquad \varphi_{2k+1}(t_n)] \quad \text{con k=(N-1)/2}$$

$$\Phi(n,:) = [\,1;\; cos\left[k\frac{2\pi}{N}(n-1)\right];\; sin\left[k\frac{2\pi}{N}(n-1)\right]] \quad \text{con k=(N-1)/2}$$

El vector $\Phi^T\vec{g}$ a comparar con la TDF tiene como 7 primeras componentes a

$$\Phi^T\vec{g} = [3.09247 \quad 3.08240 \quad 0.15819 \quad 3.05268 \quad 0.31264 \quad 3.00464 \quad 0.45990]^T$$

cuyas amplitudes en función de los armónicos son: **3.0925 3.0865 3.0686 3.0396**

La TDF de una función discreta dada se define por

$$G(k) = \sum_{n=1}^{N} g(n)\, e^{-j\,k\frac{2\pi}{N}(n-1)}$$

En OCATVE está implementado este algoritmo y se lo invoca mediante "fft(nombre función, cantidad de puntos). Para este caso comprobar que con:

g_tdf = fft(g,N)

se obtiene para la función de variable compleja G(k), denominada "g_tdf" de "N componentes, cuyas primeras 4 componentes son:

G(k) = **3.0925 –j 0.0000 3.0824 +j 0.1582 3.0527 +j 0.3126 3.0046 +j 0.4599**

cuyas amplitudes en función de los armónicos son: **3.0925 3.0865 3.0686 3.0396**

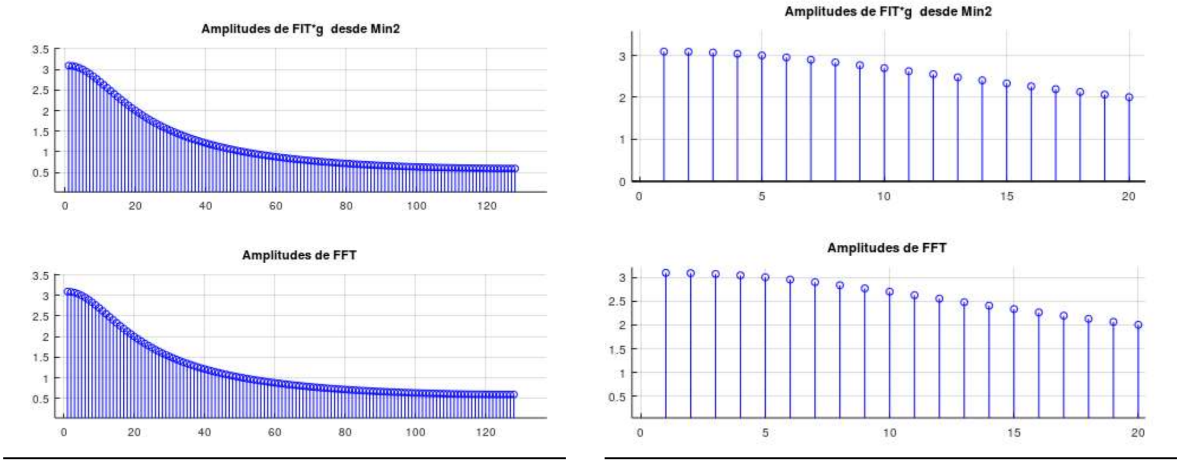
Las amplitudes o módulos g_fft se obtienen con: d=abs(g_fft) y puede mostrar/grafica d en el rango que se pretenda con d(1: rango) (en este caso rango=4).

En las siguientes figuras se presenta las Amplitudes obtenidas desde Mínimos Cuadrados (FIT*G) y desde TDF (FFT) como funciones de las componentes k que varían a partir de 1 hasta N/2.

Se debe destacar que los armónicos de w0 (kw0) y los armónicos de dw (kdw), están relacionados con las componentes k de la siguiente forma

kw0(k)= (k-1) w0 = (k-1) 2PI/N con k=1: N/2 w0= 0.024544

kdw(k)= (k-1) dw = (k-1) w0/Dt con k=1: N/2 dw= 0.18850



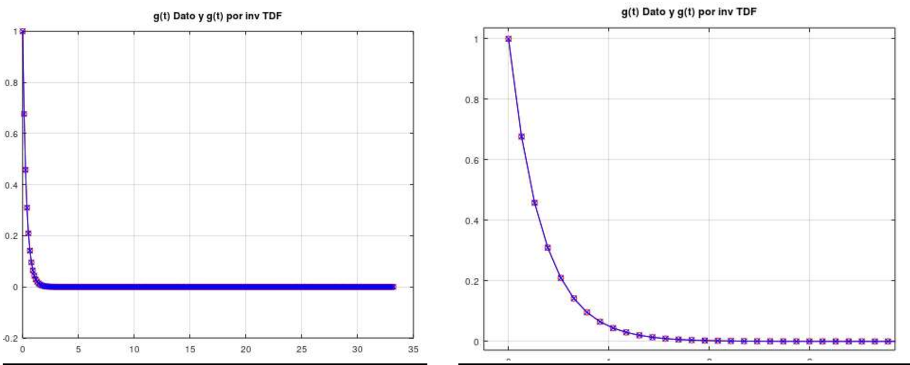
Se debe destacar que el primer valor no nulo es para la abscisa igual a 1, ya que las gráficas se generaron con stem(c_fft,'ob') y stem(d,'ob') sin indicar un “vector” con valores de abscisas.

El valor máximo es igual **3.0925** y corresponde a la primera componente. Se denomina COMPONENTE DE CORTE a aquella componente cuyo valor es **3.0925** $\sqrt[2]{2}/2$ = 2.1867. En este caso, la componente 17 tiene un valor de 2.2, y la componente 18 tiene un valor de 2.13. Por lo que se adopta como COMPONENTE DE CORTE a kc= 17.

Esa componente de corte tiene una FRECUENCIA DE CORTE igual a dw*(kc-1)=16*_0.18850=3.02 que es muy próxima al coeficiente $a = 3$ de la función exponencial original.

Conocida la función g_tdf = fft(g,N) es posible recuperar la función discreta en el dominio del tiempo haciendo uso de la la Transformada Discreta de Fourier Inversa. Las siguientes gráficas usando los comandos de OCTAVE “fft” e “ifft”

```
g_fft=fft(g,N);          % para obtener la TDF de g(t)
g_inv_fft=ifft(g_fft)    % para obtener g(t) por Inversa de TDF
```



El *Teorema de Parseval* establece que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(g(t)\right)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(G(\omega)\right)^2 d\omega$$

Y para funciones discreta que

$$\|\vec{\boldsymbol{g}}\|_2^2 = \frac{1}{N}\left\|\vec{\boldsymbol{G}}\right\|_2^2$$

Con las normas cuadráticas definidas para funciones en t y variable compleja respectivamente, como:

$$\|\vec{\boldsymbol{g}}\|_2^2 =<\vec{\boldsymbol{g}},\vec{\boldsymbol{g}}>= \textstyle\sum_{n=1}^{N}(g(n))^2 \qquad \left\|\vec{\boldsymbol{G}}\right\|_2^2 =<\vec{\boldsymbol{G}},\overrightarrow{\boldsymbol{G_c}}>= \textstyle\sum_{k=1}^{N}(|G(k)|)^2$$

Comprobar que en este caso con a=3, Tp=20*5/a=33.3333 dw=2PI/Tp=0.1885

N	Dt	$\|\vec{\boldsymbol{g}}\|_2^2$	$\int_{-\infty}^{\infty}\left(g(t)\right)^2 dt \cong Dt * \|\vec{\boldsymbol{g}}\|_2^2$	$\left\|\vec{\boldsymbol{G}}\right\|_2^2 = N * \|\vec{\boldsymbol{g}}\|_2^2$	$\left\|\vec{\boldsymbol{G}}\right\|_\infty$	kc de $\frac{\sqrt[2]{2}}{2}\left\|\vec{\boldsymbol{G}}\right\|_\infty$	$\|G(1)\|$ para w=0
64	0.52083	1.0460	0.54479	66.941	1.2652	22	1.2652
128	0.26042	1.2652	0.32948	161.95	1.8445	18	1.8445
256	0.13021	1.8445	0.24017	472.18	3.0925	17	3.0925
512	0.065104	3.0925	0.20133	1583.3	5.6363	17	5.6363
750	0.044444	4.2722	0.18987	3204.1	8.0111	17	8.0111
1024	0.032552	5.6363	0.18347	5771.5	10.748	17	10.748
2048	0.016276	10.748	0.1749	22012.18402	20.984	17	20.984

Notar que es invariante la posición kc de $\frac{\sqrt[2]{2}}{2}\left\|\vec{\boldsymbol{G}}\right\|_\infty$, a la que le corresponde una frecuencia $\omega_c = dw * (17-1) = 0.1885 * 16 = 3.016$, que es aproximadamente el a de la función dato original.

Si se pretende obtener representación de frecuencias cercanas a 3 con el dw=0.1885, correspondiente a un múltiplo k=3/dw=15.915, la cantidad N de puntos debe ser mayor a (2*16+1) =33.

EJERCICIO 3- función Exponencial por una función armónica

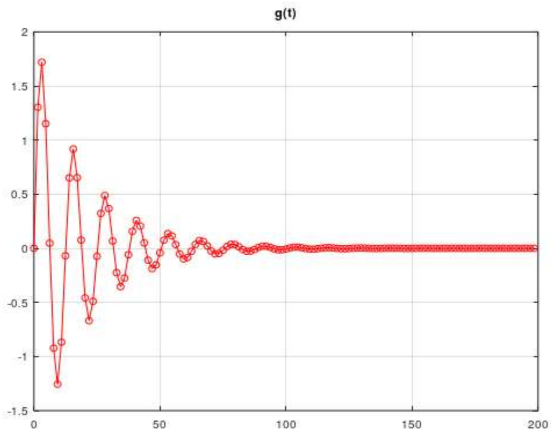
Sea la función

$$g(t) = (\frac{1}{\omega_d})\, e^{-a\,t}\, sin(\omega_d\, t) \quad t \in [0; T_P]$$

que para valores positivos de a, tiende a cero cuando t tiende a infinito. En particular para valores de $t > \frac{5}{a}$, la función toma valores menores a $(1/e^5) \cong 0.0067$

Para $\omega_d = 0.49749,\ a = 0.05$ y $T_P = 2\ \frac{5}{a} = 200$, con **N=128** intervalos equidistantes, se tiene que Dt=Tp/N=1.56251 seg, la frecuencia de muestreo es fs=1/Dt=0.64 muestras por segundo.

En la figura adjunta se muestra la versión discreta de la función g(t).



Las funciones de la base para la Aproximación por Mínimos Cuadrados usando funciones trigonométricas, evaluadas en las abscisas discretas, resultan las siguientes filas de la matriz $\boldsymbol{\Phi}$ para n=1:N

$$\Phi(n,:) = [1; \qquad \varphi_{2k}(t_n); \qquad \varphi_{2k+1}(t_n)] \quad \text{con k=(N-1)/2}$$

$$\Phi(n,:) = [\ 1;\ cos\left[k\frac{2\pi}{N}(n-1)\right];\ sin\left[k\frac{2\pi}{N}(n-1)\right]] \quad \text{con k=(N-1)/2}$$

El vector $\Phi^T\vec{g}$ a comparar con la TDF tiene como 7 primeras componentes a

$\Phi^T\vec{g}$ = [**2.428496 2.438217 0.032361 2.467809 0.066258 2.518607 0.103413]**

cuyas amplitudes en función de los armónicos son: **2.4285 2.4384 2.4687 2.5207**

La TDF de una función discreta dada se define por

$$G(k) = \sum_{n=1}^{N} g(n)\, e^{-j\,k\frac{2\pi}{N}(n-1)}$$

En OCATVE está implementado este algoritmo y se lo invoca mediante "fft(nombre función, cantidad de puntos). Para este caso comprobar que con:

g_tdf = fft(g,N)

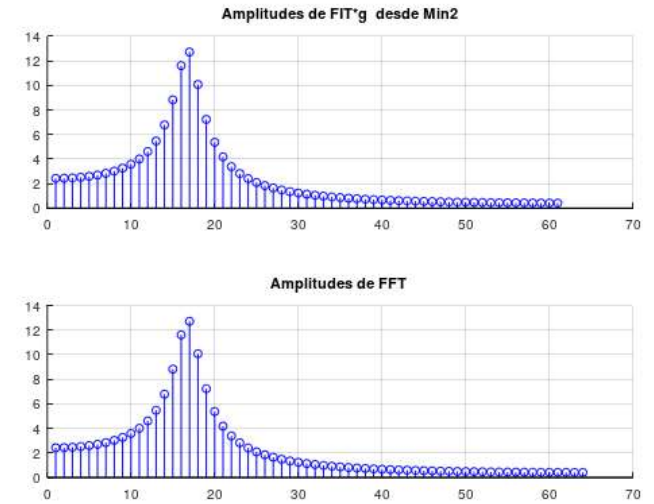
se obtiene para la función de variable compleja G(k), denominada "g_tdf" de "N componentes, cuyas primeras 4 componentes son:

G(k) = **2.4285 -j 0.0000 2.4382 +j 0.0324 2.4678 +j 0.0663 2.5186 +j 0.1034**

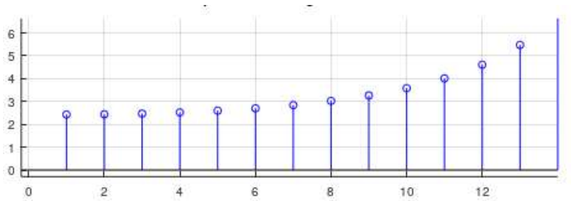
cuyas amplitudes en función de los armónicos son: **2.4285 2.4384 2.4687 2.5207**

Las amplitudes o módulos g_fft se obtienen con: d=abs(g_fft) y puede mostrar/grafica d en el rango que se pretenda con d(1: rango) (en este caso rango=4).

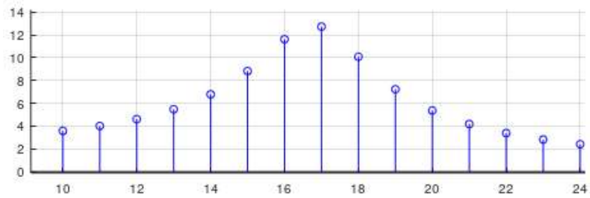
En las siguientes figuras se presenta las Amplitudes obtenidas desde Mínimos Cuadrados (FIT*G) y desde TDF (FFT) como funciones de las componentes k que varían a partir de 1 hasta N/2.



Amplitudes cercanas a cero



Amplitudes entrono a la máxima amplitud



Se debe destacar que los armónicos de w0 (kw0) y los armónicos de dw (kdw), están relacionados con las componentes k de la siguiente forma

kw0(k)= (k-1) w0 = (k-1) 2PI/N con k=1: N/2 w0= 0.049087

kdw(k)= (k-1) dw = (k-1) w0/Dt con k=1: N/2 dw= 0.031416

Se debe destacar que el primer valor no nulo es para la abscisa igual a 1, ya que las gráficas se generaron con stem(c_fft,'ob') y stem(d,'ob') sin indicar un "vector" con valores de abscisas.

El valor de Amplitud Máxima es igual ***Am=12.7213*** y corresponde a la componente km=17; que está asociada a un valor de frecuencia **wm= 0.50266**=dw*(km-1)= 0.031416*(17-1) **que es muy próxima al coeficiente $\boldsymbol{\omega_d = 0.49749}$ de la función exponencial original.**

Se denomina Ancho de Banda al rango en abscisas entorno a la abscisa de Amplitud Máxima $\boldsymbol{Am}$, tal que las amplitudes en las extremos del ancho de banda son iguales a $\boldsymbol{Am\ \sqrt[2]{2}/2}$.

En términos de frecuencias, el Ancho de Banda es el rango de frecuencias centrado en **wm,** y de amplitud igual a ABw= $\boldsymbol{2\ a}$. En este caso ABw=2*0.05=0.1. Es decir que el ancho de banda está comprendido entre

Wi=(wm-ABw/2=0.50266- $\boldsymbol{a}$ =0.55266) ki=Wi/dw=17.59

Ws=(wm+ABw/2=0.50266+ $\boldsymbol{a}$ =0.45266) ks=Ws/dw=14.41

El ancho de banda en términos de componentes es ABk=ABw/dw= $\boldsymbol{2\ a}$ /dw=3.1831

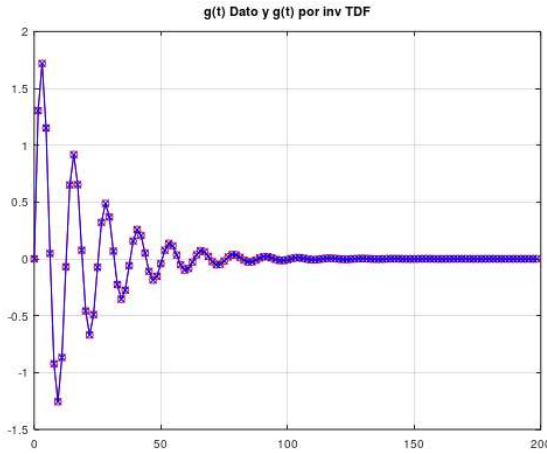
Las amplitudes entorno a la amplitud máxima son:

8.8263 11.6135 12.7213 10.0777 7.2321

El valor correspondiente a $\boldsymbol{Am\ \sqrt[2]{2}/2}$ =12.7213 $\boldsymbol{\sqrt[2]{2}/2}$= 8.99 está a ambos lados de la Amplitud máxima entre las componentes 15 y 16 (por debajo de la componente 17) y las componentes 18 y 19 (por arriba de la componente 17).

Conocida la función g_tdf = fft(g,N) es posible recuperar la función discreta en el dominio del tiempo haciendo uso de la la Transformada Discreta de Fourier Inversa. Las siguientes gráficas usando los comandos de OCTAVE "fft" e "ifft" g_fft=fft(g,N); % para obtener la TDF de g(t)

g_inv_fft=ifft(g_fft) % para obtener g(t) por Inversa de TDF



El *Teorema de Parseval* establece que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(g(t)\right)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(G(\omega)\right)^2 d\omega$$

Y para funciones discreta que

$$\|\vec{\boldsymbol{g}}\|_2^2 = \frac{1}{N}\left\|\vec{\boldsymbol{G}}\right\|_2^2$$

Con las normas cuadráticas definidas para funciones en t y variable compleja respectivamente, como:

$$\|\vec{\boldsymbol{g}}\|_2^2 = <\vec{\boldsymbol{g}},\vec{\boldsymbol{g}}> = \sum_{n=1}^{N}(g(n))^2 \qquad \left\|\vec{\boldsymbol{G}}\right\|_2^2 = <\vec{\boldsymbol{G}},\vec{\boldsymbol{G_c}}> = \sum_{k=1}^{N}(|G(k)|)^2$$

Comprobar que en este caso con Tp=200 dw=2PI/200=PI/100=0.031416

N	Dt	$\|\vec{\boldsymbol{g}}\|_2^2$	$\int_{-\infty}^{\infty}\left(g(t)\right)^2 dt \cong Dt * \|\vec{\boldsymbol{g}}\|_2^2$	$\left\|\vec{\boldsymbol{G}}\right\|_2^2 = N * \|\vec{\boldsymbol{g}}\|_2^2$	$\left\|\vec{\boldsymbol{G}}\right\|_\infty$	k de $\left\|\vec{\boldsymbol{G}}\right\|_\infty$	$\|G(1)\|$ para w=0
64	3.125	6.3606	19.877	407.08	6.3716	17	1.0089
128	1.5625	12.796	19.9937	1638	12.7213	17	2.4285
1024	0.19531	102.4	19.99974	104857.6	101.716	17	20.463
2048	0.097656	204.8	20	419430.4	203.43	17	40.951

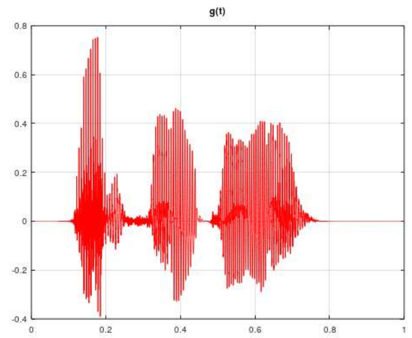
Notar que es invariante la posición k de $\left\|\vec{\boldsymbol{G}}\right\|_\infty$, a la que le corresponde una frecuencia

$\omega_1 = dw * (17-1) = 0.50266$, que es aproximadamente el ω_d de la función dato original.

Si se pretende obtener representación de frecuencias cercanas a 0.5 con el dw=0.031416, correspondiente a un múltiplo k=0.5/dw=15.915, la cantidad N de puntos debe ser mayor a (2*16+1) =33.

EJERCICIO 4- función discreta obtenida de un registro de voz

Sea la siguiente función discreta g(t) que ha sido obtenida mediante una adquisición digital de un sonido. Se ha usado una frecuencia de muestreo fs=16000 muestra por segundo, que hace un Dt=1/fs=6.25 E-5 seg. El registro tiene 16001 ordenadas que van desde t=0 hasta tf=1 seg.



Las ordenadas están en el archivo “Registro_240901.txt”. Se trata del sonido de una pablara de cuatro silabas.

Se considera N=16000 puntos con lo cual w0=2PI/16000=3.927E-4, y dw=w0/Dt=_6.2832

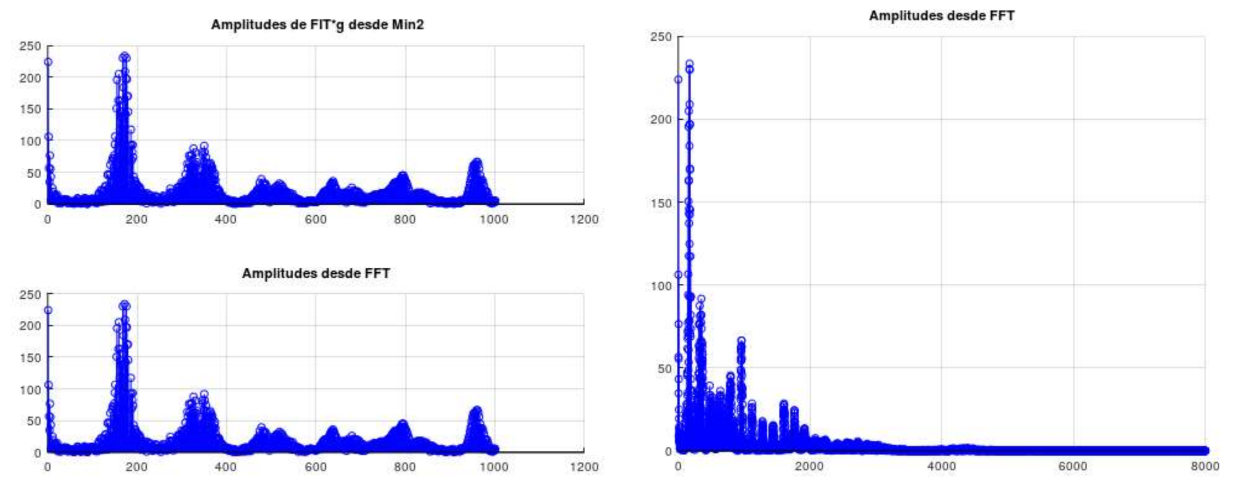
Se aplica la TDF mediante el comando de OCTAVE fft para encontrar el espectro de Amplitudes asociados a las frecuencias. Se usa ifft para encontrar la aproximación en el tiempo.

Este registro se aproximó con mínimos cuadrados y una base de funciones trigonométricas, con w0=2PI/16000, dw=w0/Dt y con distintos valores de m para los múltiplos de armónicas. Ello hace que la matriz Fi tenga 16000 filas por (2*m+1) columnas.

En la Figura se presentan las amplitudes obtenidas con TDF y con Mínimos Cuadrados como funciones discretas de la componente k variando desde 1 a 1000. Cada amplitud está así asociada a una frecuencia w=dw*(k-1). Se puede observar que las amplitudes con ambos algoritmos son iguales. A modo de ejemplo las primeras 15 componentes son:

Amp de b=FIT*g = 224.01962 106.24324 56.73702 34.75239 76.50145 55.43007 43.29058 8.68807 9.25062 5.99100 24.91748 19.40980 7.59031 5.36545 10.44440

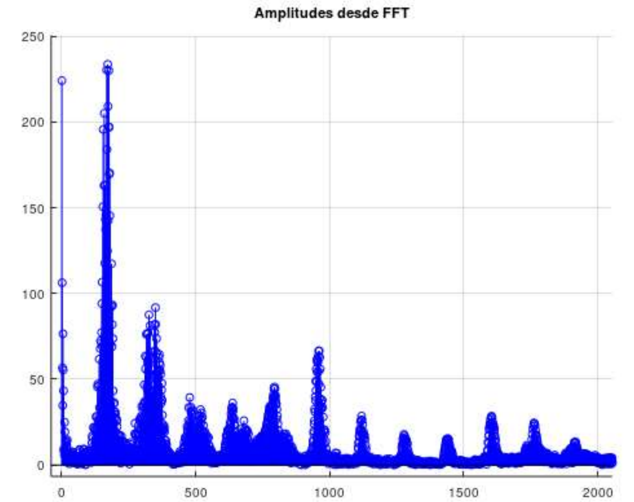
Amp desde FFT = 224.01962 106.24324 56.73702 34.75239 76.50145 55.43007 43.29058 8.68807 9.25062 5.99100 24.91748 19.40980 7.59031 5.36545 10.44440

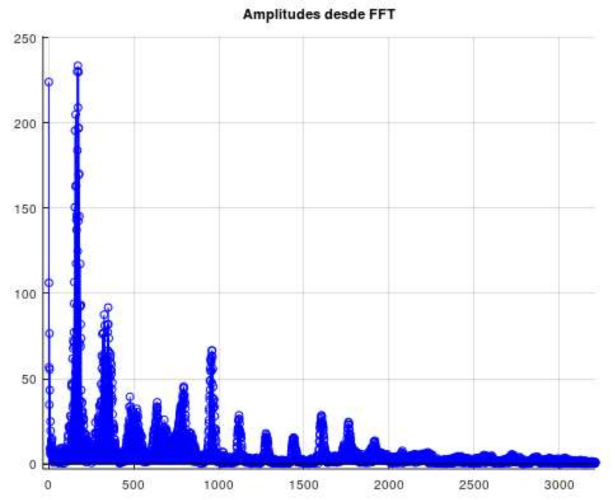


En la Figura de la derecha se puede observar la gráfica de las Amplitudes obtenidas con TDF en todo el rango posible (N/2) para los N=16000 puntos datos.

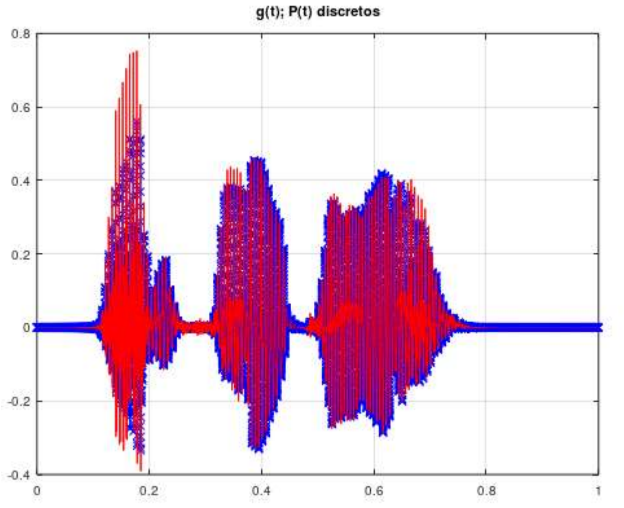
Se puede apreciar que en el rango de componentes entre 1000 y 4000 aún hay amplitudes no nulas que pueden contribuir a mejorar la aproximación.

En las siguientes figuras se amplían los rangos de componentes hasta 2000 y 3000

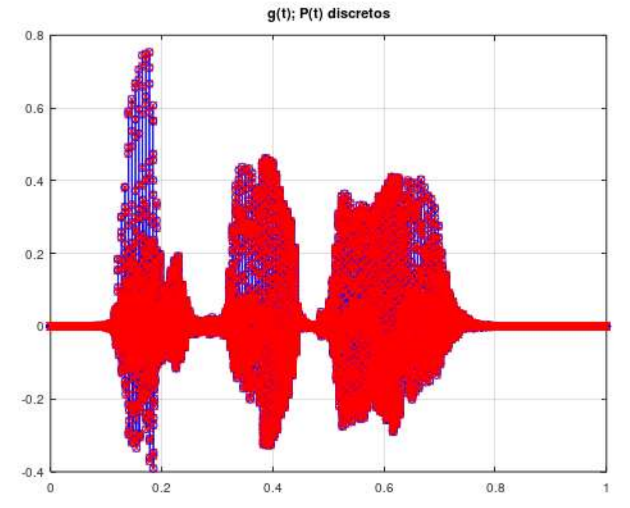




En las siguientes figures se puede observar las aproximaciones discretas obtenidas con Mínimos Cuadrados reteniendo m=1000 armónicos (a la izquierda) y la obtenida con TDF Inversa (ifft) considerando la totalidad de los puntos datos N=16000



Aproximación con Min Cuadrados y m=1000



Aplicación de TDF Inversa

Usando Mínimos Cuadrados y m=1000 se puede observar *que la aproximación P(t) es bastante similar en la segunda y tercera silaba, pero en la primera silaba la aproximación tiene menores amplitudes.*

Usando TDF Inversa con la totalidad de puntos N=16000 y los valores de G(k) complejos, se recupera la función discreta original (registro original).