Trabajos Prácticos de EDO con Valores Iniciales
Métodos de Euler

Ejercicio 1

Las EDO de primer orden, con su valor inicial conocido, se las puede escribir en la siguiente forma

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)) \qquad \text{con} \qquad u(0) = u_o$$

Y es posible encontrar una solución numérica aproxima mediante los Métodos de Euler o de Ruge Kutta.

El algoritmo del Método de Euler Adelante o Explícito, se puede sintetizar de la siguiente forma:

Dado $(t_n, u(t_n)) = (t_n, u_n)$, para n entero mayor o igual a cero; y elegido Δt

Se calcula $k_1 = \Delta t\, f(t_n, u_n)$

$$u_{n+1} = u_n + k_1$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

- Interpretar geométricamente el Método de Euler
- Usando Serie de Taylor, justificar que el Error de Truncamiento Local del Método de Euler es $E_{TL} = \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{d^2u(t)}{dt^2}\Big|_{\xi}$; y por lo tanto es un método de primer orden.

Ejercicio 2

Dada la siguiente EDO con su valor inicial

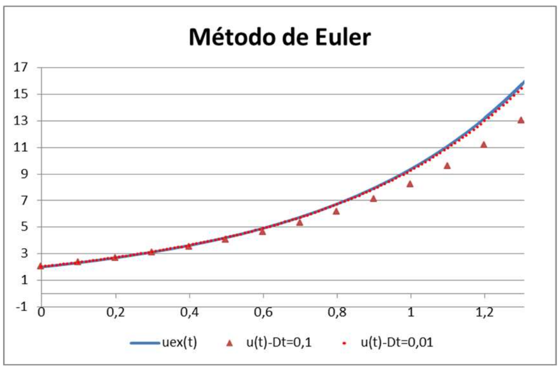
$$\frac{du(t)}{dt} - 2\ u(t) = -2\, t - 1 \qquad con \quad u(0) = 2$$

se puede probar que la solución exacta es $u_{ex}(t) = e^{2\,t} + t + 1$

- Escribir la EDO de modo que se pueda definir la *f(t,u(t))* necesaria para los métodos numéricos.
- Con Euler, usando un Δt=0,10 calcular el valor aproximado de *u(0,5)* y su error.
- Con Euler, usando un Δt=0,25 calcular el valor aproximado de *u(0,5)* y su error.

Tomar como error a diferencia en valor absoluto entre solución exacta y la solución numérica aproximada según cada método e incremento en t usado.

- Realizar un código en OCTAVE y comprobar la siguiente gráfica



Ejercicio 3

Dada la siguiente EDO con su valor inicial

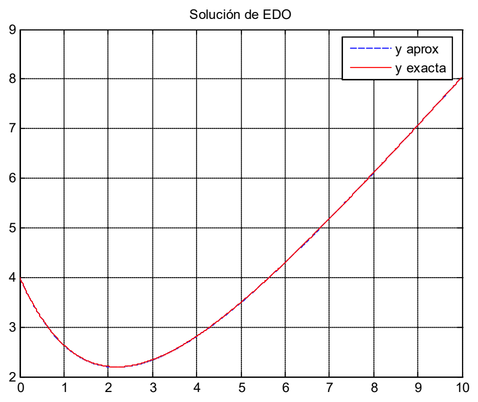
$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{2}\, u(t) = \frac{t}{2} \qquad con \quad u(0) = 4$$

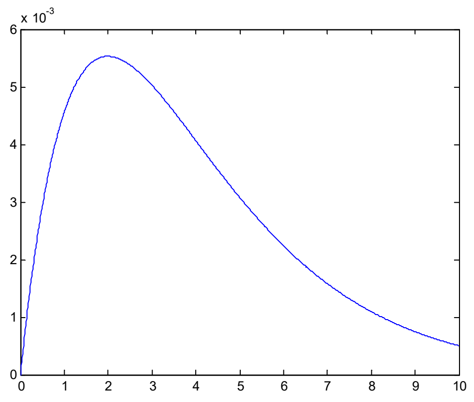
se puede probar que la solución exacta es $u_{ex}(t) = 6\ e^{-t/2} - 2 + t$

- Escribir la EDO de modo que se pueda definir la $f(t,u(t))$ necesaria para los métodos numéricos.
- Con Euler, usando un Δt=0,10 calcular el valor aproximado de $u(0{,}5)$ y su error.
- Con Euler, usando un Δt=0,25 calcular el valor aproximado de $u(0{,}5)$ y su error.

Tomar como error a diferencia en valor absoluto entre solución exacta y la solución numérica aproximada según cada método e incremento en t usado.

- Realizar un código en OCTAVE y comprobar las siguientes gráficas obtenidas con Δt=0.01





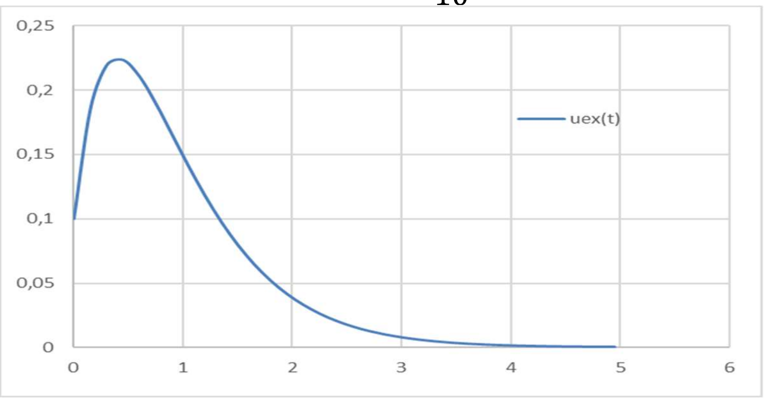
Asociar las magnitudes de la función error con la expresión del Error de Truncamiento Local del Método de Euler

Ejercicio 4

Dada la siguiente EDO con su valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + 2 \cdot y(t) = e^{-2t} \qquad con \qquad y(0) = 1/10$$

se puede probar que la solución exacta es $y_{ex}(t) = \frac{1}{10} e^{-2t} + t\ e^{-2t}$, cuya gráfica resulta



Realizar un código OCTAVE que, para distintos valores de Δt, permita:

- resolver la EDO con el método de Euler y graficar la solución aproximada y la exacta
- calcular la norma infinita de la función error

Elegir un valor de Δt, tal que la norma infinita de la función error sea inferior al 1% del valor máximo de la función solución exacta.

Ejercicio 5

Dada la siguiente EDO con su valor inicial

$$\frac{du(t)}{dt} - 2\,t\,(u(t))^2 = 0 \qquad con \quad u(0) = 1$$

se puede probar que la solución exacta es $u_{ex}(t) = 1/(1-t^2)$; que tiene una asíntota vertical en t=1

Realizar un código OCTAVE que, para distintos valores de Δt, permita:

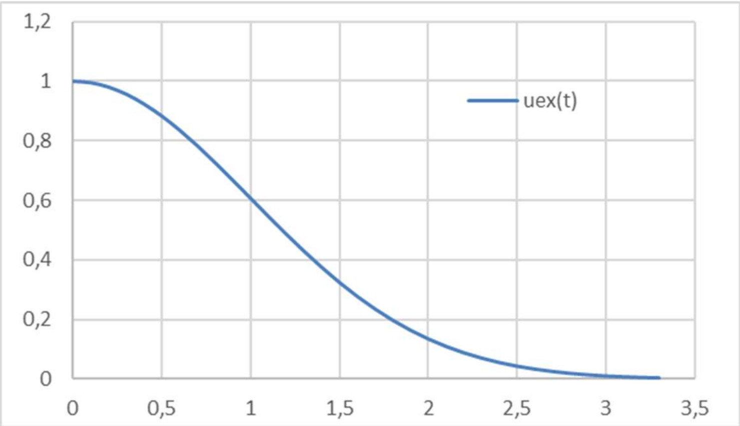
- resolver la EDO con el método de Euler y graficar la solución aproximada y la exacta
- calcular la norma infinita de la función error

Ejercicio 6

Dada la siguiente EDO con su valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + t \cdot y(t) = 0 \qquad con \qquad y(0) = 1$$

se puede probar que la solución exacta es $y_{ex}(t) = e^{-(\frac{t^2}{2})}$, cuya grafica es



Realizar un código OCTAVE que, para distintos valores de Δt, permita:

- resolver la EDO con el método de Euler y graficar la solución aproximada y la exacta
- calcular la norma infinita de la función error

Ejercicio 7

Dada el siguiente sistema de EDO con valores iniciales

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{con} \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Aplicar el método de Euler en forma vectorial, con Δt, y comprobar los siguientes valores:

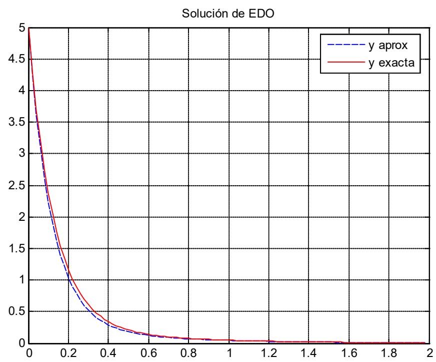
t	0	0,01	0,02	0,03	0,04
x1(t)	5	4,62	4,27	3,947608	3,6506232
x2(t)	3	2,8	2,6152	2,4444	2,28649568
k1_x1	-0,38	-0,35	-0,322392	-0,2969848	
k1_x2	-0,2	-0,1848	-0,1708	-0,15790432	

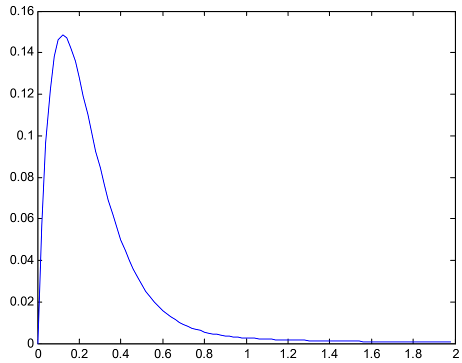
Elaborar un código en OCTAVE que verifique los valores anteriores

Con el código en OCTAVE elaborado, verificar con distintos valores de Δt, que la solución aproximada tiende a la solución exacta del problema dada por:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \cdot e^{-8\,t} + \frac{14}{3} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{Bmatrix} \cdot e^{-2\,t}$$

En particular para $\Delta t=0{,}02$, se pueden obtener las siguientes gráficas:





Ejercicio 7

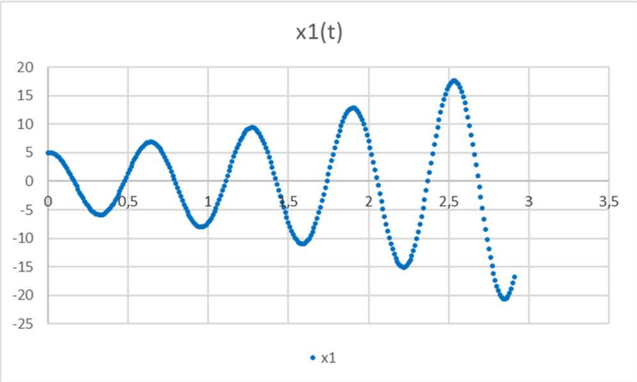
Dada el siguiente sistema de EDO con valores iniciales

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{con} \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

a) Con Dt=0,01 comprobar que con el Método de Euler se obtiene las siguientes soluciones para los primeros valores obtenidos.

t	x1	x2
0	5	3
1,00E-02	5,03E+00	-2,00E+00
2,00E-02	5,01E+00	-7,03E+00
3,00E-02	4,94E+00	-1,20E+01
4,00E-02	4,82E+00	-1,70E+01
5,00E-02	4,65E+00	-2,18E+01
6,00E-02	4,43E+00	-2,64E+01

En el intervalo [0;   2,91] de la variable independiente t; comprobar que en este caso, luego de 291 veces de aplicar el método, la respuesta resulta:



Evolución de la variable X1 en función de t

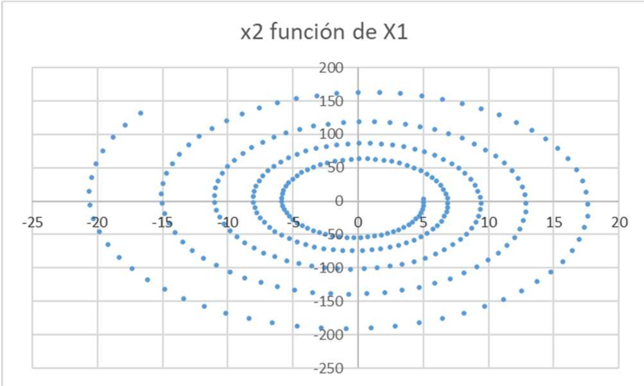
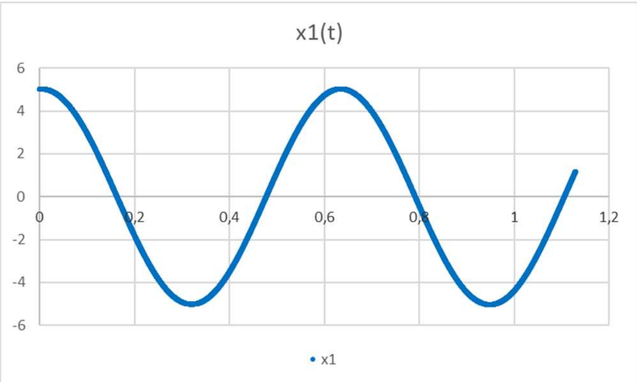


Diagrama en Espacio de Estados

a) Con Dt=0,0001 comprobar que con el Método de Euler se obtiene las siguientes soluciones en el intervalo [0; 1,13] de la variable t, que requieren 11300 veces la aplicación del método



Evolución de la variable X1 en función de t

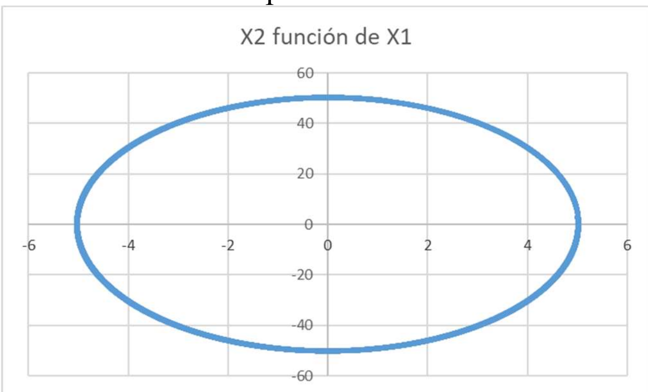


Diagrama en Espacio de Estados

El Método de Euler con Dt=0,01 induce a pensar en un comportamiento oscilatoriamente divergente; como resultado de la espiral creciente en el Diagrama de Espacios de Estados. Pero al achicar el Dt, se obtiene una solución oscilatoria perfecta, ya que el Diagrama en Espacios de Estados es una curva cerrada, que significa que los estados se repiten cíclicamente. El período aproximadamente de 0,6. (se puede observar de la curva x1(t)).

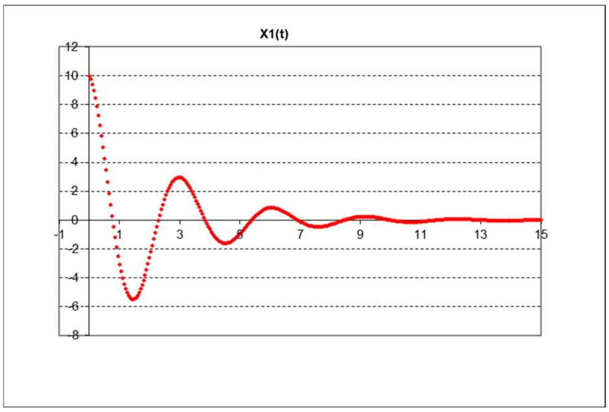
Se debe realizar siempre un análisis de convergencia de las soluciones aproximadas.

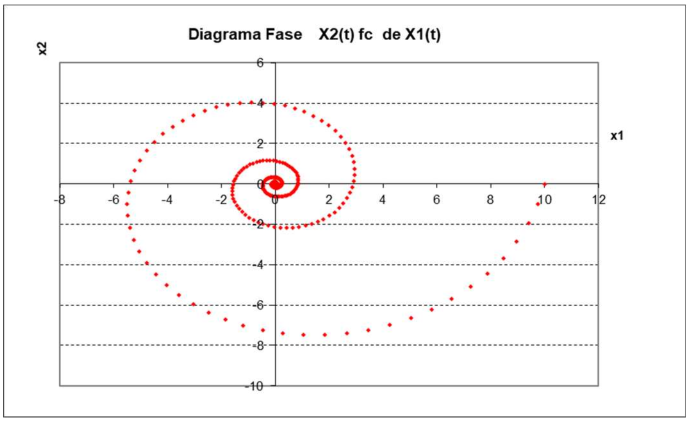
Ejercicio 8

Dada el siguiente sistema de EDO con valores iniciales

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & 2 \\ -2 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{con} \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

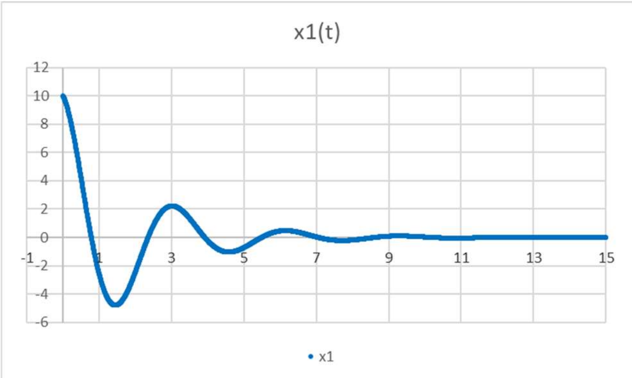
Comprobar que con el Método de Euler y Δt=5,5E-2, se obtienen las siguientes soluciones:

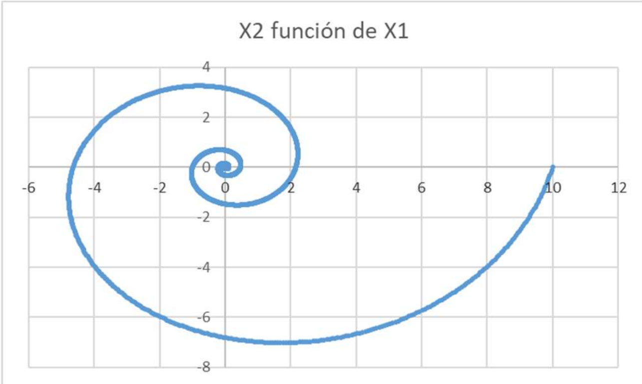




Evolución de la variable X1 en función de t — Diagrama en Espacio de Estados

Comprobar que con el Método de Euler y Δt=5,5E-3, se obtienen las siguientes soluciones:





Evolución de la variable X1 en función de t — Diagrama en Espacio de Estados

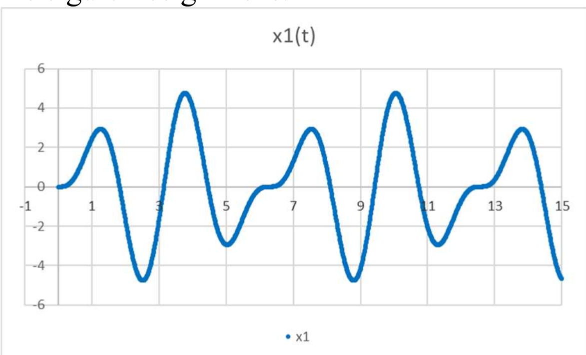
Comprobar con distintos valores de Δt, la convergencia de los valores picos de la x1(t) en el rango de t perteneciente a [1; 4].

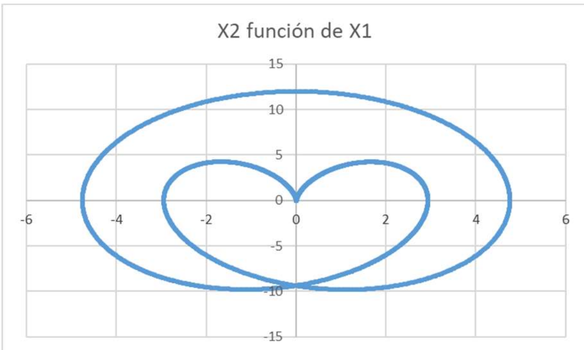
Ejercicio 9

Dada el siguiente sistema de EDO con valores iniciales

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} + seno(3\,t) \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} \quad \text{con} \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cuyas soluciones, obtenidas con el método de Runge Kutta de segundo orden y Δt=1E-2, se presentan en las siguientes gráficas.





Evolución de la variable X1 en función de t — Diagrama en Espacio de Estados

Buscar un valor de Dt, tal que la aproximación con el método de Euler sea similar a las figuras anteriores.