EJERCICIOS DE CONVOLUCIÓN

Tabla de contenido

Convolución y la Solución de EDO con Valores Iniciales

La integral de convolución de las funciones $\boldsymbol{h(t)}$ y $\boldsymbol{g(t)}$, se define como:

$$y(t) = \int_0^t (h(t-\xi) \cdot\ g(\xi))\ d\xi = h(t)\ o\ g(t)$$

En el contexto de sistemas dinámicos, cuyo modelo matemático está expresado por EDO, es posible interpretar que:

> $\boldsymbol{h(t)}$ es la función respuesta del sistema a un impulso unitario (o función Delta de Dirac); que es la solución de la EDO para valores iniciales nulos y término independiente la función Delta de Dirac
>
> $\boldsymbol{g(t)}$ es la entrada del sistema o término independiente de la EDO con valores iniciales nulos

Y así la función $\boldsymbol{y(t)}$ es la solución de la EDO, para la entrada $\boldsymbol{g(t)}$, con valores iniciales nulos, y coincide con la solución de la integral de convolución. Es posible resolver en forma aproximada la integral de convolución de las funciones $\boldsymbol{h(t)}$ y $\boldsymbol{g(t)}$, mediante la discretización de las funciones $\boldsymbol{h(t)}$ y $\boldsymbol{g(t)}$, con una subdivisión del rango de integración en N intervalos de longitud $\boldsymbol{\Delta t}$, y el cálculo en el dominio del tiempo o de la frecuencia.

Solución en el dominio del tiempo

> Conocidas las funciones discretas en el dominio del tiempo $\boldsymbol{h(n)}$ y $\boldsymbol{g(n)}$ con n=0 a N, la aproximación de la integral de convolución con la de suma de convolución es:

$$\boldsymbol{y(n) = \sum_{j=0}^{n} h(n-j)\ g(j)\ \Delta t \qquad con \quad n = 0 : N}$$

Solución en el dominio complejo o de la frecuencia

> Conocidas las funciones discretas en el dominio complejo, $\boldsymbol{H(k)}$ y $\boldsymbol{G(k)}$ con k=0 a N, que son respectivamente las Transformadas Discretas de Fourier de $\boldsymbol{h(n)}$ y $\boldsymbol{g(n)}$ con n=0 a N, el Teorema de Convolución permite evaluar la convolución en el dominio complejo como el producto de ambas funciones de variable compleja:

$$\boldsymbol{Y(k) = H(k)\ G(k)}$$

> $\boldsymbol{Y(k)}$ es una nueva función en el dominio complejo, con módulo igual al producto de los módulos de $\boldsymbol{H(k)}$ y de $\boldsymbol{G(k)}$; y argumento igual a la suma de los argumentos de $\boldsymbol{H(k)}$ y de $\boldsymbol{G(k)}$. La función $\boldsymbol{Y(k)}$ es la Transformadas Discretas de Fourier de $\boldsymbol{y(n)}$. Para encontrar la $\boldsymbol{y(n)}$ se aplica la TDF inversa a la $\boldsymbol{Y(k)}$ obtenida como el producto de $\boldsymbol{H(k)}$ y de $\boldsymbol{G(k)}$.

La conveniencia de resolver en el dominio del tiempo o en el dominio complejo, depende de los datos y del problema de aplicación.

EJERCICIO 1- Convolución de función Exponencial con función Escalón Unitario

La siguiente EDO de primer orden

$$\frac{dy(t)}{dt} + p\ \ y(t) = g(t)$$

tiene como función respuesta a un impulso unitario a:

$$h(t) = e^{-p\,t}$$

Si la función Escalón Unitario $u_s(t)$ está definida con valor 0 si $t < 0$, y con valor 1 para los $t \geq 0$. La convolución que se busca está definida para los $t \geq 0$, y es

$$y(t) = e^{-p\,t}\ o\ A\, u_s(t)\ = \int_0^t e^{-p\,(t-\xi)}\ A\, u_s(\xi)\ \ d\xi$$

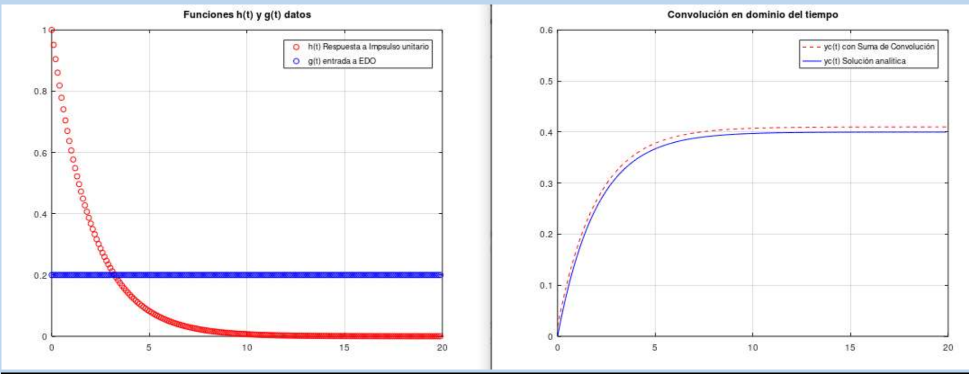
La solución exacta, haciendo uso de métodos analíticos de integración o de Transformada de Laplace, resulta:

$$y(t) = \frac{A}{p}\ (1 - e^{-p\,t})$$

Es posible destacar que para $t_a = 5/p$, la función $h(t_a) = e^{-5} \cong 0.06$, siendo un valor muy cercano a cero (comparado con el valor inicial de la función).

Se elige el rango de la variable $\boldsymbol{t}\ \in [\boldsymbol{t_0}; \boldsymbol{t_f}]$; con $\boldsymbol{t_0} = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{t_f} = 2$*$\boldsymbol{5/p}$

Comprobar que para $\boldsymbol{p = 0.5}\ \ \boldsymbol{y\, A = 0.2}$; y una discretización con N= 200 intervalos iguales en el rango de t (que determina $\Delta \boldsymbol{t} = [\boldsymbol{t_f} - \boldsymbol{t_0}]/\boldsymbol{N}$**),** se obtienen las siguientes gráficas



Para resolver la integral mediante la suma de convolución se puede usar el siguiente código

for n=1:N

$\boldsymbol{y(n) = 0}$

for j=1:n

$\boldsymbol{y(n) = y(n) + h(n+1-j)\ \ g(j)\, \Delta t}$

endfor

endfor

También es posible recurrir en OCTAVE al comando "conv" en la forma **y=Dt*conv(h,g)** para generar la función discreta. Se tendrá un vector con 2N-1 componentes que debe ajustarse en longitud a los valores de trabajo de 1 a N.

EJERCICIO 2- Convolución de función Exponencial con función Armónica por Exponencial

Para la misma EDO de primer orden del Ejercicio anterior, se busca la solución con valores iniciales nulos, y para una entrada $\boldsymbol{g(t) = sin(\omega\, t)}$. Se debe resolver la convolución de:

$$y(t) = e^{-p\,t}\; o\; A\, sin(\omega\, t) = \int_0^t e^{-p\,(t-\xi)}\;\; A\, sin(\omega\, \xi)\;\, d\xi$$

La solución exacta, haciendo uso de métodos analíticos de integración o de Transformada de Laplace, resulta:

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{(p^2+\omega^2)}}\;\; sen(\omega t + \vartheta) + \;e^{-pt}\;\; \frac{A\;\;\omega}{(p^2+\omega^2)}$$

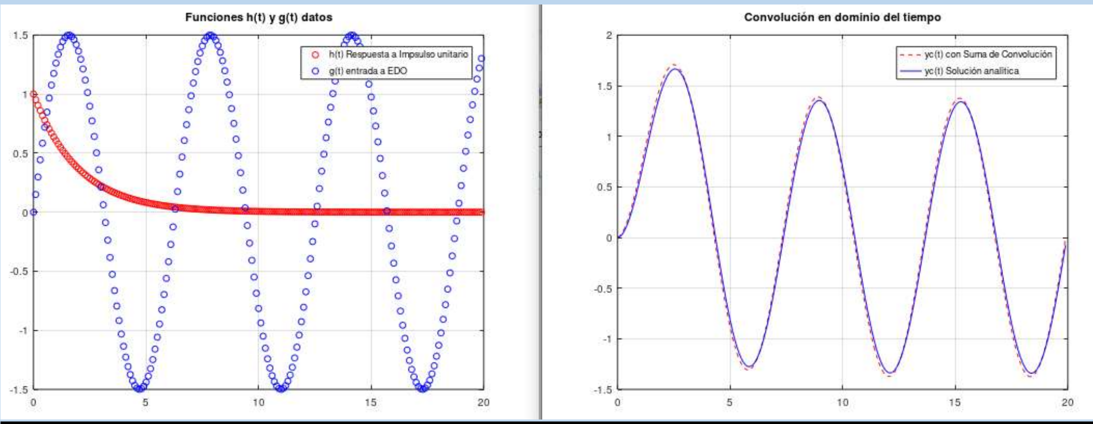
con

$$\begin{cases} \mathrm{sen}(\vartheta)\sqrt{(p^2+\omega^2)} = \omega \\ \cos(\vartheta)\sqrt{(p^2+\omega^2)} = -p \end{cases} \qquad \text{y} \qquad tan(\vartheta) = \frac{\omega}{-p}$$

Es posible destacar que para $t_a = 5/p$, la función $h(t_a) = e^{-5} \cong 0.06$, siendo un valor muy cercano a cero (comparado con el valor inicial de la función).

Se elige el rango de la variable $\boldsymbol{t} \;\in [\boldsymbol{t_0}; \boldsymbol{t_f}]$; con $\boldsymbol{t_0 = 0}$ y $\boldsymbol{t_f} = 2*\boldsymbol{5/p}$

Comprobar que para $\boldsymbol{p = 0.5}$; $\boldsymbol{A = 1.5}\;\; \boldsymbol{\omega = 1}$; y una discretización con N= 200 intervalos iguales en el rango de t (que determina $\Delta\boldsymbol{t} = [\boldsymbol{t_f - t_0}]/\boldsymbol{N}$**),** se obtienen las siguientes gráficas



Para resolver la integral mediante la suma de convolución se puede usar el siguiente código

```
for n=1:N
        y(n) = 0
        for j=1:n
                y(n) = y(n) + h(n + 1 − j)  g(j) Δt
        endfor
endfor
```

También es posible recurrir en OCTAVE al comando "conv" en la forma **y=Dt*conv(h,g)** para generar la función discreta. Se tendrá un vector con 2N-1 componentes que debe ajustarse en longitud a los valores de trabajo de 1 a N

Para resolver la convolución en el dominio de la variable compleja se debe tener las funciones Transformadas H(k) y G(k) de las funciones h(n) y g(n): para ello se debe hacer uso de la TDF, que en OCTAVE se puede hacer mediante el comando "fft", en la siguiente forma

```
h_tdf = fft(h);   % se hace TDF de h(t) impulso unitario
g_tdf = fft(g);   % se hace TDF de g(t) entrada
```

donde "h_tdf" es un vector que contiene los números complejos de H(k); y "g_tdf", los de G(k). En la gráfica de la izquierda se presentan los módulos de las funciones "h_tdf" y "g_tdf". También se grafica el módulo de la función "yc_tdf" que es el producto de las funciones de variable compleja. Este es un producto componente a componente, y se debe realizar con

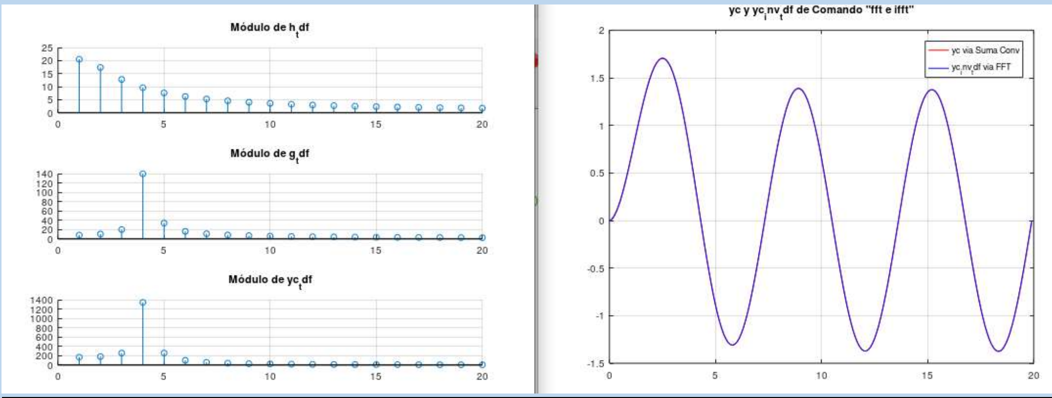
```
yc_tdf=h_tdf.*g_tdf;        % se hace Producto de TDF de h(t) por TDF de g(t)
```

Así en el vector "yc_tdf" se tienen los números complejos que son la TDF de la convolución en el dominio de t de las funciones h(n) y g(n).

Para obtener el resultado de la convolución en el tiempo de h(n) y g(n), se debe aplicar la TDF inversa a la función "yc_tdf". Para ello se puede recurrir al comando "ifft" de OCTAVE, en la siguiente forma

```
yc_inv_tdf=Dt*ifft(yc_tdf); % se hace TDF inversa para volver a t
```

Se obtiene el vector "yc_inv_tdf" que contienen los números reales que resultan de la convolución entre h(n) y g(n). EN la figura de la derecha se pueden observar las funciones convolución obtenidas por el algoritmo de la suma ene l tiempo, y mediante la aplicación de la TDF Inversa al producto de las TDF de h(n) y g(n)



Para graficar los módulos se puede usar el siguiente código

```
subplot(3,1,1),     stem(abs(h_tdf(1:N/10)))
  grid on
  title ('Módulo de h_tdf')
 subplot(3,1,2),     stem(abs(g_tdf(1:N/10)))
  grid on
  title ('Módulo de g_tdf')
 subplot(3,1,3),     stem(abs(yc_tdf(1:N/10)))
  grid on
  title ('Módulo de yc_tdf')
```

EJERCICIO 3- Convolución de función Exponencial con función Armónica por Exponencial

La siguiente EDO de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\sigma \frac{dy}{dt} + (\sigma^2 + \omega^2)\ y(t) = g(t)$$

tiene como función respuesta a un impulso unitario a:

$$h(t) = \frac{1}{\omega} e^{-\sigma\, t}\ sin(\omega\, t)$$

se busca la solución de la EDO con valores iniciales nulos, y para una entrada $g(t) = A\, e^{-q\, t}$. Se debe resolver la convolución:

$$y(t) = Ae^{-q\, t}\ o\ (\frac{1}{\omega} e^{-\sigma\, t} sin(\omega\, t)) = \int_0^t A\, e^{-q\,(t-\xi)}\ \frac{1}{\omega}\ e^{-\sigma\, \xi}\ sin(\omega\, \xi)\ d\xi$$

La solución exacta, haciendo uso de métodos analíticos de integración o de Transformada de Laplace, resulta:

$$y(t) = \frac{A}{\omega} \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{((-q+\sigma)^2 + \omega^2)}}\ sen(\omega t + \vartheta) +\ e^{-qt}\ \frac{A}{((-q+\sigma)^2 + \omega^2)}$$

con

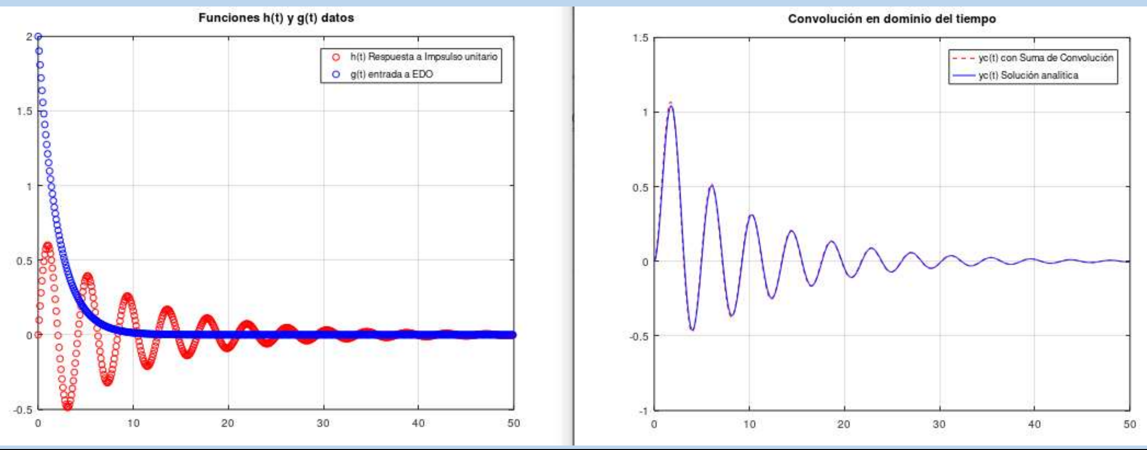
$$\begin{cases} \mathrm{sen}(\vartheta)\sqrt{((-q+\sigma)^2+\omega^2)} = \omega \\ \cos(\vartheta)\sqrt{((-q+\sigma)^2+\omega^2)} = \sigma - q \end{cases} \qquad \text{y} \qquad tan(\vartheta) = \frac{\omega}{\sigma - q} \quad \text{si } \sigma < q$$

y con fase negativa si $\boldsymbol{\sigma > q}$.

Es posible destacar que para $t_a = Max[5/\sigma;\ 5/q]$, la función $h(t_a) = e^{-5} \cong 0.06$, siendo un valor muy cercano a cero (comparado con el valor inicial de la función exponencial).

Se elige el rango de la variable $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{t_0}; \boldsymbol{t_f}]$; con $\boldsymbol{t_0 = 0}$ y $\boldsymbol{t_f} = 1*\boldsymbol{Max[5/\sigma;\ 5/q]}$**.**

Comprobar que para $\boldsymbol{q = 0.5}$; $\boldsymbol{A = 2}$ $\boldsymbol{\sigma = 0.1}$ $\boldsymbol{\omega = 1.5}$; y una discretización con N= 500 intervalos iguales en el rango de t (que determina $\Delta \boldsymbol{t} = [\boldsymbol{t_f} - \boldsymbol{t_0}]/\boldsymbol{N}$)**,** se obtienen las siguientes gráficas



En las siguientes gráficas se presenta la solución de la convolución en el dominio de la variable compleja mediante TDF de h(n) y g(n), sus multiplicaciones en variable compleja, y la aplicación de la TDF inversa