NO ENTRA EN EL PARCIAL 1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden 1
Soluciones Numéricas en el dominio del tiempo

Tabla de contenido

Objetivo

Comprobar la relación entre la respuesta a un Impulso unitario con la respuesta a un Escalón unitario

Introducir el empleo de Edo de 1er Orden como filtro pasa bajas

Comprobar las diferencias entre funciones armónicas de entrada a la EDO y su respuesta.

Requisitos

Conocer el método de Euler Explicito para resolver EDO de 1er Orden

Conocer algunas soluciones analíticas de EDO de 1er orden

Introducción

Se considera el modelo matemático de un circuito RC, que se puede expresar como la siguiente **ecuación diferencial de primer orden lineal y de coeficientes constantes**,

$$\frac{dx}{dt} + p\,x(t) = g(t) \qquad (1)$$

y su condición inicial en t=0

$$x(0) = x_0 \qquad (2)$$

donde x_0 y $p = 1/(RC)$ son constantes datos; $g(t)$ una función conocida (voltaje de entrada al circuito) y $x(t)$ es la diferencia de potencial debida al capacitor.

Solución para entrada Escalón e Impulso Unitario.

Sea la EDO (1) pero con entrada escalón y valores iniciales nulos

$$\frac{dx}{dt} + p\,x(t) = u_S(t) \qquad (3)$$

y su condición inicial en t=0

$$x(0) = 0 \qquad (4)$$

Con $\boldsymbol{p = -2}$**,** $\boldsymbol{Dt = (0.1)\,seg}$**,** equivalente a una discretización de $fs = 10$ (muestras por segundo), y aplicando el Método de Euler para resolver la EDO para una entrada

$$g(t) = u_S(t) = 1$$

se obtienen las siguientes soluciones para los primeros 5 puntos de la solución discreta

t_k	$g(t_k)$	$x(t_k)$	$k_1 = Dt * (g(t_k) - p \cdot u(t_k))$	$x(t_{k+1}) = x(t_k) + k_1$
0	1	0	0.1*(1+2*0)	0+(0.1)
0.1	1	0.1	0.1*(1+2*0.1)=0.1*1.2	0.1+(0.12)
0.2	1	0.22	0.1*(1+2*0.22)=0.1*1.44	0.22+(0.144)
0.3	1	0.364		
0.4	1	0.53680		
0.5	1	0.74416		

Es de interés conocer la derivada primera de la respuesta de la EDO (con valores iniciales nulos) para entrada dada por una función escalón unitaria. La función así obtenida coincide con la Respuesta a un Impulso Unitario de la EDO para valores iniciales nulos que se la suele denominar $h(t)$. Usando reglas de derivada numérica de orden 2 y de tipo central toda vez que sea posible, resulta en este caso igual a

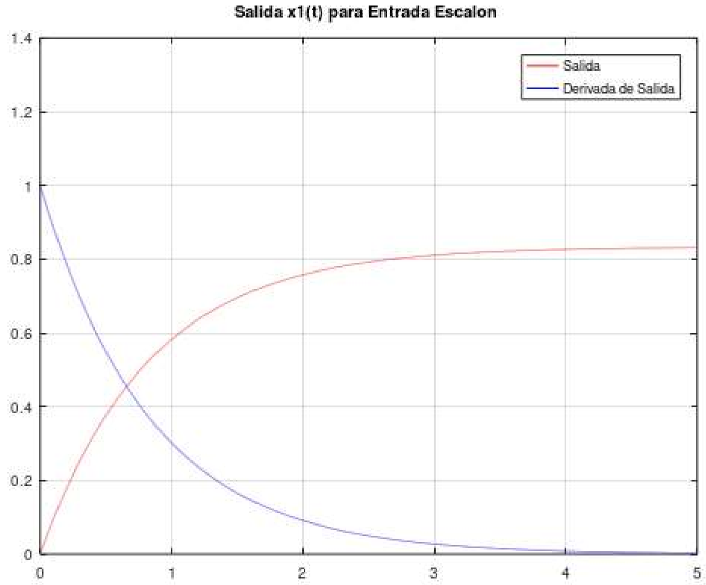
$$h(t) = \quad 0.90000 \quad 1.10000 \quad 1.32000 \quad 1.58400 \quad 1.90080 \quad 2.2464$$

Estos valores resultan suficientes para comprobar la programación del método de Euler pero son muy imprecisos debido al Dt elegido.

Al considerar la siguiente EDO

$$\frac{dx}{dt} + 1.2\,x(t) = u_S(t)$$

con valores iniciales nulos, usando el método de Euler con $Dt = (0.0001)\ seg$, (equivalente a una discretización de $fs = 10000$ muestras por segundo), se obtiene la siguiente gráfica



La *Salida* es la solución $x(t)$ obtenida con el método de Euler, y su derivada está obtenida con reglas de derivada numérica de orden 2, y de tipo central toda vez que sea posible.

Es oportuno compararla con las soluciones exactas de la EDO de 1er orden que son

$$x(t) = \frac{1}{p}(1 - e^{-p\,t})$$

$$h(t) = \frac{dx(t)}{dt} = e^{-p\,t}$$

y verificar que el Dt es adecuado.

La función $h(t)$ se denomina Respuesta a un Impulso Unitario, y su transformada de Laplace o de Fourier en la denominada Función de Transferencia (asociada a la EDO).

Solución para entrada dada por una función Armónica.

Sea la EDO (1) pero con entrada armónica

$$\frac{dx}{dt} + p\,x(t) = A\sin(\omega\,t) \qquad (5)$$

y su condición inicial en t=0

$$x(0) = x_0 \qquad (6)$$

La solución analítica de la EDO se puede obtener por distintos métodos (Variación de Parámetros, Transformada de Laplace, Convolución, entre otros) y resulta:

$$x(t) = x_0\,e^{-p\,t} + A\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,e^{-p\,t} + A\frac{1}{\sqrt{p^2+\omega^2}}\,\sin(\omega\,t+\varphi) \qquad (7)$$

Los sumandos que tienen el factor $e^{-p\,t}$ forman la parte transitoria de la solución $x_{tran}(t)$, ya que su incidencia decrece cuando t aumenta (tal como ocurre con la función exponencial).

El tercer sumando es la respuesta en estado estacionario $x_{SS}(t)$; y básicamente es la misma entrada, pero con amplitud y fase modificadas.

$$x_{SS}(t) = A \cdot mod_H \cdot \sin(\omega\,t+\varphi) \qquad (8)$$

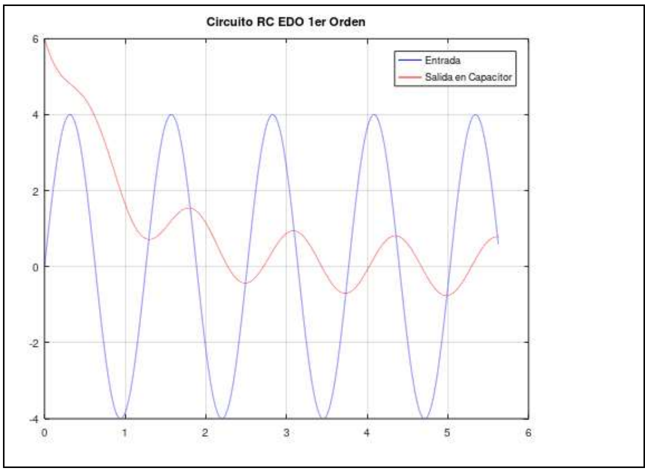
con:

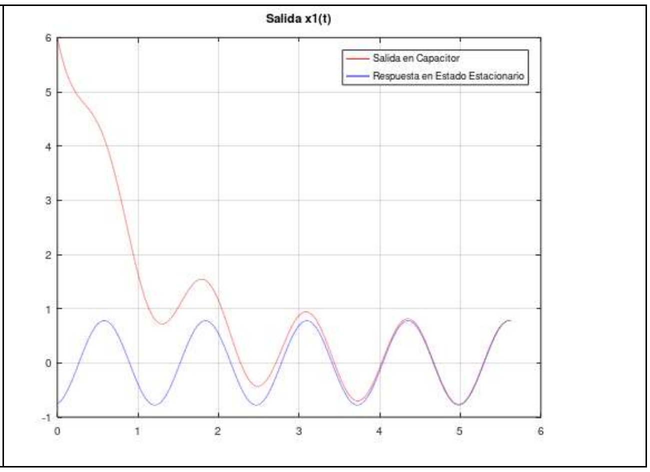
$$mod_H = \frac{1}{\sqrt{p^2+\omega^2}} \qquad\qquad \varphi = \mathrm{atan}\left(\frac{-\omega}{p}\right) \qquad (9)$$

Con $\boldsymbol{p = 1.2}$, $\boldsymbol{Dt = 6.25\,E-5\,seg}$, equivalente a una discretización de $fs = 16000 = 1/6.25\,E-5$ (muestras por segundo), y aplicando el **Método de Euler para resolver la EDO** para una entrada

$$g(t) = A\sin(\omega\,t) = 4\sin(5\,t)$$

se obtienen las siguientes soluciones





Se puede observar que la solución (Salida en Capacitor) comienza en el valor inicial, decrece en magnitud con algunas oscilaciones que se ponen en manifiesto cada vez más, y luego de t=4seg se transforma en una armónica muy marcada con amplitud y fase distintas a la entrada, pero igual frecuencia. Es decir, hay una solución transitoria y una solución de estado estacionario.

La solución de estado estacionario obtenida analíticamente resulta:

$$x_{SS}(t) = A \cdot mod_H \cdot \sin(\omega\,t+\varphi)$$

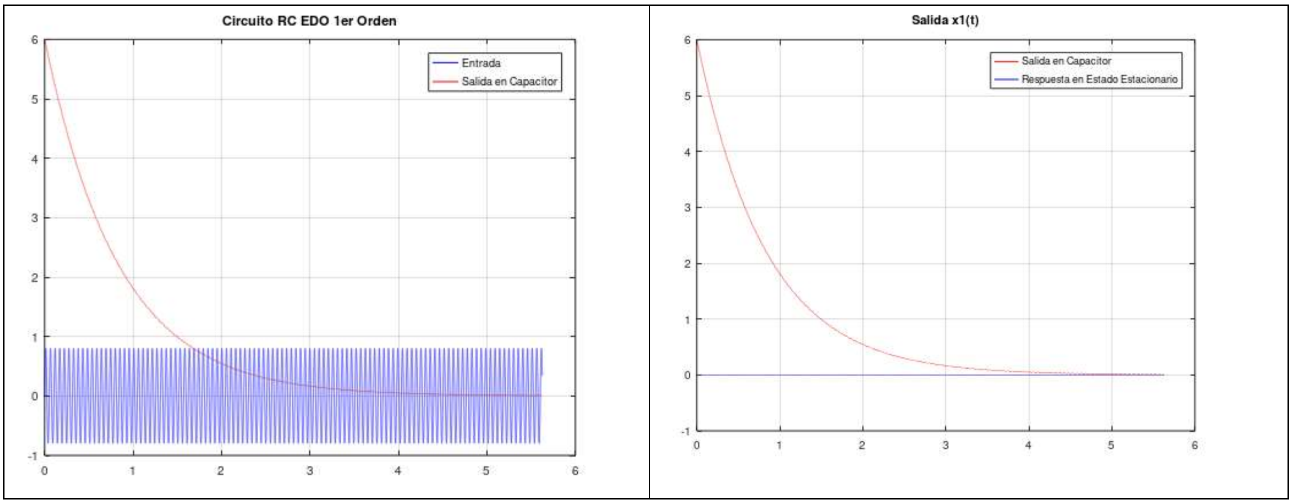
con

A	ω	ω/p	mod_H	φ
4	5	4.1667	0.1944775	-1.3353

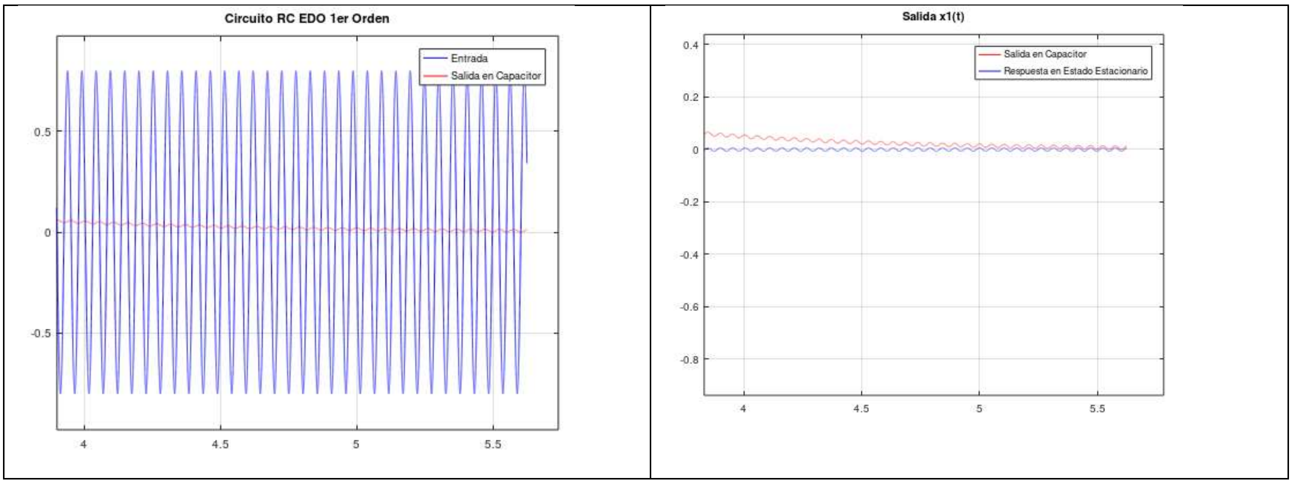
Con $\boldsymbol{p = 1.2}$**,** $\boldsymbol{Dt = 6.25\,E - 5\,seg}$**,** equivalente a una discretización de $fs = 16000 = 1/6.25\,E - 5$ (muestras por segundo), y aplicando el **Método de Euler para resolver la EDO** para una entrada

$$g(t) = A\sin(\omega\, t) = 0.8\sin(120\, t)$$

se obtienen las siguientes soluciones



Para una entrada armónica de “alta” frecuencia, en la x(t) no se aprecian oscilaciones. En las Figuras inferiores se presenta una ampliación para el intervalo de t entre 4 y 5.5 segundos.



Se puede observar que la solución de la EDO (Salida en el capacitor), y la solución en estado estacionario tienen oscilaciones, pero son muy inferiores a las oscilaciones de la entrada.

La solución de estado estacionario obtenida analíticamente resulta:

$$x_{SS}(t) = A \cdot\ mod_H \cdot\ \sin(\omega\, t + \varphi)$$

con

A	ω	ω/p	mod_H	φ
0.8	120	100	0.0083329	-1.5608

Solución para entrada dada por una Combinación Lineal de funciones Armónicas.

Sea el modelo matemático dado por

$$\frac{dx}{dt} + p\,x(t) = \sum_{j=1}^{NCL} A_j \sin(\omega_j\, t) \qquad (10)$$

y su condición inicial en t=0

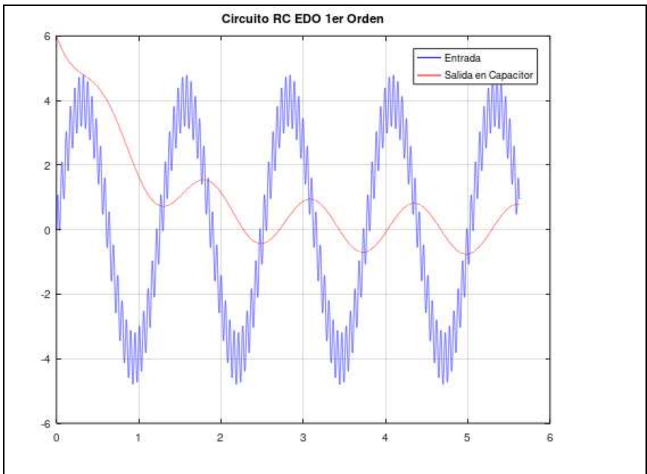
$$x(0) = x_0 = 6 \qquad (11)$$

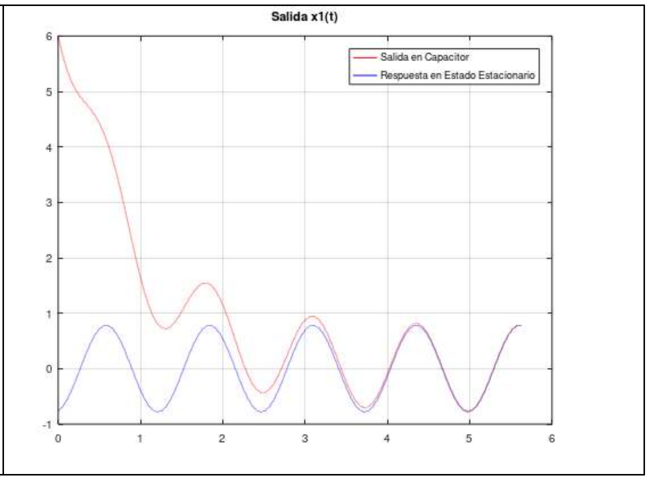
La solución analítica se puede considerar como la sumatoria de las soluciones analíticas para cara armónica.

$$\text{Para } g(t) = 4\sin(5\,t) + 0.8\sin(120\,t)$$

Con $Dt = 6.25\,E-5\,seg$, equivalente a una discretización de $fs = 16000 = 1/6.25\,E-5$ (muestras por segundo), y aplicando el Método de Euler para resolver la EDO se obtienen las siguientes soluciones

Para $\boldsymbol{p = 1.2}$, en las siguientes gráficas se puede observar la solución obtenida mediante el método de Euler comparada con la entrada $g(t)$ y la solución teórica para estado estacionario $x_{SS}(t)$





La solución de estado estacionario es la combinación lineal de las soluciones de estado estacionario para cada armónica. Esto resulta:

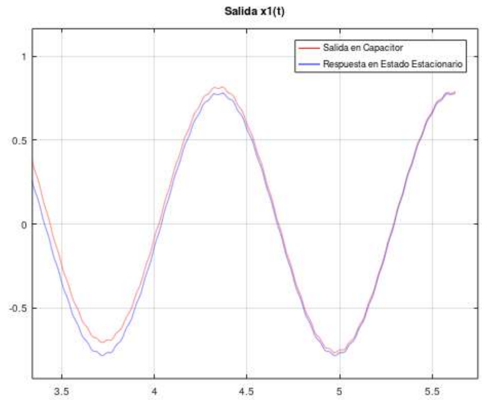
$$x_{SS}(t) = A_1 \cdot mod_{H1} \cdot \sin(\omega_1\, t + \varphi_1) + A_2 \cdot mod_{H2} \cdot \sin(\omega_2\, t + \varphi_2)$$

con

j	A_j	ω_j	ω_j/p	mod_{Hj}	φ_j
1	4	5	4.1667	0.1944775	-1.3353
2	0.8	120	100.0000	0.0083329	-1.5608

De comparar las soluciones obtenidas, es posible observar que la solución transitoria se es significativamente importante hasta valores cercanos a t=4.8 seg. Esto se corresponde con un valor de la función exponencial $e^{-4.8/1.2} = e^{-4} = 0.018$. Luego la respuesta obtenida con el método de Euler coincide con la respuesta analítica para estado estacionario $x_{SS}(t)$

La respuesta $x_{SS}(t)$ resulta con una influencia muy marcada de la armónica de menor frecuencia, comparada con el aporte a la solución de la armónica de mayor frecuencia, que es reflejo de comparar los mod_{Hj} (más allá que los coeficientes de amplitudes iniciales son distintos).

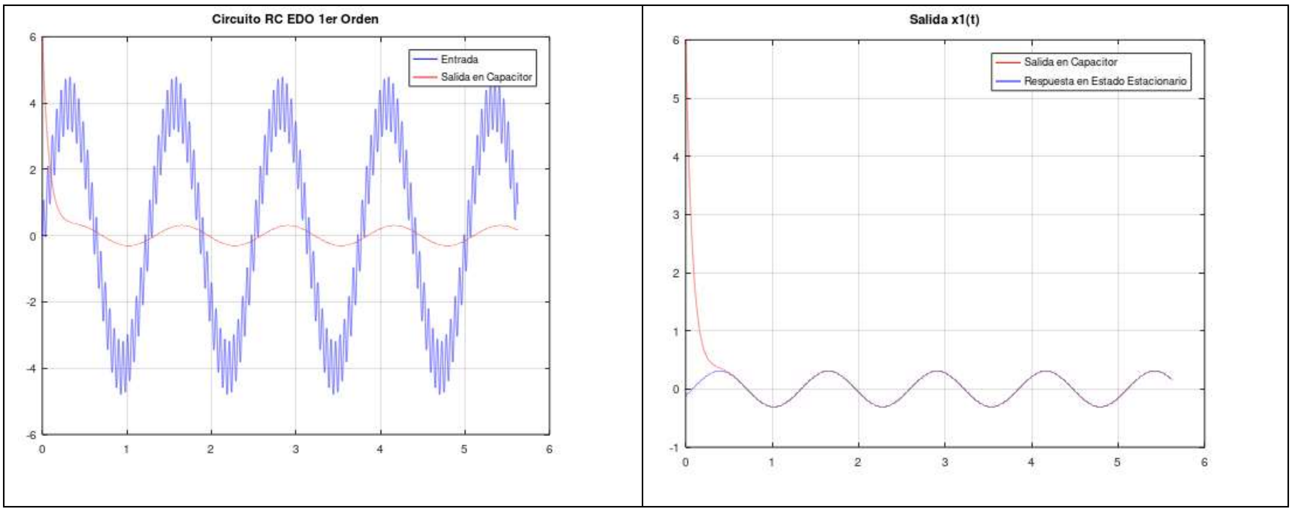


En la Figura adjunta se puede observar una ampliación de la figura anterior. Se puede destacar la coincidencia entre la solución numérica y la analítica de estado estacionario $x_{SS}(t)$

Además, se puede observar que la onda correspondiente a la menor frecuencia se le suma una onda asociada a la mayor frecuencia, pero con una amplitud mucho menor, y se manifiesta en las pequeñas ondulaciones.

El circuito RC se comporta dejando pasar las frecuencias bajas y filtrando las frecuencias altas.

Para $p = 12$ en las siguientes gráficas se puede observar la solución obtenida mediante el método de Euler comparada con la entrada $g(t)$ y la solución teórica para estado estacionario $x_{SS}(t)$



La solución de estado estacionario es la combinación lineal de las soluciones de estado estacionario para cada armónica. Esto resulta:

$$x_{SS}(t) = A_1 \cdot mod_{H1} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot mod_{H2} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

con

j	A_j	ω_j	ω_j/p	mod_{Hj}	φ_j
1	4	5	0.41667	0.0769231	-0.39479
2	0.8	120	10.0000	0.0082920	-1.47113

Las observaciones realizadas anteriormente para el caso de p=1.2 siguen siendo válidas, aunque con una solución transitoria que perdura menos en el tiempo. Esto se debe a que la función exponencial $e^{-4} = 0.018$ resulta en t=4/12=0.333 segundos.

La otra diferencia con la solución anterior es que la amplitud de la solución armónica de salida esta reducida comparada con el caso anterior, hecho que es consecuencia de comparar el mod_{H1} para p=1.2 con p=12.

Solución para entrada dada por un Registro cualquiera.

Sea el modelo matemático dado por

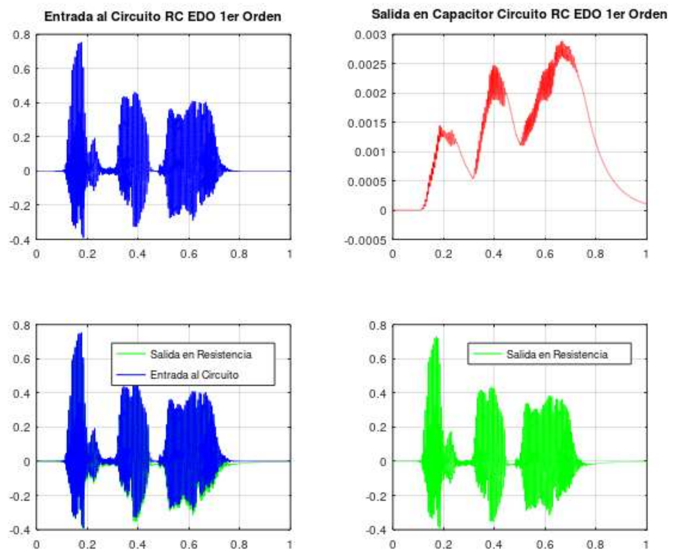
$$\frac{dx}{dt} + p\, x(t) = g(t)$$	(1)

y su condición inicial en t=0

$$x(0) = x_0 = 0$$	(2)

Se considera una entrada $g(t)$ que está como función discreta en el archivo: "**Registro_240901.txt**". Se sabe que se trata de un registro digital de un sonido que se adquirió (discretizó, digitalizó, muestreó) con una frecuencia de muestreo f_S igual a 16000 muestras por segundo, lo que significa un espaciamiento de tiempo $\Delta t\ (seg) = 1/f_S$=6.25 E-5.

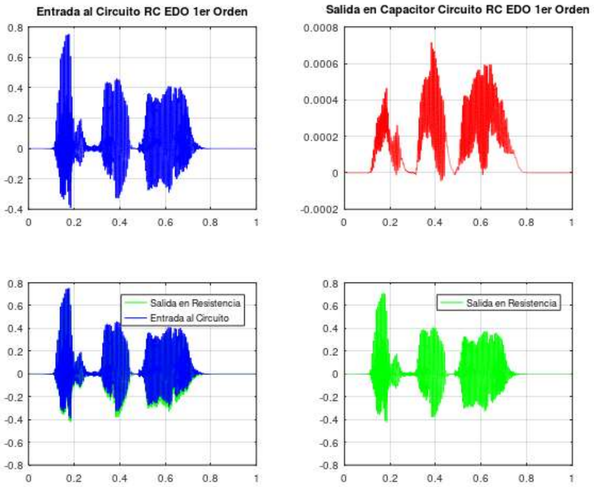
Con p=12, y usando el Método de Euler se obtienen las siguientes figuras



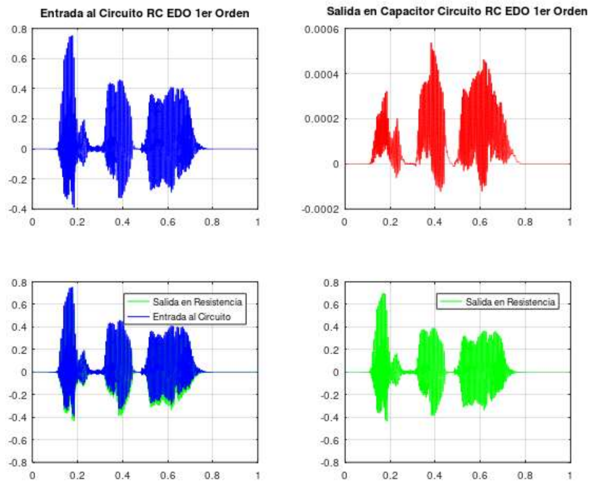
Se puede observar que la función $x(t)$ solución de la EDO (Salida en el Capacitor) se modifica sustancialmente respecto de la función $g(t)$ (entrada a la EDO). Por el contrario, la derivada primera de la función $x(t)$ (Salida en la Resistencia) es similar a la función $g(t)$.

Variando el parámetro p en la EDO de primer orden, se obtienen las siguientes soluciones, donde se puede visualizar en la función $x(t)$ (Salida en la Resistencia) la modificación que provoca la EDO en la función $g(t)$ (entrada a la EDO) o registro de sonido discretizado.

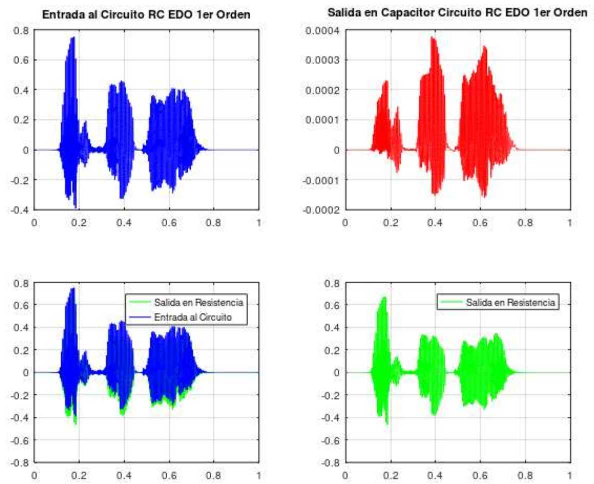
con p=120



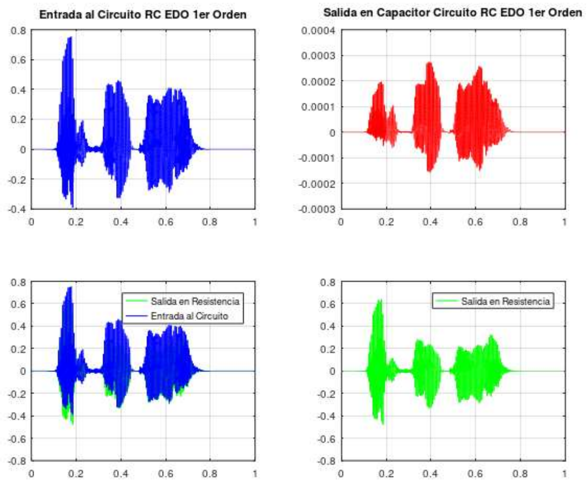
con p=240



Con p=620



Con p=1200



En OCTAVE serán de utilidad los siguientes comandos (sentencias para el script)

arreglo1d =load("Registro_240901.txt", "-ascii"); dim=length(*arreglo1d*)	player=audioplayer(*arreglo1d*, fs, 8); play(player) pause(*duracion_en_seg*)