

Matemáticas Discretas

Teoría de números

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Fernando Suárez
fsuarez1@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

4 de diciembre de 2019

- 1 Formular enunciados formales en notación matemática usando lógica, conjuntos, relaciones, funciones, cardinalidad, y otras herramientas, desarrollando definiciones y teoremas al respecto, así como demostrar o refutar estos enunciados, usando variadas técnicas.
- 2 Aplicar inducción como técnica para demostración de propiedades en conjuntos discretos y como técnica de definición formal de objetos discretos.

Contenidos

- 1 Objetivos
- 2 Aritmética modular
- 3 Teoremas de Fermat
- 4 Máximo común divisor
- 5 Inversos modulares
- 6 Ecuaciones de congruencia
- 7 Teorema Chino del Resto
- 8 Criptografía
- 9 RSA

Definición

La relación *divide* a , denotada por $|$, sobre los enteros sin el 0, es una relación tal que a está relacionado con b si y sólo si b es múltiplo de a :

$$a|b \text{ si y sólo si } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b = ka.$$

$$3|9 \quad 18|72 \quad 7 \nmid 9 \quad 2|-4$$

Definición

La relación *equivalencia módulo n* , denotada por \equiv_n , sobre los enteros, es una relación tal que a está relacionado con b si y sólo si $n|(b - a)$:

$$\begin{aligned} a &\equiv_n b \text{ si y sólo si } n|(b - a) \\ a &\equiv_n b \text{ si y sólo si } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } (b - a) = kn. \end{aligned}$$

Por ejemplo, dado $n = 7$:

$$2 \equiv_7 23 \qquad 8 \equiv_7 1 \qquad 19 \not\equiv_7 4$$

Recordemos. . .

- La relación \equiv_n es una relación de equivalencia.
- Podemos tomar el conjunto cociente generado por ella sobre \mathbb{Z} .
- Usando las clases de equivalencia, definimos la suma y la multiplicación.

Definición

Dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, definimos

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} / \equiv_n$$

y sus operaciones

$$\begin{aligned}[i] + [j] &= [i + j] \\ [i] \cdot [j] &= [i \cdot j]\end{aligned}$$

Recordemos...

Por simplicidad, renombramos las clases de equivalencia como los números que representan.

Ejemplo

$$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Calcule $37 + 18$ y $26 \cdot 37$.

Ejemplo

$$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Calcule $37 + 18$ y $26 \cdot 37$.

$$37 + 18 = [37] + [18] = [37 + 18] = [55] = [0]$$

$$26 \cdot 37 = [26] \cdot [37] = [26 \cdot 37] = [962] = [2]$$

Aritmética modular

Dados dos enteros a y n , siempre podemos expresar a en términos de n como $a = \alpha \cdot n + \beta$, donde $\alpha = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor$ es la división entera de a por n , y β es el resto de esa división, con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo

Dados $a = 3$ y $n = 2$, podemos escribir

$$a = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \cdot 2 + 1 = 1 \cdot 2 + 1$$

Definición

La operación **módulo** n entrega el resto de la división por n .

Se escribe $a \bmod n$.

Ejemplo

$$3 \bmod 2 = 1$$

Con esta operación podemos redefinir la suma y la multiplicación en \mathbb{Z}_n :

$$[i] + [j] = (i + j) \bmod n$$

$$[i] \cdot [j] = (i \cdot j) \bmod n$$

Una observación importante es que siempre se cumple que

$$0 \leq a \bmod n < n$$

- ¿Por qué?

Teorema

$a \equiv_n b$ si y sólo si $a \bmod n = b \bmod n$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorema

$a \equiv_n b$ si y sólo si $a \bmod n = b \bmod n$.

En primer lugar, sabemos que podemos escribir a y b en términos de n :

$$a = \alpha \cdot n + a \bmod n \quad (1)$$

$$b = \gamma \cdot n + b \bmod n \quad (2)$$

donde $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}$ son los resultados de las divisiones enteras.

(\Leftarrow) Suponemos que $a \bmod n = b \bmod n$. Por demostrar: $a \equiv_n b$.

Si restamos (2) - (1) obtenemos $b - a = (\gamma - \alpha) \cdot n$, de donde es claro que $n \mid (b - a)$, pues $(\gamma - \alpha) \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, se cumple que $a \equiv_n b$.

Teorema

$a \equiv_n b$ si y sólo si $a \bmod n = b \bmod n$.

(\Rightarrow) Por contrapositivo, suponemos que $a \bmod n \neq b \bmod n$ (3). Por demostrar: $a \not\equiv_n b$.

Sin pérdida de generalidad, asumimos que $a \bmod n < b \bmod n$ (4). Si restamos (2) – (1) obtenemos $b - a = (\gamma - \alpha) \cdot n + (b \bmod n - a \bmod n)$. Como

$$0 \leq a \bmod n, b \bmod n < n$$

por (4) se tiene que $1 \leq (b \bmod n - a \bmod n) \leq b \bmod n < n$. Por lo tanto, $n \nmid (b - a)$, de donde concluimos que $a \not\equiv_n b$.

Corolario

$$a \equiv_n a \bmod n$$

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Corolario

$$a \equiv_n a \bmod n$$

Como sabemos que $a \bmod n < n$, se tiene que $\left\lfloor \frac{a \bmod n}{n} \right\rfloor = 0$. Luego, si expresamos $a \bmod n$ en términos de n :

$$a \bmod n = 0 \cdot n + (a \bmod n) \bmod n$$

$$a \bmod n = (a \bmod n) \bmod n$$

y por el teorema anterior, $a \equiv_n a \bmod n$.

Teorema

Si $a \equiv_n b$ y $c \equiv_n d$, entonces

- $(a + c) \equiv_n (b + d)$
- $(a \cdot c) \equiv_n (b \cdot d)$

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorema

Si $a \equiv_n b$ y $c \equiv_n d$, entonces

- $(a + c) \equiv_n (b + d)$
- $(a \cdot c) \equiv_n (b \cdot d)$

Como $a \equiv_n b$, por definición sabemos que $n \mid (b - a)$, y nuevamente por definición tenemos que $b - a = k_1 \cdot n$. Si despejamos b , y procedemos análogamente desde $c \equiv_n d$:

$$b = a + k_1 \cdot n \tag{1}$$

$$d = c + k_2 \cdot n \tag{2}$$

Teorema

Si $a \equiv_n b$ y $c \equiv_n d$, entonces $(a + c) \equiv_n (b + d)$.

$$b = a + k_1 \cdot n \quad (1)$$

$$d = c + k_2 \cdot n \quad (2)$$

Sumamos (1) y (2):

$$b + d = a + c + (k_1 + k_2) \cdot n$$

$$\Leftrightarrow (b + d) - (a + c) = k_3 \cdot n$$

$$\Leftrightarrow n \mid (b + d) - (a + c)$$

$$\Leftrightarrow a + c \equiv_n b + d$$

Teorema

Si $a \equiv_n b$ y $c \equiv_n d$, entonces $(a \cdot c) \equiv_n (b \cdot d)$.

$$b = a + k_1 \cdot n \quad (1)$$

$$d = c + k_2 \cdot n \quad (2)$$

Multiplicamos (1) y (2):

$$\begin{aligned} b \cdot d &= (a + k_1 \cdot n)(c + k_2 \cdot n) \\ \Leftrightarrow &= a \cdot c + (a \cdot k_2 + c \cdot k_1 + n \cdot k_1 \cdot k_2) \cdot n \\ \Leftrightarrow &b \cdot d - a \cdot c = k_4 \cdot n \\ \Leftrightarrow &n \mid b \cdot d - a \cdot c \\ \Leftrightarrow &a \cdot c \equiv_n b \cdot d \end{aligned}$$

Corolario

$$(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$$

$$a \cdot b \bmod n = ((a \bmod n)(b \bmod n)) \bmod n$$

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Ejercicio

Demuestre que un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Ejercicio

Calcule $(55 \cdot 26) \bmod 4$.

Corolario

$$(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$$

$$a \cdot b \bmod n = ((a \bmod n)(b \bmod n)) \bmod n$$

Por teorema anterior sabemos que $a \equiv_n a \bmod n$ y $b \equiv_n b \bmod n$.

Aplicando el teorema de sumas y multiplicaciones:

$$\begin{aligned} a + b &\equiv_n (a \bmod n) + (b \bmod n) \\ \Leftrightarrow (a + b) \bmod n &= ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \cdot b &\equiv_n (a \bmod n) \cdot (b \bmod n) \\ \Leftrightarrow (a \cdot b) \bmod n &= ((a \bmod n)(b \bmod n)) \bmod n \end{aligned}$$

Ejercicio

Demuestre que un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Sabemos que un número entero n se puede representar como

$$n = d_k \cdot 10^k + \cdots + d_1 \cdot 10 + d_0 \quad (1)$$

donde d_i es el dígito i -ésimo de n . Por ejemplo:

$$1347 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7$$

Ahora, tenemos que n será divisible por 3 si y sólo si $n \bmod 3 = 0$.

Ejercicio

Demuestre que un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Tomamos mod 3 en (1) y usamos el teorema de suma y multiplicación:

$$\begin{aligned}n \bmod 3 &= (d_k \cdot 10^k + \cdots + d_1 \cdot 10 + d_0) \bmod 3 \\&= ((d_k \cdot 10^k) \bmod 3 + \cdots + (d_1 \cdot 10) \bmod 3 + d_0 \bmod 3) \bmod 3 \\&= ((d_k \bmod 3 \cdot 10^k \bmod 3) \bmod 3 + \cdots \\&\quad + (d_1 \bmod 3 \cdot 10 \bmod 3) \bmod 3 + d_0 \bmod 3) \bmod 3\end{aligned}$$

Ejercicio

Demuestre que un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Notemos que $\forall k \geq 1, 10^k \bmod 3 = 1$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} n \bmod 3 &= ((d_k \bmod 3 \cdot 1) \bmod 3 + \cdots \\ &\quad + (d_1 \bmod 3 \cdot 1) \bmod 3 + d_0 \bmod 3) \bmod 3 \\ &= ((d_k \bmod 3) \bmod 3 + \cdots \\ &\quad + (d_1 \bmod 3) \bmod 3 + d_0 \bmod 3) \bmod 3 \\ &= (d_k \bmod 3 + \cdots + d_1 \bmod 3 + d_0 \bmod 3) \bmod 3 \\ &= (d_k + \cdots + d_1 + d_0) \bmod 3 \end{aligned}$$

Luego, $n \bmod 3 = 0$ si y sólo si $(d_k + \cdots + d_1 + d_0) \bmod 3 = 0$; es decir, si la suma de los dígitos de n es divisible por 3.

Ejercicio

Calcule $(55 \cdot 26) \bmod 4$.

$$\begin{aligned}(55 \cdot 26) \bmod 4 &= (55 \bmod 4 \cdot 26 \bmod 4) \bmod 4 \\&= (3 \cdot 2) \bmod 4 \\&= 6 \bmod 4 \\&= 2\end{aligned}$$

Teorema (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces $a^p \equiv_p a$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorema (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces $a^p \equiv_p a$.

Se hará la demostración por inducción sobre el valor de a .

BI: $a = 0 \rightarrow 0^p = 0 \equiv_p 0$

$$a = 1 \rightarrow 1^p = 1 \equiv_p 1$$

HI: Suponemos que $a^p \equiv_p a$. Notemos que esto implica que $p \mid a^p - a$.

TI: Por demostrar: $(a+1)^p \equiv_p (a+1)$, o equivalentemente, que

$$p \mid (a+1)^p - (a+1), \text{ con } 2 \leq a+1 < p. \quad (1)$$

Teorema (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces $a^p \equiv_p a$.

$$\text{PD: } p \mid (a+1)^p - (a+1), \text{ con } 2 \leq a+1 < p. \quad (1)$$

Por el teorema del binomio, sabemos que $(a+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k$, con $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$. Desarrollamos la parte derecha de (1):

$$\begin{aligned} (a+1)^p - (a+1) &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k - (a+1) \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k + \binom{p}{0} a^0 + \binom{p}{p} a^p - (a+1) \end{aligned}$$

Teorema (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces $a^p \equiv_p a$.

$$\begin{aligned}(a+1)^p - (a+1) &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k - (a+1) \\&= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k + \binom{p}{0} a^0 + \binom{p}{p} a^p - (a+1) \\&= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k + 1 + a^p - a - 1 \\&= (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k\end{aligned}$$

Teorema (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces $a^p \equiv_p a$.

Tenemos entonces que

$$(a+1)^p - (a+1) = (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$$

Por HI, sabemos que $p \mid a^p - a$. Por demostrar: $p \mid \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$.

Demostraremos que $\forall k \in \{1, \dots, p-1\}, p \mid \binom{p}{k}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \binom{p}{k} &= \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1) \cdots (p-k+1)(p-k)!}{k!(p-k)!} \\ &= \frac{p(p-1) \cdots (p-k+1)}{k!} \end{aligned}$$

Teorema (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces $a^p \equiv_p a$.

Tenemos entonces que

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1) \cdots (p-k+1)}{k!}$$

Como los coeficientes binomiales son enteros, el numerador debe ser divisible por el denominador. Como p es primo y $k < p$, sabemos que entre los factores de $k!$ no puede haber divisores de p , por lo que necesariamente

$$\frac{(p-1) \cdots (p-k+1)}{k!} \in \mathbb{Z}, \text{ y entonces}$$

$$\binom{p}{k} = p \cdot \alpha, \text{ con } \alpha \in \mathbb{Z}, \text{ y por lo tanto } p \mid \binom{p}{k}.$$

Teorema (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces $a^p \equiv_p a$.

En conclusión, tenemos que

$$p \mid (a+1)^p - (a+1)$$

y por lo tanto

$$(a+1)^p \equiv_p (a+1)$$

como queríamos demostrar.

Se sigue entonces por inducción el teorema planteado.

Corolario (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{1, \dots, p-1\}$, entonces $a^{p-1} \equiv_p 1$.

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Corolario (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{1, \dots, p-1\}$, entonces $a^{p-1} \equiv_p 1$.

Por el teorema anterior:

$$a^p \equiv_p a \Rightarrow a^p \equiv_p a \Rightarrow p \mid a^p - a \Rightarrow a^p - a = k \cdot p \quad (1)$$

Notemos que $a \mid a^p - a$, y por lo tanto $a \mid k \cdot p$. Como p es primo y $a < p$, necesariamente $a \mid k$. Dividiendo (1) por a :

$$a^{p-1} - 1 = \frac{k}{a} \cdot p, \text{ con } \frac{k}{a} \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto:

$$p \mid a^{p-1} - 1 \Rightarrow 1 \equiv_p a^{p-1} \Rightarrow a^{p-1} \equiv_p 1$$

Máximo común divisor

Definición (de colegio)

Dados dos números a y b , su **máximo común divisor**, denotado como $MCD(a, b)$, es el máximo natural n tal que $n|a$ y $n|b$.

¿Cómo podemos calcularlo?

Teorema

Si $b > 0$, entonces $MCD(a, b) = MCD(b, a \bmod b)$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorema

Si $b > 0$, entonces $MCD(a, b) = MCD(b, a \bmod b)$.

Demostraremos que un entero c divide a a y a b si y sólo si divide a b y $a \bmod b$. De esto se concluye el teorema.

Sabemos que $a = k \cdot b + a \bmod b$ (1).

(\Rightarrow) Suponemos que $c \mid a$ y $c \mid b$. Si despejamos $a \bmod b$ desde (1), obtenemos que $a \bmod b = a - k \cdot b$, de donde se concluye que $c \mid a \bmod b$.

(\Leftarrow) Suponemos que $c \mid b$ y $c \mid a \bmod b$. De (1) se concluye que $c \mid a$.

Entonces:

$$MCD(a, b) = \begin{cases} a & b = 0 \\ MCD(b, a \bmod b) & b > 0 \end{cases}$$

Ejercicio

Calcule $MCD(403, 156)$.

Máximo común divisor

Entonces:

$$MCD(a, b) = \begin{cases} a & b = 0 \\ MCD(b, a \bmod b) & b > 0 \end{cases}$$

Ejercicio

Calcule $MCD(403, 156)$.

$$\begin{aligned} MCD(403, 156) &= MCD(156, 403 \bmod 156) = MCD(156, 91) \\ &= MCD(91, 156 \bmod 91) = MCD(91, 65) \\ &= MCD(65, 91 \bmod 65) = MCD(65, 26) \\ &= MCD(26, 65 \bmod 26) = MCD(26, 13) \\ &= MCD(13, 26 \bmod 13) = MCD(13, 0) \\ &= 13 \end{aligned}$$

Entonces:

$$MCD(a, b) = \begin{cases} a & b = 0 \\ MCD(b, a \bmod b) & b > 0 \end{cases}$$

Este algoritmo se puede extender para calcular $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que

$$MCD(a, b) = s \cdot a + t \cdot b.$$

Algoritmo extendido del MCD

Sea $a \geq b$.

- 1 Definimos una sucesión $\{r_i\}$ como:

$$r_0 = a, r_1 = b, r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i$$

- 2 Definimos sucesiones $\{s_i\}$, $\{t_i\}$ tales que:

$$s_0 = 1, t_0 = 0$$

$$s_1 = 0, t_1 = 1$$

$$r_i = s_i \cdot a + t_i \cdot b$$

- 3 Calculamos estas sucesiones hasta un k tal que $r_k = 0$.
- 4 Entonces, $MCD(a, b) = r_{k-1} = s_{k-1} \cdot a + t_{k-1} \cdot b$.

Ejercicio

Demuestre que

$$s_{i+1} = s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i$$

$$t_{i+1} = t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i$$

Máximo común divisor

En la sucesión definimos que $r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i$. Escribimos r_{i-1} como división de r_i :

$$r_{i-1} = \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i + r_{i+1} \bmod r_i \quad (1)$$

$$r_{i-1} = \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i + r_{i+1} \quad (2)$$

En la sucesión también definimos que $r_{i-1} = s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b$ (3).
Reemplazamos (3) en la parte izquierda de (2) y despejamos r_{i+1} :

$$\begin{aligned} s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b &= \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i + r_{i+1} \\ r_{i+1} &= s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i \end{aligned}$$

Máximo común divisor

$$r_{i+1} = s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i$$

Como $r_i = s_i \cdot a + t_i \cdot b$:

$$r_{i+1} = s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot (s_i \cdot a + t_i \cdot b)$$

$$r_{i+1} = \left(s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i \right) \cdot a + \left(t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i \right) \cdot b$$

Y como $r_{i+1} = s_{i+1} \cdot a + t_{i+1} \cdot b$:

$$s_{i+1} = s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i$$

$$t_{i+1} = t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i$$

Algoritmo extendido del MCD

Sea $a \geq b$.

- ❶ Definimos una sucesión $\{r_i\}$ como:

$$r_0 = a, r_1 = b, r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i$$

- ❷ Definimos sucesiones $\{s_i\}, \{t_i\}$ tales que:

$$s_0 = 1, \quad t_0 = 0$$

$$s_1 = 0, \quad t_1 = 1$$

$$s_{i+1} = s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i, \quad t_{i+1} = t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i$$

- ❸ Calculamos estas sucesiones hasta un k tal que $r_k = 0$.
- ❹ Entonces, $MCD(a, b) = r_{k-1} = s_{k-1} \cdot a + t_{k-1} \cdot b$.

Ejercicio

Dados $a = 60$ y $b = 13$, use el algoritmo para calcular $MCD(a, b)$ y $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $MCD(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$.

Máximo común divisor

Ejercicio

Dados $a = 60$ y $b = 13$, use el algoritmo para calcular $MCD(a, b)$ y $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $MCD(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$.

$$\begin{array}{lll} \text{Inicialmente:} & r_0 = a = 60 & s_0 = 1 \quad t_0 = 0 \\ & r_1 = b = 13 & s_1 = 0 \quad t_1 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Entonces:} \\ \hline r_2 = r_0 \bmod r_1 = 60 \bmod 13 = 8 \\ s_2 = s_0 - \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor \cdot s_1 = 1 - 4 \cdot 0 = 1 \\ t_2 = t_0 - \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor \cdot t_1 = 0 - 4 \cdot 1 = -4 \\ \hline r_3 = r_1 \bmod r_2 = 13 \bmod 8 = 5 \\ s_3 = s_1 - \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor \cdot s_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1 \\ t_3 = t_1 - \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor \cdot t_2 = 1 - 1 \cdot -4 = 5 \end{array}$$

Máximo común divisor

Ejercicio

Dados $a = 60$ y $b = 13$, use el algoritmo para calcular $MCD(a, b)$ y $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $MCD(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$.

$$\begin{array}{lll} r_0 = 60 & s_0 = 1 & t_0 = 0 \\ r_1 = 13 & s_1 = 0 & t_1 = 1 \\ r_2 = 8 & s_2 = 1 & t_2 = -4 \\ r_3 = 5 & s_3 = -1 & t_3 = 5 \\ r_4 = 3 & s_4 = 2 & t_4 = -9 \\ r_5 = 2 & s_5 = -3 & t_5 = 14 \\ r_6 = 1 & s_6 = 5 & t_6 = -23 \\ r_7 = r_5 \bmod r_6 = 2 \bmod 1 = 0 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} MCD(60, 13) &= r_6 = 1 \\ &= s_6 \cdot a + t_6 \cdot b = 5 \cdot 60 + (-23) \cdot 13 \end{aligned}$$

Definición

b es **inverso** de a en módulo n si $a \cdot b \equiv_n 1$.

Podemos denotarlo como a^{-1} . Ojo: no es lo mismo que $\frac{1}{a}$.

Ejemplo

1337 es inverso de 3 en módulo 4010.

- ¿Siempre existe el inverso modular?
 - No. Por ejemplo, 2 no tiene inverso en módulo 4.
- ¿Bajo qué condiciones a tiene inverso en módulo n ?
- ¿Cómo podemos calcularlo?

Teorema

a tiene inverso en módulo n si y sólo si $MCD(a, n) = 1$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

En este caso, diremos que a y n son *primos relativos* (o coprimos o primos entre sí).

Teorema

a tiene inverso en módulo n si y sólo si $MCD(a, n) = 1$.

(\Rightarrow) Supongamos que a tiene inverso en módulo n , digamos b . Por demostrar: $MCD(a, n) = 1$.

Como b es el inverso de a en módulo n , se cumple que $a \cdot b \equiv_n 1$, y por lo tanto $(a \cdot b) \bmod n = 1$. Entonces, tenemos que $a \cdot b = k \cdot n + 1$, y despejando 1 obtenemos que $1 = a \cdot b - k \cdot n$. Luego, necesariamente cualquier entero c tal que $c \mid a$ y $c \mid n$ debe cumplir que $c \mid 1$, por lo que la única posibilidad es que c sea 1, y por lo tanto necesariamente $MCD(a, n) = 1$.

Teorema

a tiene inverso en módulo n si y sólo si $MCD(a, n) = 1$.

(\Leftarrow) Supongamos que $MCD(a, n) = 1$. Por demostrar: a tiene inverso en módulo n .

Si ejecutamos el algoritmo extendido del MCD obtenemos s, t tales que

$$\begin{aligned}1 &= s \cdot n + t \cdot a \\ \Leftrightarrow a \cdot t &= (-s) \cdot n + 1 \\ \Leftrightarrow a \cdot t \bmod n &= 1 \\ \Leftrightarrow a \cdot t &\equiv_n 1\end{aligned}$$

Y entonces a tiene inverso en módulo n , t .

Notemos que la demostración nos da un método para calcular el inverso:

- Ocupamos el algoritmo extendido del máximo común divisor para encontrar s y t tales que $1 = s \cdot n + t \cdot a$.
- t será el inverso de a en módulo n .

Dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$, si $a \equiv_n b$ también podemos escribir:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Esta es la notación más usada en la literatura.

Definición

Una **congruencia lineal** es una ecuación de la forma

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

donde $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ y x es una variable.

Ejemplos

$$3x \equiv 2 \pmod{7}$$

$$4x \equiv 3 \pmod{6}$$

¿Cómo resolvemos estas ecuaciones? ¡Con inversos!

Ecuaciones de congruencia

Corolario (del teorema de los inversos)

Si a y n son primos relativos, entonces $ax \equiv b \pmod{n}$ tiene solución en \mathbb{Z}_n .

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Ejercicio

Resuelva las ecuaciones anteriores.

Corolario (del teorema de los inversos)

Si a y n son primos relativos, entonces $ax \equiv b \pmod{n}$ tiene solución en \mathbb{Z}_n .

Como a y n son primos relativos, a tiene inverso en módulo n . Entonces:

$$\begin{aligned} ax &\equiv b \pmod{n} \text{ multiplicamos por } a^{-1} \\ \Leftrightarrow (a^{-1} \cdot a)x &\equiv (a^{-1} \cdot b) \pmod{n} \\ \Leftrightarrow x &\equiv (a^{-1} \cdot b) \pmod{n} \end{aligned}$$

Ejercicio

Resuelva $3x \equiv 2 \pmod{7}$.

El inverso de 3 en módulo 7 es 5: $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1 \pmod{7}$.

$$\begin{aligned}x &\equiv 5 \cdot 2 \pmod{7} \\&\equiv 10 \pmod{7} \\&\equiv 3 \pmod{7}\end{aligned}$$

$x = 3$ es solución en \mathbb{Z}_7 .

Teorema Chino del Resto

Ejercicio

El General Tso se encontraba próximo a una nueva batalla, pero esta vez quería saber cuántos soldados de su ejército resultarían muertos, y para eso necesitaba contarlos.

Si los soldados se ordenaban en filas de 3, sobraban 2 soldados. Si se ordenaban en filas de 5, sobraban 3, y si se ordenaban en filas de 7, solo sobraban 2.

Si x es la cantidad de soldados en el ejército del General Tso:

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$x \equiv 2 \pmod{7}$$

¿Cómo resolvemos este sistema de ecuaciones?

Teorema Chino del Resto

Teorema

Sean m_1, m_2, \dots, m_n con $m_i > 1$ tal que m_i, m_j son primos relativos con $i \neq j$. Para $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, el sistema de ecuaciones:

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

$$\vdots$$

$$x \equiv a_n \pmod{m_n}$$

tiene una única solución en \mathbb{Z}_m con $m = \prod_{i=1}^n m_i$

Teorema Chino del Resto

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ejercicio

¿Cuántos soldados tiene el ejército del General Tso?

Teorema Chino del Resto

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Dividiremos la demostración en existencia (i) y unicidad (ii) de la solución al sistema de ecuaciones.

i) Sea $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$. Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ definimos

$$M_k = \frac{m}{m_k}$$

Dado que m_i, m_j son primos relativos para todo $i \neq j$, es claro que M_k y m_k son coprimos y por ende $MCD(M_k, m_k) = 1$. Por lo tanto, M_k tiene inverso M_k^{-1} en módulo m_k . Luego, definimos la solución x^* como:

$$x^* = a_1 \cdot M_1 \cdot M_1^{-1} + \dots + a_n \cdot M_n \cdot M_n^{-1}$$

Teorema Chino del Resto

Definimos la solución x^* como:

$$x^* = a_1 \cdot M_1 \cdot M_1^{-1} + \dots + a_n \cdot M_n \cdot M_n^{-1}$$

¿Es x^* una solución para el sistema de ecuaciones?

Como $M_j \equiv 0 \pmod{m_k}$ para todo $j \neq k$, entonces:

$$x^* \equiv a_1 \cdot M_1 \cdot M_1^{-1} + \dots + a_n \cdot M_n \cdot M_n^{-1} \pmod{m_k}$$

$$x^* \equiv a_1 \cdot M_1 \cdot M_1^{-1} + \dots + a_k \cdot M_k \cdot M_k^{-1} + \dots + a_n \cdot M_n \cdot M_n^{-1} \pmod{m_k}$$

$$x^* \equiv a_k \cdot (M_k \cdot M_k^{-1}) \pmod{m_k}$$

$$x^* \equiv a_k \pmod{m_k}$$

Teorema Chino del Resto

Ejercicio

Demuestre el teorema.

- ii) Por demostrar: si el sistema de ecuaciones tiene solución, entonces esta es única. Por contradicción, sean u, v soluciones distintas al sistema de congruencias. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ debe cumplirse que

$$u \equiv a_i \pmod{m_i}$$

$$v \equiv a_i \pmod{m_i}$$

y por transitividad de la equivalencia obtenemos que

$$u \equiv v \pmod{m_1}$$

$$u \equiv v \pmod{m_2}$$

$$\vdots$$

$$u \equiv v \pmod{m_n}$$

Teorema Chino del Resto

Lema

Sean $m_1, m_2 > 1$ coprimos y $u, v \in \mathbb{Z}$. Si $u \equiv v \pmod{m_1}$ y $u \equiv v \pmod{m_2}$, entonces $u \equiv v \pmod{m_1 \cdot m_2}$.

Supongamos que $u \equiv v \pmod{m_1}$ y $u \equiv v \pmod{m_2}$. Por definición, sabemos que existen con $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$u - v = k_1 \cdot m_1 \tag{1}$$

$$u - v = k_2 \cdot m_2 \tag{2}$$

por definición en (2):

$$m_2 \mid u - v \tag{3}$$

aplicando esto a (1):

$$m_2 \mid k_1 \cdot m_1 \tag{4}$$

Teorema Chino del Resto

Como m_1 y m_2 son primos relativos, se debe tener que $m_2 \mid k_1$, por lo que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$k_1 = k \cdot m_2 \quad (5)$$

y reemplazando en (1) obtenemos

$$u - v = k_1 \cdot m_1 \quad (6)$$

$$u - v = k \cdot m_2 \cdot m_1 \quad (7)$$

$$u \equiv v \pmod{m_1 \cdot m_2} \quad (8)$$

Ejercicio

Generalice el lema para n equivalencias.

Teorema Chino del Resto

Ejercicio

Demuestre el teorema.

ii) Anteriormente obtuvimos que

$$u \equiv v \pmod{m_1}$$

$$u \equiv v \pmod{m_2}$$

$$\vdots$$

$$u \equiv v \pmod{m_n}$$

Dado que m_1, m_2, \dots, m_n son primos relativos, por el lema se debe tener que:

$$u \equiv v \pmod{m_1 \cdot m_1 \cdot \dots \cdot m_n}$$

de donde se concluye que la solución es única en módulo $m_1 \cdot m_1 \cdot \dots \cdot m_n$.

Ejercicio

¿Cuántos soldados tiene el ejército del General Tso?

$$m = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

$$M_1 = \frac{m}{3} = \frac{105}{3} = 35$$

$$M_2 = \frac{m}{5} = \frac{105}{5} = 21$$

$$M_3 = \frac{m}{7} = \frac{105}{7} = 15$$

$$x = 2 \cdot 35 \cdot 35^{-1} \pmod{3} + 3 \cdot 21 \cdot 21^{-1} \pmod{5} + 2 \cdot 15 \cdot 15^{-1} \pmod{7}$$

$$x = 2 \cdot 35 \cdot 2 + 3 \cdot 21 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 1$$

$$x = 140 + 63 + 30$$

$$x = 233$$

$$x \equiv_{105} 23$$

Criptografía

- La criptografía es el estudio de métodos para enviar y recibir mensajes en privado.
- El interés en el área viene desde la antigüedad...

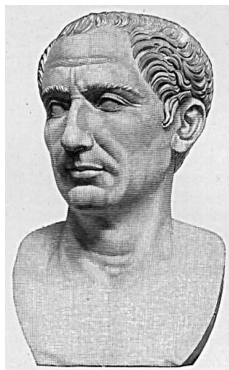


Figura: Julio César

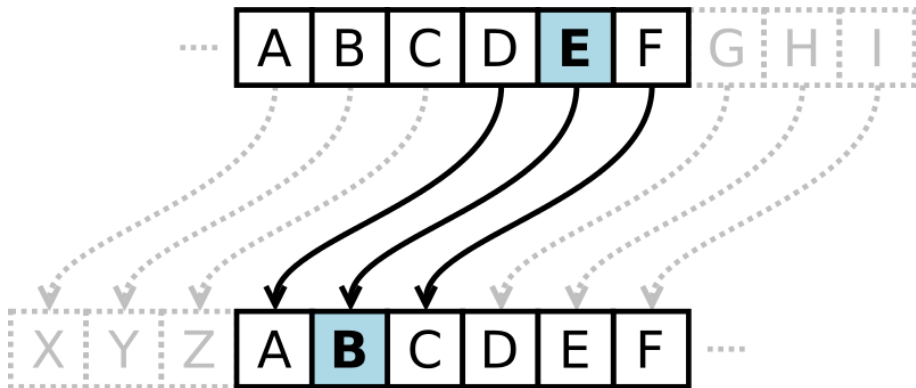


Figura: Julio César usaba este método para su correspondencia privada

Con lo que sabemos, podemos formalizar esto...

Cifrado del César

Input: letra $M \in \{0, \dots, 26\}$

Output: letra cifrada $C = (M + 3) \bmod 27$

Ejercicio

Cifre el mensaje “holamundo”.

Podemos generalizar el cifrado del César:

Cifrado del César generalizado

Dado un número d :

Input: letra $M \in \{0, \dots, 26\}$

Output: letra cifrada $C = (M + d) \bmod 27$

En criptografía y teoría de la comunicación, se habla de dos agentes A y B (Alice y Bob) que desean comunicarse.

- Alice desea enviar el mensaje $M = \text{“holamundo”}$ a Bob privadamente.
- Elige un número d y envía $C = (M + d) \bmod 27$.
- Bob obtiene el mensaje C .

A M se le conoce como el **texto plano**, a C como el **texto cifrado** y a d como la **llave**.

¿Como recupera Bob el mensaje original?

- Necesita la llave d .
- Con ella: $M = (C - d) \bmod 27$.

Ejercicio

Demuestre que para todo d y M , si $C = (M + d) \bmod 27$ y $M' = (C - d) \bmod 27$, entonces $M = M'$.

Bob necesita la llave. . .

- ¿Cómo puede obtenerla?
- Alice se la envía.
- ¿Cómo se puede hacer esto de manera segura?
- Suponiendo que se puede, ¿es suficiente protección?

Criptografía asimétrica de clave pública

Vimos que tener sólo una clave es muy inseguro. Estudiaremos ahora sistemas criptográficos que tienen las siguientes características:

- Se tienen dos funciones E y D .
- E sirve para encriptar y D para desencriptar: $D(E(M)) = M$.
- E no puede usarse para desencriptar: $E(E(M)) \neq M$.
- E y D están relacionadas, pero es difícil descubrir D a partir de E .

Uno de estos sistemas es RSA, y es el que estudiaremos.

El sistema criptográfico RSA

Algoritmo RSA

- 1 Adivinar dos números primos distintos P y Q .
- 2 Calcular $N = P \cdot Q$ y $\phi(N) = (P - 1) \cdot (Q - 1)$.
- 3 Sean e y d dos números tales que $(e \cdot d) \bmod \phi(N) = 1$.
- 4 Entonces:

$$E(M) = M^e \bmod N$$

$$D(M) = M^d \bmod N$$

Diremos que (e, N) es la **clave pública** y (d, N) es la **clave privada**.

El sistema criptográfico RSA

Algunas observaciones importantes:

- La clave pública se calcula sólo una vez y se publica.
- Esto permite comunicarse de manera segura con varios clientes.

Ejercicio

Aplice el algoritmo RSA para $P = 7$, $Q = 11$, $e = 13$ y $d = 37$, y encripte y desencripte un mensaje $M = 5$.

El sistema criptográfico RSA

Lo primero que debemos probar es que RSA funciona correctamente.

Teorema (Rivest-Shamir-Adleman)

Para cada $M \in \{0, \dots, N - 1\}$, se tiene que $D(E(M)) = M$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ya vimos que RSA funciona correctamente. Para poder implementarlo, necesitamos resolver los siguientes problemas de manera eficiente:

- 1 Generar primos P y Q : verificar si un número es primo.
- 2 Generar números e y d tales que $(e \cdot d) \bmod \phi(N) = 1$.
- 3 Calcular funciones E y D .

Dados P, Q, e, d ya vimos como resolver 3. Ahora resolveremos 2.

Algoritmo extendido del MCD

Sea $a \geq b$.

- 1 Definimos una sucesión $\{r_i\}$ como:

$$r_0 = a, r_1 = b, r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i$$

- 2 Definimos sucesiones $\{s_i\}, \{t_i\}$ tales que:

$$s_0 = 1, \quad t_0 = 0$$

$$s_1 = 0, \quad t_1 = 1$$

$$s_{i+1} = s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i, \quad t_{i+1} = t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i$$

- 3 Calculamos estas sucesiones hasta un k tal que $r_k = 0$.
- 4 Entonces, $MCD(a, b) = r_{k-1} = s_{k-1} \cdot a + t_{k-1} \cdot b$.

Teorema

a tiene inverso en módulo n si y sólo si $MCD(a, n) = 1$.

Tenemos entonces que $N = P \cdot Q$ y $\phi(N) = (P - 1) \cdot (Q - 1)$, y debemos generar e y d tales que $(e \cdot d) \equiv_{\phi(N)} 1$.

Ejercicio

Encuentre un algoritmo para generar e y d .

Hint: empiece con un número aleatorio.

Recapitulando, necesitamos resolver eficientemente los siguientes problemas:

- 1 Generar primos P y Q : verificar si un número es primo.
- 2 Generar números e y d tales que $(e \cdot d) \bmod \phi(N) = 1$.
- 3 Calcular funciones E y D .

Lamentablemente, resolver 1 está fuera del alcance de este curso :(.

RSA en la vida real

- En la actualidad RSA es el método de encriptación más usado en la práctica.
- RSA es seguro, pues factorizar $N = P \cdot Q$ es un problema difícil. Hasta el momento¹ nadie ha logrado hacerlo en tiempo polinomial...
- Muchas empresas necesitan enviar y guardar mensajes de sus clientes de forma segura y eficaz.
- Para autentificar sus firmas y llaves públicas están compañías como Verisign y DigiCert (especie de notario público).
- Hace un par de años, los certificados entregados por Let's Encrypt comenzaron a ser aceptados por los principales browsers. La gracia: Let's Encrypt es gratis!
- Facebook, Twitter y Gmail usan claves de 2048-bits, son del orden de 600 dígitos.

¹4 de Diciembre de 2019

Llave pública de Facebook

$N =$

15 585 352 828 848 349 856 166 485 283 177 966 421 839 795 946 170
777 142 906 490 005 519 208 671 120 899 899 262 624 211 155 018 963
971 149 091 443 609 485 368 759 496 111 237 537 449 707 311 848 134
373 181 995 199 147 493 452 694 003 500 368 011 547 715 117 173 524
344 682 017 000 591 316 495 883 475 735 773 018 093 817 594 895 866
056 314 350 877 860 912 538 574 834 472 261 127 066 627 480 222 084
560 839 269 816 445 602 628 601 581 895 334 632 745 344 191 517 226
140 490 360 921 741 751 939 558 168 295 980 724 044 307 482 559 952
209 322 025 555 003 487 849 962 968 543 380 943 480 454 078 536 534
564 950 012 916 335 726 434 409 781 845 853 383 357 876 198 148 575
972 979 783 587 061 381 625 532 779 677 764 226 990 978 580 238 389
348 019 608 813 319 553 602 560 294 192 317 728 580 669 275 227 894
025 650

$$e = 65537 = 2^{16} + 1.$$

Matemáticas Discretas

Teoría de números

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Fernando Suárez
fsuarez1@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

4 de diciembre de 2019