Matemáticas Discretas

Grafos y Árboles

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Fernando Suárez
fsuarez1@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

25 de noviembre de 2019

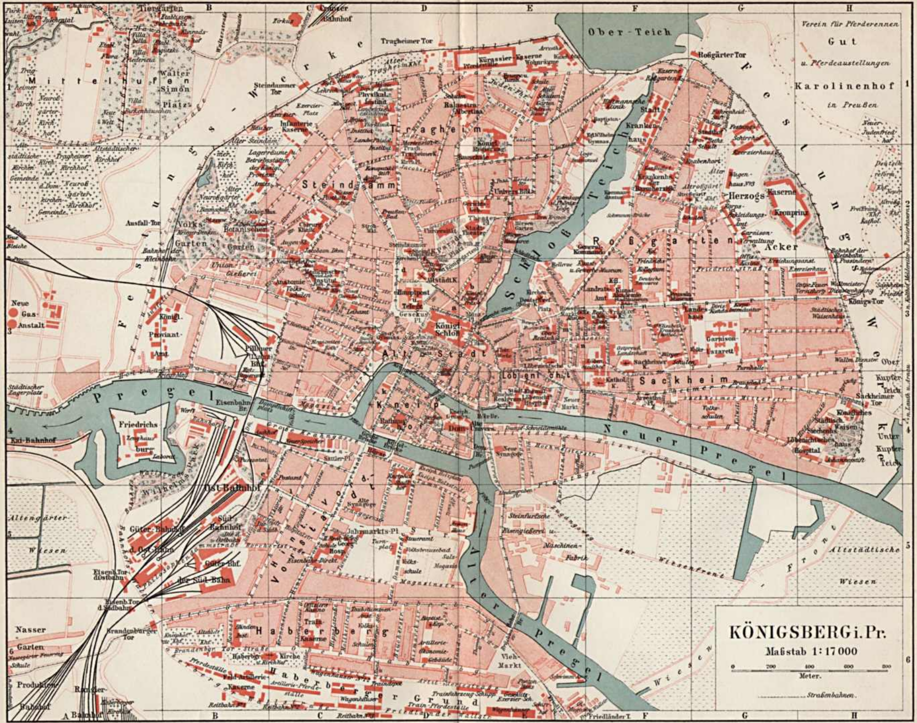
Objetivos

1. Modelar una problemática discreta usando grafos y las técnicas asociadas, y demostrar propiedades acerca de problemas modelados como grafos.

Contenidos

¿Por qué aprender grafos?

- Problemas de conectividad
- Optimización
- Bases de datos
- Redes sociales
- Manejo de concurrencia
- En general, **todo lo que se representa con relaciones binarias!**


KÖNIGSBERG i. Pr.
Maßstab 1:17000
Meter.
Straßenbahnen.
Ober-Teich
Schloß Teich
Pregel
Neuer Pregel
Alter Pregel
Tragheim
Steindamm
Roßgarten
Sackheim
Alt-Stadt
Löbenicht
Kneiphof
Haberberg
Haberberger Grund
Vorstadt
Mittelhufen
Festungswerke
Herzogs Acker
Friedrichsburg
Königl. Schloß
Ost-Bahnhof
Süd-Bahnhof
Güter-Bahnhof
Pillauer Bahnhof
Kai-Bahnhof
Tragheimer Tor
Roßgärter Tor
Steindammer Tor
Königs-Tor
Sackheimer Tor
Brandenburger Tor
Friedländer T.
Ausfall-Tor
Neue Gas-Anstalt
Karolinenhof
Verein für Pferderennen
Gut
u. Pferdeaustellungen
in Preußen
Altstädtische Wiesen
Wiesen
Kupfer-Teich
Vieh-Markt
Maschinen-Fabrik
Jahrmarkts-Pl.

Alt-Stadt
Löbenicht
Löbenichtsche K.
Löben. Stadthof
Kathol. K.
Städt. Realgymn.
Münchenhofpl.
Ehemal. Löbenicht. Hospital
Neuer Markt
Kneiphof
Kneiph. Gymnas.
Holz-Br.
Rathaus
Dom
Alte Univers.
Dampf-Schneidemühle
Altstädtsche Holz
Hochmeisterstr.
Neue Synagoge
Dom Br.
Pumpstat.
Magazine
Bollwerk
Dampfschiff-platz
Lastadie
Aschhof
Große Krahngasse
Neuer Speicher
Grüne Brücke
Köttel-Brücke
Börse
Sattler-Pl.
Postamt
Feuergasse
Vorstadt
Alte Synagoge
Synagogenstr.
Kneiph. Holzplatz
Kneiph. Holzstraße
Tamnaustraße
Kneiphof Stadthof
Dammstraße
Selkestraße
Lindengraben Str.
Plantage
Steinfurt'sche
Eisengießerei u.
Maschinen-Fabrik
Zugangsweg
Armen-Haus
Jahrmarkts-Pl
Steueramt
Turnplatz
Volksbrausebad
Salz-Magazin
Volks-schule
II. Real-schule
Georg Hosp.
Eisenbahn-Direkt.
Borchertstraße
Hospitalstr.
Georgsstraße
Magazinstr.
Alter Pregel
Hohe Br.
Haberberg
Offiziers-Kasino
Train-Kaserne
Taubstummen-Anst.
Volks-Schulen
Baptist-Kap.
Artillerie-
Sattlergasse
Viktoria Str.
Schnürlingsstraße
Neue Dammstraße
Hippelstraße
Moltkestraße

Motivación

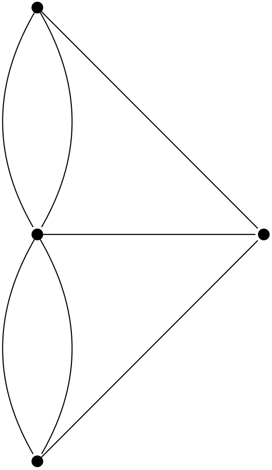


Figura: Representación simple del problema de los puentes

Motivación

Una línea aérea tiene una lista de vuelos entre ciudades del mundo, y desea saber cuáles son los posibles viajes que se pueden realizar combinando vuelos. La lista de vuelos es la siguiente:

Origen	Destino
Stgo	BsAs
Stgo	Miami
Stgo	Londres
BsAs	Stgo
Miami	Stgo
Miami	Londres
Londres	Stgo
Londres	Paris
Frankfurt	Paris
Frankfurt	Moscu
Paris	Moscu
Moscu	Frankfurt

Grafos

Definición

Un **grafo** $G = (V, E)$ es un par donde V es un conjunto, cuyos elementos llamaremos *vértices* o *nodos*, y E es una relación binaria sobre V (es decir, $E \subseteq V \times V$), cuyos elementos llamaremos *aristas*.

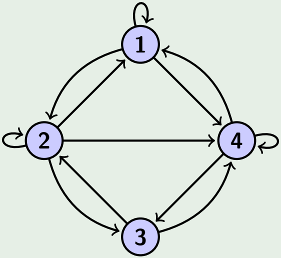
Para representar un grafo usamos puntos o círculos para dibujar vértices, y flechas para dibujar aristas. Cada arista será una flecha entre los nodos que relaciona.

Esta definición es bastante general.

- Los grafos así definidos son llamados **grafos dirigidos**.

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$.



Grafos

Ahora veremos algunas clases más específicas de grafos. Para esto necesitamos un par de definiciones. Dado un grafo $G = (V, E)$:

Definición

Un **rulo** (o *loop*) es una arista $(x, y) \in E$ tal que $x = y$. Es decir, es una arista que conecta un vértice con sí mismo.

Definición

Dos aristas $(x, y) \in E$ y $(z, w) \in E$ son **paralelas** si $x = w$ e $y = z$. Es decir, si conectan a los mismos vértices.

El ejemplo anterior tiene rulos y aristas paralelas.

Grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ es **no dirigido** si toda arista tiene una arista paralela.

¿Cómo se expresa esto en términos de la relación E?

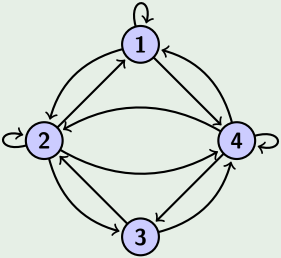
Definición (alternativa)

Un grafo $G = (V, E)$ es **no dirigido** si E es simétrica.

Si un grafo es no dirigido, se dibuja con trazos en lugar de flechas.

Ejemplo

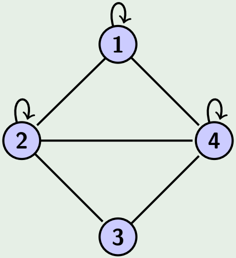
$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1),$
$(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.



Grafos

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.



Grafos

Definición

Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es **simple** si no tiene rulos.

¿Cómo se expresa esto en términos de la relación E?

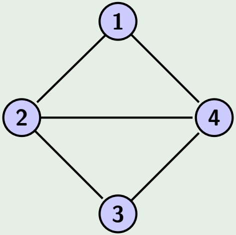
Definición (alternativa)

Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es **simple** si E es irrefleja.

Grafos

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1),$
$(2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.



Grafos

De ahora en adelante (a menos que se explicite otra cosa), cuando hablemos de grafos estaremos refiriéndonos a grafos simples, no dirigidos, no vacíos y finitos.

- $V \neq \varnothing$ y $|V| = n$, con $n \in \mathbb{N}$.
- E es simétrica e irrefleja.

Una pequeña definición:

Definición

Dado un grafo $G = (V, E)$, dos vértices $x, y \in V$ son **adyacentes** o **vecinos** si $(x, y) \in E$.

Isomorfismo

Definición

Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** si existe una función biyectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que $(x, y) \in E_1$ si y sólo si $(f(x), f(y)) \in E_2$.

En tal caso:

- Diremos que f es un **isomorfismo** entre G_1 y G_2.
- Escribiremos $G_1 \cong G_2$.

Isomorfismo

Teorema

$\cong$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Isomorfismo

El concepto de isomorfismo nos permite concentrarnos en la estructura subyacente de los grafos.

- Podemos independizarnos de los nombres de los vértices.
- No importa cómo dibujemos los grafos.

Ahora veremos algunos tipos de grafos que se obtienen de tomar las clases de equivalencia de la relación de isomorfismo.

Clases de grafos

Definición (informal)

Un **camino** es un grafo cuyos vértices pueden dibujarse en una línea tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si aparecen consecutivos en la línea.

Definición (formal)

Considere un grafo $G_n^P = (V_n^P, E_n^P)$, donde $V_n^P = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E_n^P = \{(v_i, v_j) \mid i \in \{1, \ldots, n-1\} \wedge j = i + 1\}$.

Un **camino** (de n vértices) es un grafo isomorfo a G_n^P.

A la clase de equivalencia $\left[G_n^P\right]_{\cong}$ la llamaremos P_n: los caminos con n vértices.

Clases de grafos

Definición (informal)

Un **ciclo** es un grafo cuyos vértices pueden dibujarse en un círculo tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si aparecen consecutivos en él.

Definición (formal)

Considere un grafo $G_n^C = (V_n^C, E_n^C)$, donde $V_n^C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E_n^C = \{(v_i, v_j) \mid i \in \{1, \ldots, n-1\} \wedge j = i+1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$.

Un **ciclo** (de n vértices) es un grafo isomorfo a G_n^C.

A la clase de equivalencia $\left[G_n^C\right]_{\cong}$ la llamaremos C_n: los ciclos con n vértices.

Clases de grafos

Definición

Un **grafo completo** es un grafo en el que todos los pares de vértices son adyacentes.

A la clase de equivalencia de los grafos completos de n vértices la llamaremos K_n.

Clases de grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ se dice **bipartito** si V se puede particionar en dos conjuntos no vacíos V_1 y V_2 tales que para toda arista $(x, y) \in E$, $x \in V_1$ e $y \in V_2$, o $x \in V_2$ e $y \in V_1$.

Es decir:

- $V = V_1 \cup V_2$
- $V_1 \cap V_2 = \varnothing$
- Cada arista une a dos vértices en conjuntos distintos de la partición.

Clases de grafos

Definición

Un **grafo bipartito completo** es un grafo bipartito en que cada vértice es adyacente a todos los de la otra partición.

A la clase de equivalencia de los grafos bipartitos completos la llamaremos $K_{n,m}$, donde n y m son los tamaños de las particiones.

Más definiciones

Dado un grafo $G = (V_G, E_G)$:

Definición

Un grafo $H = (V_H, E_H)$ es un **subgrafo** de G (denotado como $H \subseteq G$) si $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ y E_H sólo contiene aristas entre vértices de V_H.

Definición

Un **clique** en G es un conjunto de vértices $K \subseteq V_G$ tal que $\forall v_1, v_2 \in K \; (v_1, v_2) \in E_G$.

Definición

Un **conjunto independiente** en G es un conjunto de vértices $K \subseteq V_G$ tal que $\forall u, v \in K \; (u, v) \notin E_G$.

Más definiciones

Definición

El **complemento** de G es el grafo $\overline{G} = (V_G, \overline{E_G})$, donde $(u,v) \in E_G \Leftrightarrow (u,v) \notin \overline{E_G}$.

Definición

Un grafo G se dice **autocomplementario** si $G \cong \overline{G}$.

Más definiciones

Teorema

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $V' \subseteq V$ es un clique en G si y sólo si es un conjunto independiente en $\overline{G}$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente? Demuestre usando grafos.

Representación matricial

Dado un grafo $G = (V, E)$, como E es una relación binaria podemos representarla en una matriz.

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1),$ $(2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Llamaremos a M_G la **matriz de adyacencia** de G.

Representación matricial

- Si el grafo es simple, la diagonal sólo contiene ceros.
- Si el grafo es no dirigido, entonces $M_G = M_G^T$.
- ¿Cómo puedo obtener $M_{\overline{G}}$?

Representación matricial

También podemos usar una **matriz de incidencia** A_G.

- Etiquetamos las aristas de G.
- Cada fila de la matriz representará a un vértice, y cada columna a una arista.
- Cada posición de la matriz tendrá un 1 si la arista de la columna *incide* en el vértice de la fila.

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1),$
$(2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Grado de un vértice

Dado un grafo G y un vértice v de él:

Definición

El **grado** de v (denotado como $\delta_G(v)$) es la cantidad de aristas que inciden en v.

Definición

La **vecindad** de v es el conjunto de vecinos de v:

$$N_G(v) = \{u \mid (v, u) \in E\}.$$

En un grafo simple, $\delta_G(v) = |N_G(v)|$.

Propiedades

Un teorema muy importante:

Teorema (Handshaking lemma)

Si $G = (V, E)$ es un grafo sin rulos, entonces

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|.$$

Es decir, la suma de los grados de los vértices es dos veces la cantidad de aristas.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Propiedades

Corolario

En un grafo sin rulos siempre hay una cantidad par de vértices de grado impar.

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Ejercicio

En el departamento de informática de una empresa trabajan 15 empleados. Uno de ellos es la secretaria del departamento y otro es el jefe del departamento. Ambos se saludan todos los días y saludan a todos los demás empleados. Cada uno de los restantes empleados del departamento asegura que diariamente se saluda con exactamente 3 de sus compañeros (sin contar a la secretaria y el jefe). ¿Es esto posible?

Caminos y Ciclos

Definición

Una **caminata** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$, con $v_0, \ldots, v_k \in V$, tal que $(v_{i-1}, v_i) \in E$, con i entre 1 y k.

Una **caminata cerrada** en un grafo es una caminata que empieza y termina en el mismo vértice: $v_0 = v_k$.

Caminos y Ciclos

Definición

Un **camino** en un grafo es una caminata en la que no se repiten aristas.

Un **ciclo** en un grafo es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.

Definición

El **largo** de una caminata, camino o ciclo es la cantidad de aristas que lo componen. Si está compuesto por un único vértice (sin aristas), diremos que tiene largo 0.

Conectividad

Definición

Dos vértices x e y en un grafo G están **conectados** si existe un camino en G que empieza en x y termina en y.

Ejercicio

Muestre que “estar conectados” es una relación de equivalencia.

¿Qué pasa si tomamos las clases de equivalencia?

Conectividad

Definición

Dado un vértice v de un grafo G, su clase de equivalencia bajo la relación "estar conectados" es una **componente conexa** de G.

En general, diremos que la componente conexa también contiene a las aristas entre los vértices de ella.

Definición

Un grafo G se dice **conexo** si todo par de vértices $x, y \in V$ está conectado. En otro caso, G es **disconexo**.

Es decir, G tiene sólo una componente conexa.

Conectividad

Teorema

Un grafo G con n vértices y k aristas tiene al menos $n - k$ componentes conexas.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Corolario

Si un grafo G con n vértices es conexo, tiene al menos $n - 1$ aristas.

Conectividad

Definición

Una **arista de corte** en un grafo G es una arista tal que al eliminarla aumenta la cantidad de componentes conexas de G.

Definición

Un **vértice de corte** en un grafo G es un vértice tal que al eliminarlo (junto con todas sus aristas incidentes) aumenta la cantidad de componentes conexas de G.

Conectividad

Teorema

Una arista en un grafo G es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo en G.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Grafos bipartitos

Lema

En un grafo simple G, toda caminata cerrada de largo impar contiene un ciclo de largo impar.

Ejercicio

Demuestre el lema.

Grafos bipartitos

Teorema

Un grafo simple conexo G es bipartito si y sólo si no contiene ningún ciclo de largo impar.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

- Con esto caracterizamos a los grafos bipartitos.
- ¿Qué pasa si G no es conexo?
- ¿Cómo diseñamos un algoritmo que resuelva el problema de determinar si un grafo es o no bipartito, y dé una muestra de su decisión?

Multigrafos

Definición

Sea V es un conjunto de vértices, E es un conjunto de aristas y $S \subseteq \mathcal{P}(V)$ tal que

$$S = \{\{u, v\} \mid u \in V \wedge v \in V\}$$

Un **multigrafo** $G = (V, E, f)$ es un trío ordenado donde $f : E \to S$ es una función que asigna un par de vértices a cada arista en E.

Ejemplo

$G = (V, E, f)$, donde $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ y
$f = \{(e_1, \{1, 2\}), (e_2, \{2, 3\}), (e_3, \{2, 3\})\}$

Ciclos y caminos Eulerianos

Definición

Un **ciclo Euleriano** en un (multi)grafo G es un ciclo que contiene a todas las aristas y vértices de G.

- Es un ciclo, por lo tanto no puede repetir aristas.
- Pueden repetirse vértices.
- Diremos que G es un **grafo Euleriano** si contiene un ciclo Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

$(\Rightarrow)$ Supongamos que G es un (multi)grafo sin rulos y Euleriano.
Por demostrar: G es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

Como G es Euleriano, tiene un ciclo C que contiene a todas las aristas y vértices. Se deduce directamente que G es conexo, pues dentro de C se pueden encontrar caminos entre todos los pares de vértices de G.

Ciclos y caminos Eulerianos

Ahora, supongamos que C empieza y termina en un vértice particular v. C necesita una arista para "salir" inicialmente y otra para "llegar" finalmente a v, y cada vez que v aparezca nuevamente en C, necesita dos aristas distintas más para entrar y salir:

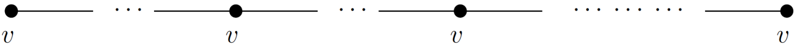


Figura: Un vértice v particular del ciclo Euleriano C y sus aristas incidentes. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Esto implica que $\delta(v)$ es necesariamente par, pues todas las aristas que lo inciden deben aparecer en C una vez cada una. El ciclo C se puede representar comenzando y terminando en cualquier vértice de G, y entonces por el mismo argumento, todos los vértices tienen grado par.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

($\Leftarrow$) Supongamos que G es un (multi)grafo sin rulos conexo y tal que todos sus vértices tienen grado par. Por demostrar: G es tiene un ciclo Euleriano. Se hará por inducción en la cantidad de aristas de G.

BI: Queremos tomar el grafo con el menor número de aristas que sea conexo y cuyos vértices tengan todos grado par. Si nos fijamos en el número de vértices, tenemos que el único grafo con un vértice que cumple con todas las condiciones es un vértice solo, el cual tiene un ciclo Euleriano compuesto por él mismo. El grafo más pequeño con más de un vértice que cumple con las condiciones es un grafo con dos vértices y dos aristas, el cual claramente tiene un ciclo Euleriano.

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

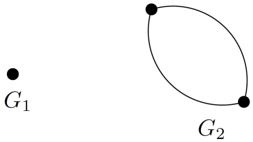


Figura: Los grafos más pequeños conexos tales que sus vértices tienen grado par. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

BI: Notemos además que cualquier grafo conexo con dos vértices de grado par tendrá un ciclo Euleriano.

HI: Supongamos que cualquier grafo conexo con vértices de grado par y que tiene menos de n aristas tiene un ciclo Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

TI: Sea G un (multi)grafo sin rulos conexo cuyos vértices tienen grado par y con exactamente n aristas.
Por demostrar: G tiene un ciclo Euleriano.

En la BI ya demostramos la propiedad para grafos con 1 o 2 vértices, por lo que podemos asumir que G tiene al menos 3 vértices. Como G es conexo y tiene al menos 3 vértices, debe existir un camino de largo 2 con aristas e_1, e_2 y que contiene 3 vértices v_1, v_2, v_3:

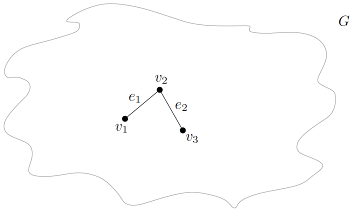


Figura: Camino de largo 2 en un grafo con al menos 3 vértices. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

TI: Creamos un nuevo grafo G' sacando e_1 y e_2 y agregando una nueva arista e entre v_1 y v_3:

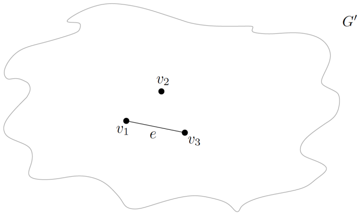


Figura: Creación de G' a partir de la eliminación de e_1 y e_2 y la inserción de e. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Notemos que G' tiene estrictamente menos aristas que G. Por otro lado, sólo v_1, v_2, v_3 pudieron ver afectados sus grados: v_1 y v_3 mantienen su grado en G', y v_2 lo redujo en 2, por lo que todos los vértices de G' tienen grado par. Sólo nos falta que G' sea conexo para aplicar la HI.

Nos pondremos entonces en dos casos:

1. G' es conexo: en este caso G' cumple con la HI, y por lo tanto tiene un ciclo Euleriano C'. Como C' contiene a todas las aristas de G', se cumple que $C' = (\ldots, v_1, e, v_3, \ldots)$. Si reemplazamos de vuelta e_1 y e_2, obtenemos un ciclo $C = (\ldots, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots)$, el cual es un ciclo Euleriano en G.

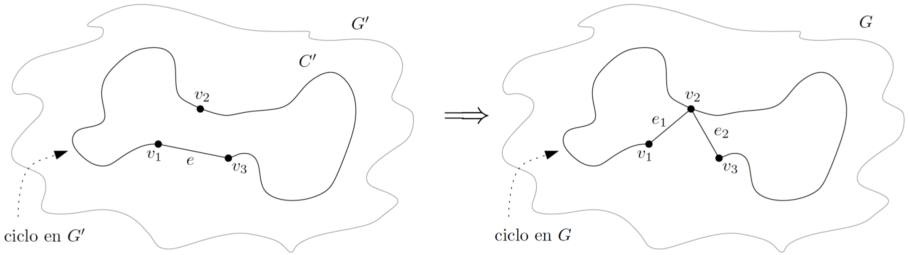


Figura: Construcción de un ciclo Euleriano para G a partir de uno para G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

2. G' no es conexo: como G es conexo, G' tiene dos componentes conexas: una contiene a v_2 y la otra a v_1 y v_3. A cada una de estas podemos aplicarle la HI: existe un ciclo C' que empieza y termina en v_2 que contiene a todos los vértices y aristas de la primera componente: $C' = (v_2, \dots, v_2)$; y existe otro ciclo C'' que contiene a todas las aristas de la otra componente: $C'' = (\dots, v_1, e, v_3, \dots)$.

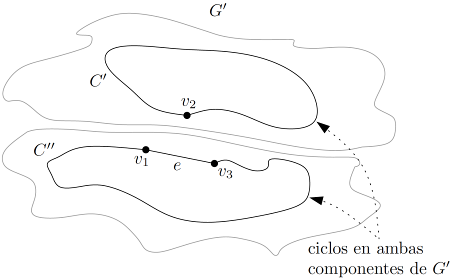


Figura: Ciclos en las dos componentes de G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Ciclos y caminos Eulerianos

Creamos un ciclo Euleriano para G "insertando" C' en C'' entre v_1 y v_3 añadiendo de vuelta e_1 y e_2: $C = (\ldots, v_1, e_1, v_2, \ldots, v_2, e_2, e_3, \ldots)$:

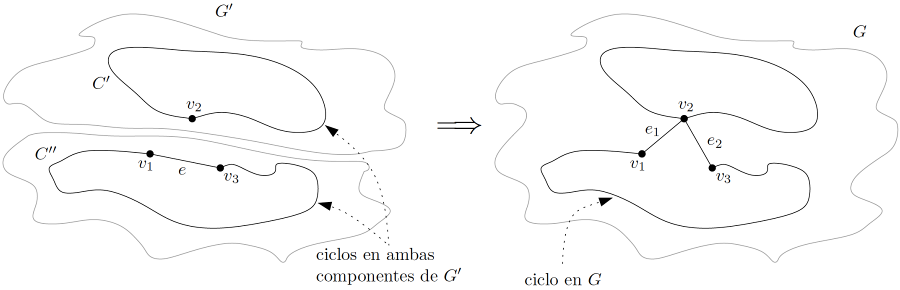


Figura: Construcción de un ciclo Euleriano para G a partir los ciclos en las dos componentes de G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Entonces, por inducción se concluye que cualquier (multi)grafo sin rulos conexo cuyos vértices tienen todos grado par es Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

Definición

Un **camino Euleriano** en un (multi)grafo G es un camino no cerrado que contiene a todas las aristas y vértices de G.

Teorema

Un (multi)grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y contiene exactamente dos vértices de grado impar.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y contiene exactamente dos vértices de grado impar.

($\Rightarrow$) Supongamos que un (multi)grafo G tiene un camino Euleriano que comienza en un vértice u y termina en un vértice v: $P = (u, \ldots, v)$. Por demostrar: G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar.

En primer lugar, como P contiene a todos los vértices de G, es claro que G es conexo. En segundo lugar, si agregamos una nueva arista e entre u y v, obtenemos un nuevo grafo G' que contiene un ciclo Euleriano, el cual se forma al cerrar P con la nueva arista e: $C = (u, \ldots, v, e, u)$. Por el teorema anterior, todos los vértices en G' tienen grado par, por lo que en G los únicos vértices con grado impar eran u y v (pues ambos tenían una arista incidente menos). Por lo tanto, G tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y contiene exactamente dos vértices de grado impar.

($\Leftarrow$) Supongamos que un (multi)grafo G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar u y v. Por demostrar: G tiene un camino Euleriano.

Si agregamos una nueva arista e entre u y v, obtenemos un nuevo grafo G' tal que todos sus vértices tienen grado par, y por el teorema anterior, G' tiene un ciclo Euleriano $C = (u, \dots, v, e, u)$. Si a este ciclo le sacamos e, obtenemos un camino Euleriano $P = (u, \dots, v)$ en G.

Ciclos Hamiltonianos

Considere los siguientes grafos:

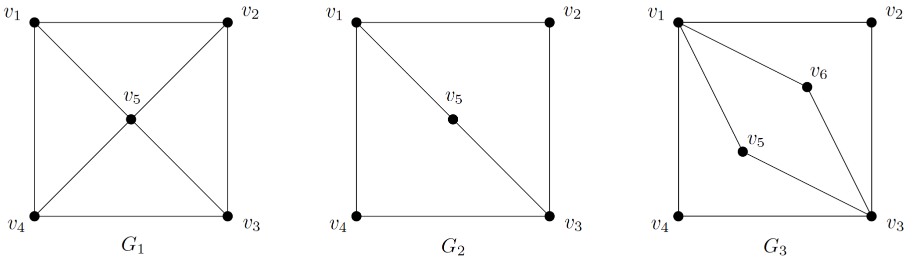


Figura: Fuente: Apuntes Jorge Pérez.

¿Es posible encontrar, en alguno de ellos, un ciclo que contenga a todos los vértices una sola vez cada uno (excepto por el inicial y final)?

R: G_1 tiene un ciclo de tales características: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$.
G_2 ni G_3 tienen tal ciclo.

Ciclos Hamiltonianos

Definición

Un **ciclo Hamiltoniano** en un grafo G es un ciclo en G que contiene a todos sus vértices una única vez cada uno (excepto por el inicial y final).

- Diremos que G es un **grafo Hamiltoniano** si contiene un ciclo Hamiltoniano.
- ¿Hay alguna relación entre grafos Eulerianos y Hamiltonianos?
  - No: G_1 es Hamiltoniano pero no Euleriano; G_2 no es Hamiltoniano ni Euleriano; y G_3 es Euleriano pero no Hamiltoniano.
- ¿Existe alguna propiedad simple para chequear si un grafo es Hamiltoniano?
- ¿Qué tan difícil es determinarlo?

Árboles

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **árbol** si para cada par de vértices $x, y \in V$ existe un único camino entre ellos.

Por lo tanto, siempre es *conexo*. Si relajamos esta condición:

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **bosque** si para cada par de vértices $x, y \in V$, si existe un camino entre ellos, este es único.

Un bosque se ve como un conjunto de árboles.

Árboles

En general hablaremos de árboles **con raíz**.

- Distinguimos uno de los vértices $r \in V$, al que llamaremos la **raíz** del árbol.
- Los vértices de grado menor o igual a 1 se llaman **hojas**.
- Los dibujamos con la raíz arriba y los demás vértices hacia abajo.

Árboles

Hay muchas definiciones equivalentes para los árboles:

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **árbol** si y sólo si es conexo y acíclico.

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **árbol** si y sólo si es conexo y todas sus aristas son de corte.

Ejercicio

Demuestre las definiciones anteriores.

Árboles

Vimos que un grafo es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de largo impar. De esto se deduce inmediatamente que:

Teorema

Todo árbol es un grafo bipartito.

Árboles

La siguiente propiedad nos permitirá hacer demostraciones por inducción sobre los árboles:

Teorema

Si T es un árbol y v es una hoja de él, entonces el grafo $T - v$ (el grafo que resulta de quitar el vértice y sus aristas incidentes) es un árbol.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Árboles

Ahora podemos establecer una última definición muy simple de un árbol:

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ con n vértices es un **árbol** si y sólo si es conexo y tiene exactamente $n - 1$ aristas.

Ejercicio

Demuestre que la definición anterior es equivalente a las demás.

Con esto podemos determinar rápidamente si un grafo conexo es o no un árbol.

Árboles

Las siguientes definiciones se usan mucho en aplicaciones de los árboles en computación.

Definición

Sea $T = (V, E)$ un árbol con raíz r y x un vértice cualquiera.

- La **profundidad** de x es el largo del camino que lo une con r (r tiene profundidad 0).
- La **altura** o **profundidad** del árbol es el máximo de las profundidades de sus vértices.
- Los **ancestros** de x son los vértices que aparecen en el camino entre él y r. Note que x es ancestro de sí mismo.
- El **padre** de x es su ancestro (propio) de mayor profundidad. Diremos que x es **hijo** de su padre.
- Dos vértices x e y con el mismo padre son **hermanos**.

Árboles binarios

Definición

Un árbol con raíz se dice **binario** si todo vértice tiene grado a lo más 3; o equivalentemente, si todo vértice tiene a lo más dos hijos.

Podemos distinguir entre hijos izquierdos y derechos.

Teorema

La cantidad de vértices sin hijos de un árbol binario es la cantidad de vértices con exactamente dos hijos más 1.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Árboles binarios

Teorema

La cantidad de vértices sin hijos de un árbol binario es la cantidad de vértices con exactamente dos hijos más 1.

Ejercicio

La CONMEBOL está organizando la Copa Libertadores 2019. Si este año participan n equipos, ¿cuántos partidos se jugarán?

Árboles binarios

Finalmente, podemos tomar una clase de árboles binarios que se usan mucho para establecer cotas para las aplicaciones de ellos.

Definición

Un **árbol binario completo** es un árbol binario tal que:

1. Todas las hojas están a la misma profundidad.
2. Todos los vértices que no son hojas tienen exactamente dos hijos.

Árboles binarios

Teorema

1. Un árbol binario completo de altura H tiene exactamente 2^H hojas.
2. Un árbol binario completo de altura H tiene exactamente $2^{H+1} - 1$ vértices.
3. Si H es la altura de un árbol binario completo con n vértices, entonces $H \leq \log_2(n)$.

Ejercicio

Demuestre el teorema anterior.

Matemáticas Discretas

Grafos y Árboles

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Fernando Suárez
fsuarez1@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

25 de noviembre de 2019