Matemáticas Discretas

Inducción

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Fernando Suárez
fsuarez1@uc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

9 de agosto de 2019

Objetivos

1. Aplicar inducción como técnica para demostración de propiedades en conjuntos discretos y como técnica de definición formal de objetos discretos.

Contenidos

Lenguaje matemático

Asumiremos cierta familiaridad con elementos del lenguaje matemático.

- Algunos elementos los veremos más en profundidad en capítulos siguientes.

$x \in B$	x pertenece a B
$x \notin B$	x no pertenece a B
$\exists x$	Existe x
$\forall x$	Para todo x
$A \subseteq B$	A es subconjunto de B
$A \subsetneq B$	A es subconjunto propio de B
$\ldots$	y otros que puedan aparecer

Números naturales

¿Qué son los números naturales?

Definición

Los **números naturales**, denotados por $\mathbb{N}$, son los que sirven para contar los elementos de un conjunto.

$$\mathbb{N} = \{\color{red}{0}\color{black}, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

¡Los naturales empiezan en el cero!

¡Los naturales empiezan en el cero!

Inducción

- Veremos inducción como una “propiedad” de los números naturales.
  - Es *inherente* a su definición.
- Nos permitirá demostrar propiedades sobre los naturales.
- También nos permitirá definir objetos relacionados a ellos (funciones, relaciones, etc.).
- La inducción matemática se usa principalmente como técnica para demostraciones.

Principios de inducción

Existen distintas formulaciones para el Principio de Inducción.

- No necesitan demostración (de ahí el nombre "principio").
- ...pues son inherentes a la definición de los números naturales (como ya dijimos).

Principio de Buen Orden

Todo subconjunto no vacío de los naturales tiene un menor elemento.

$$A \neq \varnothing, A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \in A \text{ tal que } \forall y \in A, x \leq y$$

Principios de inducción

Principio de Buen Orden (PBO)

Todo subconjunto no vacío de los naturales tiene un menor elemento.

$$A \neq \varnothing, A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \in A \text{ tal que } \forall y \in A, x \leq y$$

- ¿Es cierto este principio para los números racionales?
- ¿Y para los reales?

Principios de inducción

Principio de Inducción Simple (PIS)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $0 \in A$
2. Si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$.

- La condición 1 se llama **base de inducción** (BI).
- La condición 2 se llama **paso inductivo**, donde la suposición de que $n \in A$ es la **hipótesis de inducción** (HI), y la demostración de que $n + 1 \in A$ es la **tesis de inducción** (TI).

Este principio nos sirve para demostrar propiedades sobre los naturales.

Ejercicio

Demuestre que el 0 es el menor número natural.

Principios de inducción

Existe una segunda formulación para el PIS que hace más simple su uso.

PIS (segunda formulación)

Sea P una propiedad sobre elementos de $\mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $P(0)$ es verdadero (0 cumple la propiedad P)
2. Si $P(n)$, entonces $P(n+1)$ (cada vez que n cumple la propiedad, $n+1$ también la cumple)

entonces todos los elementos de $\mathbb{N}$ cumplen la propiedad P.

- Al igual que antes, la condición 1 se llama **base de inducción** (BI).
- ...y la condición 2 se llama **paso inductivo**, donde la suposición de que $P(n)$ es la **hipótesis de inducción** (HI), y la demostración de que $P(n+1)$ es la **tesis de inducción** (TI).

Ejercicio

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Principios de inducción

¿Qué pasa con las propiedades que se cumplen para todos los números naturales, excepto una cantidad *finita* de ellos?

- Por ejemplo, desde algún punto en adelante.
- Podemos modificar el PIS para que la BI se inicie en otro número natural.
- Debemos modificar la demostración de la base a ese número.

Ejercicio

Demuestre que para todo natural $n \geq 4$ se cumple que

$$n! > 2^n$$

PIS (tercera formulación)

Sea P una propiedad sobre elementos de $\mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $P(n_0)$ es verdadero ($n_0 \in \mathbb{N}$ cumple la propiedad P)
2. Si $P(n)$, entonces $P(n+1)$ (cada vez que n cumple la propiedad, $n+1$ también la cumple)

entonces todos los elementos de $\mathbb{N}$ a partir de n_0 cumplen la propiedad P.

¿Cómo justificamos este uso del PIS desde una base distinta de 0?

Principios de inducción

La sucesión de Fibonacci es una serie de números naturales $F_0, F_1, \ldots, F_n, F_{n+1}, \ldots$ que cumple la siguiente recurrencia:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 2$$

Ejercicio

Demuestre que $F_n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- ¿Es suficiente la hipótesis de inducción?
- No nos basta saber que n cumple la propiedad para demostrar que $n+1$ también la cumple.
- Al parecer necesitamos algo más potente...

Principios de inducción

Principio de inducción por curso de valores (PICV)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si se cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\{0, 1, \ldots, n-1\} \subseteq A \Rightarrow n \in A$$

entonces $A = \mathbb{N}$.

- También es conocido como *Principio de inducción fuerte*.
- La hipótesis de inducción (HI) es la expresión $\{0, 1, \ldots, n-1\} \subseteq A$.
- La tesis de inducción (TI) es la expresión $n \in A$.
- ... y la base?
  - ¿Qué pasa con $n = 0$?

PICV (segunda formulación)

Sea P una propiedad sobre elementos de $\mathbb{N}$. Si se cumple que

$$\forall k \in \mathbb{N}, k < n, P(k) \text{ es verdadero } \Rightarrow P(n) \text{ es verdadero}$$

entonces P es verdadero para todos los elementos de $\mathbb{N}$.

Ejercicio

Demuestre que $F_n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio

Demuestre que todo número natural ≥ 2 tiene un factor primo.

- En PICV, cuando no usamos la hipótesis para demostrar la tesis, tenemos un *caso base*.
- En este ejemplo son infinitos!

Teorema

Los 3 principios de inducción (PBO, PIS y PICV) son equivalentes.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Hint: Demuestre cada principio a partir de otro y muestre una "cadena cíclica".

$$PBO \Rightarrow PIS \Rightarrow PICV \Rightarrow PBO$$

Principios de inducción

IMPORTANTE

- No se puede hacer la inducción "al revés".
  - Suponer que la tesis es correcta, y mediante manipulación algebraica obtener la hipótesis.
- Esto siempre se considerará incorrecto!
- **No se puede partir una demostración desde lo que se quiere concluir**.
- Tener claro: lo que suponemos es la hipótesis, y a partir de ella demostramos la tesis.

Definiciones inductivas

- Los principios anteriores se aplican todos a los números naturales.
- Dijimos que esto se debe que son "inherentes" a ellos, pero qué significa esto?
- Observemos el PIS en su primera formulación:

Principio de Inducción Simple (PIS)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $0 \in A$
2. Si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$.

- ¿Qué nos muestra el PIS?

Definiciones inductivas

- El PIS nos muestra que $\mathbb{N}$ es un conjunto que se puede construir a partir de un elemento base y un operador.
    - En este caso, el elemento base es el 0 y el operador el "sucesor".
- Esta construcción a partir de elementos base y operadores es lo que se conoce como una **definición inductiva**.
- Intuitivamente, en el caso de $\mathbb{N}$ podemos obtener todo natural a partir de sumarle 1 a otro natural (excepto el 0).

Definiciones inductivas

Podemos modificar levemente el PIS para obtener una definición inductiva de $\mathbb{N}$:

Definición: $\mathbb{N}$

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$

- ¿Es suficiente para definir a $\mathbb{N}$?
- ¿Hay otros conjuntos que cumplan con estas reglas?

Definiciones inductivas

Al definir un conjunto inductivamente, debemos establecer que **todos** sus elementos y **sólo ellos** se obtienen a partir de las reglas de la definición.

Definición: $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$

Esta definición está estrechamente relacionada con los principios de inducción:

- La propiedad debe demostrarse para el 0 (elemento base y primera regla)
- y luego usando el operador (segunda regla).

Definiciones inductivas

- Esta noción de definición inductiva se puede usar para definir otros conjuntos.
- Podremos usar inducción para demostrar propiedades sobre tales conjuntos.
- Podremos definir nuevos objetos (funciones, operaciones, etc.) usando la definición inductiva del conjunto.

Ejemplo: números pares

1. El 0 es un número par.
2. Si n es número par, $n + 2$ es un número par.

Definiciones inductivas

Definición Inductiva

Para definir inductivamente un conjunto necesitamos:

1. Establecer que el conjunto es el menor que cumple las reglas.
2. Un conjunto (no necesariamente finito) de elementos base, que se supondrá que inicialmente pertenecen al conjunto que se quiere definir.
3. Un conjunto finito de reglas de construcción de nuevos elementos del conjunto a partir de elementos que ya están en él.

Veamos un ejemplo "computín".

- Definiremos formalmente un concepto similar al de lista enlazada.
- Por simplicidad, supondremos que sólo contiene números naturales.

Ejemplo

$$\rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 4$$
$$\varnothing$$
$$\varnothing \rightarrow 10 \rightarrow 6$$
$$\rightarrow 10 \rightarrow 6$$

Definiciones inductivas

¿Cómo construimos una lista?

- Tomamos una lista y le agregamos un elemento al final.

¿Y la lista vacía?

- Será nuestro caso base.

Definición de $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$

El conjunto de las listas enlazadas sobre los naturales $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\varnothing \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.
2. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $L \to k \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.

Definiciones inductivas

- En este caso la operación que ocupamos para construir listas es tomar una lista, agregar una flecha y un natural al final.
- La operación "agregar una flecha y un natural" es el equivalente a sumar 1 en el caso de $\mathbb{N}$.

Ejemplo

- Partimos con la lista vacía $\varnothing$.
- Ocupamos la operación para construir la lista $\to 4$.
- La ocupamos de nuevo y construimos la lista $\to 4 \to 10$.
- ...

La anterior definición nos permite definir propiedades, relaciones y funciones sobre las listas. Por ejemplo, podemos establecer cuándo dos listas son iguales:

$$L_1 \to k_1 = L_2 \to k_2 \text{ si y sólo si } L_1 = L_2 \text{ y } k_1 = k_2$$

o podemos definir propiedades como la siguiente:

$$P(L) : L \text{ tiene el mismo número de flechas que de elementos.}$$

¿Cómo demostramos que la propiedad es cierta sobre todas las listas en $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$?

Inducción estructural

La inducción estructural es una variación de la inducción matemática que nos permite demostrar propiedades sobre conjuntos definidos inductivamente.

Principio de Inducción estructural

Sea A un conjunto definido inductivamente y P una propiedad sobre los elementos en A. Si se cumple que:

1. Todos los elementos base de A cumplen la propiedad P,
2. Para cada regla de construcción, si la regla se aplica sobre elementos en A que cumplen la propiedad P, entonces los elementos producidos por la regla también cumplen la propiedad P

entonces todos los elementos en A cumplen la propiedad P.

OBS: El PIS es un caso particular de este principio.

Inducción estructural

Ejercicio

Demuestre que la propiedad P sobre las listas enlazadas:

$$P(L) : L \text{ tiene el mismo número de flechas que de elementos.}$$

es cierta para $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.

Inducción estructural

Podemos aprovechar la construcción inductiva de los conjuntos para definir operadores o funciones sobre sus elementos. Un ejemplo típico:

Factorial

- $0! = 1$
- $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Entonces:

- Se define el operador o función para el caso base.
- Se explicita cómo operar el siguiente elemento creado por inducción.

Inducción estructural

Ejercicios

1. Defina la función $|\cdot| : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ que recibe una lista como argumento y entrega la cantidad de elementos en ella (i.e. su largo).
2. Defina la función $sum : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ que recibe una lista como argumento y entrega la suma de sus elementos.
3. Defina la función $máx : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{-1\}$ que recibe una lista como argumento y entrega su elemento máximo.
4. Defina la función $Head : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \backslash \{\varnothing\} \to \mathbb{N}$ que recibe una lista como argumento y entrega su primer elemento.

También podemos definir operadores sobre listas (funciones que reciben una lista y entregan otra).

Ejercicio

Defina el operador $Suf : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \backslash \{\varnothing\} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ (operador sufijo) que recibe una lista, y entrega la lista que resulta de sacarle el primer elemento.

Inducción estructural

Ahora que tenemos bastantes propiedades, funciones y operadores sobre las listas, podemos enunciar múltiples propiedades sobre ellas:

Teorema

Si L, L_1, L_2 son listas en $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$, entonces las siguientes propiedades son ciertas:

1. $sum(L) \geq 0$.
2. $máx(L) \leq sum(L)$.
3. $sum(L) = Head(L) + sum(Suf(L))$.
4. Si $L_1, L_2 \neq \varnothing$, se cumple que $L_1 = L_2$ si y sólo si $Suf(L_1) = Suf(L_2)$ y $sum(L_1) = sum(L_2)$.

Ejercicio

Demuestre las propiedades usando inducción estructural.

Resumen

- La inducción es una técnica tanto de demostración como de definición de conjuntos y funciones.
- En particular, los números naturales son un conjunto definido de manera inductiva.
- Los 3 principios de inducción sobre los naturales son el PBO, el PIS y el PICV.
- Todos estos principios son equivalentes entre sí.
- El principio de inducción se puede generalizar a cualquier conjunto definido de manera inductiva, a esta técnica de demostración le llamamos inducción estructural.

Matemáticas Discretas

Inducción

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Fernando Suárez
fsuarez1@uc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

9 de agosto de 2019