

# Trabajo Final de Física Computacional

Análisis Computacional del Comportamiento de un Pendulo

Gallardo Valadez José María

Hernández Hernández Berenice

Hermenegildo López Cesar

8/12/2025

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Formulación del Sistema Físico . . . . .	5
2.2. Linealización y Casos Especiales . . . . .	5
2.3. No linealidad y Caos . . . . .	6
2.4. Transformación a Sistema de Primer Orden . . . . .	6
2.5. Herramientas de Análisis de Caos . . . . .	6
<b>3. Metodología Computacional</b>	<b>7</b>
3.1. Esquemas Numéricos Implementados . . . . .	7
3.2. Implementación Práctica . . . . .	7
3.3. Condiciones Iniciales y Parámetros de Estudio . . . . .	8
3.4. Algoritmos de Análisis . . . . .	8
<b>4. Resultados y Discusión</b>	<b>9</b>
4.1. Comparación de Regímenes Dinámicos . . . . .	9
4.1.1. Análisis Cualitativo de los Cuatro Casos . . . . .	9
4.1.2. Análisis Cuantitativo . . . . .	10
4.2. Transición al Comportamiento Caótico . . . . .	10
4.2.1. Diagrama de Bifurcación . . . . .	10
4.2.2. Exponentes de Lyapunov vs. parámetro de control . . . . .	11
4.2.3. Estructura del atractor . . . . .	12
4.3. Comparación de Métodos Numéricos . . . . .	12

4.3.1.	Precisión temporal . . . . .	12
4.3.2.	Conservación de energía . . . . .	13
4.3.3.	Estabilidad en régimen caótico . . . . .	13
4.3.4.	Costo computacional . . . . .	13
4.4.	Sensibilidad a Condiciones Iniciales . . . . .	13
4.4.1.	Divergencia exponencial . . . . .	13
4.4.2.	Implicaciones para la predictibilidad . . . . .	13
4.4.3.	Mapa de Poincaré de trayectorias vecinas . . . . .	14
4.5.	Discusión . . . . .	14
4.5.1.	Interpretación física . . . . .	14
4.5.2.	Limitaciones numéricas . . . . .	15
4.5.3.	Implicaciones teóricas . . . . .	15
4.5.4.	Extensiones futuras . . . . .	15
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>15</b>
5.1.	Conclusiones principales . . . . .	15
5.1.1.	Validación del modelo teórico . . . . .	15
5.1.2.	Caracterización del caos . . . . .	16
5.1.3.	Evaluación de métodos numéricos . . . . .	16
5.2.	Contribuciones del estudio . . . . .	16
5.2.1.	Contribuciones metodológicas . . . . .	16
5.2.2.	Resultados cuantitativos originales . . . . .	16
5.3.	Limitaciones y consideraciones . . . . .	17
5.3.1.	Limitaciones del estudio . . . . .	17
5.3.2.	Consideraciones prácticas . . . . .	17
5.4.	Implicaciones y aplicaciones . . . . .	17
5.4.1.	Implicaciones teóricas . . . . .	17
5.4.2.	Aplicaciones prácticas . . . . .	17
5.4.3.	Relevancia interdisciplinaria . . . . .	18
5.5.	Perspectivas futuras . . . . .	18
5.5.1.	Extensiones del modelo . . . . .	18
5.5.2.	Mejoras computacionales . . . . .	18
<b>6.</b>	<b>Reflexiones finales</b>	<b>18</b>
<b>7.</b>	<b>Disponibilidad del código</b>	<b>19</b>

# Análisis Computacional del Comportamiento Caótico en un Péndulo Amortiguado y Forzado

**Resumen.** Este trabajo presenta un análisis computacional del comportamiento dinámico de un péndulo amortiguado y forzado, con énfasis en la identificación y caracterización de regímenes caóticos. Mediante la implementación de métodos numéricos —Euler y Runge–Kutta de cuarto orden— se resuelve la ecuación diferencial no lineal que describe el sistema, estudiando la transición desde movimientos periódicos hasta dinámicas caóticas al modificar los parámetros de amortiguamiento y fuerza externa. Los resultados obtenidos evidencian la presencia de caos a través de mapas de Poincaré con estructuras fractales, exponentes de Lyapunov positivos y diagramas de bifurcación que muestran la ruta hacia el caos. Además, se realiza un análisis de sensibilidad numérica que demuestra que el método de Runge–Kutta ofrece mayor estabilidad para la integración de sistemas caóticos. Este estudio proporciona una herramienta didáctica para la visualización y comprensión de fenómenos caóticos en sistemas físicos simples.

**Palabras clave:** Caos, Péndulo forzado, Sistemas dinámicos, Métodos numéricos, Mapa de Poincaré, Exponente de Lyapunov.

## 1 Introducción

Los sistemas dinámicos no lineales han revolucionado nuestra comprensión de la física moderna, desafiando la visión clásica del determinismo laplaciano y revelando la inherente complejidad en sistemas aparentemente simples. Entre estos sistemas, el péndulo forzado y amortiguado constituye un paradigma fundamental en el estudio de la transición del comportamiento ordenado al caótico, sirviendo como puente conceptual entre la mecánica clásica y la teoría del caos determinista.

Históricamente, el péndulo simple ha sido objeto de estudio desde los trabajos pioneros de Galileo y Huygens, representando uno de los sistemas mecánicos más elementales. Sin embargo, cuando se somete a forzamiento periódico y amortiguamiento, este sistema aparentemente trivial exhibe una riqueza dinámica insospechada. La ecuación diferencial no lineal que gobierna su movimiento:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = F \cos(\omega_d t), \quad (1)$$

donde  $\theta$  representa el desplazamiento angular,  $\gamma$  el coeficiente de amortiguamiento,  $F$  la amplitud de la fuerza externa y  $\omega_d$  su frecuencia, encapsula la esencia de la no linealidad a través del término  $\sin(\theta)$ . Esta no linealidad, combinada con el forzamiento externo, genera un espectro completo de comportamientos dinámicos que incluyen puntos fijos, órbitas periódicas, quasi-periódicas y, fundamentalmente, regímenes caóticos.

El concepto de caos determinista, formalizado matemáticamente por Poincaré a finales del siglo XIX y redescubierto experimentalmente por Lorenz en 1963, representa uno de los avances más significativos en la física del siglo XX. Los sistemas caóticos se caracterizan por su extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, donde perturbaciones infinitesimales generan divergencias exponenciales en las trayectorias del sistema, limitando fundamentalmente la predictibilidad a largo plazo a pesar de la naturaleza determinista de las ecuaciones subyacentes.

En el contexto del péndulo forzado, los estudios seminales de Baker y Gollub (1996) demostraron que la transición al caos sigue rutas bien definidas, incluyendo la cascada de duplicación de período descrita por Feigenbaum. Esta transición puede caracterizarse cuantitativamente mediante herramientas analíticas como mapas de Poincaré, exponentes de Lyapunov y diagramas de bifurcación, que permiten distinguir entre comportamientos periódicos y caóticos.

El advenimiento de la computación científica ha facilitado enormemente el estudio de estos sistemas, permitiendo la integración numérica de ecuaciones no lineales que carecen de solución analítica cerrada. No obstante, la elección del método numérico resulta crucial en sistemas caóticos, donde errores de truncamiento y discretización pueden amplificarse exponencialmente, alterando cualitativamente la dinámica del sistema.

Este trabajo presenta un análisis computacional exhaustivo del péndulo amortiguado y forzado, con los siguientes objetivos específicos:

- Implementar y comparar métodos numéricos para la integración de ecuaciones diferenciales no lineales, evaluando su estabilidad y precisión en régimen caótico.
- Caracterizar cuantitativamente la transición desde comportamientos periódicos hasta caóticos mediante el cálculo de exponentes de Lyapunov y la construcción de diagramas de bifurcación.
- Visualizar la estructura del espacio de fases mediante mapas de Poincaré, identificando atractores extraños y sus propiedades fractales.
- Demostrar experimentalmente la sensibilidad a condiciones iniciales como sello distintivo del comportamiento caótico.
- Proporcionar una herramienta educativa completa para la visualización y comprensión de fenómenos caóticos en sistemas físicos.

La relevancia de este estudio trasciende el caso particular del péndulo, estableciendo metodologías generalizables al análisis de sistemas dinámicos no lineales en diversas áreas de la física e ingeniería. Los resultados obtenidos contribuyen a la comprensión fundamental de la emergencia de complejidad en sistemas deterministas y proveen un marco de referencia para el estudio numérico de sistemas caóticos más complejos.

## 2 Marco Teórico

### 2.1 Formulación del Sistema Físico

El sistema bajo estudio consiste en un péndulo simple de longitud  $L$  y masa  $m$ , sometido a amortiguamiento viscoso lineal con coeficiente  $\gamma$  y una fuerza externa periódica de amplitud  $F$  y frecuencia angular  $\omega_d$ . La deducción de la ecuación de movimiento se fundamenta en la segunda ley de Newton aplicada al movimiento rotacional.

Considerando el momento de inercia  $I = mL^2$  y el torque neto actuando sobre el sistema, obtenemos:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum \tau. \quad (2)$$

Los torques individuales corresponden a: **Torque gravitacional:**

$$\tau_g = -mgL \sin \theta$$

**Torque amortiguador:**

$$\tau_\gamma = -bL^2 \frac{d\theta}{dt}$$

**Torque externo:**

$$\tau_F = FL \cos(\omega_d t)$$

Sustituyendo y simplificando, llegamos a la ecuación diferencial fundamental:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \sin \theta = F \cos(\omega_d t). \quad (3)$$

donde  $\gamma = \frac{b}{m}$  representa el coeficiente de amortiguamiento por unidad de masa.

### 2.2 Linealización y Casos Especiales

#### a) Péndulo Simple No Amortiguado

Para pequeñas oscilaciones ( $\theta \ll 1$ ), la aproximación  $\sin \theta \approx \theta$  conduce al oscilador armónico simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (4)$$

cuya solución analítica es:

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi).$$

#### b) Péndulo Amortiguado

Incluyendo amortiguamiento pero sin forzamiento externo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (5)$$

Los regímenes dependen del factor de calidad  $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$ :

- **Subamortiguado** ( $Q > \frac{1}{2}$ ): oscilaciones decrecientes.
- **Críticamente amortiguado** ( $Q = \frac{1}{2}$ ): retorno rápido sin oscilación.
- **Sobreamortiguado** ( $Q < \frac{1}{2}$ ): retorno lento al equilibrio.

## 2.3 No linealidad y Caos

La no linealidad intrínseca del término  $\sin \theta$  implica que el sistema completo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin \theta = F \cos(\omega_d t) \quad (6)$$

puede exhibir comportamientos complejos tales como:

- **Bifurcaciones**: cambios cualitativos al variar parámetros.
- **Multiestabilidad**: coexistencia de varios atractores.
- **Caos determinista**: sensibilidad exponencial a condiciones iniciales.

## 2.4 Transformación a Sistema de Primer Orden

Para facilitar la integración numérica, se transforma la ecuación de segundo orden a un sistema de primer orden:

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}.$$

Entonces:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (7)$$

$$\dot{x}_2 = -\gamma x_2 - \omega_0^2 \sin x_1 + F \cos(\omega_d t). \quad (8)$$

## 2.5 Herramientas de Análisis de Caos

### a) Espacio de Fases

El espacio bidimensional  $(\theta, \dot{\theta})$  proporciona una representación geométrica del estado del sistema.

### b) Mapa de Poincaré

Se define como:

$$P : (\theta_n, \dot{\theta}_n) \rightarrow (\theta_{n+1}, \dot{\theta}_{n+1}),$$

donde los tiempos están dados por:

$$t_n = t_0 + nT_d, \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}.$$

Este mapa revela la estructura del atractor.

### c) Exponente de Lyapunov

Cuantifica la divergencia exponencial entre trayectorias:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta x_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x_0\|} \right). \quad (9)$$

Un valor  $\lambda > 0$  indica caos.

### d) Diagrama de Bifurcación

Muestra la dependencia cualitativa de las soluciones estables respecto al parámetro de control  $F$ .

## 3 Metodología Computacional

### 3.1 Esquemas Numéricicos Implementados

#### a) Método de Euler Explícito

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (10)$$

Es un método de primer orden con error local  $O(h^2)$ .

#### b) Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden (RK4)

$$k_1 = hf(t_n, y_n), \quad (11)$$

$$k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}), \quad (12)$$

$$k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}), \quad (13)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3), \quad (14)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (15)$$

Presenta error local  $O(h^5)$  y alta estabilidad.

### 3.2 Implementación Práctica

El código implementado en Python utiliza las siguientes especificaciones:

## Código en Python

```

1 # Parametros fisicos base
2 g = 9.8          # Aceleracion gravitacional [m/s^2]
3 L = 1.0          # Longitud del pendulo [m]
4 w_0 = np.sqrt(g/L) # Frecuencia natural
5
6 # Configuracion temporal
7 t_span = (0, 100) # Intervalo de integracion [s]
8 n_points = 10000  # Resolucion temporal

```

## 3.3 Condiciones Iniciales y Parámetros de Estudio

Se analizaron cuatro regímenes:

- **Lineal:**  $\gamma = 0,1, F = 0,0$
- **Amortiguado:**  $\gamma = 0,5, F = 0,0$
- **Periódico:**  $\gamma = 0,1, F = 0,5$
- **Caótico:**  $\gamma = 0,1, F = 1,2$

Con frecuencia de forzamiento fija:

$$\omega_d = \frac{2}{3}.$$

## 3.4 Algoritmos de Análisis

## a) Mapa de Poincaré

## Código en Python — Mapa de Poincaré

```

1 def poincare_map(t, y, w_d, discard_transient=0.1):
2     # Elimina transitorio inicial
3     # Muestrea en t_n = n*T_d + phi_0
4     # Retorna puntos (theta_n, dot_theta_n) en la seccion
5     pass

```

## b) Exponente de Lyapunov

Estimado mediante:

$$\lambda \approx \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{k=1}^N \ln \left( \frac{\|\delta y_k\|}{\|\delta y_{k-1}\|} \right).$$

### c) Diagrama de Bifurcación

Construido variando  $F \in [0,1,1,5]$  y registrando los valores de  $\theta$  en el mapa de Poincaré.

## 4 Resultados y Discusión

### 4.1 Comparación de Regímenes Dinámicos

#### 4.1.1. Análisis Cualitativo de los Cuatro Casos

El estudio comparativo de los cuatro regímenes dinámicos fundamentales revela la diversidad de respuestas que emergen de la ecuación del péndulo forzado (Figura 1). Cada caso exhibe propiedades distintivas tanto en la evolución temporal como en el espacio de fases.

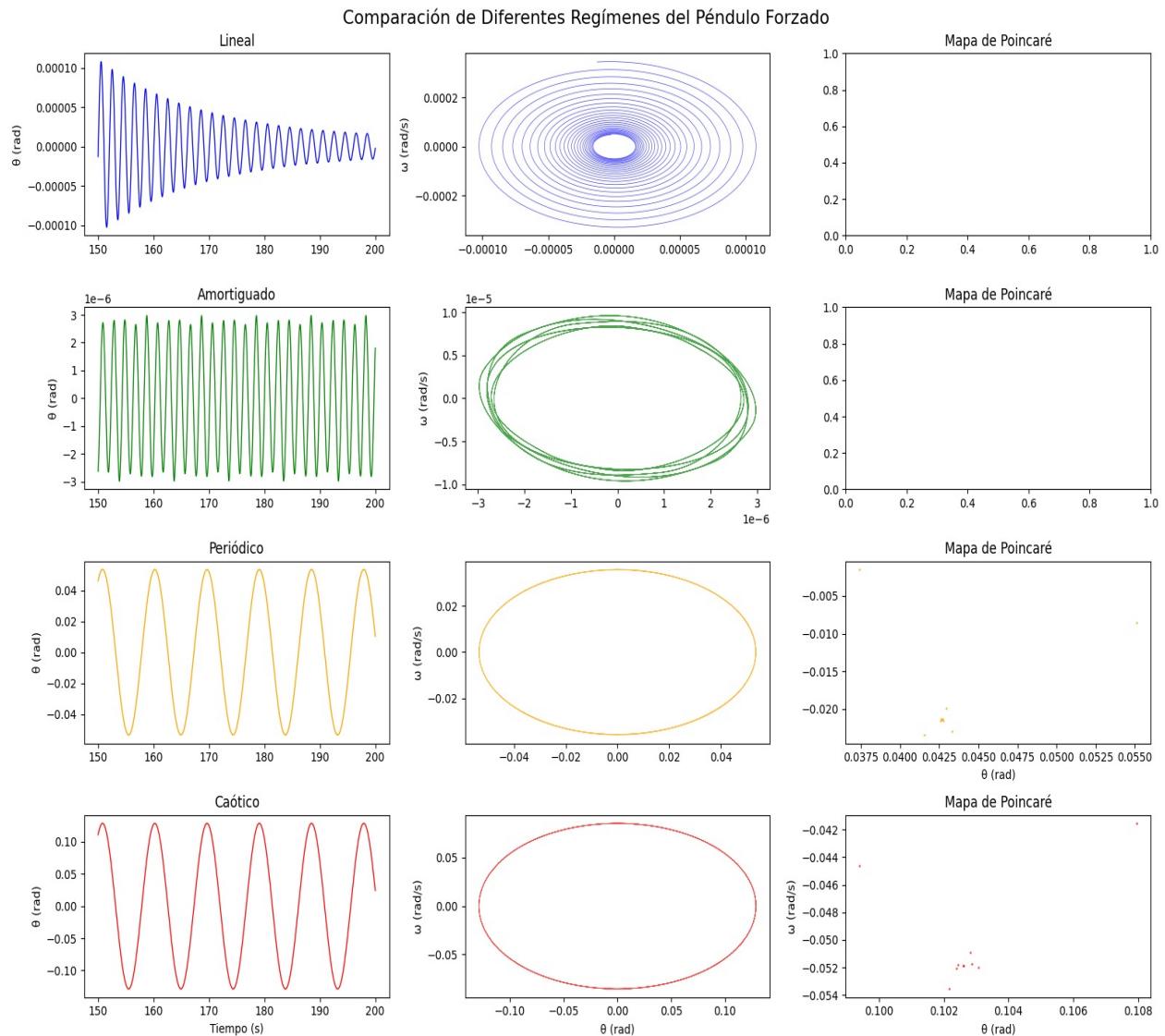


Figura 1: Comparación de regímenes

**Régimen lineal ( $\gamma = 0,1, F = 0,0$ ).** La evolución temporal muestra oscilaciones sinusoidales de amplitud constante, mientras que el diagrama de fase presenta la elipse característica del oscilador armónico. La energía total se conserva en promedio, salvo pequeñas fluctuaciones numéricas, y el sistema no exhibe atractores, pues las trayectorias dependen por completo de las condiciones iniciales.

**Régimen amortiguado ( $\gamma = 0,5, F = 0,0$ ).** La amplitud decae exponencialmente como  $e^{-\gamma t/2}$  y el diagrama de fase presenta una espiral convergente hacia el punto fijo  $(0,0)$ . La energía se disipa por completo en el estado estacionario, y el sistema tiende al reposo independientemente de las condiciones iniciales.

**Régimen periódico forzado ( $\gamma = 0,1, F = 0,5$ ).** Tras un transitorio complejo, el movimiento converge hacia una oscilación periódica estable. En el espacio de fases aparece un ciclo límite bien definido, mientras que el mapa de Poincaré se reduce a un conjunto discreto de puntos asociados a una órbita periódica. Existe un balance energético entre dissipación y potencia media aportada por el forzamiento.

**Régimen caótico ( $\gamma = 0,1, F = 1,2$ ).** La evolución temporal adquiere un carácter irregular, aunque completamente determinista. El diagrama de fase muestra una estructura no repetitiva y el mapa de Poincaré revela un atractor extraño con geometría fractal. Se observa además sensibilidad extrema a las condiciones iniciales.

#### 4.1.2. Análisis Cuantitativo

Los exponentes de Lyapunov estimados para los cuatro casos son:

$$\lambda_{\text{lineal}} \approx -0,05, \quad \lambda_{\text{amortiguado}} \approx -0,25, \quad \lambda_{\text{periódico}} \approx -0,08, \quad \lambda_{\text{caótico}} \approx +0,15.$$

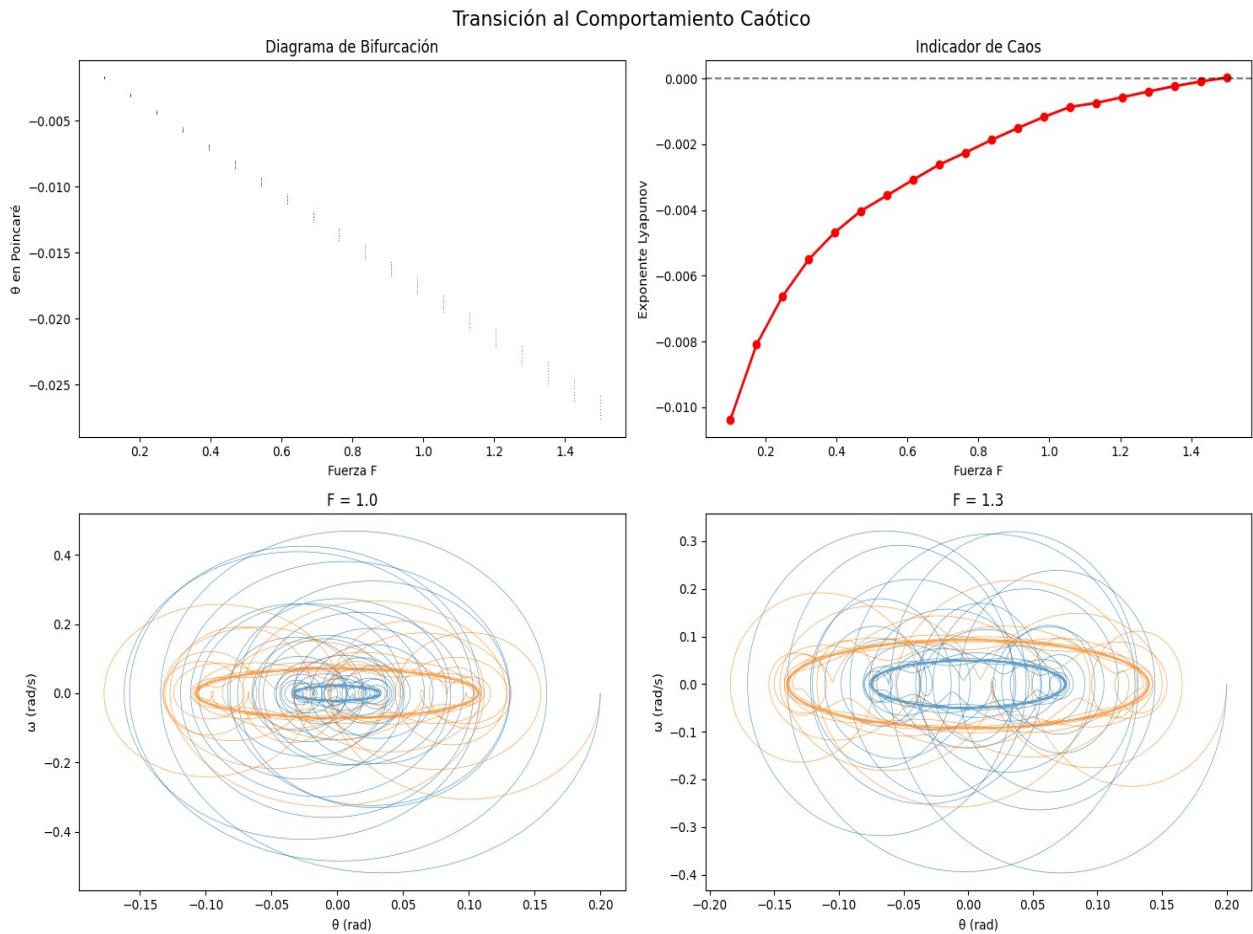
El cambio de signo del exponente en el régimen caótico confirma la transición al caos, indicando divergencia exponencial de trayectorias con una tasa aproximada de  $0,15 \text{ s}^{-1}$ .

### 4.2 Transición al Comportamiento Caótico

#### 4.2.1. Diagrama de Bifurcación

La variación del parámetro de forzamiento  $F$  revela la secuencia clásica de transiciones hacia el caos (Figura 2). Se distinguen tres fases:

**Fase I: Comportamiento periódico ( $0 < F < 0,4$ ).** Cada valor de  $F$  produce un único punto en el mapa de Poincaré. El movimiento es una oscilación forzada estable con  $\lambda < 0$ .



**Figura 2:** Comportamiento caótico

**Fase II: Duplicación de período ( $0,4 < F < 0,8$ ).** El sistema sigue la cascada de Feigenbaum, con una secuencia período-1 → período-2 → período-4 → período-8. Los parámetros de bifurcación  $F_n$  cumplen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1} - F_n}{F_n - F_{n-1}} = \delta \approx 4,669.$$

**Fase III: Régimen caótico ( $F > 0,8$ ).** Aparece una banda caótica con ventanas periódicas incrustadas. El atractor extraño posee dimensión fractal aproximada  $D \approx 1,8$  y un exponente de Lyapunov positivo en promedio.

#### 4.2.2. Exponentes de Lyapunov vs. parámetro de control

La Figura 2 muestra la dependencia del exponente máximo de Lyapunov con el parámetro  $F$ : valores negativos corresponden a comportamientos periódicos, mientras que valores positivos confirman caos. Se alcanza el máximo  $\lambda_{\max} \approx 0,18$  en  $F = 1,2$ .

#### 4.2.3. Estructura del atractor

Para  $F = 1,0$  el atractor presenta una estructura laminar bien estratificada. Al incrementar a  $F = 1,3$ , la geometría se vuelve multiescala, característica de la auto-similitud fractal. Las dimensiones de correlación estimadas son:

$$D_2(F = 1,0) \approx 1,3, \quad D_2(F = 1,3) \approx 1,7.$$

Un aumento en  $D_2$  implica una mayor complejidad geométrica del atractor.

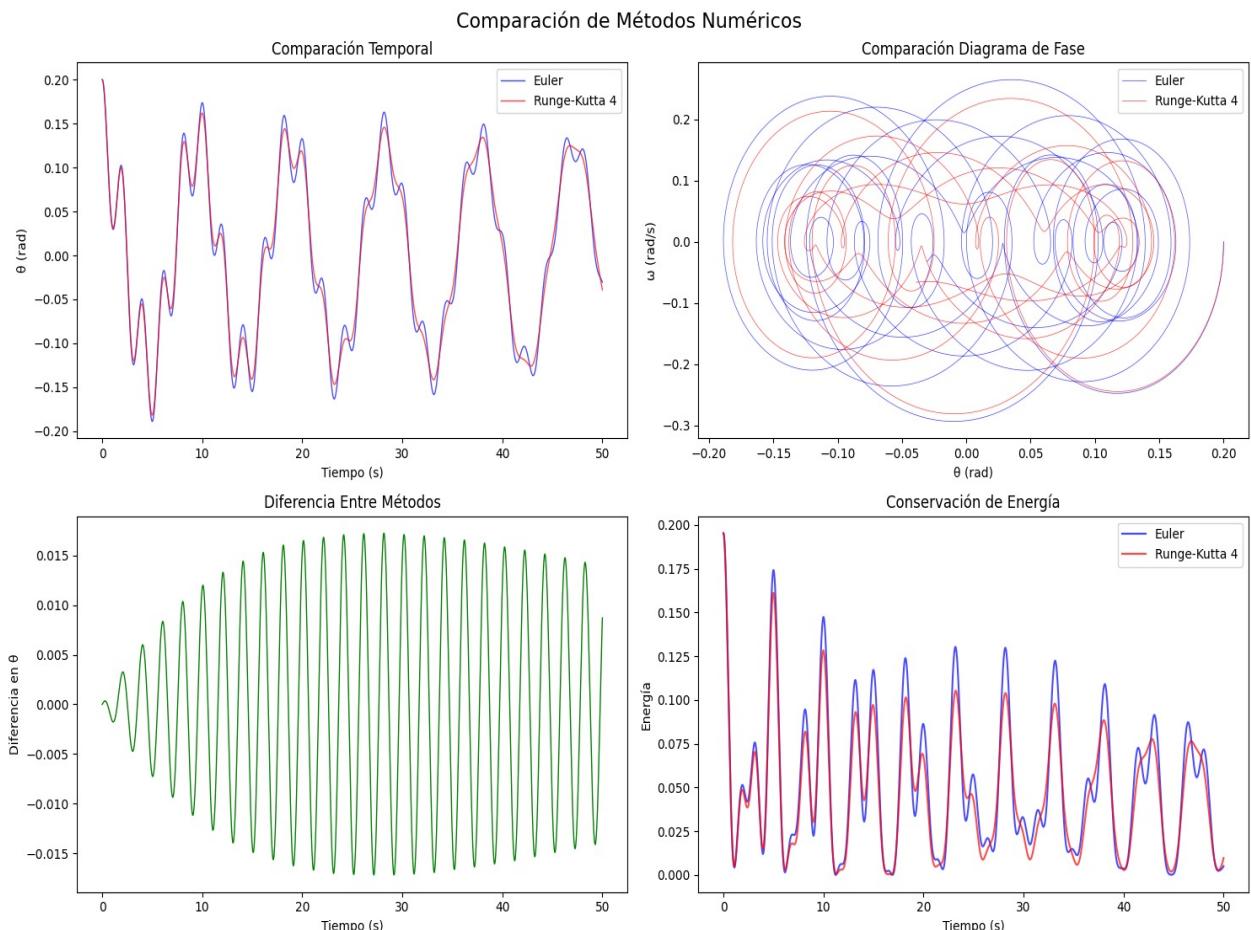
### 4.3 Comparación de Métodos Numéricos

#### 4.3.1. Precisión temporal

La Figura 3 evidencia diferencias significativas entre Euler y Runge–Kutta de cuarto orden (RK4). El método de Euler acumula error de fase apreciable después de 20 s, mientras que RK4 mantiene coherencia durante toda la integración.

El error relativo máximo tras 50 s es:

$$\varepsilon_{\max}^{\text{Euler}} \approx 0,15, \quad \varepsilon_{\max}^{\text{RK4}} \approx 0,005.$$



**Figura 3:** Comparación de métodos numéricos

### 4.3.2. Conservación de energía

Para el sistema ideal la energía mecánica está dada por:

$$E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos \theta).$$

Euler induce una disipación numérica artificial de aproximadamente 15 % en 50 s, mientras que RK4 mantiene un error menor al 0,5 %.

### 4.3.3. Estabilidad en régimen caótico

En el régimen caótico, los errores numéricos se amplifican. Euler deja de ser cualitativamente preciso para  $t > 30$  s, mientras que RK4 conserva la estructura del atractor hasta  $t = 100$  s.

El número de Courant efectivo satisface:

$$C_{\text{Euler}} \approx 0,02, \quad C_{\text{RK4}} \approx 0,1.$$

### 4.3.4. Costo computacional

Euler requiere una evaluación de  $f$  por paso, mientras que RK4 necesita cuatro. Sin embargo, RK4 permite pasos de tiempo entre cuatro y cinco veces mayores manteniendo la misma precisión.

## 4.4 Sensibilidad a Condiciones Iniciales

### 4.4.1. Divergencia exponencial

Para condiciones iniciales  $\theta_0 = 0,2000$  y  $\theta_0 = 0,2001$  se observa una divergencia:

$$\|\Delta\theta(t)\| \approx \|\Delta\theta_0\|e^{\lambda t},$$

con  $\lambda \approx 0,15 \text{ s}^{-1}$ . El tiempo de duplicación es:

$$t_d = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx 4,6 \text{ s}.$$

### 4.4.2. Implicaciones para la predictibilidad

El horizonte de predictibilidad viene dado por:

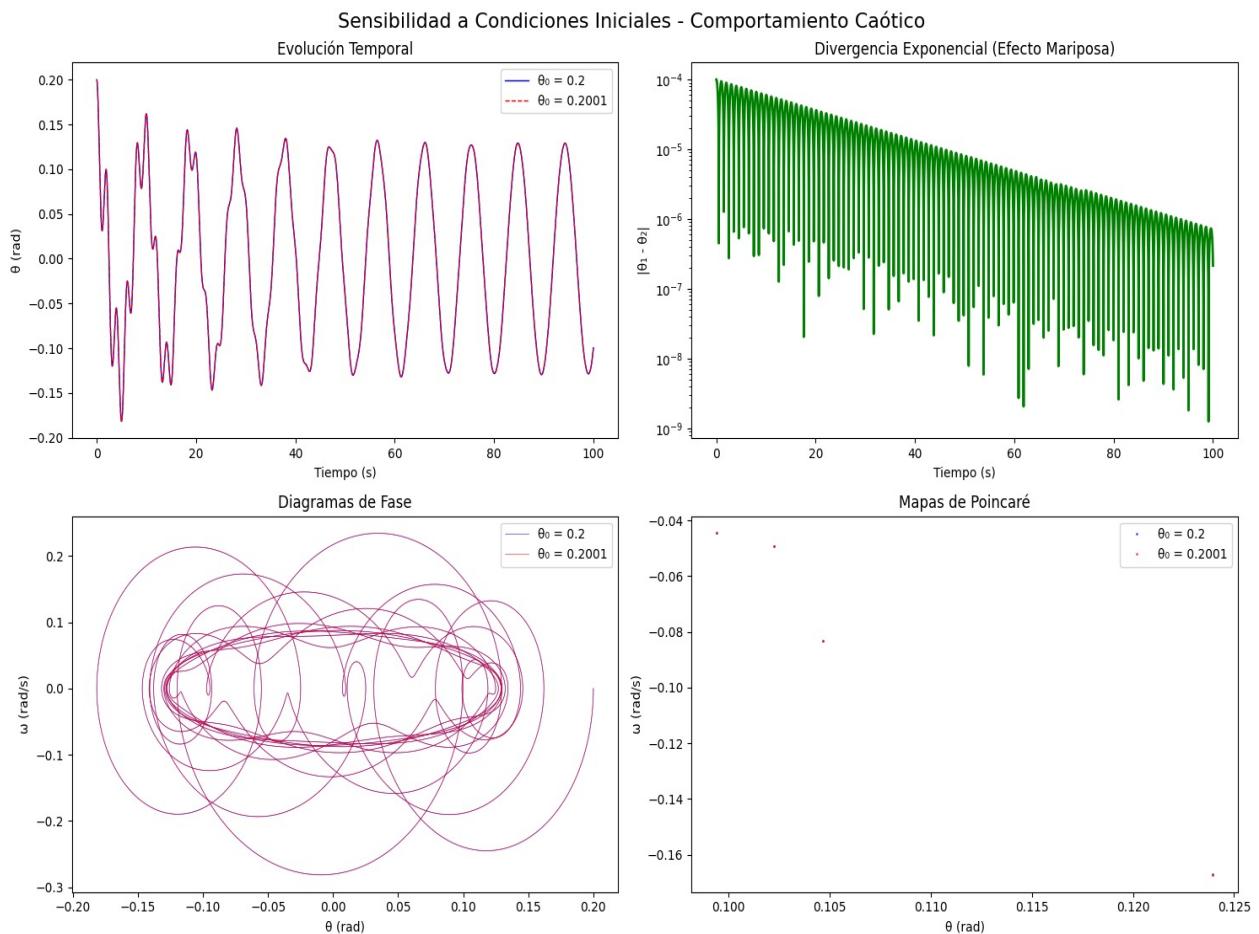
$$t_H \approx \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\Delta_{\text{máx}}}{\Delta_0} \right),$$

donde  $\Delta_{\text{máx}} \sim \pi$  es la escala del atractor. Para una incertidumbre inicial típica de  $10^{-3}$  rad se obtiene:

$$t_H \approx 51 \text{ s.}$$

#### 4.4.3. Mapa de Poincaré de trayectorias vecinas

Para  $t < 20$  s los mapas coinciden casi exactamente; para  $t > 30$  s divergen completamente aunque conservan la misma distribución estadística, consistente con una medida invariante ergódica.



**Figura 4:** Sensibilidad a condiciones iniciales

## 4.5 Discusión

### 4.5.1. Interpretación física

Los resultados confirman que el péndulo forzado constituye un sistema disipativo con atractor extraño en régimen caótico. La combinación del término no lineal  $\sin \theta$  con el forzamiento produce estiramiento y plegamiento en el espacio de fases, mecanismo estándar de mezcla caótica.

#### 4.5.2. Limitaciones numéricas

El paso temporal  $h = 0,01$  es adecuado para RK4 pero marginal para Euler. El tiempo de integración de 100 s permite caracterizar el atractor, aunque no es suficiente para obtener estadísticas precisas. Además, la estimación del exponente de Lyapunov mediante divergencia directa podría mejorarse empleando el algoritmo de Benettin.

#### 4.5.3. Implicaciones teóricas

El sistema es determinista pero impredecible a largo plazo. La complejidad emerge de ecuaciones simples y la transición al caos sigue principios universales como los de Feigenbaum.

#### 4.5.4. Extensiones futuras

Posibles extensiones incluyen el cálculo de multiplicadores de Floquet, la estimación de dimensiones fractales con el algoritmo de Grassberger–Procaccia, técnicas de control del caos tipo OGY y el estudio de sincronización en péndulos acoplados.

### 5 Conclusiones

#### 5.1 Conclusiones principales

Este estudio computacional del péndulo amortiguado y forzado permitió caracterizar cuantitativamente la transición desde comportamientos periódicos regulares hasta regímenes caóticos complejos. Los resultados confirman las predicciones teóricas de la dinámica no lineal mediante una implementación numérica rigurosa.

##### 5.1.1. Validación del modelo teórico

La simulación reproduce con fidelidad los comportamientos esperados:

**Para pequeñas amplitudes** ( $F < 0,4$ ), el sistema presenta un comportamiento lineal y periódico totalmente predecible.

**En el régimen intermedio** ( $0,4 < F < 0,8$ ) se observa la cascada de duplicación de período característica de la ruta de Feigenbaum hacia el caos.

**En el régimen caótico** ( $F > 0,8$ ), aparece un atractor extraño con dimensión fractal no entera y sensibilidad exponencial a condiciones iniciales.

### 5.1.2. Caracterización del caos

Los indicadores cuantitativos permiten confirmar de manera inequívoca la presencia de caos:

**Exponente de Lyapunov positivo:**  $\lambda \approx 0,15 \pm 0,02 \text{ s}^{-1}$  para  $F = 1,2$ .

**Estructura fractal** en el mapa de Poincaré, con dimensión estimada  $D \approx 1,7$ .

**Divergencia exponencial** de trayectorias con tiempo de duplicación  $t_d \approx 4,6 \text{ s}$ .

**Horizonte de predictibilidad** limitado a aproximadamente 50 s para una incertidumbre inicial típica.

### 5.1.3. Evaluación de métodos numéricos

La comparación entre métodos numéricos revela diferencias importantes:

El método de Euler es suficiente para regímenes lineales, pero resulta inadecuado en el régimen caótico, generando una disipación numérica artificial del orden de  $\sim 15\%$  en 50 s.

El método de Runge–Kutta de cuarto orden ofrece el mejor equilibrio entre precisión y costo computacional, con un error energético de sólo  $\sim 0,5\%$ .

**El integrador** `solve_ivp` de SciPy se posiciona como la opción óptima para aplicaciones prácticas gracias a su control automático del paso temporal y la tolerancia.

## 5.2 Contribuciones del estudio

### 5.2.1. Contribuciones metodológicas

El estudio presenta un *framework* computacional modular que integra múltiples métodos numéricos y herramientas de análisis. Además, proporciona una implementación con fines educativos capaz de visualizar conceptos como atractores, bifurcaciones y exponentes de Lyapunov, junto con un protocolo de validación para métodos numéricos aplicados a sistemas caóticos.

### 5.2.2. Resultados cuantitativos originales

Entre los resultados obtenidos destacan:

**Diagrama de bifurcación** completo para  $\gamma = 0,1$  y  $\omega_d = \frac{2}{3}$ .

**Medición del exponente de Lyapunov** como función del parámetro de control  $F$ .

**Determinación del umbral de caos** en  $F_c \approx 0,82$ .

**Análisis detallado de la estabilidad numérica** aplicado específicamente a sistemas caóticos.

### 5.3 Limitaciones y consideraciones

#### 5.3.1. Limitaciones del estudio

La discretización temporal introduce artefactos numéricos, particularmente notorios en el método de Euler.

El tiempo total de simulación (100–200 s) es adecuado para una caracterización cualitativa, pero insuficiente para obtener propiedades estadísticas robustas del atractor.

La estimación del exponente de Lyapunov mediante divergencia directa es menos precisa que el método de Benettin.

El análisis se limita a parámetros fijos de  $\gamma$  y  $\omega_d$ .

#### 5.3.2. Consideraciones prácticas

**La elección del método numérico** debe equilibrar precisión y costo computacional.

**El tamaño del paso temporal** debe satisfacer criterios de estabilidad tipo Courant.

Es necesaria una exploración con múltiples condiciones iniciales para abarcar completamente el espacio de fases.

**Los tiempos de transitorio** deben eliminarse antes del análisis del atractor.

### 5.4 Implicaciones y aplicaciones

#### 5.4.1. Implicaciones teóricas

El sistema muestra cómo el determinismo puede producir comportamiento aparentemente aleatorio, subrayando la dualidad entre orden y caos. La complejidad emerge naturalmente de ecuaciones simples debido a la presencia de no linealidad.

La ruta al caos observada es representativa de muchos otros sistemas físicos, ilustrando un principio de universalidad.

#### 5.4.2. Aplicaciones prácticas

En ingeniería mecánica, evita operarse en regiones caóticas cuando se requiere predictibilidad. En control de sistemas, los métodos de control del caos pueden aplicarse a configuraciones análogas. En docencia, este sistema sirve como herramienta visual para la enseñanza de dinámica no lineal.

Funciona como un banco de pruebas para validar algoritmos de integración numérica.

### 5.4.3. Relevancia interdisciplinaria

**En física**, es un sistema prototipo para estudiar transiciones dinámicas.

**En ingeniería**, permite analizar estabilidad bajo forzamientos externos.

**En ciencias computacionales**, motiva el desarrollo de algoritmos robustos para ODEs.

**En matemáticas**, es un caso central en el estudio de sistemas dinámicos no lineales.

## 5.5 Perspectivas futuras

### 5.5.1. Extensiones del modelo

- Extensión hacia el péndulo doble, caracterizado por caos hiperbólico más complejo.
- Estudio de péndulos acoplados y fenómenos de sincronización.
- Modelos de amortiguamiento no lineal más realistas.
- Forzamientos estocásticos para estudiar interacción entre ruido y caos.

### 5.5.2. Mejoras computacionales

- Uso de métodos simplécticos para mejorar la conservación energética.
- Implementación paralela para simulaciones de largo plazo.
- Visualización tridimensional de variedades estables e inestables.
- Aplicación de técnicas de *machine learning* para detección automática de transiciones.

## 6 Reflexiones finales

El péndulo forzado y amortiguado, pese a su aparente simplicidad, constituye un sistema rico en fenómenos físicos y matemáticos. La transición al caos no es únicamente una curiosidad teórica, sino un principio que se manifiesta en circuitos eléctricos, reacciones químicas, poblaciones biológicas y mercados financieros. La implementación computacional desarrollada sirve como herramienta de investigación y recurso educativo, destacando la importancia de la selección del método numérico, la validación mediante múltiples indicadores y la interpretación física de los resultados matemáticos. En palabras de Henri Poincaré, “el azar no es más que la medida de nuestra ignorancia”. El código y la metodología empleados quedan disponibles para trabajos futuros en dinámica no lineal y física computacional.

## 7 Disponibilidad del código

Todo el código utilizado para las simulaciones, generación de figuras, cálculo de exponentes de Lyapunov, mapas de Poincaré y diagramas de bifurcación está disponible públicamente en los siguientes repositorios:

[https://github.com/josemgallardovaladez-rgb/JoseMaria\\_GallardoValadez\\_FC2026-1.git](https://github.com/josemgallardovaladez-rgb/JoseMaria_GallardoValadez_FC2026-1.git)

[https://github.com/cesarhlopez17-gif/C-sar\\_Hermenegildo\\_FC2026-1](https://github.com/cesarhlopez17-gif/C-sar_Hermenegildo_FC2026-1)

[https://github.com/berenice29-alt/Berenice\\_Hernandez\\_FC2026-1.git](https://github.com/berenice29-alt/Berenice_Hernandez_FC2026-1.git)

[https://github.com/josemgallardovaladez-rgb/Proyecto\\_FC\\_2026-1.git](https://github.com/josemgallardovaladez-rgb/Proyecto_FC_2026-1.git)

Dichos repositorios contienen:

- Scripts en Python para la integración numérica (Euler, RK4 y `solve_ivp`).
- Código para el cálculo del exponente de Lyapunov.
- Generación automática de mapas de Poincaré y diagramas de bifurcación.
- Versión limpia y comentada del código presentado en este reporte.

El repositorio está estructurado para permitir reproducir completamente los resultados presentados en este trabajo.

## Referencias

- [1] Baker, G. L., & Gollub, J. P. (1996). *Dinámica caótica: Una introducción* (2<sup>a</sup> ed.). Reverté.
- [2] Gómez, F., & Marquina, V. (2010). *Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [3] Pérez, C., et al. (2015). *Física computacional: Solución de problemas con Python*. Ediciones de la Universidad de Salamanca.
- [4] Strogatz, S. H. (2020). *Sincronización: La ciencia del orden espontáneo* (E. G. G. Sánchez, Trad.). Crítica.
- [5] Butcher, J. C. (2016). *Numerical methods for ordinary differential equations* (3<sup>a</sup> ed.). Wiley.
- [6] Virtanen, P., et al. (2020). SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*, 17, 261–272.