

## Relacions de recurrència en “divideix i vençeràs”

La relació de recurrència que volem resoldre és:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ af(\frac{n}{a}) + n^k & n > 1 \end{cases} \quad (1)$$

Evidentment suposem que  $a \in \mathbb{N}, a > 1$  (no té sentit que el problema no es reduïska o que augmente), i que  $k \in \mathbb{R}, k > 0$ .

$$f(n) = af\left(\frac{n}{a}\right) + n^k \quad (2)$$

$$= a \left[ af\left(\frac{n}{a^2}\right) + \left(\frac{n}{a}\right)^k \right] + n^k \quad (3)$$

$$= a^2 f\left(\frac{n}{a^2}\right) + a \left(\frac{n}{a}\right)^k + n^k \quad (4)$$

$$\dots \quad (5)$$

$$= a^j f\left(\frac{n}{a^j}\right) + n^k \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{1}{a^{k-1}}\right)^i \quad (6)$$

Sumem ara la sèrie geomètrica de raó  $r = \frac{1}{a^{k-1}}$  amb la fórmula general

$$\sum_{i=0}^{j-1} r^i = \frac{1 - r^j}{1 - r} \quad (7)$$

Alerta! Aquesta fórmula no serveix si  $r = 1$ , però en aquest cas la suma val trivialment  $j$ . Substituint-hi en l'equació (6):

$$f(n) = a^j f\left(\frac{n}{a^j}\right) + n^k \frac{1 - \left(\frac{1}{a^{k-1}}\right)^j}{1 - \frac{1}{a^{k-1}}} \quad (8)$$

$$= n + n^k \frac{1 - \frac{1}{n^{k-1}}}{1 - \frac{1}{a^{k-1}}} \quad \text{Ja que cal arribar fins a } a^j = n \quad (9)$$

$$= n + a^k \frac{n^k - n}{a^k - a} \quad (10)$$

$$= \frac{a^k n^k - na}{a^k - a} \quad (\text{Comprovat, wolframalpha.com}) \quad (11)$$

Cal distingir-hi tres casos:

- $k > 1$ : el terme dominant és  $n^k$
- $k = 1$ : En aquest cas la raó de la sèrie geomètrica és  $r = \frac{1}{a^{k-1}} = 1$ ; per això la fórmula utilitzada no és vàlida. En aquest cas, la suma de la sèrie és  $j$ ; per això, si tornem a l'equació (6) tindrem:

$$f(n) = a^j f\left(\frac{n}{a^j}\right) + n^k j \quad (12)$$

$$= n + n^k \log_a(n) \quad \text{ja que } a^j = n \text{ i } j = \log_a(n) \quad (13)$$

Per aqò, en aquest cas el terme dominant és:  $n^k \log_a(n)$

- $k < 1$ : el terme dominant és  $n$

## Per a ampliar...

La relació de recurrència més general:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ af\left(\frac{n}{b}\right) + g(n) & n > 1 \end{cases} \quad (14)$$

on es compleix que  $g(n^p) = g(n)^p$  la trobareu resolta de manera molt similar en l'apèndix D.1 del llibre *Introducció a l'anàlisi i disseny d'algorismes* de F.J. Ferri, J.V. Albert i G. Martín (Universitat de València, 1998).