Sistema completo de sucesos

- Un cjto. de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ forma un sistema completo de sucesos (SCS), o una partición del espacio muestral Ω, si cumple:
  - $A_i \neq \emptyset, \ \forall i$
  - $A_i \cap A_j = \emptyset, \ \text{si } i \neq j$
  - $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Problema 2.18

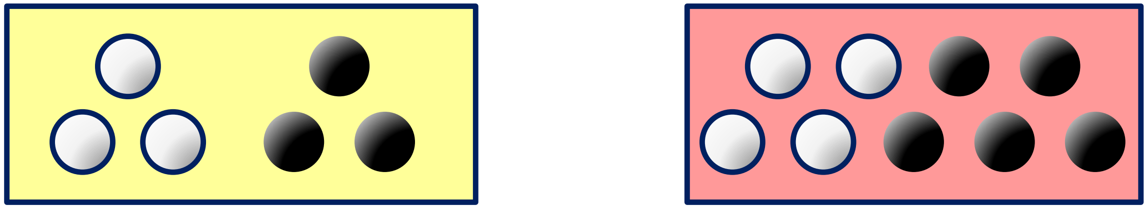
- De una baraja de 40 cartas se extrae una al azar. Los sucesos $O = \{\text{obtener oro}\}$, $C = \{\text{obtener copa}\}$, $E = \{\text{obtener espada}\}$ y $B = \{\text{obtener basto}\}$, forman un Sistema Completo de Sucesos. ¿Por qué?

Problema 2.19

- En el lanzamiento de dos dados, los sucesos
  $A =$ {obtener la misma cara en ambos lanzamientos}
  $B =$ {obtener distinta cara y suma impar}
  $C =$ {obtener distinta cara y suma par}
  forman un Sistema Completo de Sucesos. ¿Por qué?
  - Sin tener en cuenta el orden, podemos obtener:
    A = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}
    B = {(1,2), (1,4), (1,6), (2,3), (2,5), (3,4), (3,6), (4,5), (5,6)}
    C = {(1,3), (1,5), (2,4), (2,6), (3,5), (4,6)}

Problema 2.20 (enunciado)

- Una urna contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras; otra urna contiene 4 blancas y 5 negras. Se elige una **urna al azar** y se extrae **una bola**. **Probabilidad** de que sea **blanca**.



  - Para resolverlo debemos tener en cuenta la probabilidad de escoger cada uno de los grupos.
  - Secuencia de sucesos:
    - 1º. Escoger urna (cjto. de sucesos que forman un SCS)
    - 2º. Elegir bola (otro cjto. de sucesos)

T^{ma} de Probabilidad Total

- Sea $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ un sistema completo de sucesos (SCS), y sea B un suceso cualquiera; entonces

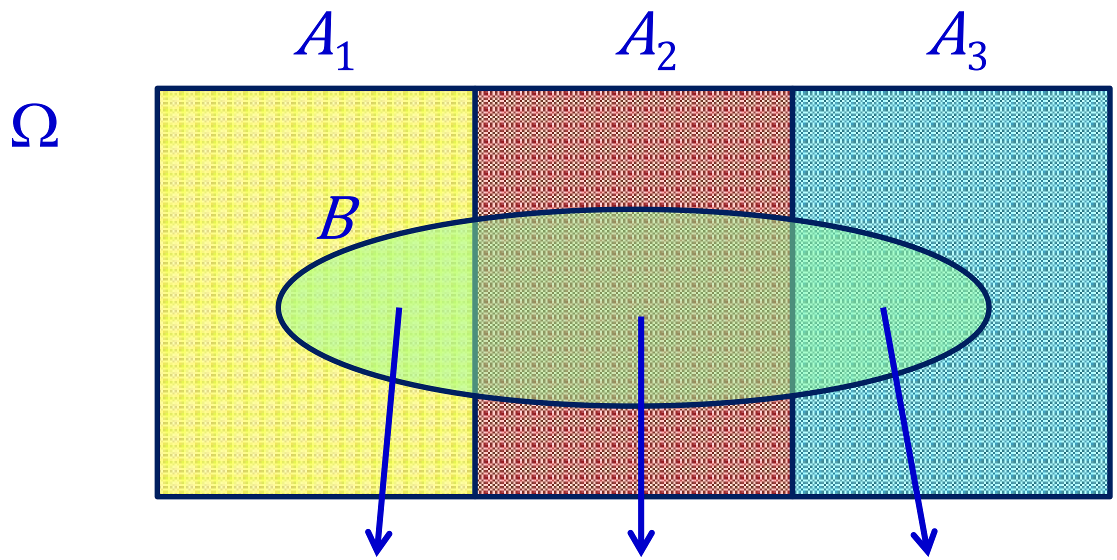
$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B|A_i)$$

- Demostración:

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \cap \Omega) = \mathrm{P}\left(B \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i)\right) = \mathrm{P}(\cup_{i=1}^{n} \underbrace{(B \cap A_i)}_{\textit{incompatibles}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B|A_i)$$

T^ma de Probabilidad Total



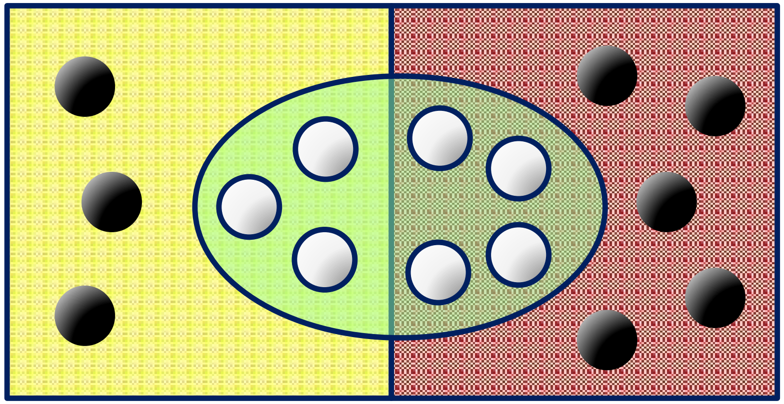
$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$$

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \cap A_1) + \mathrm{P}(B \cap A_2) + \mathrm{P}(B \cap A_3)$$

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(B|A_1) + \mathrm{P}(A_2) \cdot \mathrm{P}(B|A_2) + \mathrm{P}(A_3) \cdot \mathrm{P}(B|A_3)$$

Problema 2.20 (solución)

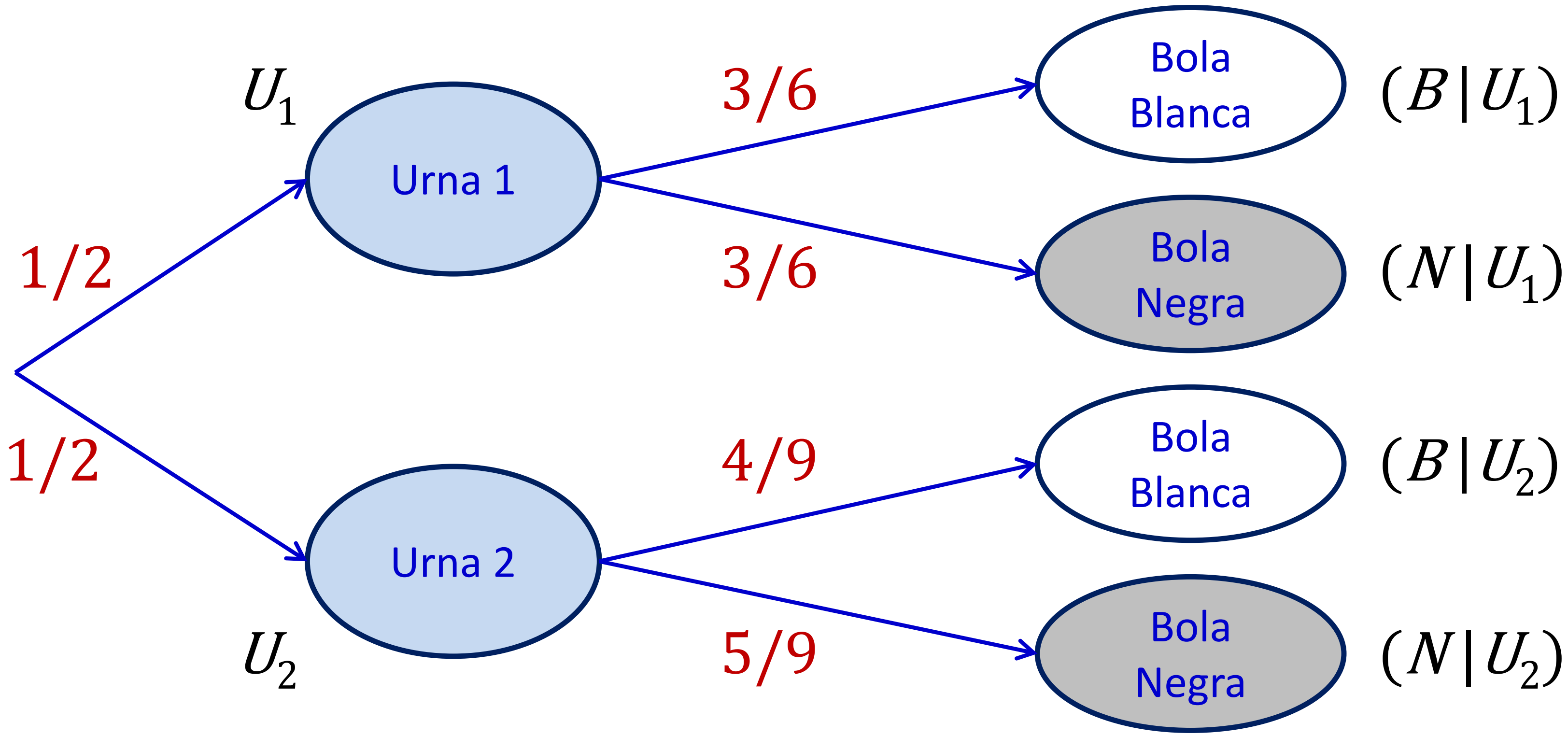
- Una urna contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras; otra urna contiene 4 blancas y 5 negras. Se elige una **urna al azar** y se extrae **una bola**. **Probabilidad** de que sea **blanca**.



- $U_1 = \{\text{Urna 1}\}, \quad U_2 = \{\text{Urna 2}\}, \quad B = \{\text{Elegir bola blanca}\}$
  - U_1 y U_2 forman un SCS.

Problema 2.20 (cont.)

- Otra forma de verlo es mediante un árbol:



Problema 2.21

- Se tienen tres conjuntos de números impares: del 1 al 7, del 9 al 21 y del 23 al 39. Elegimos aleatoriamente un conjunto, y de éste un número. Calcular la **probabilidad** de que el número escogido sea **primo**.
  - $C_1 = \{1, 3, 5, 7\}$; $C_2 = \{9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$; $C_3 = \{23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}$; $P = \{\text{nº primo}\}$

T^{ma} de Bayes

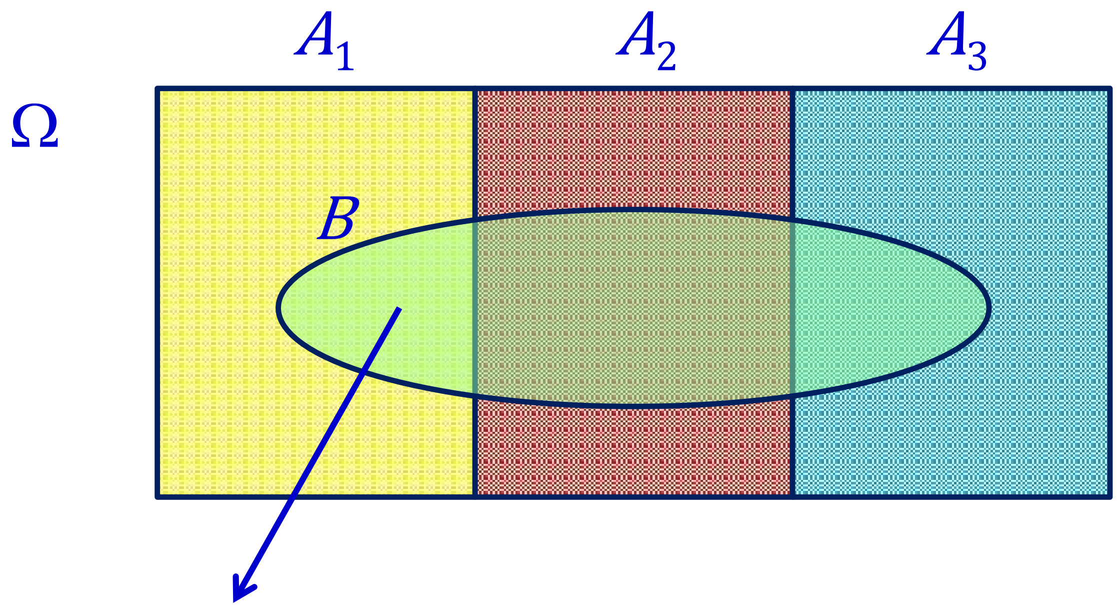
- Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos (SCS), y sea B un suceso tal que $\mathrm{P}(B) > 0$; entonces

$$\mathrm{P}(A_k|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_k)\cdot \mathrm{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(B|A_i)\cdot \mathrm{P}(A_i)}$$

- Demostración:
  - Usando el desarrollo de probabilidad condicional y el T^{ma} de probabilidad total:

$$\mathrm{P}(A_k|B) = \frac{\mathrm{P}(B\cap A_k)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B|A_k)\cdot \mathrm{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(B|A_i)\cdot \mathrm{P}(A_i)}$$

T^ma^ de Bayes



$$\mathrm{P}(A_1|B) = \frac{\mathrm{P}(B \cap A_1)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B|A_1) \cdot \mathrm{P}(A_1)}{\mathrm{P}(B)}$$

- Bayes se aplica normalmente cuando la secuencia habitual de sucesos aparece invertida (se pregunta la prob. de uno de los sucesos del SCS).

Problema 2.22 (del 2.20)

- Una urna contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras; otra urna contiene 4 blancas y 5 negras. Se elige una **urna al azar** y se extrae **una bola**. Si la bola **ha salido blanca**, hallar la **probabilidad** de que se haya sacado de la **segunda urna**.

Problema 2.23 (del 2.21)

- Se tienen tres conjuntos de números impares: del 1 al 7, del 9 al 21 y del 23 al 39. Elegimos aleatoriamente un conjunto, y de éste un número. Si el **número** ha salido **primo**, calcular la **probabilidad** de que se haya obtenido del **segundo conjunto**.
  - $C_1 = \{1, 3, 5, 7\}$; $C_2 = \{9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$;
    $C_3 = \{23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}$; $P = \{\text{nº primo}\}$

Problema 2.24

- En una ciudad hay un millón de habitantes y entre ellos 100 terroristas fichados de los que se desconoce su paradero. Una cámara de seguridad en el metro detecta caras con un error del 1%. Si la cámara detecta un terrorista, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo sea?
  - Sesgo cognitivo.