

TEMA 1

Introducción a los TADs.

Los tipos lineales

PROGRAMACIÓN Y ESTRUCTURAS DE DATOS

Introducción. Los tipos lineales

- 1. Introducción a los TADs
- 2. Vectores
- 3. Listas
- 4. Pilas
- 5. Colas

1. Introducción a los TADs

- TAD: Tipo Abstracto de Datos
- *Tipo de datos:*
 - Clasifica los objetos de los programas (variables, parámetros, constantes) y determina los valores que pueden tomar
 - También determina las operaciones que se aplican
 - Entero: operaciones aritméticas enteras (suma, resta, ...)
 - Booleano: operaciones lógicas (y, o, ...)
- *Abstracto:*
 - La manipulación de los datos sólo dependen del comportamiento descrito en su especificación (*qué hace*) y es independiente de su implementación (*cómo se hace*)
 - Una especificación → Múltiples implementaciones

3

1. Introducción a los TADs

- Especificación de un TAD:
 - Consiste en establecer las propiedades que lo definen
 - Para que sea útil debe ser:
 - Precisa: sólo produzca lo imprescindible
 - General: sea adaptable a diferentes contextos
 - Legible: sea un comunicador entre especificador e implementador
 - No ambigua: evite problemas de interpretación
 - Definición informal (lenguaje natural) o formal (algebraica)

4

1. Introducción a los TADs

- Implementación de un TAD:
 - Consiste en determinar una representación para los valores del tipo y en codificar sus operaciones a partir de esta representación
 - Para que sea útil debe ser:
 - Estructurada: facilita su desarrollo
 - Eficiente: optimiza el uso de recursos → Evaluación de distintas soluciones mediante la complejidad (espacial y temporal)
 - Legible: facilita su modificación y mantenimiento

5

1. Introducción a los TADs

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (I)

- Especificación algebraica (ecuacional): establece las propiedades de un TAD mediante ecuaciones con variables cuantificadas universalmente, de manera que las propiedades dadas se cumplen para cualquier valor que tomen las variables
- Pasos:
 - Identificación de los objetos del TAD y sus operaciones (declaración del TAD, módulos que usa, parámetros)
 - Definición de la firma (sintaxis) de un TAD (nombre del TAD y perfil de las operaciones)
 - Definición de la semántica (significado de las operaciones)
- Operación: es una función que toma como parámetros (entrada) cero o más valores de diversos tipos, y produce como resultado un solo valor de otro tipo. El caso de cero parámetros representa una constante del tipo de resultado

6

1. Introducción a los TADs

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (II)

MODULO ...

USA ...

PARAMETRO TIPO ...

OPERACIONES

...

...

PARAMETRO

TIPO (GENERO) ...

OPERACIONES

...

...

FMODULO

7

1. Introducción a los TADs

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (III)

MODULO NATURAL1

TIPO natural

OPERACIONES

cero : \rightarrow natural

suc : natural \rightarrow natural

FMODULO

Mediante aplicación sucesiva de cero y suc se obtienen los distintos valores del tipo:

cero, suc(cero), suc(suc(cero)), ...

8

1. Introducción a los TADs

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (IV)

MODULO NATURAL2

TIPO natural

OPERACIONES

cero : → natural

suc : natural → natural

suma : natural natural → natural

FMODULO

¿suma(cero, suc(cero)) y suc(cero) denotan valores distintos?

¿suma(cero, suc(cero)) y suma(suc(cero), cero) denotan el mismo valor?

9

1. Introducción a los TADs

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (V)

- Solución:
 - Utilización de ecuaciones de la forma $t_1 = t_2$, donde t_1 y t_2 son términos sintácticamente correctos del mismo tipo
 - Semánticamente, expresa que el valor construido mediante el término t_1 es el mismo que el valor construido mediante el término t_2
 - Para no tener que escribir infinitas ecuaciones, se admite que los términos que aparecen en una ecuación tengan variables

10

1. Introducción a los TADs

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (VI)

MODULO NATURAL3

TIPO natural

OPERACIONES

cero : \rightarrow natural

suc : natural \rightarrow natural

suma : natural natural \rightarrow natural

VAR

x, y: natural

ECUACIONES

suma(x, cero) = x

suma(cero, x) = x

suma(x, suc(y)) = suc(suma(x, y))

FMODULO

11

1. Introducción a los TADs

EJERCICIOS

- Sea el conjunto de los números *naturales* con las operaciones *cero* y *suc*. Define la sintaxis y la semántica de las operaciones “ $=$ ” y “ \leq ” que permiten realizar una ordenación de los elementos del conjunto

12

1. Introducción a los TADs

EJERCICIOS

- Completa en esta misma hoja las ecuaciones que aparecen a continuación y que expresan el comportamiento de las operaciones de: *resta* en el conjunto de los números Naturales en el que sólo existen las operaciones *cero*: $\rightarrow \text{natural}$ y la operación *suc*: $\text{natural} \rightarrow \text{natural}$ (devuelve el sucesor de un número Natural). Se asume que el primer operando de la *resta* es siempre mayor o igual que el segundo.

resta(natural, natural) → natural

resta(,) =

resta(,) =

13

1. Introducción a los TADs

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (VII)

- ¿Cómo podemos estar seguros de que no son necesarias más ecuaciones?
- Propiedades importantes: *consistencia* y *completitud*
 - Si se ponen ecuaciones de más, se pueden igualar términos que están en clases de equivalencia diferentes, mientras que si se ponen de menos, se puede generar un número indeterminado de términos incongruentes con los representantes de las clases existentes

14

1. Introducción a los TADs

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (VIII)

- Clasificación de las operaciones:
 - Constructoras: devuelven un valor del tipo
 - Generadoras: permiten generar, por aplicaciones sucesivas, todos los valores del TAD a especificar
 - Modificadoras: el resto
 - Consultoras: devuelven un valor de un tipo diferente
- En general, las operaciones modificadoras y consultoras se especifican en términos de las generadoras. En ocasiones, una operación modificadora puede especificarse en términos de otras modificadoras o consultoras. Diremos que se trata de una operación *derivada*

15

1. Introducción a los TADs

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (IX)

- Ecuación condicional: es equivalente a un conjunto finito de ecuaciones no condicionales

```
si (n1 <> n2) entonces
    saca(añade(s, n1), n2) = añade(saca(s, n2), n1)
sino
    saca(añade(s, n1), n2) = saca(s, n2)
fsi
```

16

1. Introducción a los TADs

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (X)

- Operaciones auxiliares: se introducen en una especificación para facilitar su escritura y legibilidad. Son invisibles para los usuarios del TAD (también se les llama ocultas o privadas)

17

1. Introducción a los TADs

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (XI)

- Tratamiento de errores: puede ocurrir que alguna operación sea una función parcial (no se puede aplicar sobre ciertos valores del dominio de los datos)

MODULO NATURAL4

TIPO natural

OPERACIONES

cero : \rightarrow natural

suc, pred : natural \rightarrow natural

suma, mult : natural natural \rightarrow natural

VAR x, y: natural;

ECUACIONES

suma(cero, x) = x

suma(x, cero) = x

suma(x, suc(y)) = suc(suma(x, y))

mult(cero, x) = cero

mult(x, cero) = cero

mult(suc(y), x) = suma(mult(y, x), x)

pred(suc(x)) = x

FMODULO

¿Cuánto vale pred(cero)?

18

1. Introducción a los TADs

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (XII)

- Tratamiento de errores:
 - Se añade una constante a la firma que modeliza un valor de error: $\text{error}_{\text{nat}} \rightarrow \text{natural}$
 - Se añade una ecuación que completa la especificación de pred: $\text{pred}(\text{cero}) = \text{error}_{\text{nat}}$
 - Se supondrá que los valores sobre los que se aplica una operación en una ecuación normal están libres de error

19

1. Introducción a los TADs

IMPLEMENTACIÓN (I)

- Dada una especificación de un tipo, se pueden construir diversas implementaciones
- Cada implementación se define en un módulo diferente, llamado módulo de implementación
- La construcción de estos módulos consta de dos fases:
 - Elección de una representación para los diferentes tipos definidos en la especificación
 - Codificación de las operaciones en términos de la representación elegida

20

1. Introducción a los TADs

IMPLEMENTACIÓN (II)

- Mecanismos de abstracción en los lenguajes de programación:
 - Encapsulamiento de la representación del TAD
 - Ocultación de la información, para limitar las operaciones posibles sobre el TAD
 - Genericidad, para lograr implementaciones genéricas válidas para distintos tipos
 - Herencia, para reutilizar implementaciones
- Los lenguajes de programación tradicionales (Fortran, Basic, Pascal, C) resultan ineficientes para utilizar los mecanismos de abstracción
- Es necesario emplear lenguajes modernos (ADA, C++, Java, C#)

21

1. Introducción a los TADs

Preguntas de tipo test: Verdadero vs. Falso

- **EsVacia: PILA → BOOLEAN.** Si P y Q son pilas: $Q = \text{EsVacia}(P)$, es un uso sintácticamente correcto de la operación
- En la especificación de un TAD, una operación consultora devuelve un valor del tipo definido
- Sea el siguiente TAD:

MÓDULO NATURALEXAMEN

TIPO natural

OPERACIONES

uno: → natural; siguiente: natural → natural

sumar: natural natural → natural

FMÓDULO

Si N es un *natural*: $N = \text{sumar}(\text{uno}, \text{siguiente}(\text{uno}))$ es un uso sintácticamente incorrecto de la operación *sumar*

22

2. Vectores

- Un vector es un conjunto ordenado de pares <índice, valor>. Para cada índice definido dentro de un rango finito existe asociado un valor. En términos matemáticos, es una correspondencia entre los elementos de un conjunto de índices y los de un conjunto de valores

23

2. Vectores

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA

```

MODULO VECTOR USA BOOL, ENTERO
//en todas las ecuaciones, c ≤ i, j ≤ f
PARAMETRO TIPO item
OPERACIONES
  c, f: → int //límites inf. y sup.
  error( ) → item
FPARAMETRO
TIPO vector
OPERACIONES
  crear() → vector
  asig( vector, int, item ) → vector
  recu( vector, int ) → item
  esvaciapos( vector, int ) → bool

```

```

VAR v: vector; i, j: int; x, y: item;
ECUACIONES
  si ( i < > j ) entonces
    asig( asig( v, i, x ), j, y ) = asig( asig( v, j, y ), i, x )
  si no asig( asig( v, i, x ), j, y ) = asig( v, i, y ) fsi
  recu( crear( ), i ) = error( )
  recu( asig(v, i, x ), j )
    si ( i == j ) entonces x
    si no recu( v, j ) fsi
  esvaciapos( crear( ), i ) = CIERTO
  esvaciapos( asig( v, i, x ), j )
    si ( i == j ) entonces FALSO
    si no esvaciapos( v, j ) fsi

```

FMODULO

24

2. Vectores

REPRESENTACIÓN DE VECTORES

```
//Vector de item

const int kTam = 10;
class TVector {
    friend ostream& operator << ( ostream&, TVector&);

public:
    TVector( );
    TVector( const TVector &v );
    ~TVector( );
    TVector& operator =( TVector &v );

    TItem & Recu( int i );
    void Aag( int i, TItem c );
    bool Esvacuapos( int i );

private:
    TItem fv[ kTam ]; //tamaño fijo
    // TItem *fv; //tamaño dinámico
    int flong;
};
```

Cambio de Asig y Recu por la sobrecarga
del operador corchete:
`TItem & operator [] (int i);`

TItem&
TVector::operator[](int indice){
`if (indice>=1 && indice<=flong)`
`return (fv[indice-1]);`
`else`
`return (error); }`

25

2. Vectores

EJERCICIOS *eliminar*

- Sea un vector de números naturales. Utilizando exclusivamente las operaciones *asignar* y *crear*, define la sintaxis y la semántica de la operación *eliminar* que borra las posiciones pares del vector marcándolas con “0” (para calcular el resto de una división, se puede utilizar la operación MOD)

26

2. Vectores

EJERCICIOS operación M

- Dada la sintaxis y la semántica de la operación M que actúa sobre un vector:

$M(\text{vector}) \rightarrow \text{vector}$

Var v: vector; i: int; x: item;

$M(\text{crear}()) = \text{crear}()$

si $i == 1$ entonces

$M(\text{asig}(v, i, x)) = M(v)$

si no $M(\text{asig}(v, i, x)) = \text{asig}(M(v), i - 1, x)$

a) Aplicar la operación M al siguiente vector:

$\text{asig}(\text{asig}(\text{asig}(\text{crear}(), 3, a), 1, b), 2, c)$

b) Explicar en un párrafo qué es lo que hace la operación M

27

2. Vectores

EJERCICIOS palíndromo

- Utilizando las operaciones definidas en clase para la definición del tipo vector definir la sintaxis y la semántica de la operación *palíndromo* que indica si un vector de naturales con 100 elementos es palíndromo. Por ejemplo, el vector 1,25,12,3,3,12,25,1 es palíndromo (se ha simplificado el ejemplo con un vector de 8 elementos). IMPORTANTE: se asume que el vector está creado con tamaño 100, está lleno y el rango de las posiciones es de 1 a 100. Se premiará la solución temporalmente mas eficiente.

28

2. Vectores

Preguntas de tipo test: Verdadero vs. Falso

- El tipo de datos vector se define como un conjunto en el que sus componentes ocupan posiciones consecutivas de memoria
- Un vector es un conjunto ordenado de pares <índice, valor>

29

3. Listas

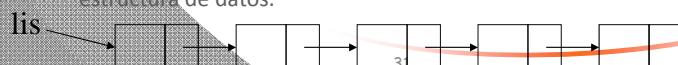
- Una lista es una secuencia de cero o más elementos de un mismo tipo de la forma $e_1, e_2, \dots, e_n \quad \forall n \geq 0$
- De forma más general: $e_p, e_{\text{sig}(p)}, \dots, e_{\text{sig}(\text{sig} \dots n)} \dots (p)$
Al valor n se le llama *longitud de la lista*. Si $n = 0$ tenemos una *lista vacía*. A e_1 se le llama primer elemento, y a e_n último elemento
- Propiedades:
 - Se establece un orden secuencial estricto sobre sus elementos por la *posición* que ocupan dentro de la misma. De esta forma e_i precede a $e_{\text{sig}(i)}$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$ y $e_{\text{sig}(i)}$ sucede a e_i para $i = 1, 2, \dots, n-1$. Por último, el elemento e_i ocupa la posición i
 - La lista nos permite conocer cualquier elemento de la misma *accediendo a su posición*, algo que no podremos hacer con las pilas y con las colas. Utilizaremos el concepto generalizado de posición, con una ordenación definida sobre la misma, por lo tanto no tiene por qué corresponderse exactamente con los números enteros, como clásicamente se ha interpretado este concepto
- Una *lista ordenada* es un tipo especial de lista en el que se establece una relación de orden definida entre los items de la lista

30

3. Listas

REPRESENTACIÓN DE LISTAS

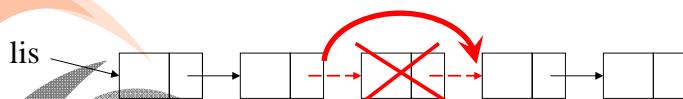
- El TAD *lista* se utiliza para almacenar listas de un número variable de objetos.
- Representación secuencial (internamente un *array*)
 - A partir de tipos base (“arrays”)
 - A partir de tipos definidos por el usuario (“tvector” –herencia o *layering* –)
- Representación enlazada (internamente *punteros a nodo*)
 - A partir de tipos base (“punteros a nodo”)
 - Cada objeto se almacena en un nodo, que se enlaza con el siguiente.
 - La lista es un puntero al primer nodo, o NULL si está vacía.
 - Un nodo es un contenedor para almacenar información, y tiene dos partes:
 - La información del objeto que se desea guardar.
 - Uno o más punteros para enlazar el nodo con otros nodos y construir la estructura de datos.



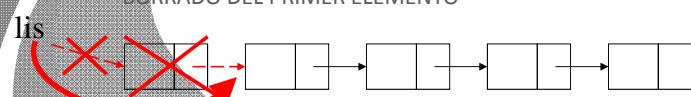
3. Listas

REPRESENTACIÓN ENLAZADA DE LISTAS (I)

- Operaciones Básicas sobre las listas:
 - Averiguar si la lista está vacía
 - Búsqueda de un elemento
 - Inserción y Borrado de un elemento: hay que distinguir si es al principio, en una posición intermedia o al final de la lista
 - BORRADO DE UN ELEMENTO INTERMEDIO O FINAL



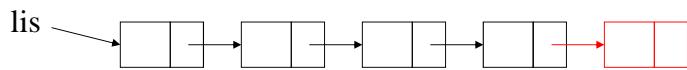
• BORRADO DEL PRIMER ELEMENTO



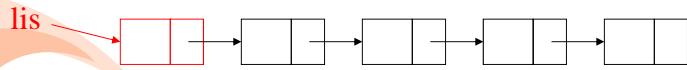
3. Listas

REPRESENTACIÓN ENLAZADA DE LISTAS (II)

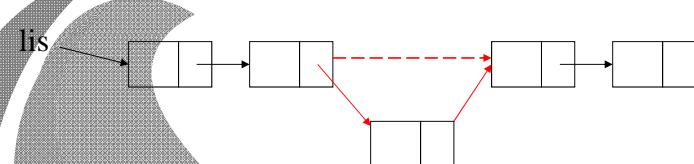
- INSERCIÓN DE UN ELEMENTO AL FINAL



- INSERCIÓN DE UN ELEMENTO AL PRINCIPIO



- INSERCIÓN EN UNA POSICIÓN INTERMEDIA



33

3. Listas

LISTAS ORDENADAS

- Una lista ordenada es una lista que en todo momento se mantiene ordenada.
- Se consigue insertando siempre los nodos en la posición que les corresponda según el orden definido (los borrados no desordenan la lista).
- Ventajas frente a la lista simple:
 - El tiempo medio de búsqueda se reduce (no es necesario recorrer toda la lista para comprobar que un nodo no está).
 - No es necesario ordenar la lista.

3. Listas

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (I)

```

MODULO LISTA USA BOOL, NATURAL
PARAMETRO TIPO item, posicion
OPERACIONES
  == ( posicion, posicion ) → bool
  error_item( ) → item
  error_posicion( ) → posicion
FPARAMETRO
TIPO lista
OPERACIONES
  crear( ) → lista
  inscabeza( lista, item ) → lista
  esvacia( lista ) → bool
  concatenar( lista, lista ) → lista
  longitud( lista ) → natural
  primera, ultima( lista ) → posicion
  anterior, siguiente( lista, posicion ) → posicion
  insertar( lista, posicion, item ) → lista
  borrar( lista, posicion ) → lista
  obtener( lista, posicion ) → item 35

```

3. Listas

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (II)

```

VAR L1, L2: lista; x: item; p: posicion;
ECUACIONES
  esvacia( crear( ) ) = CIERTO
  esvacia( inscabeza( L1, x ) ) = FALSO

  concatenar( crear( ), L1 ) = L1
  concatenar( L1, crear( ) ) = L1
  concatenar( inscabeza( L1, x ), L2 ) = inscabeza( concatenar( L1, L2 ), x )

  longitud( crear( ) ) = 0
  longitud( inscabeza( L1, x ) ) = 1 + longitud( L1 )

  primera( crear( ) ) = error_posicion( ); ultima( crear( ) ) = error_posicion( )
  si esvacia( L1 ) entonces
    ultima( inscabeza( L1, x ) ) = primera( inscabeza( L1, x ) )
  si no ultima( inscabeza( L1, x ) ) = ultima( L1 )

  anterior( L1, primera( L1 ) ) = error_posicion( ); siguiente( L1, ultima( L1 ) ) = error_posicion( )
  si p != ultima( L1 ) entonces anterior( L1, siguiente( L1, p ) ) = p
  anterior( inscabeza( L1, x ), primera( L1 ) ) = primera( inscabeza( L1, x ) ) 36.

```

3. Listas

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (III)

```

si p != primera( L1 ) entonces siguiente( L1, anterior( L1, p ) ) = p
siguiente( inscabeza( L1, x ), primera( inscabeza( L1, x ) ) ) = primera( L1 )

insertar( crear( ), p, x ) = crear( )
si p == primera( inscabeza( L1, x ) ) entonces
    insertar( inscabeza( L1, x ), p, y ) = inscabeza( inscabeza( L1, y ), x )
si no insertar( inscabeza( L1, x ), p, y ) = inscabeza( insertar( L1, p, y ), x )

borrar( crear( ), p ) = crear( )
si p == primera( inscabeza( L1, x ) ) entonces
    borrar( inscabeza( L1, x ), p ) = L1
si no borrar( inscabeza( L1, x ), p ) = inscabeza( borrar( L1, p ), x )

obtener( crear( ), p ) = error_item( )
si p == primera( inscabeza( L1, x ) ) entonces
    obtener( inscabeza( L1, x ), p ) = x
si no obtener( inscabeza( L1, x ), p ) = obtener( L1, p )

```

FMODULO

37

3. Listas

ENRIQUECIMIENTO DE LAS LISTAS

OPERACIONES

sublista(lista, posicion, natural) → lista
 inversa(lista) → lista

VAR L: lista; x, y: item; n: natural; p: posicion;

ECUACIONES

```

sublista( L, p, 0 ) = crear( )
sublista( crear( ), p, n ) = crear( )
si p == primera( inscabeza( L, x ) ) entonces
    sublista( inscabeza( L, x ), p, n ) = inscabeza( sublista( L, primera( L ), n - 1 ), x )
si no sublista( inscabeza( L, x ), p, n ) = sublista( L, p, n )

inversa( crear( ) ) = crear( )
inversa( inscabeza( crear( ), x ) ) = inscabeza( crear( ), x )
inversa( inscabeza( L, x ) ) = insertar( inversa( L ), ultima( inversa( L ) ), x )

```

38

3. Listas

REPRESENTACIÓN DE LISTAS (I)

```
class TLista {
    friend ostream&
        operator<<(ostream&, TLista&);

    friend class TPosicion;

    public:
        TLista();
        ~TLista();
        void InsCabeza(int);
        TPosicion Primera();
        int& Obtener(TPosicion&);

        void Borrar(TPosicion&);

    private:
        TNodo *lis;
};
```

```
class TNodo {
    friend class TLista; friend class TPosicion;

    public:
        TNodo(); ~TNodo();
        private:
            int dato; TNodo *sig; };

    class TPosicion {
        friend class TLista;

        public:
            TPosicion(); ~TPosicion();
            bool EsVacia();
            TPosicion Siguiente();
            TPosicion& operator=(TPosicion&);

        private:
39            TNodo* pos; };
```

3. Listas

REPRESENTACIÓN DE LISTAS (II)

```
TLista::TLista() { lis = NULL; }

TLista::~TLista() {
    TPosicion p, q;
    q = Primera();
    while(!q.EsVacia()) {
        p = q;
        q = q.Siguiente();
        delete p.pos;
    }
    lis = NULL;
}
```

```
void
TLista::InsCabeza(int i) {
    TNodo* aux = new TNodo;
    aux→dato = i;
    if(lis == NULL) {
        aux→sig = NULL;
        lis = aux;
    }
    else {
        aux→sig = lis;
        lis = aux;
    }
}
```

3. Listas

REPRESENTACIÓN DE LISTAS (III)

```

TPosicion
TLista::Primera() {
    TPosicion p; p.pos = lis;
    return p;
}

int&
TLista::Obtener(TPosicion& p) {
    return p.pos->dato;
}

ostream&
operator<<(ostream& os, TLista& l) {
    TPosicion p;
    p = l.Primera();
    while(!p.EsVacia()) {
        os << l.Obtener(p) << ' ';
        p = p.Siguiente();
    }
    return os;
}

```

```

TNodo::TNodo() {
    dato = 0; sig = NULL;
}

TNodo::~TNodo() {
    dato = 0; sig = NULL;
}

TPosicion::TPosicion() { pos = NULL; }

TPosicion::~TPosicion() {
    pos = NULL;
}

bool
TPosicion::EsVacia() {
    return pos == NULL;
}

```

41

3. Listas

REPRESENTACIÓN DE LISTAS (IV)

```

TPosicion
TPosicion::Siguiente() {
    TPosicion p;
    p.pos = pos->sig;
    return p;
}

// ¿si pos es NULL?
}

TPosicion&
TPosicion::operator=(TPosicion& p) {
    pos = p.pos;
    return *this;
}

```

```

int
main(void)
{
    TLista l;
    l.InsCabeza(1); l.InsCabeza(3);
    l.InsCabeza(5); l.InsCabeza(7);
    cout << l << endl;
    TPosicion p;
    p = l.Primera();
    cout << "Primer elemento: "
        << l.Obtener(p) << endl;
    p = p.Siguiente();
    cout << "Segundo elemento: "
        << l.Obtener(p) << endl;
}

```

42

Vectores y Listas

Aplicaciones reales

- Clasificación de los equipos de la liga de fútbol.
 - Gestión de la lista de espera de un hospital para intervenciones quirúrgicas.



Clasificación 1ª división									
EQUIPO	PTOS	PJ	PG	PE	PP	GF	GC		
1 Barcelona	50	19	16	2	1	53	12		
2 Atl. Madrid	50	19	18	2	1	47	11		
3 Real Madrid	47	19	15	2	2	53	21		
4 Ath.Bilbao	36	19	11	3	5	32	24		
5 Villarreal	34	19	10	4	5	37	21		
6 Real Sociedad	32	19	9	5	5	36	38		
7 Sevilla FC	30	19	8	6	5	36	30		
8 Valencia	23	19	7	2	10	22	31		
9 Granada	23	19	7	2	10	19	25		
10 Levante	23	19	6	5	8	18	27		
11 Getafe	23	19	7	2	10	20	31		
12 Espanyol	22	19	6	4	9	22	25		
13 Osasuna	21	19	6	3	10	17	29		
14 Málaga	20	19	5	5	9	19	24		
15 Celta de Vigo	19	19	5	4	10	23	31		
16 Almería	19	19	5	4	10	21	38		
17 Elche	18	19	4	6	9	17	28		
18 Valladolid	16	19	3	7	9	21	33		
19 Rayo	16	19	5	1	13	19	45		
20 Real Betis	11	19	2	5	12	16	38		

43

3. Listas

EJERCICIOS *borra ultimo*

- Completa las ecuaciones que aparecen a continuación y que expresan el comportamiento de las operaciones de *borraultimo* (borra el último elemento de la lista) en una lista de acceso por posición:

La sintaxis de la operación es la siguiente:

borraultimo(lista) \rightarrow lista

borraultimo(crear()) =

si e es `acota(1)` entonces `borraUltimo(insCabeza(1, x))` =

mo(inscabeza([1 x])) =

Dato un elemento $l1 \in \text{lista}$

elements

44

3. Listas

EJERCICIOS *quita_pares*

- Definir la sintaxis y la semántica de la operación *quita_pares* que actúa sobre una lista y devuelve la lista original en la que se han eliminado los elementos que ocupan las posiciones pares

45

3. Listas

EJERCICIOS *operación X*

- Explicar qué hace la operación X, cuya sintaxis y semántica aparecen a continuación:

X (lista) --> lista

X (crear ()) --> crear ()

X (inscabeza (l, i)) <==>

si (longitud (l) == 0) **entonces** crear ()

si no inscabeza (X (l), i)

Donde: l ∈ lista, i ∈ item

Calcular la siguiente expresión: (IC – inscabeza)

IC (IC (IC (IC (crear (), a), b), c), d))

46

3. Listas

Preguntas de tipo test: Verdadero vs. Falso

- La operación BorrarItem tiene la siguiente sintaxis y semántica:

BorrarItem: LISTA, ITEM -> LISTA

BorrarItem(Crear, i) = Crear

BorrarItem(IC(L1,j), i) = si (i == j) entonces L1

sino IC (BorrarItem (L1, i), j)

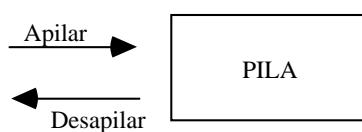
Esta operación borra todas las ocurrencias del item que se encuentra en la lista.

- La complejidad temporal de obtener un elemento en un vector ordenado mediante búsqueda binaria o en una lista ordenada es la misma

47

4. Pilas

- Una pila es una lista en la que todas las inserciones y borrados se realizan en un único extremo, llamado *tope* o *cima*. Sabemos por tanto que el último elemento insertado en la pila será el primero en ser borrado de la misma, de ahí que también se les llame listas “LIFO” (Last In, First Out). También podemos conocer cuál es el elemento que se encuentra en la *cima*



48

4. Pilas

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA

MODULO PILA USA BOOL

PARAMETRO

TIPO item

OPERACIONES

error() → item

FPARAMETRO

TIPO pila

OPERACIONES

crear() → pila

apilar(pila, item) → pila

desapilar(pila) → pila

cima(pila) → item

esvacia(pila) → bool

VAR p: pila, e: item;

ECUACIONES

desapilar(crear()) = crear()

desapilar(apilar(p, e)) = p

cima(crear()) = error()

cima(apilar(p, e)) = e

esvacia(crear()) = CIERTO

esvacia(apilar(p, e)) = FALSO

FMODULO

49

4. Pilas

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL DE PILAS (I)

- Representación secuencial (internamente un *array*)
 - A partir de tipos base (“arrays”)
 - A partir de tipos definidos por el usuario (“tvector” –herencia o layering –)
- Tipos de algoritmos
 - Realizando las inserciones por la primera componente. Ineficiente
 - Utilizando un cursor que indique la posición actual del primer elemento de la pila
- Ventajas y desventajas
 - Desventaja: tamaño máximo de la pila
 - Ventaja: sencillez de implementación

50

4. Pilas

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL DE PILAS (II)

```
const kMax = 10;
class TPila {
    public:
        TPila( ); TPila( TPila & ); ~TPila( ); TPila& operator=( TPila & );
        TItem& Cima( );
        void Apilar( TItem& );
        ...
    private:
        TItem fpila[ kMax ]; //tamaño fijo
        // TItem *fpila; tamaño dinámico
        int ftope;
    };
    TPila::TPila( ) {
        fpila = new TItem[ 10 ]; //sólo si el vector es dinámico
        ftope = 0; }
    void
    TPila::Desapilar( ) {
        ftope --; }
```

51

4. Pilas

REPRESENTACIÓN ENLAZADA DE PILAS (I)

- Representación enlazada (internamente *punteros a nodo*)
 - A partir de tipos base (“punteros a nodo”)
 - A partir de tipos definidos por el usuario (“tlista” –herencia o layering–)
- Ventajas
 - Ventaja: no hay definido un tamaño para la pila

52

4. Pilas

REPRESENTACIÓN ENLAZADA DE PILAS (II)

```
class TPila {
public:
    TPila( ); TPila( TPila & ); ~TPila( ); TPila& operator=( TPila & );
    TItem& Cima( );
    void Apilar( TItem& );
    ...
private:
    struct TNodo {
        TItem dato;
        TNodo *sig; };
    TNodo *fp;
};
TPila::TPila( ) { fp = NULL; }
void
TPila::Desapilar( ) {
    TNodo *aux;
    aux = fp;
    fp = fp -> sig;
    delete aux; }
```

53

4. Pilas

REPRESENTACIÓN ENLAZADA DE PILAS (III)

```
//HERENCIA PRIVADA
class TPila: private TLista {
public:
    TPila( ); TPila( TPila & ); ~TPila( );
    void Apilar( TItem& );
    void Desapilar( );
    ...
};

TPila::TPila( ): TLista( ) { }

TPila::TPila( TPila &p ): TLista( p ) { }

~TPila() { }

void
TPila::Apilar( TItem &a ) { InsCabeza( a ); }

void
TPila::Desapilar( ) { Borrar( Primera( ) ); }
```

```
//LAYERING O COMPOSICIÓN
class TPila {
public:
    TPila( ); TPila( TPila & ); ~TPila( );
    void Apilar( TItem& ); void Desapilar( );
    ...
private: TLista L;
};

TPila::TPila( ): L( ) { }

TPila::TPila( TPila &p ): L( p.L ) { }

~TPila() { }

void
TPila::Apilar( TItem &a ) { L.InsCabeza( a ); }

void
TPila::Desapilar( ) { L.Borrar( L.Primera( ) ); }
```

4. Pilas

EJERCICIOS

- Dar la sintaxis y la semántica de la operación **base**, que actúa sobre una pila y devuelve la base de la pila (el primer elemento que se ha apilado)

55

5. Colas

- Una cola es otro tipo especial de lista en el cual los elementos se insertan por un extremo (*fondo*) y se suprimen por el otro (*tope*). Las colas se conocen también como listas “FIFO” (First In First Out). Las operaciones definidas sobre una cola son similares a las definidas para las pilas con la salvedad del modo en el cual se extraen los elementos



56

5. Colas

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA

MODULO COLA USA BOOL

PARAMETRO

TIPO item

OPERACIONES

$\text{error}() \rightarrow \text{item}$

FPARAMETRO

TIPO cola

OPERACIONES

$\text{crear}() \rightarrow \text{cola}$

$\text{encolar}(\text{cola}, \text{item}) \rightarrow \text{cola}$

$\text{desencolar}(\text{cola}) \rightarrow \text{cola}$

$\text{cabeza}(\text{cola}) \rightarrow \text{item}$

$\text{esvacia}(\text{cola}) \rightarrow \text{bool}$

VAR c: cola, x: item;

ECUACIONES

$\text{desencolar}(\text{crear}()) = \text{crear}()$

si esvacia(c) **entonces**

$\text{desencolar}(\text{encolar}(c, x)) = \text{crear}()$

si no desencolar(encolar(c, x)) =

$\text{encolar}(\text{desencolar}(c), x)$

$\text{cabeza}(\text{crear}()) = \text{error}()$

si esvacia(c) **entonces**

$\text{cabeza}(\text{encolar}(c, x)) = x$

si no $\text{cabeza}(\text{encolar}(c, x)) = \text{cabeza}(c)$

$\text{esvacia}(\text{crear}()) = \text{CIERTO}$

$\text{esvacia}(\text{encolar}(c, x)) = \text{FALSO}$

FMODULO

57

5. Colas

ENRIQUECIMIENTO DE LAS COLAS

OPERACIONES

$\text{concatena}(\text{cola}, \text{cola}) \rightarrow \text{cola}$

VAR c, q: cola; x: item;

ECUACIONES

$\text{concatena}(c, \text{crear}()) = c$

$\text{concatena}(\text{crear}(), c) = c$

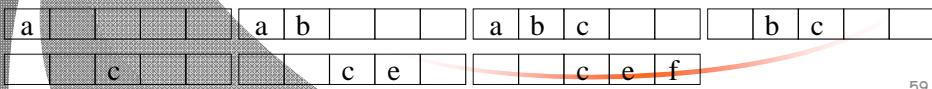
$\text{concatena}(c, \text{encolar}(q, x)) = \text{encolar}(\text{concatena}(c, q), x)$

58

5. Colas

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL DE COLAS (I)

- Representación secuencial (internamente un *array*)
 - A partir de tipos base (“arrays”)
 - A partir de tipos definidos por el usuario (“tvector” –herencia o layering–)
- Tipos de algoritmos
 - Utilizando un array (*fv*) para almacenar los elementos y dos enteros (*tope* y *fondo*) para indicar la posición de ambos extremos
 - Inicializar: *tope* = 0; *fondo* = -1;
 - Condición de cola vacía: *fondo* < *tope*
 - Inserción: *fondo*++; *fv[fondo]* = *x*;
 - Borrado: *tope*++;



59

5. Colas

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL DE COLAS (II)

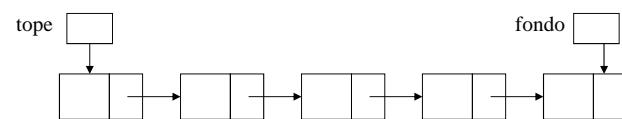
- Problema:
 - Hay huecos pero no puedo insertar
- Soluciones:
 - Cada vez que se borra un elemento, el resto se desplaza una posición a la izquierda para que *tope* siempre esté en la primera posición. ¿Qué problemas presenta esta solución? aumentamos la complejidad de la operación desencolar
 - Colas circulares. Array como un círculo en el que la primera posición sigue a la última. Condición de cola vacía $tope == fondo$
- Ventajas y desventajas
 - Desventaja: tamaño máximo de la cola
 - Ventaja: sencillez de implementación

60

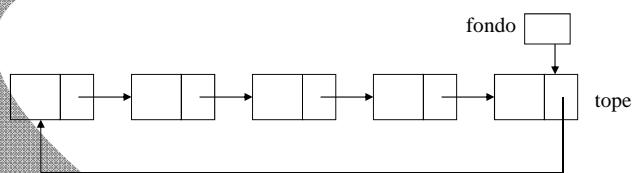
5. Colas

REPRESENTACIÓN ENLAZADA DE COLAS (I)

- Representación enlazada (internamente *punteros a nodo*)
 - A partir de tipos base (“punteros a nodo”)



- Colas circulares enlazadas, en las que sólo se necesita un puntero. El siguiente elemento apuntado por *fondo* es el primero a desencolar



61

5. Colas

REPRESENTACIÓN ENLAZADA DE COLAS (II)

- A partir de tipos definidos por el usuario (“tlista” –herencia o layering–)

- Ventajas
 - Ventaja: no hay definido un tamaño para la cola

62

Pilas y Colas

Aplicaciones reales

- Los editores de texto proporcionan normalmente un botón deshacer que cancela las operaciones de edición recientes y restablece el estado anterior del documento.
- Los Navegadores en Internet almacenan en una pila las direcciones de los sitios más recientemente visitados.



63

EJERCICIOS

- Dada la clase *TVector* que almacena un vector dinámico de enteros y un entero que contiene la dimensión del vector, definid en C++:
 - La clase *TVector*
 - Constructor por defecto (dimensión 10 y componentes a -1)

64

EJERCICIOS

- Dada la clase *TPila* definid en C++ el método *Apilar*

65

Pilas y colas

Preguntas de tipo test: Verdadero vs. Falso

- La semántica de la operación *cima* del tipo *pila* vista en clase es la siguiente:

```
VAR p: pila, e: item;  
cima( crear() ) = error()  
cima( apilar( p, e ) ) = cima( p )
```

- Es posible obtener una representación enlazada de una cola utilizando un único puntero que apuntará al fondo de la cola

66