

TEMA 3

El tipo árbol

PROGRAMACIÓN Y ESTRUCTURAS DE DATOS

Tipo árbol

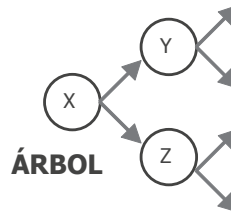
- 1. Definiciones generales
- 2. Árboles binarios
- 3. Árboles de búsqueda
 - 3.1. Árboles binarios de búsqueda
 - 3.2. Árboles AVL
 - 3.3. Árboles 2-3
 - 3.4. Árboles 2-3-4

1. Definiciones generales (I)

- La estructura de datos árbol aparece porque los elementos que lo constituyen mantienen una estructura jerárquica, obtenida a partir de estructuras lineales, al eliminar el requisito de que cada elemento tiene como máximo un sucesor:



TIPO LINEAL

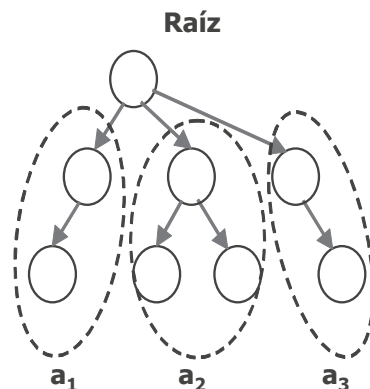


ÁRBOL

- Los elementos de los árboles se llaman nodos

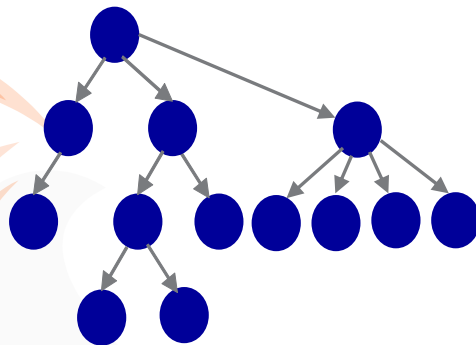
1. Definiciones generales (II)

- Definición inductiva de árbol:
 - un único nodo es un **árbol (raíz)**
 - dados n árboles a_1, \dots, a_n se puede construir uno nuevo como resultado de enraizar un nuevo nodo con los n árboles. Los árboles a_i pasan a ser **subárboles** del nuevo árbol y el nuevo nodo se convierte en raíz del nuevo árbol
- Árbol vacío o nulo \Rightarrow 0 nodos

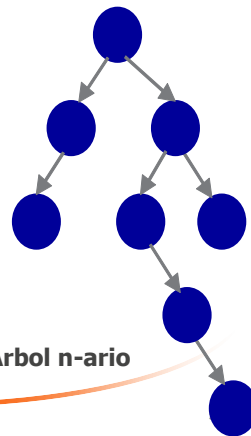


1. Definiciones generales (III)

- El proceso de enraizar puede involucrar:
 - un nº indeterminado de subárboles (**árboles generales**)
 - o bien, un nº máximo n de subárboles (**árboles n -arios**)

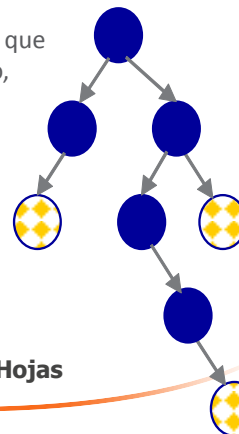


Árbol general

Árbol n -ario

1. Definiciones generales (IV)

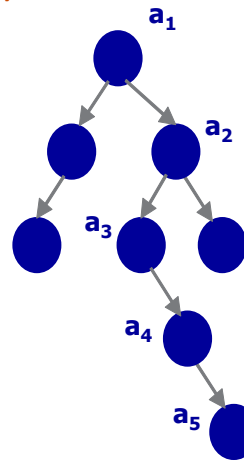
- Un árbol n -ario con $n = 2$ se denomina árbol binario
- La información almacenada en los nodos del árbol se denomina ~~etiqueta~~ ^{o ítem}
- Las hojas son árboles con un solo nodo (árboles binarios: árbol compuesto por una raíz y 2 subárboles vacíos)
- Grado de un árbol es el número máximo de hijos que pueden tener sus subárboles (si el árbol es n -ario, el grado es n)



Hojas

1. Definiciones generales (V)

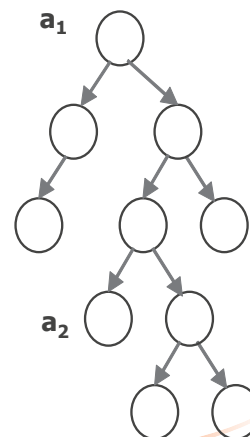
- Camino:
 - es una secuencia a_1, \dots, a_s de árboles tal que, $\forall i \in \{1 \dots s-1\}$, a_{i+1} es subárbol de a_i
 - el número de subárboles de la secuencia menos uno, se denomina **longitud del camino**
(Consideraremos que existe un camino de longitud 0 de todo subárbol a sí mismo)



$\forall i \in \{1 \dots 4\}$ a_{i+1} es subárbol de a_i
Longitud = $5 - 1 = 4$

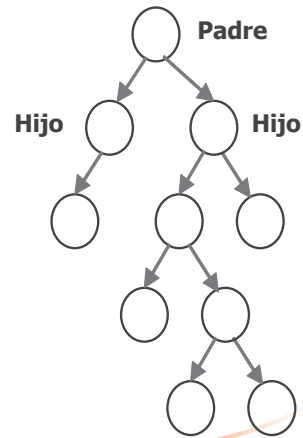
1. Definiciones generales (VI)

- a_1 es ascendiente de a_2 (y a_2 es descendiente de a_1) si existe un camino a_1, \dots, a_2
(Según la definición de camino, todo subárbol es ascendiente/descendiente de sí mismo)
- Los ascendientes (descendientes) de un árbol, excluido el propio árbol, se denominan ascendientes (descendientes) propios



1. Definiciones generales (VII)

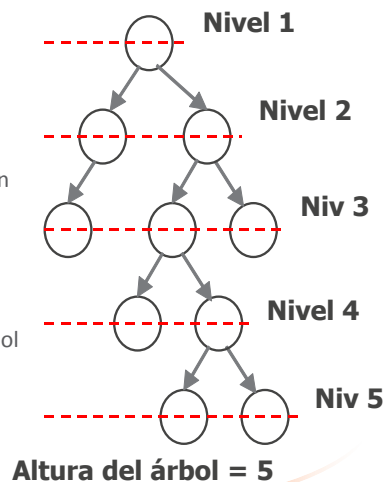
- Padre es el primer ascendiente propio, si existe, de un árbol
- Hijos son los primeros descendientes propios, si existen, de un árbol
- Hermanos son subárboles con el mismo padre
- Profundidad de un subárbol es la longitud del único camino desde la raíz a dicho subárbol



9

1. Definiciones generales (VIII)

- Nivel de un nodo:
 - el nivel de un árbol vacío es 0
 - el nivel de la raíz es 1
 - si un nodo está en el nivel i , sus hijos están en el nivel $i + 1$
- Altura (profundidad) de un árbol:
 - es el máximo nivel de los nodos de un árbol

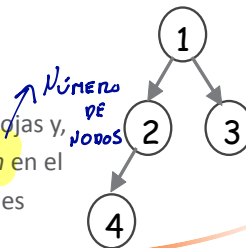
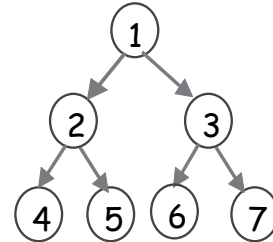


10

1. Definiciones generales (IX)

¡MUY IMPORTANTE

- Árbol lleno es un árbol en el que todos sus subárboles tienen n hijos (siendo n el grado del árbol) y todas sus hojas tienen la misma profundidad
- Árbol completo es un árbol cuyos nodos corresponden a los nodos numerados (la numeración se realiza desde la raíz hacia las hojas y, en cada nivel, de izquierda a derecha) de 1 a n en el árbol lleno del mismo grado. Todo árbol lleno es completo



11

TODO ÁRBOL ES COMPLETO SI ES LLENO PERO NO VICEVERSA.

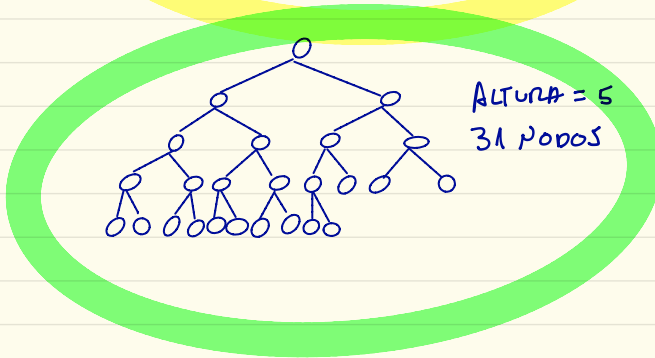
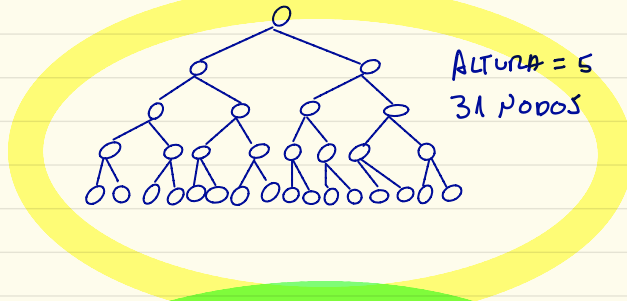
2. Árboles binarios

- Definición de árbol binario y propiedades
- Especificación algebraica
- Recorridos
- Enriquecimiento de la especificación
- Representación secuencial y enlazada
- Otras operaciones interesantes
- Ejercicios

12

ARBOOL LLEPO GRADO 2 Y 5 NIVELES

ARBOOL COMPLETO GRADO 2 Y 25 PODOS Y CALCULAN LA ALTURA



2. Árboles binarios

DEFINICIÓN

- Un árbol binario es un conjunto de elementos del mismo tipo tal que:
 - o bien es el conjunto vacío, en cuyo caso se denomina **árbol vacío** o **nulo**
 - o bien no es vacío, y por tanto existe un elemento distinguido llamado **raíz**, y el resto de los elementos se distribuyen en dos subconjuntos disjuntos, cada uno de los cuales es un árbol binario llamados, respectivamente **subárbol izquierdo** y **subárbol derecho** del árbol original

2. Árboles binarios

PROPIEDADES (I)

- Propiedades:
 - El máximo número de nodos en un nivel i de un árbol binario es $N(i) = 2^{i-1}$, $i \geq 1$

ÁRBOL: $2^i - 1$

Demostración

Base inducción

nivel 1 (raíz): $N(1) = 2^{1-1} = 2^0 = 1$ (se cumple)

Paso inductivo

Se desea probar $N(i-1) \Rightarrow N(i)$, es decir, a partir de la suposición "temporal" de que N es cierta para $i-1$ debemos probar que es cierta para i

nivel $i-1$: $N(i-1) = 2^{(i-1)-1} = 2^{i-2}$ (suponemos cierto)

nivel i : $N(i) = N(i-1) * 2 = 2^{i-2} * 2 = 2^{i-2+1} = 2^{i-1}$

2. Árboles binarios

PROPIEDADES (II)

- El máximo número de nodos en un árbol binario de altura k es $N(k) = 2^k - 1, k \geq 1$

Demostración

nivel 1: $2^{1-1} = 1$ nodo

nivel 2: $2^{2-1} = 2$ nodos

nivel 3: $2^{3-1} = 4$ nodos

...

nivel k : 2^{k-1} nodos

$$\begin{aligned} \text{Altura } k &= 2^{1-1} + 2^{2-1} + \dots + 2^{k-1} = \\ &\left[\text{S.P.G. (} r = 2, a_1 = 2^0, n = k \text{)} \right] \\ &= 1 (2^k - 1) / 2 - 1 = 2^k - 1 \end{aligned}$$

2. Árboles binarios

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (I)

MODULO ARBOLES_BINARIOS
USA BOOL, NATURAL

PARAMETRO TIPO item
OPERACIONES
error_item() → item

FPARAMETRO

TIPO arbin

OPERACIONES

crea_arbin() → arbin

enraizar(arbin, item, arbin) → arbin

raiz(arbin) → item

esvacio(arbin) → bool

hijoiz, hijode(arbin) → arbin

altura(arbin) → natural

↓ CASO BASE
↓ CASO RECURSIVO

VAR i, d: arbin; x: item;

ECUACIONES

raiz(crea_arbin()) = error_item()

raiz(enraizar(i, x, d)) = x

hijoiz(crea_arbin()) = crea_arbin()

hijoiz(enraizar(i, x, d)) = i

hijode(crea_arbin()) = crea_arbin()

hijode(enraizar(i, x, d)) = d

esvacio(crea_arbin()) = CIERTO

esvacio(enraizar(i, x, d)) = FALSO

altura(crea_arbin()) = 0

altura(enraizar(i, x, d)) =

1 + max (altura(i), altura(d))

FMODULO

EXPANSION($(\text{NEAR}, X, \text{NEAR})$)



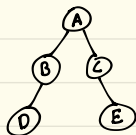
$E(E(\text{NEAR}, Y, \text{NEAR}), X, \text{NEAR})$



$E(E(E(\text{NEAR}, D, \text{NEAR}), B, \text{NEAR}), A, \text{NEAR})$



$E(E(E(\text{NEAR}, D, \text{NEAR}), B, \text{NEAR}), A, E(\text{NEAR}, C, E(\text{NEAR}, E, \text{NEAR})))$

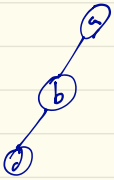


TRAZA.

$1 + \max(A(E(E(\text{NEAR}, D, \text{NEAR}), B, \text{NEAR}), A(\text{NEAR})))$
 (...)

ALTERNATIVA($E(E(E(\text{NEAR}, D, \text{NEAR}), B, \text{NEAR}), A, \text{NEAR})$)





$$\rightarrow E(E(E(CREAR, D, CREAR), b, CREAR), a, CREAR)$$

$$1 + \max(A(E(CREAR, D, CREAR), b, CREAR), A(CREAR))$$

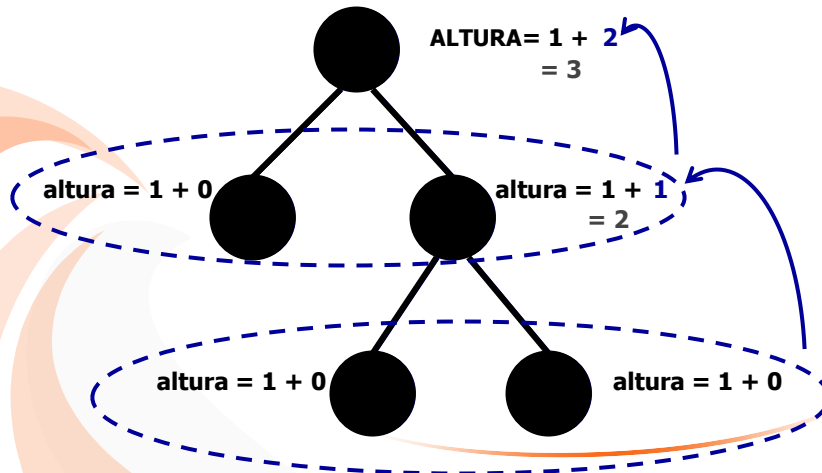
$$1 + (\max(1 + 1, 0)) = \textcircled{3}$$

2. Árboles binarios

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (II)

$\text{altura}(\text{crea_arbin}()) = 0$

$\text{altura} = 1 + \max(\text{altura}(\text{hijoiz}), \text{altura}(\text{hijode}))$



17

2. Árboles binarios

RECORRIDOS

- Recorrer un árbol es visitar cada nodo del árbol una sola vez
- Recorrido de un árbol es la lista de etiquetas del árbol ordenadas según se visitan los nodos
- Se distinguen dos categorías básicas de recorrido:
 - recorridos en profundidad
 - recorridos en anchura o por niveles

18

2. Árboles binarios

RECORRIDOS EN PROFUNDIDAD (I)

- Si representamos por I: ir hacia la izquierda, R: visitar o escribir el ítem, D: ir hacia la derecha, existen 6 posibles formas de recorrido en profundidad: RID, IRD, IDR, RDI, DRI y DIR. Si sólo queremos hacer los recorridos de izquierda a derecha quedan 3 formas de recorrido:

1. RID o preorden (orden previo)

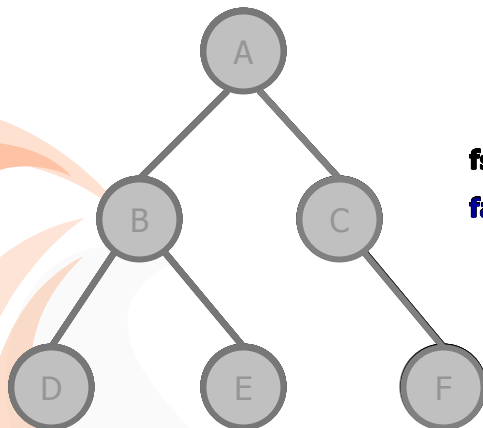
2. IRD o inorden (orden simétrico)

3. IDR o postorden (orden posterior)

(El recorrido en postorden es el inverso especular del recorrido preorden, es decir, se recorre el árbol en preorden, visitando primero el subárbol derecho antes que el izquierdo, y se considera la lista resultante como el inverso de la solución)

2. Árboles binarios

RECORRIDOS EN PROFUNDIDAD (II)



algoritmo preorden (a : arbin)

si (no esvacio(a)) entonces

escribe (raiz (a))

preorden (hijoiz (a))

preorden (hijode (a))

fsi

algoritmo

PREORDEN: A B D E C F

2. Árboles binarios

RECORRIDOS EN PROFUNDIDAD (III)

algoritmo inorden (a : arbin)

si (no esvacio(a)) entonces

inorden (hijoiz (a))

escribe (raiz (a))

inorden (hijode (a))

fsi

falgoritmo

algoritmo postorden (a : arbin)

si (no esvacio(a)) entonces

postorden (hijoiz (a))

postorden (hijode (a))

escribe (raiz (a))

fsi

falgoritmo

21

2. Árboles binarios

RECORRIDO EN ANCHURA (NIVELES)

- Consiste en visitar los nodos desde la raíz hacia las hojas, y de izquierda a derecha dentro de cada nivel

algoritmo niveles (a : arbin)

var c: cola de arbin; aux: arbin; fvar

encolar(c, a)

mientras no esvacía(c) hacer

aux := cabeza(c)

escribe (raiz(aux))

desencolar(c)

si no esvacio(hijoiz(aux)) entonces encolar(c, hijoiz(aux))

si no esvacio(hijode(aux)) entonces encolar(c, hijode(aux))

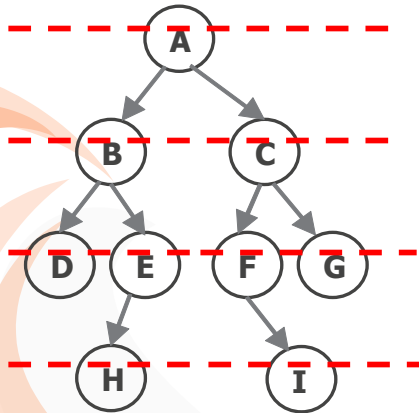
fmientras

falgoritmo

22

2. Árboles binarios

EJEMPLO DE RECORRIDOS (I)



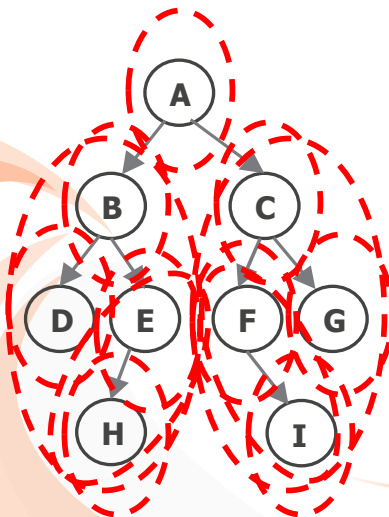
- Niveles:

a b c d e f g h i

23

2. Árboles binarios

EJEMPLO DE RECORRIDOS (II)



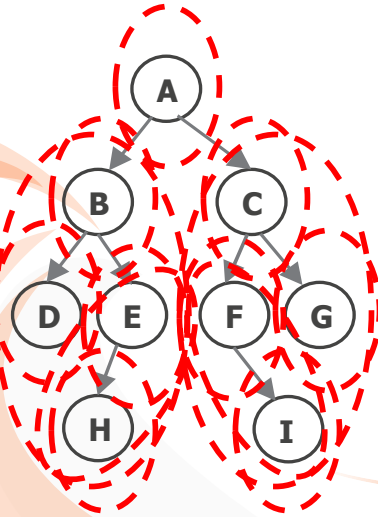
- Inorden:

d b h e a f i c g

24

2. Árboles binarios

EJEMPLO DE RECORRIDOS (III)



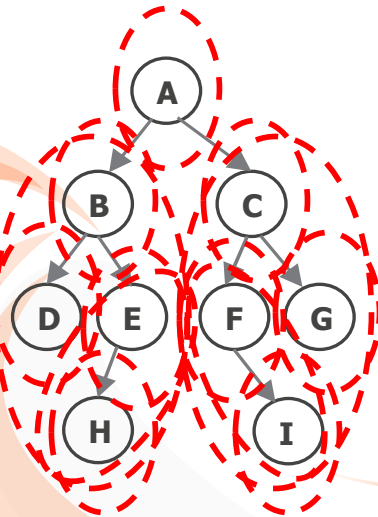
- Postorden:

d h e b i f g c a

25

2. Árboles binarios

EJEMPLO DE RECORRIDOS (IV)



- Preorden:

a b d e h c f i g

26

2. Árboles binarios

EJERCICIOS recomendados: SOLUCIÓN

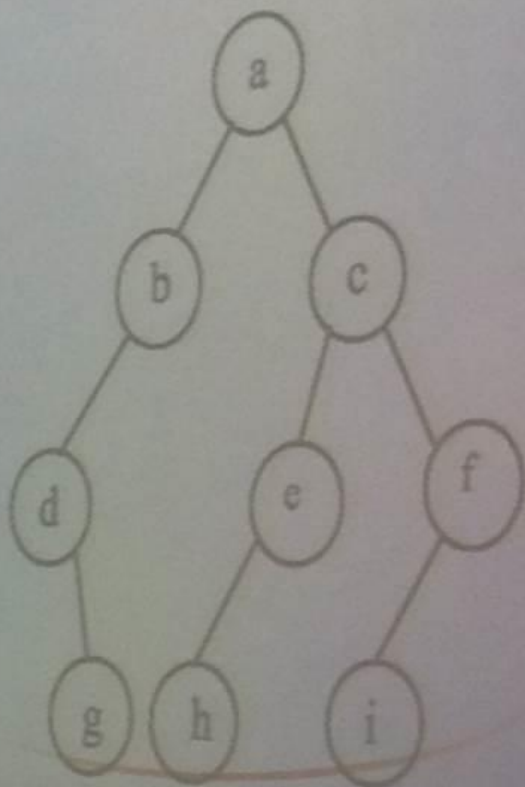
1a) Los recorridos son:

Preorden: a b d g c e h f i

Postorden: g d b h e i f c a

Inorden: d g b a h e c i f

Niveles: a b c d e f g h i



2. Árboles binarios

ENRIQUECIMIENTO DE LA ESPECIFICACIÓN

OPERACIONES

preorden, inorden, postorden(arbin) \rightarrow lista
 nodos (arbin) \rightarrow natural
 eshoja (arbin) \rightarrow bool

VAR i, d: arbin; x: item;

ECUACIONES

preorden(crea_arbin()) = crea_lista()
 preorden(enraizar(i, x, d)) = concatenar(insiz(x, preorden(i)), preorden(d))
 inorden(crea_arbin()) = crea_lista()
 inorden(enraizar(i, x, d)) = concatenar(insde(inorden(i), x), inorden(d))
 postorden(crea_arbin()) = crea_lista()
 postorden(enraizar(i, x, d)) = insde(concatenar(postorden(i), postorden(d)), x)
 nodos(crea_arbin()) = 0
 nodos(enraizar(i, x, d)) = 1 + nodos(i) + nodos(d)
 eshoja(crea_arbin()) = FALSO
 eshoja(enraizar(i, x, d)) = esvacio(i) \wedge esvacio(d)

27

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (I)

- Representación secuencial

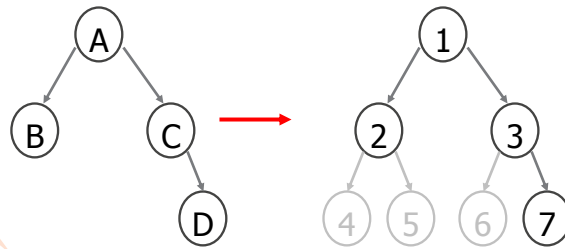
Se numeran secuencialmente los nodos del árbol hipotéticamente lleno desde la raíz a las hojas por niveles (comenzando por el nivel 1, después el nivel 2, etc.) y de izquierda a derecha en cada nivel. La representación secuencial se puede hacer usando un vector unidimensional:

- la raíz se guarda en la dirección 1
- si un nodo n está en la dirección i , entonces su hijo izquierdo estará en la dirección $2i$ y su hijo derecho en la dirección $2i + 1$

28

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (II)



A	B	C				D
1	2	3	4	5	6	7

29

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (III)

- Representación enlazada

```

typedef int TItem;
class TNodo;

class TArbin{
public:
    TArbin ( ); //CONSTRUCTOR
    TArbin (const TArbin & origen); //CONSTRUCTOR DE COPIA
    ~TArbin ( ); //DESTRUCTOR
    TArbin & operator = (const TArbin & a); //ASIGNACIÓN
    void Enraizar ( TArbin &iz, const TItem c, TArbin &de);
    TItem & Raiz ( );
    TArbin Hijolz ( ); TArbin HijoDe ( );
    bool EsVacio ( );
    int Altura ( );
private:
    void Copiar (const TArbin & origen);
    TNodo *farb;
    TItem item_error;
};
  
```

30

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (IV)

```
class TNode{
    friend class TArbin;
    private:
        TItem fitem;
        TArbin fiz, fde;
};

/* ----- */
TArbin::TArbin ( ) {farb = NULL; }
/* ----- */
TArbin::TArbin (const TArbin & origen){
    Copiar (origen);
}
/* ----- */
void
TArbin::Copiar (const TArbin & origen){
    if (origen.farb != NULL){
        TNode *aux = new TNode( );
        aux -> fitem = origen.farb -> fitem;
        farb = aux;
        (farb -> fiz).Copiar (origen.farb -> fiz);
        (farb -> fde).Copiar (origen.farb -> fde);
    }
    else farb = NULL;
}
```

31

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (V)

```
TArbin::~~TArbin ( ) {
    if (farb != NULL){
        delete farb;
        farb = NULL;
    }
}
/* ----- */
TArbin &
TArbin::operator = (const TArbin & a){
    this -> ~TArbin( );
    Copiar (a);
    return *this;
}
/* ----- */
void
TArbin::Enraizar (TArbin &iz, const TItem c, TArbin &de){
    TNode *aux = new TNode( );
    aux -> fitem = c;
    (aux -> fiz).farb = iz.farb;
    (aux -> fde).farb = de.farb;
    iz.farb = de.farb = NULL;
    this -> ~TArbin ( );
    farb = aux;
}
//deja vacíos el árbol original (*this), iz y de
```

32

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (VI)

```

Titem &
TArbin::Raiz ( ){
    if (farb != NULL) return farb → fitem;
    else return item_error;
}

/* ----- */
TArbin
TArbin::Hijolz ( ){
    if (farb != NULL) return farb → fiz;
    else return TArbin( );
}

/* ----- */
TArbin
TArbin::HijoDe ( ){
    if (farb != NULL) return farb → fde;
    else return TArbin( );
}

```

33

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (VII)

```

bool
TArbin::EsVacio ( ){
    return (farb == NULL)
}

/* ----- */

int
TArbin::Altura ( ){
    int a1, a2;

    if (farb != NULL){
        a1 = (farb → fiz).Altura( );
        a2 = (farb → fde).Altura( );
        return (1 + (a1 < a2 ? a2 : a1));
    }
    else return 0;
}

```

34

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (VIII)

```
/* Programa de prueba

int
main ( ){

    TArbin a, b, c;

    a.Enraizar (b, 1, c);
    b.Enraizar (a, 2, c);
    cout << "el hijo izquierda del árbol contiene un " << (b.Hijoz( )).Raiz( );
    // ESCRIBE 1
    cout << "la altura del árbol es " << b.Altura() << endl;
    // ESCRIBE 2
}
```

35

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (IX)

¿Constructor y destructor de TNode?

```
TNode::TNode( ):fiz(),fde(){
    fitem=0;
}

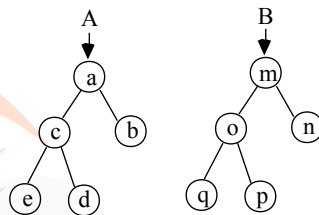
TNode::~TNode( ){
    fitem=0;
}
```

36

2. Árboles binarios

OTRAS OPERACIONES INTERESANTES (I)

- Además de todas las operaciones vistas anteriormente, utilizaremos las operaciones de asignación y “movimiento” de árboles e iteradores:



I, J = Iteradores

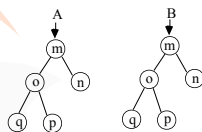
37

2. Árboles binarios

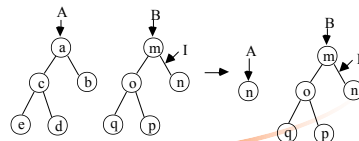
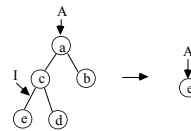
OTRAS OPERACIONES INTERESANTES (II)

- a) *Asignación (copia) entre árboles e iteradores:*

— a1) $A = B$. Hace una copia de B en A



— a2) $A = I$. Hace una copia sobre el árbol A, de la rama del árbol a la que apunta el iterador I



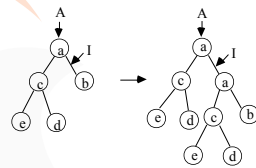
38

2. Árboles binarios

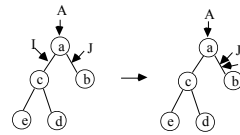
OTRAS OPERACIONES INTERESANTES (III)

- a) *Asignación (copia) entre árboles e iteradores:*

- a3) $I = A$. Hace una copia sobre la rama del árbol a la que apunta el Iterador I del árbol A



- a4) $I = J$. Sirve para inicializar el Iterador I de forma que apunte al mismo nodo al que apunta el Iterador J



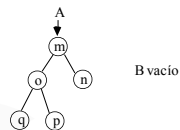
39

2. Árboles binarios

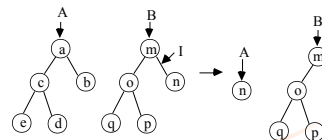
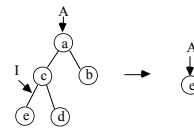
OTRAS OPERACIONES INTERESANTES (IV)

- b) *Movimiento de ramas entre árboles e iteradores:*

- b1) Mover (A, B). Mueve el árbol B al árbol A. B se queda vacío



- b2) Mover (A, I). Mueve la rama del árbol a la que apunta el Iterador I al árbol A



40

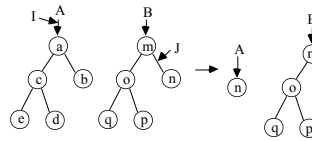
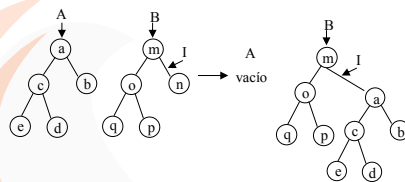
2. Árboles binarios

OTRAS OPERACIONES INTERESANTES (V)

- b) *Movimiento de ramas entre árboles e iteradores:*

– b3) Mover (I, A). Mueve el árbol A a la rama del árbol a la que apunta el iterador I

– b4) Mover (I, J). Mueve la rama del árbol a la que apunta el iterador J a la rama del árbol a la que apunta el iterador I



41

2. Árboles binarios

EJERCICIOS recorridos

1a) Dado el siguiente árbol binario, calcular los recorridos preorden, postorden, inorden y niveles

1b) ¿Se puede reconstruir un árbol binario dando solamente su recorrido inorden?
¿Cuántos recorridos como mínimo son necesarios? ¿Cuáles?

Tema 3. El tipo árbol

42

2. Árboles binarios

EJERCICIOS *nodosHoja*

2) Sea un árbol binario. Especificar la sintaxis y semántica de las operaciones:

nodosHoja, que devuelve el número de nodos hoja de un árbol binario

$\text{nodosHoja}(\text{ÁRBOL}) \rightarrow \text{NATURAL}$

$\forall A, D: \text{ÁRBOL}; x: \text{ÍTEM}.$

$\text{nodosHoja}(\text{CREAR}()) = 0$

$\text{nodosHoja}(\text{E}(\text{CREAR}, x, \text{CREAR})) = 1$

$\text{nodosHoja}(\text{E}(A, x, B)) = \text{nodosHoja}(A) + \text{nodosHoja}(B)$

2. Árboles binarios

EJERCICIOS *simetricos y todos*

3) Sea un árbol binario cuyas etiquetas son números naturales. Especificar la sintaxis y semántica de las operaciones:

a) **simétricos**, que comprueba que 2 árboles binarios son simétricos

b) **todos**, que calcula la suma de todas las etiquetas de los nodos del árbol

Nota: Especificar la sintaxis de todas las operaciones de árboles binarios usadas

SINTAXIS Y SEMANTICA OPERADOR NODOSHOJA.

NODOSHOJA (ARBOOL) \rightarrow NATURAL

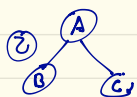
VAR X: ITEM.

VAR V: ARBOOL
VAR W: ARBOOL.

NODOSHOJA (CREAR()) \rightarrow 0

NODOSHOJA (E(CREAR(), X, CREAR())) = 1

NODOSHOJA (E(V, X, W)) \rightarrow NODOSHOJA(V) + NH(V).



$NH[E(E(CREAR(), B, CREAR()), A, E(CREAR(), C, CREAR()))]$

$NH(E(CREAR(), B, CREAR())) + NH(E(CREAR(), C, CREAR()))$

SIMÉTRICO (ÁRBOL, ÁRBOL) \rightarrow BOLEANO

SIMÉTRICO(CREAR(), CREAR()) = 1

2. Árboles binarios

EJERCICIOS *transforma*

- 4) Se define la operación *transforma* que recibe un árbol binario y devuelve un árbol binario. Explicar qué hace esta operación detallando el comportamiento de las dos ecuaciones que aparecen a continuación:

```
VAR i, d: arbin; x: item,  
transforma(crea_arbin( )) = crea_arbin( )  
transforma(enraizar(i, x, d)) =  
  enraizar(transforma(i), x + todos(i) + todos(d), transforma(d))
```

Nota: La operación *todos* calcula la suma de todas las etiquetas de los nodos del árbol (números naturales)

2. Árboles binarios

EJERCICIOS *quita_hojas*

- 5) Utilizando exclusivamente las operaciones *crea_arbin()* y *enraizar(arbin, item, arbin)* definir la sintaxis y la semántica de la operación *quita_hojas* que actúa sobre un árbol binario y devuelve el árbol binario original sin sus hojas

2. Árboles binarios

EJERCICIOS *dos_hijos*

- 6) Especificar la sintaxis y la semántica de la operación `dos_hijos` que actúa sobre un árbol binario y devuelve `CIERTO` si todos los nodos tienen dos hijos (excepto los nodos hoja)

47

2. Árboles binarios

Preguntas de tipo test: Verdadero vs. Falso

- El nivel de un nodo en un árbol coincide con la longitud del camino desde la raíz a dicho nodo **F**
- Dado un único recorrido de un árbol binario lleno, es posible reconstruir dicho árbol **V**
- Un árbol binario completo con n nodos y altura k es un árbol binario lleno para esa misma altura **F**

48

3. Árboles de búsqueda (I)

- Árboles de búsqueda = Árboles n-arios de búsqueda = Árboles multicamino de búsqueda
- Son un tipo particular de árboles, que pueden definirse cuando el tipo de los elementos del árbol posee una relación \leq de orden total
- Un árbol multicamino de búsqueda T es un árbol n-ario vacío o cumple las siguientes propiedades:
 - 1. La raíz de T contiene A_0, \dots, A_{n-1} subárboles y K_1, \dots, K_{n-1} etiquetas
 - 2. $K_i < K_{i+1}$, $1 \leq i < n-1$
 - 3. Todas las etiquetas del subárbol A_i son:
 - menores que K_{i+1} $0 \leq i < n-1$
 - mayores que K_i $0 < i \leq n-1$
 - 4. Los subárboles A_i , $0 \leq i \leq n-1$ son también árboles multicamino de búsqueda

K_1	K_2	K_3	...	K_{n-1}
A_0	A_1	...		A_{n-1}

49

3. Árboles de búsqueda (II)

- Algoritmo de búsqueda
 - Para buscar un valor x el árbol, primero se mira el nodo raíz y se realiza la siguiente comparación:
 - $x < K_i$ ó $x > K_i$ ó $x = K_i$ ($1 \leq i \leq n-1$)
 - 1) En el caso que $x = K_i$, la búsqueda ya se ha completado
 - 2) Si $x < K_i$, entonces por la definición de árbol multicamino de búsqueda, x debe estar en el subárbol A_{i-1} , si éste existe en el árbol
 - 3) Si $x > K_i$, x debe estar en A_i
- Los árboles multicamino de búsqueda son útiles cuando la memoria principal es insuficiente para utilizarla como almacenamiento permanente
- En una representación enlazada de estos árboles, los punteros pueden representar direcciones de disco en lugar de direcciones de memoria principal. ¿Cuántas veces se accede a disco cuando se realiza una búsqueda? ¿Cómo se puede reducir el número de accesos a disco?

50

3.1. Árboles binarios de búsqueda

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (I)

- Propiedades
 - todos los elementos en el subárbol izquierdo son \leq que la raíz,
 - todos los elementos en el subárbol derecho son \geq que la raíz,
 - los dos subárboles son binarios de búsqueda
 - en algunas variantes no se permite la repetición de etiquetas

MODULO ARBOL_BIN_BUSQUEDA USA BOOL, ARBOLES_BINARIOS

PARAMETRO TIPO item

OPERACIONES

$<, ==, >$: item, item \rightarrow bool
error_item() \rightarrow item

FPARAMETRO

OPERACIONES

insertar(arbin, item) \rightarrow arbin
buscar(arbin, item) \rightarrow bool
borrar(arbin, item) \rightarrow arbin
min(arbin) \rightarrow item

51

3.1. Árboles binarios de búsqueda

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (II)

VAR i, d: arbin; x, y: item;

ECUACIONES

insertar(crea_arbin(), x) =
 enraizar(crea_arbin(), x, crea_arbin())

si ($y < x$) **entonces**

 insertar(enraizar(i, x, d), y) =
 enraizar(insertar(i, y), x, d)

si no si ($y > x$) insertar(enraizar(i, x, d), y) =
 enraizar(i, x, insertar(d, y)) **fsi**

buscar(crea_arbin(), x) = FALSO

si ($y < x$) **entonces**

 buscar(enraizar(i, x, d), y) = buscar(i, y)

si no si ($y > x$) **entonces**

 buscar(enraizar(i, x, d), y) = buscar(d, y)

si no buscar(enraizar(i, x, d), y) = CIERTO **fsi**

borrar(crea_arbin(), x) = crea_arbin()

si ($y < x$) **entonces**

 borrar(enraizar(i, x, d), y) =
 enraizar(borrar(i, y), x, d)

si no si ($y > x$) **entonces**

 borrar(enraizar(i, x, d), y) =
 enraizar(i, x, borrar(d, y)) **fsi**

si ($y == x$) **y** esvacio(d) **entonces**

 borrar(enraizar(i, x, d), y) = i **fsi**

si ($y == x$) **y** esvacio(i) **entonces**

 borrar(enraizar(i, x, d), y) = d **fsi**

si ($y == x$) **y** no esvacio(d) **y** no esvacio(i) **entonces**

 borrar(enraizar(i, x, d), y) =
 enraizar(i, min(d), borrar(d, min(d))) **fsi**

min(crea_arbin()) = error_item()

si esvacio(i) **entonces** min(enraizar(i, x, d)) = x

si no min(enraizar(i, x, d)) = min(i) **fsi**

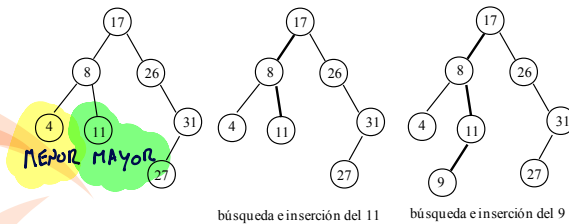
FMODULO

52

3.1. Árboles binarios de búsqueda

OPERACIONES BÁSICAS (I)

- Búsqueda e inserción de un elemento



- Recorrido en inorden: todas las etiquetas ordenadas ascendentemente
- ¿Cuál es el coste de las operaciones de búsqueda e inserción en el ABB?
¿Qué pasa si insertamos una serie de elementos ordenados en un ABB inicialmente vacío?

SE GUARDA COMO UNA LISTA

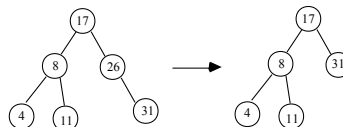
LINEAL EN FUNCIÓN
DE ALTURA

53

3.1. Árboles binarios de búsqueda

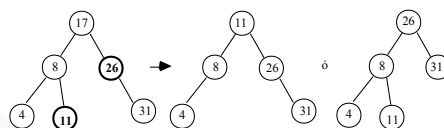
OPERACIONES BÁSICAS (II)

- Borrado de un elemento
 - El nodo donde se encuentra es una hoja
 - El nodo donde se encuentra tiene un único hijo. El nodo a eliminar es sustituido por su hijo



borrado del elemento 26

- El nodo donde se encuentra, tiene dos hijos



borrar el elemento 17

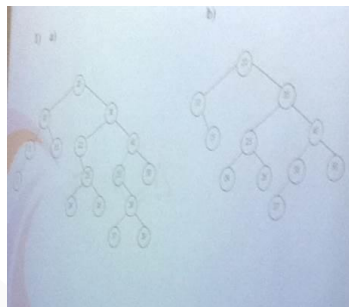
54

Sustituir por el menor del sub-árbol izquierdo o mayor del sub-árbol derecho

3.1. Árboles binarios de búsqueda

EJERCICIOS *inserción y borrado*

- 1) En un árbol binario de búsqueda inicialmente vacío,
 - a) Insertar los siguientes elementos: 20, 10, 30, 40, 5, 15, 50, 22, 25, 24, 26, 3, 35, 38, 39, 37
 - b) Sobre el árbol resultante, realizar el borrado de: 5, 3, 30, 22, 39 (utilizar el criterio de sustituir por el menor de la derecha)



55

3.1. Árboles binarios de búsqueda

Preguntas de tipo test: Verdadero vs. Falso

- En el borrado de un elemento que se encuentre en un nodo con dos hijos no vacíos en un árbol binario de búsqueda, tenemos que intercambiar el elemento a borrar por el menor del subárbol de la izquierda o por el mayor del subárbol de la derecha
- El menor elemento en un árbol binario de búsqueda siempre se encuentra en un nodo hoja
- El coste temporal (en su peor caso) de insertar una etiqueta en un árbol binario de búsqueda es lineal respecto al número de nodos del árbol

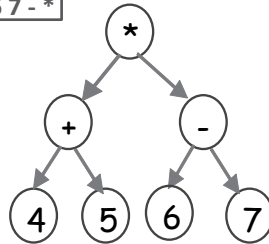
56

Árboles binarios

Aplicaciones

- Evaluación de expresiones aritméticas (AB).

4 5 + 6 7 - *



- Árboles de Huffman (ABB).
 - Emisor: transmisión de mensajes codificados
 - Receptor: árbol decodificador
- Treesort (ABB).
 - Ordenación de elementos utilizando un ABB
 - Si está equilibrado $\rightarrow \Theta(n \log n)$