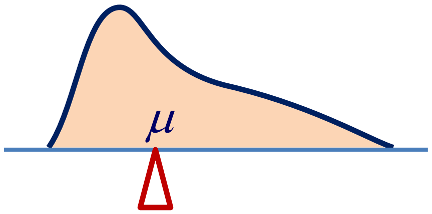
4. Esperanza y Varianza

Esperanza de una v.a.

- Dada una v.a. X con función de cuantía o densidad f, se llama esperanza matemática (o media) de X, E(X) al número:
  - V.A. discreta: $$\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i f(x_i)$$

X	1	2	3	5
f	0'4	0'4	0'1	0'1

  - V.A. continua: $$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$
  - Es un número (puede ser un valor de X), no una probabilidad.
  - Equivale al centro de masas (equilibrio).



  - Puede no existir (aun siendo simétrica).
  - Distribución simétrica: $\exists \mu\, \forall x :\ f(\mu - x) = f(\mu + x)$

Problemas

- **<u>Problema 4.1</u>**. Obtener el valor medio o esperanza de la puntuación en el lanzamiento de un dado.

- **<u>Problema 4.2</u>**. Obtener la esperanza de la v.a. X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}x^3, & x \in [1,3] \\ 0, & resto \end{cases}$$

Esperanza de una función

- Dada una v.a. Y que sea función de otra $Y = h(X)$ de la que conocemos su $f(x)$, entonces la esperanza de Y es:
- V.A. discreta: $$\mathrm{E}(Y) = \sum_j y_j f_Y(y_j) = \mathrm{E}(h(X)) = \sum_i h(x_i) f(x_i)$$
- V.A. continua: $$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy = \mathrm{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx$$
  - No es necesario calcular f_Y ya que es la misma f.

X	0	1	2
f	0'1	0'3	0'6

↓ ↓ ↓

$Y = X^2$	0	1	4
f_Y	0'1	0'3	0'6

Problema 4.3

- Dada la función de cuantía:

X	-1	0	1	2	4
f	0'2	0'1	0'2	0'4	0'1

Hallar la media de $Y = 2X+3$.

Problema 4.4

- Hallar la esperanza de $Y = X^3$ siendo la *fd* de X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & x \in [0,2] \\ 0, & resto \end{cases}$$

Esperanza de una función de varias v.a.

- Dada una v.a. Z que es función de otras dos $Z = h(X,Y)$ de la que conocemos la función de cuantía/densidad conjunta $f(x,y)$, entonces la esperanza de Z es:
  - V.A. discretas:

$$\mathrm{E}(Z) = E\big(h(X,Y)\big) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) f(x_i, y_j)$$

  - V.A. continuas:

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \mathrm{E}(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f(x,y)\, dxdy$$

Problema 4.5

- Dada la función de cuantía:

Y				f
1	0’1	0’5	0	
0	0’2	0’1	0’1	
	0	**1**	**2**	X

Hallar la media de $Z = 2X+Y$.

Problema 4.6

- Hallar la esperanza de $Z = 2X + Y$ siendo la *fd* conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & resto \end{cases}$$

Propiedades de la Esperanza

- Propiedades:
  - $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$
  - $\mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots$
  - Si las v.a. son independientes:

    $$\mathrm{E}(X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots) = \mathrm{E}(X_1) \cdot \mathrm{E}(X_2) \cdot \cdots$$

- Esperanza de la distribución uniforme:
  - V.A. discreta (media aritmética): $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
  - V.A. continua: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & resto \end{cases}$

    $$\mathrm{E}(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

Problema 4.7

- En un grupo de 30 familias, se considera el nº de hijos, obteniendo que 10 familias tienen un hijo, 7 tienen 2 hijos, 4 tienen 3 y una familia tiene 4. Si se toman tres familias al azar, ¿cuántos niños esperamos tener en total?