

Problema 3.6 (del 3.3)

- Los meses de vida de determinada especie de peces en una piscifactoría es una v.a. continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x/6, & x \in [2,4] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tomando un pez al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva más de dos meses y medio?

Utilizar la Función de Distribución para resolverlo.

Distribución discreta uniforme

- Una v.a. **discreta** X es **uniforme** si todos los valores x_i que puede tomar son equiprobables.
 - Como debe ser finita, si hay n valores x_i la probabilidad de cada uno será $P(X = x_i) = 1/n$.
- **Problema 3.7:** Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Sea X la v.a. que se corresponde con el número obtenido. Calcular su función de cuantía.

Distribución continua uniforme

- Una v.a. **continua** es **uniforme** sobre un intervalo $[a,b]$ si su función de densidad es constante en el intervalo y nula fuera de él.
 - La prob. de cualquier subintervalo será proporcional a su longitud.

- La fd tendrá la forma: $f(x) = \begin{cases} k, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$

- La constante se halla:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 = \int_a^b k dx = k(b - a) \rightarrow k = \frac{1}{b - a}$$

Problema 3.8 (distr. cont. uniforme)

- La longitud de un tipo de bacteria es una v.a. continua distribuida uniformemente entre 3 y 8 μm .

Hallar la probabilidad de que una de esas bacterias mida menos de 7 μm .

Distribución exponencial

- Una v.a. es exponencial de parámetro $\lambda > 0$ cuando tiene la *fd*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- Es una función de probabilidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{\infty} = \lambda \left(0 - \frac{1}{-\lambda} \right) = 1$$

- Es una función no negativa, para todo x se cumple:

$$\lambda \cdot e^{-\lambda x} > 0$$

Variable aleatoria bidimensional

- Se llama variable aleatoria bidimensional (X, Y) a toda aplicación

$$(X, Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

- Correlación
- Discretas y continuas
- Continuas: intervalos \rightarrow superficies
- Ejemplo: longitud y peso de los peces de una especie.
 $(X, Y) = \{(3'1, 28), (2'5, 19'9), (4'86, 37'222), \dots\}$
- Ejemplo: lanzar dos dados, siendo X el n° del primero e Y la suma de ambos resultados.

$$(X, Y) = \{(1, 7), (5, 7), (2, 4), \dots\}$$

V.A. bidimensional discreta: *fc* conjunta

- Dada una v.a. bidimensional discreta, con todos los posibles valores (x_i, y_i) que puede tomar, se llama **función de cuantía conjunta** a la función real de dos variables

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

- Propiedades:
 - $0 \leq f(x, y) \leq 1, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
 - $\sum_{x_i} \sum_{y_j} f(x_i, y_j) = 1$, para todos los valores $X = \{x_i\}, Y = \{y_j\}$

Problema 3.9 *(fc conjunta)*

- En una biblioteca hay 8 libros de medicina, 6 de física, 5 de química y 1 de biología. Se cogen dos libros al azar, tomando la v.a. $X = \{\text{n}^\circ \text{ de libros de medicina}\}$ e $Y = \{\text{n}^\circ \text{ de libros de biología}\}$. Hallar la función de cuantía conjunta.

V.A. bidimensional continua: *fd* conjunta

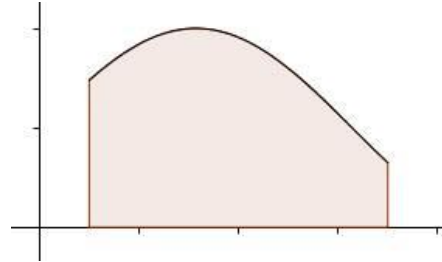
- Dos v.a. X e Y tienen una distribución **continua** conjunta si existe una función $f(x,y)$ no negativa en \mathbb{R}^2 , tal que para cualquier recinto A del plano

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y) dx dy$$

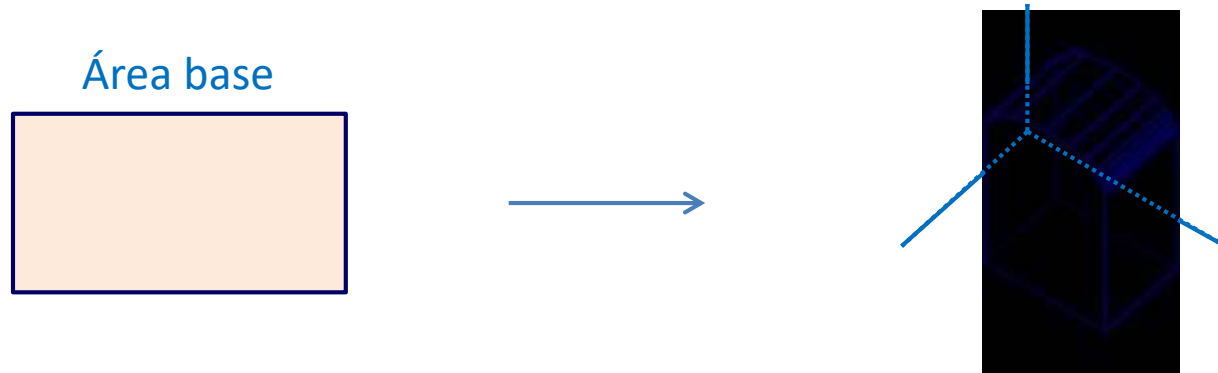
- La probabilidad de tomar un valor discreto es cero, aun cuando una de las dos pertenezca a un intervalo.
- Se debe verificar:
 - $f(x,y) \geq 0$
 - $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = 1$

Doble integración

- Con una v.a. continua integramos un **intervalo** y obtenemos un área (la probabilidad):



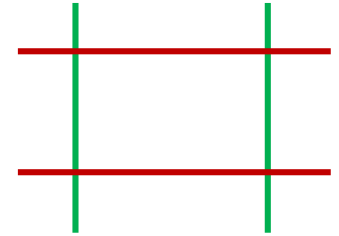
- Con una v.a. bidimensional continua integramos un **área** y obtenemos un volumen (la probabilidad):



Integrales dobles posibles

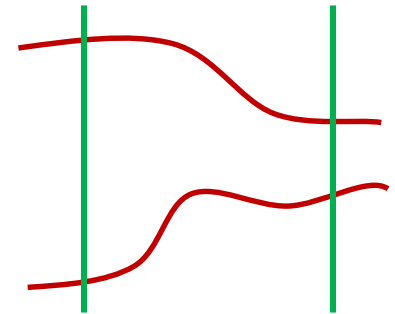
- $A = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$



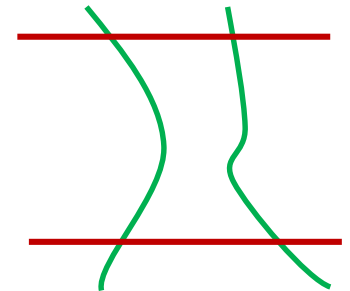
- $A = \{(x, y): a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$

$$\int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



- $A = \{(x, y): g_1(y) \leq x \leq g_2(y), c \leq y \leq d\}$

$$\int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$



Problema 3.10 x e y entre constantes

- Sea la *fd*:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & (x, y) \in [0, 2] \times [0, 1] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

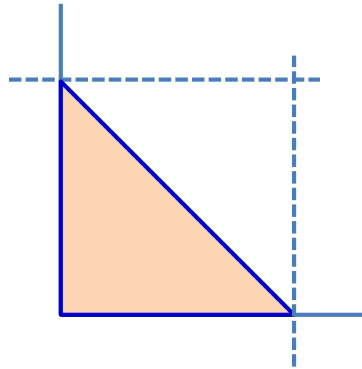
Calcular la probabilidad del área donde está definida.

Problema 3.11 y entre funciones

- Sea la *fd*:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Calcular la probabilidad para $x + y \leq 1$

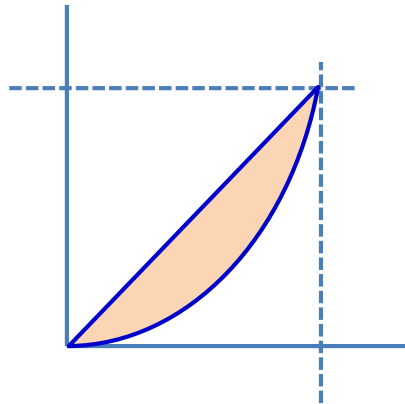


Problema 3.12 x entre funciones

- Sea la fd :

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy, & y^2 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Calcular k .



Distr. conjunta discreta uniforme

- Una v.a. bidimensional **discreta** (X, Y) es **uniforme** si todos los pares (x_i, y_j) que puede tomar son equiprobables.
 - Si hay n pares (x_i, y_j) la probabilidad de cada uno será:

$$f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) = \frac{1}{n}$$

Distr. conjunta continua uniforme

- Una v.a. bidimensional **continua** (X, Y) es **uniforme** si la fd conjunta es uniforme en el recinto A del plano donde está definida:

- La *fd* tendrá la forma: $f(x, y) = \begin{cases} k, & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \notin A \end{cases}$

- La constante se halla:

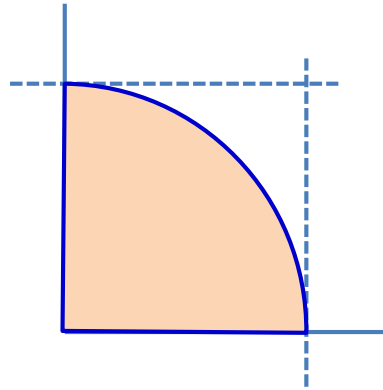
$$\iint_A k \, dx dy = 1 = k \cdot \iint_A dx dy = k \cdot \text{área}(A) \rightarrow k = \frac{1}{\text{área}(A)}$$

- La prob. de un recinto será proporcional al área que ocupa:

$$\iint_B k \, dx dy = k \cdot \text{área}(B) = \frac{\text{área}(B)}{\text{área}(A)}$$

Problema 3.13 (distr. cjta. continua uniforme)

- Calcular la *fd* de una v.a. dada por las coordenadas de un punto aleatorio del primer cuadrante del círculo unidad.



Función de distribución conjunta

- Dada una v.a. bidimensional discreta o continua, se llama **función de distribución conjunta (FD)** a la función

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x \cap Y \leq y)$$

- Propiedades:
 - $0 \leq F(x,y) \leq 1, \forall x,y \in \mathbb{R}$
 - $F(-\infty, y) = P(X < -\infty, Y \leq y) = 0. \quad F(x, -\infty) = 0.$
 - $F(+\infty, +\infty) = P(X < +\infty, Y < +\infty) = 1$
 - $P(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2) =$
 $= F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$

Relación fc, fd – FD

- Variable **discreta**

- Función de **cuantía** vs Función de **distribución**

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ y_j \leq y}} f(x_i, y_j)$$

- Variable **continua**

- Función de **densidad** vs Función de **distribución**

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) ds dt$$
$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$