Capítulo 2

Sucesos aleatorios

2.1 Experimentos y Sucesos

Existen experimentos que realizados en las mismas condiciones proporcionan siempre los mismos resultados; por ejemplo el tiempo que tarda en caer un objeto desde una altura depende sólo de la altura (en el vacío) por lo que si la altura es la misma se puede predecir el tiempo. Estos experimentos se llaman *deterministas* en contraposición a los *aleatorios*, como lanzar un dado, en los que no se puede predecir el resultado.

La teoría matemática de la probabilidad se inició con los matemáticos franceses BLAISE PASCAL y PIERRE FERMAT en el siglo XVII, (aunque ya GALILEO trató el tema) que estudiaron algunos problemas relacionados con los juegos de dados, y posteriormente fué desarrollada por BERNOULLI, D'ALEMBERT, DE MOIVRE, LAPLACE, BAYES, etc. hasta quedar axiomatizada por KOLMOGOROV.
La interpretación clásica de la probabilidad se basa en el concepto de sucesos *igualmente verosímiles*, a los que se asigna la misma probabilidad, asignando el valor 1 al suceso *seguro*, esto es, el suceso que siempre se cumple. Por ejemplo, en el juego de lanzar un dado hay seis resultados posibles (las seis caras); si representamos al conjunto de posibles resultados como Ω (llamado espacio muestral), tendremos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Cada subconjunto de Ω se llama *suceso*; así el suceso "obtener cifra par" es $\{2, 4, 6\}$. Por otra parte, los sucesos $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, y $\{6\}$ son igualmente verosímiles (si el dado no está trucado) y, puesto que se ha de cumplir alguno de ellos, la probabilidad de cada uno debe ser $\frac{1}{6}$. Obsérvese que Ω es el suceso seguro (todos los posibles resultados).
Si consideramos ahora el suceso "obtener cifra par", es decir, sacar 2, 4 ó 6, la probabilidad debe ser $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. En general, si el número total de resultados es n siendo igualmente verosímiles, y un suceso A se compone de m de estos resultados, la

probabilidad es $\frac{m}{n}$; tenemos así la famosa regla de LAPLACE

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso}}{\text{número de casos posibles}}$$

Este concepto, que generalmente es útil cuando se aplica a juegos de salón, donde es finito el número posible de resultados, es inadecuado cuando se tratan espacios muestrales infinitos o, donde no se puede hablar de resultados igualmente verosímiles; por ejemplo estimar la probabilidad de que un determinado día llueva o no. Por ello se introduce en la sección siguiente la definición axiomática de probabilidad debida a Kolmogorov (1933).

Definición 2.1 *Entenderemos por experimento aleatorio cualquier proceso, susceptible de repetirse, por el que obtenemos un resultado (un elemento ω de un conjunto Ω) que, en general, no se puede predecir.*

El conjunto de posibles resultados puede ser finito o no. En el lanzamiento de un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, es finito, mientra que si consideramos el experimento de lanzar un dado hasta obtener el primer seis, el conjunto de resultados es infinito pues el seis puede salir en cualquier tirada.

Definición 2.2 *Se llama espacio muestral al conjunto Ω de los posibles resultados de un experimento.*

Definición 2.3 *Se llama suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral*

$$A \subseteq \Omega$$

Como sucesos notables está el propio Ω, llamado suceso *seguro* y el conjunto vacío $\emptyset$ llamado suceso *imposible*.

Definición 2.4 *Se dice que un suceso A se ha cumplido o verificado, si el resultado ω del experimento es tal que $\omega \in A$.*

Los sucesos se pueden representar mediante diagramas de Venn, siendo conveniente hacerlo en muchas situaciones.

Operaciones con sucesos

Puesto que los sucesos son conjuntos, las operaciones y propiedades de éstas son las conocidas en Álgebra, por lo que omitiremos las demostraciones.

Definición 2.5 *Se llama suceso unión de A y de B, que se representa por $A \cup B$, al suceso que se verifica cuando se verifica uno de ellos (es decir: sólo A, sólo B o los dos). Por tanto, el suceso unión tiene como elementos a los de A y a los de B.*

Ejemplo: *En el experimento del lanzamiento de un dado, sea A el suceso obtener cifra par, $A = \{2, 4, 6\}$ y sea B el suceso obtener un número mayor que 3, $B = \{4, 5, 6\}$. Entonces $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.*

Teorema 2.1 *Dados dos sucesos A y B, se tiene*

(a) $A \cup B = B \cup A$

(b) $A \cup A = A$

(c) $A \cup \emptyset = A$

(d) $A \cup \Omega = \Omega$

La unión de n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se representará por

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

y es el suceso que se cumple cuando lo hace alguno de ellos. También se define la unión infinita numerable de sucesos de la forma: dados A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ el suceso unión $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ se cumple cuando se cumple alguno de ellos, es decir

$$\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \leftrightarrow \omega \in A_j \text{ para algún } j.$$

Definición 2.6 *Se llama suceso intersección de otros dos A y B, que se representa por $A \cap B$, al que se verifica cuando se verifican los dos.*

Por tanto, el suceso interseción tiene como elementos a los elementos comunes de A y de B.

Ejemplo: *En el experimento de lanzar un dado, sea A el suceso obtener cifra par: $A = \{2, 4, 6\}$ y sea B el suceso obtener un número mayor que 3, $B = \{4, 5, 6\}$. Entonces $A \cap B = \{4, 6\}$.*

Teorema 2.2 *Dados dos sucesos se tiene*

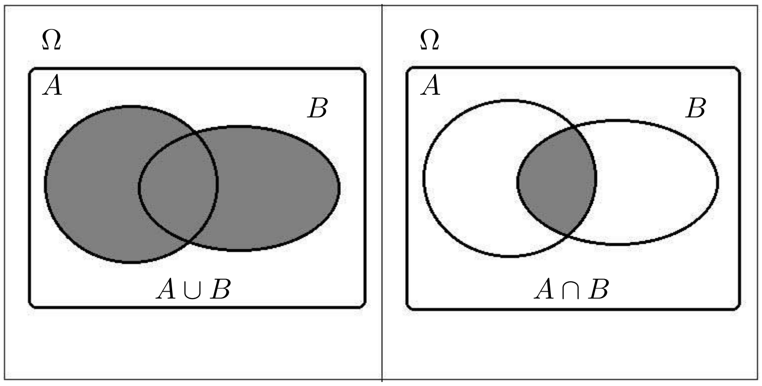
(a) $A \cap B = B \cap A$

(b) $A \cap A = A$

(c) $A \cap \emptyset = \emptyset$

(d) $A \cap \Omega = A$

Figura 2.1: Sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$



La figura 2.1 ilustra la unión e intersección de sucesos.

La intersección de n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se representará por

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

y se cumple cuando se cumplen todos ellos. Es decir

$$\omega \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \leftrightarrow \omega \in A_j, \text{ para todo } j.$$

Se puede extender las definiciones de unión e intersección a cualquier familia de sucesos:

$$\omega \in \bigcup_{i \in I} A_i \leftrightarrow \omega \in A_j, \text{ para algún } j$$

$$\omega \in \bigcap_{i \in I} A_i \leftrightarrow \omega \in A_j, \text{ para todo } j$$

Definición 2.7 *Se llama suceso contrario o complementario de un suceso A, y se designa por $\overline{A}$ al suceso que se verifica si, y sólo si no se verifica A.*

El contrario está formado por los elementos de Ω que no están en A.

Teorema 2.3 *Dado un suceso A, se tiene*

(a) $A \subseteq B \rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

(b) $\overline{(\overline{A})} = A$

(c) $\overline{\emptyset} = \Omega$

(d) $\overline{\Omega} = \emptyset$

(e) $A \cup \overline{A} = \Omega$

(f) $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Definición 2.8 *Dos sucesos A y B se llaman incompatibles cuando*

$$A \cap B = \emptyset$$

Es decir, no se pueden cumplir simultáneamente o, lo que es lo mismo, no tienen resultados comunes.
Cuando se trata de n sucesos (más de dos), se entiende por *incompatibles* cuando lo son dos a dos. Es decir, no basta que los n tengan una intersección vacía; debe ser vacía la intersección de dos cualesquiera de ellos.

Definición 2.9 *Los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se llaman incompatibles si*

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \textit{para } i \neq j$$

Veamos un ejemplo; sean $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ y $A_3 = \{1, 3\}$. Se tiene

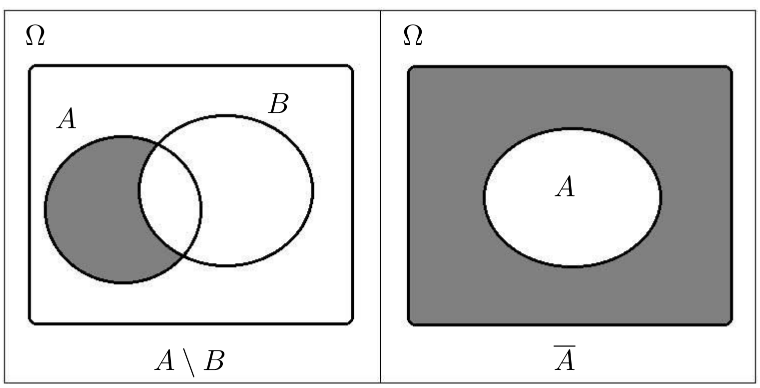
$$\begin{array}{l} A_1 \cap A_2 = \{2\} \neq \emptyset \\ A_1 \cap A_3 = \{1\} \neq \emptyset \\ A_2 \cap A_3 = \{3\} \neq \emptyset \\ A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset \end{array}$$

Aunque los tres sucesos no tienen elementos comunes, no son incompatibles (dos a dos).

Definición 2.10 *Se llama diferencia de sucesos $A \setminus B$ al suceso que se cumple cuando se cumple A y no se cumple B.*

Como se sabe $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Es decir, los elemento de $A \setminus B$ se componen de los elementos de A que no está en B. La figura 2.2 representa los sucesos $A \setminus B$ y $\overline{A}$.

Figura 2.2: Sucesos $A \setminus B$ y $\overline{A}$



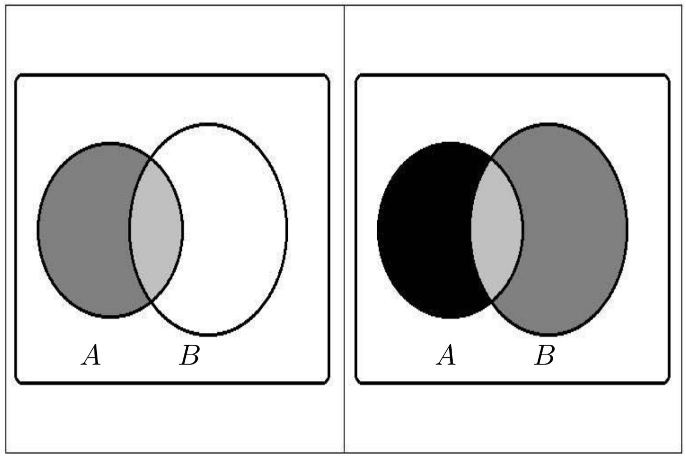
Teorema 2.4 *Leyes de De Morgan*

(a) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(b) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Es conveniente descomponer, a veces, un suceso como unión de sucesos in-

Figura 2.3: Descomposición de sucesos



compatibles. Un caso notable (véase la figura 2.3), es

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

Veamos dos ejemplos

(a) En el experimento de sacar al azar dos cartas (sin reemplazamiento) de una baraja española, se considera el suceso {obtener al menos un oro}. Descompóngase como unión de sucesos incompatibles, y describir el suceso contrario.
Sean los sucesos $A = \{$ la primera carta es oro $\}$ y $B = \{$ la segunda carta es oro$\}$. Obtener al menos un oro es la unión $A \cup B$ que se puede obtener uniendo los siguientes sucesos:

 (1) La primera carta es oro y la segunda no (suceso $A \cap \overline{B}$)
 (2) La primera carta no es oro y la segunda sí (suceso $\overline{A} \cap B$)
 (3) Las dos cartas son oros (suceso $A \cap B$)

 Obviamente los tres sucesos anteriores son incompatibles dos a dos y su unión es el suceso { obtener al menos un oro }. El suceso contrario es no obtener ningún oro (ni la primera ni la segunda) lo que queda de manifiesto por la primera ley de De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

(b) Dos amigos juegan una partida consistente en lanzar alternativamente dos dados y sumar las puntuaciones; el primer jugador A gana si saca un 7 antes de que el segundo jugador B saque un 8, en cuyo caso gana B. Empezando a jugar A, describir el suceso { gana A } como unión de sucesos incompatibles. Sea $A = \{$ el jugador A lanza y saca un 7$\}$ y $B = \{$ el jugador B lanza y saca un 8 $\}$.

$$\{\text{gana A}\} = A \cup \overline{A}\,\overline{B}\,A \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{A}\,\overline{B}\,A \cup \cdots$$

donde el suceso $\overline{A}\,\overline{B}\,A$ quiere decir: lanza A y pierde, lanza B y pierde, lanza A y gana, (es decir, que A gane en la tercera tirada).

2.2 Definición de Probabilidad

En un experimento, llamaremos probabilidad de un suceso A a un número real $\mathrm{P}(A)$ que cumple varias condiciones. Es por tanto una aplicación del espacio muestral en los números reales.

Definición 2.11 *Una función de probabilidad es una aplicación*

$$\mathrm{P}: \ \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface los tres siguientes axiomas

- **A1** *Para cualquier suceso A,* $\mathrm{P}(A) \geq 0$
- **A2** $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
- **A3** *Para cualquier sucesión infinita de sucesos incompatibles dos a dos se cumple*

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$$

De esta definición se deducen inmediatamente varias propiedades

Teorema 2.5 *Dada una función de probabilidad*

(a) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$

(b) Para cualquier sucesión finita de n sucesos A_i incompatibles dos a dos se cumple

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$$

(c) $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathrm{P}(A)$

(d) Dado un suceso cualquiera A, $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$

(e) Si $A \subseteq B$, entonces $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$

(f) Si A y B son dos sucesos cualesquiera

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

DEMOSTRACIÓN:

(a) Se deja para el alumno.

(b) Se deja para el alumno.

(c) Como A y $\overline{A}$ son incompatibles y $A \cup \overline{A} = \Omega$ se tiene

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}\left(A \cup \overline{A}\right) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \longrightarrow \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathrm{P}(A).$$

(d) Si fuera $\mathrm{P}(A) > 1$, sería por la propiedad anterior $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) < 0$, contradiciendo el axioma **A1**.

(e) El suceso B se puede descomponer como la unión de dos sucesos incompatibles: $B = A \cup (B \setminus A)$, de donde se deduce que $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A)$ y, como $\mathrm{P}(B \setminus A) \geq 0$, debe ser $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$

(f) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ de donde $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A)$ (porque son incompatibles) y como $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, se deduce que $\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$. Esto es: $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

Probabilidad de la unión de sucesos

Para la unión de dos sucesos, sabemos que

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Para el caso de la unión de tres sucesos, se tiene (demuéstrese como ejercicio)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) \\ &- \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) \\ &+ \mathrm{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ejemplo: *En una determinada población, el* 37 % *lee el diario A, el* 47 % *el diario B y el* 52 % *el diario C. Los diarios A y B lo lee el* 17 %*, A y C el* 20 % *y B y C el* 19 %*. Sabiendo que el* 15 % *no lee ninguno de los tres, se pide*

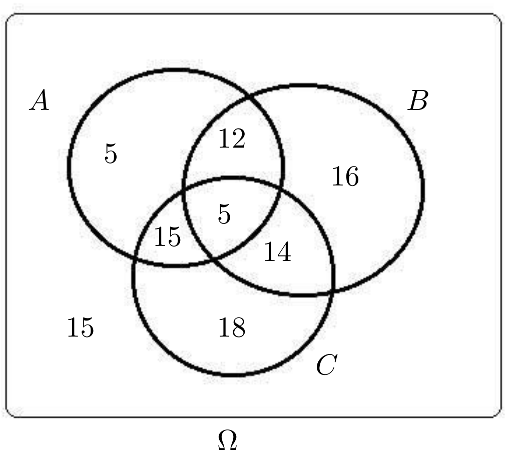
(a) ¿Cuántos leen alguno de los tres?

(b) ¿Cuántos leen los tres diarios?

(c) ¿Cuántos leen sólo uno de ellos?

(d) ¿Cuántos leen A ó B pero no C?

En la figura, las probabilidades están multiplicadas por 100.



Podemos considerar el problema en términos de probabilidad; así, la probabilidad de que una persona elegida al azar lea el diario A es 0'37, etc. Si representamos por $A = \{$ la persona lee A $\}$ y hacemos lo mismo con el resto de sucesos se tiene

(a) El suceso { leer alguno de los tres } es $A \cup B \cup C$. Su contrario es { no leer ninguno } $=(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ cuya probabilidad es 0'15, por tanto

$$\mathrm{P}\,(A \cup B \cup C) = 1 - 0'15 = 0'85 \to 85\,\%$$

(b) de la igualdad (2.1) se tiene que

$$0'85 = 0'37 + 0'47 + 0'52 - 0'17 - 0'20 - 0'19 + \mathrm{P}\,(A \cap B \cap C)$$

de donde $\mathrm{P}\,(A \cap B \cap C) = 0'05$ y en porcentaje 5 %.
Los demás se hallan fácilmente con ayuda del diagrama.

(c) $\mathrm{P}\left((A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup ((\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup ((\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)\right) = 0'05 + 0'16 + 0'18 = 0'39 \to$ 39 %

(d) $\mathrm{P}\left((A \cup B) \cap \overline{C}\right) = 0'05 + 0'12 + 0'16 = 0'33 \to 33\,\%$

Probabilidad de la unión de n sucesos

Consideremos ahora el caso de un número finito de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Teorema 2.6 *Dados n sucesos cualesquiera, $A_1, A_2, \ldots, A_n$,*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\,(A_i) \\
&- \sum_{i<j} \mathrm{P}\,(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{i<j<k} \mathrm{P}\,(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
&+ \cdots \\
&+ (-1)^{n+1} \mathrm{P}\,(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n)\,.
\end{aligned}$$

Resumiendo, se suman las probabilidades de cada suceso, se le resta las probabilidades de las intersecciones dos a dos, se le suman las de las intersecciones tres a tres, etc.

Espacios muestrales finitos

Supongamos que el espacio muestral es finito, y se compone de n elementos, todos con la misma probabilidad:

$$\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}.$$

Debe ser $\mathrm{P}(\{w_i\}) = \dfrac{1}{n}$. Si un suceso determinado A se compone de k de estos elementos $A = \{w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_k}\}$, y, dado que son incompatibles

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\{w_{i_1}\}) + \ldots + \mathrm{P}(\{w_{i_k}\}) = \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Se obtiene así la regla de LAPLACE comentada al principio del capítulo.

2.3 Probabilidad condicional

La probabilidad de obtener 2 caras al lanzar 2 monedas es $\frac{1}{4}$ pues los casos posibles son $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$ y uno favorable CC. Pero si sabemos que ha salido alguna cara, los casos posibles son 3: $\{CC, CX, XC\}$ y uno favorable por lo que la probabilidad es $\frac{1}{3}$. La información de que se ha cumplido un cierto suceso ($B = \{$ Sale alguna cara $\}$) modifica la probabilidad del suceso A que es obtener 2 caras (en este caso aumenta de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{3}$).

Este problema ilustra el concepto de *probabilidad condicionada*. Si se realiza un experimento, y se constata que se ha cumplido el suceso B, entonces se modifica la probabilidad de un suceso A. El espacio muestral se reduce ahora al conjunto B, y para que se cumpla A se debe cumplir $A \cap B$. Parece natural definir la probabilidad de un suceso condicionado a otro (que se cumpla A sabiendo que se ha cumplido B) como la proporción que representa la probabilidad $\mathrm{P}(A \cap B)$ en la probabilidad $\mathrm{P}(B)$, esto es, como el cociente $\mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$. Se representará por $\mathrm{P}(A \mid B)$. En el problema anterior el suceso B es $\{$ salir alguna cara $\}$ y $\mathrm{P}(B) = \frac{3}{4}$ y el suceso A es $\{$ salir las dos caras $\}$ mientras que $A \cap B$ es $\{$ salir las dos caras $\} = A$; entonces

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Veamos otro:

Ejemplo: *Se lanza un dado dos veces, y se sabe que en el primer dado ha salido par. Calcular la probabilidad de que la suma sea* 8.

De los 36 casos posibles al lanzar dos dados $\{(1,1),(1,2),\ldots(6,6)\}$, los casos en que la suma es 8 son:

$$\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}.$$

Sin información adicional, la probabilidad de que la suma sea 8 es $\frac{5}{36}$. Sabiendo que en el primer dado ha salido par, los casos posibles son 18, de los cuales en 3 de ellos $\{(2,6),(4,4),(6,2)\}$ suman 8, luego ahora la probabilidad es $\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$ (ha aumentado la probabilidad). Se podía haber obtenido de la siguiente forma: Como $A\cap B=\{(2,6),(4,4),(6,2)\}$, $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$, por lo que

$$\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6}.$$

Definición 2.12 *Si A y B son dos sucesos tales que* $\mathrm{P}(B)>0$

$$\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

De la definición se deduce que

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A \mid B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B \mid A)$$

que se puede resumir en: "La probabilidad de una intersección de dos sucesos es igual a la probabilidad de uno de ellos por la probabilidad del otro condicionado a él."
Para el caso de más de dos sucesos se tiene:

Teorema 2.7 *Dados $n\geq 2$ sucesos cualesquiera*

$$\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=$$
$$\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\cdot\mathrm{P}(A_3 \mid (A_1\cap A_2))\cdots\mathrm{P}(A_n \mid (A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}))$$

Se puede demostrar fácilmente por inducción.

Ejemplo: *De una baraja española se extraen sucesivamente tres cartas (sin reemplazamiento). Calcular la probabilidad de obtener tres oros.*

Sean $A = \{$ La primera carta es oro $\}$, $B = \{$ La segunda carta es oro $\}$, y $C = \{$ La tercera carta es oro $\}$. Hay que hallar $\mathrm{P}(A \cap B \cap C)$. Hagámoslo de dos maneras, usando sucesos condicionados, y aplicando la combinatoria.

- $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(C|(A \cap B)) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{3}{247}$
- Los casos posibles son $\binom{40}{3}$ y los favorables $\binom{10}{3}$

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{40\cdot 39\cdot 38}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{3}{247}.$$

2.4 Independencia de sucesos

Supóngase que $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$; o sea, el conocimiento de que se ha cumplido B no modifica la probabilidad de A. En este caso se llaman independientes y se cumple:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A).$$

Esto conduce a la siguiente

Definición 2.13 *Dos sucesos A y B son independientes si, y sólo si,*

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

En la práctica, la naturaleza del experimento nos dice si son independientes o no, aplicando la relación anterior en caso afirmativo. Cuando no son independientes, se llaman dependientes.
NOTA: No se debe confundir el concepto de independencia con el de incompatibilidad . De hecho dos sucesos incompatibles con probabilidades no nulas son dependientes pues

$$\mathrm{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B).$$

Si dos sucesos son dependientes, pueden ser compatibles o no. En el experimento de lanzar un dado, los sucesos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$ son dependientes pues siendo $A \cap B = \{3\}$, se tiene

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B).$$

y, obviamente son compatibles. Sin embargo, los sucesos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$ son dependientes e incompatibles.

Ejemplo: *El 3 % de los tornillos fabricados por la máquina A son defectuosos, y el 5 % de los que fabrica la máquina B también. Se toman dos tornillos, uno de A y otro de B. Hallar la probabilidad de que alguno sea defectuoso.*

Consideremos los sucesos $A = \{$ el tornillo procedente de A es defectuoso $\}$ y $B = \{$ el tornillo procedente de B es defectuoso $\}$. Se tiene que: $\mathrm{P}(A) = 0'03$ y $\mathrm{P}(B) = 0'05$. Admitiendo que los tornillos de A se fabrican con independencia de los de B, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0'03 \cdot 0'05 = 0'0015$. El suceso $\{$ alguno es defectuoso$\}$ es la unión de A y B. Por tanto

$$\mathrm{P}(A \cup B) = 0'03 + 0'05 - 0'0015 = 0'0785.$$

Teorema 2.8 *Si A y B son sucesos con probabilidad no nula, las tres condiciones siguientes son equivalentes*

(a) *A y B son independientes.*

(b) $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$.

(c) $\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B)$.

Teorema 2.9 *Si los sucesos A y B son independientes, también lo son los pares de sucesos* $\{A, \overline{B}\}, \{\overline{A}, \overline{B}\}, \{\overline{A}, B\}$

DEMOSTRACIÓN: Veamos el segundo de los casos

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) &= \mathrm{P}\left(\overline{A\cup B}\right)=1-\mathrm{P}\left(A\cup B\right)\\
&= 1-\left(\mathrm{P}\left(A\right)+\mathrm{P}\left(B\right)-\mathrm{P}\left(A\cap B\right)\right)\\
&= 1-\mathrm{P}\left(A\right)-\mathrm{P}\left(B\right)+\mathrm{P}\left(A\right)\cdot\mathrm{P}\left(B\right)\\
&= \left(1-\mathrm{P}\left(A\right)\right)\cdot\left(1-\mathrm{P}\left(B\right)\right)\\
&= \mathrm{P}\left(\overline{A}\right)\cdot\mathrm{P}\left(\overline{B}\right).
\end{aligned}$$

Se generaliza la definición de independencia para n sucesos de la forma siguiente:

Definición 2.14 *Una colección de n sucesos se dicen independientes si para cualquier subconjunto $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_j}\}$ para $j = 2, 3, \ldots, n$ se cumple*

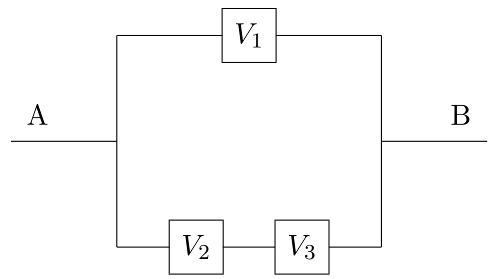
$$\mathrm{P}\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_j}\right)=\mathrm{P}\left(A_{i_1}\right)\cdot\mathrm{P}\left(A_{i_2}\right)\cdots\mathrm{P}\left(A_{i_j}\right)$$

Obsérvese que la regla del producto de probabilidades se tiene que dar para dos cualesquiera, tres cualesquiera, etc.

Ejemplo: *Se lanza una moneda 9 veces. Calcular la probabilidad de obtener la primera cara en la novena tirada.*

El suceso consiste en obtener 8 cruces en las 8 primeras tiradas, y después una cara. Como se trata de sucesos independientes, cada uno de probabilidad $\frac{1}{2}$ el resultado es $\left(\frac{1}{2}\right)^9$.

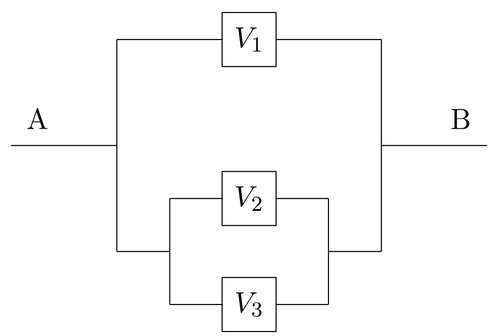
Ejemplo: *Un sistema de tuberías tiene la forma de la figura adjunta. El agua fluye desde A hasta B, y V_i son válvulas, inicialmente cerradas que se abren independientemente por control remoto mediante interruptores con probabilidad p. Abriendo todos los interruptores, calcular, en cada caso, la probabilidad de que el agua llegue hasta B.*



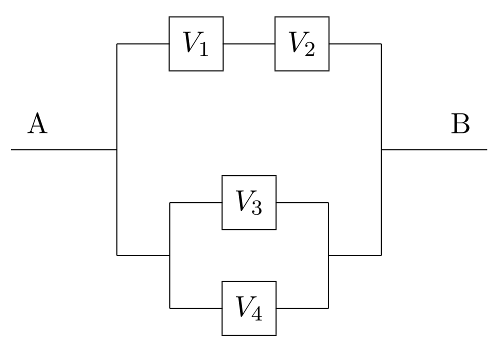
Consideremos los sucesos $V_i = \{$ la válvula i se abre$\}$; $\mathrm{P}(V_i) = p$. Para que el agua llegue hasta B debe estar abierta V_1, o bien V_2 y V_3.

$$\mathrm{P}(V_1 \cup (V_2 \cap V_3)) = \mathrm{P}(V_1) + \mathrm{P}(V_2 \cap V_3) - \mathrm{P}(V_1 \cap (V_2 \cap V_3)) = p + p^2 - p^3$$

Idéntico problema para los circuitos



Solución: $3p - 3p^2 + p^3$



Solución: $2p - 2p^3 + p^4$

2.5 Probabilidad total y teorema de Bayes

Un ejemplo típico de aplicación del Teorema de la Probabilidad Total (y del Teorema de BAYES) es el siguiente:

Ejemplo: *Una urna contiene 3 bolas blancas y 3 negras, mientras que una segunda contiene 4 blancas y 5 negras. Se elige al azar una urna y de ésta se saca tambien al azar una bola.*

(a) Probabilidad de que la bola sea blanca.

(b) Probabilidad de que la bola haya sido extraida de la primera urna sabiendo que es blanca

Que la bola sea blanca depende de la urna elegida; si se elige la primera urna, la probabilidad de que la bola sea blanca es $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, y si se ha elegido la otra, la probabilidad de bola blanca es $\frac{4}{9}$. Evidentemente la bola se ha extraido de una de las dos urnas, y sólo de una de ellas. Conociendo la probabilidad de elección de las urnas y las probabilidades condicionales anteriores, el teorema de la Probabilidad Total y el teorema de Bayes resuelven el problema.

Empecemos definiendo lo que es un sistema completo de sucesos (o partición del espacio muestral):

Definición 2.15 *Un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ forman un sistema completo, o una partición del espacio muestral Ω de un experimento si cumplen:*

- $A_i \neq \emptyset, \ \forall i$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

En el problema anterior llamemos $A_i = \{\text{La bola procede de la urna } i\}$; tenemos que $\{A_1, A_2\}$ es un sistema completo de sucesos. Sea también $B =$

{la bola es blanca}. Conocemos las probabilidades de A_i que son iguales a $\frac{1}{2}$; estas son llamadas probabilidades incondicionales o probabilidades "a priori". El problema nos pide la probabilidad del suceso B y la del suceso condicionado $A_1 \mid B$ (probabilidad "a posteriori" del suceso A_1).

Teorema 2.10 (Probabilidad Total) *Sea $\{A_i\}_1^n$ una partición de Ω, y sea B un suceso cualquiera; entonces*

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B \mid A_i)$$

Demostración:

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i) .$$

Como los sucesos $B \cap A_i$ son incompatibles dos a dos

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B \mid A_i)$$

La figura 2.4 ilustra el teorema para una partición de cuatro sucesos.

En el problema que inicia la sección, tenemos:

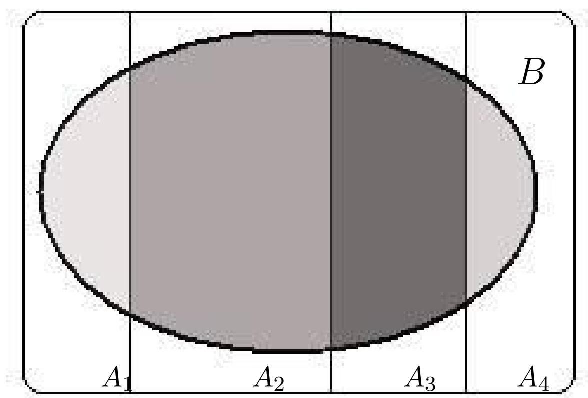
$$A_1 = \{\text{La bola se ha extraido de la urna 1}\}, \quad \mathrm{P}(A_1) = \frac{1}{2}$$
$$A_2 = \{\text{La bola se ha extraido de la urna 2}\}, \quad \mathrm{P}(A_2) = \frac{1}{2}$$
$$B = \{\text{La bola es blanca}\} \quad \mathrm{P}(B \mid A_1) = \frac{3}{6}, \quad \mathrm{P}(B \mid A_2) = \frac{4}{9}$$

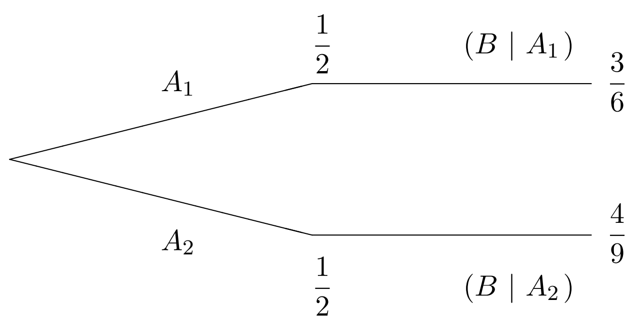
De donde

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(B \mid A_1) + \mathrm{P}(A_2) \cdot \mathrm{P}(B \mid A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{36}$$

El cálculo de $\mathrm{P}(B)$ se puede hacer con un diagrama de árbol:

Figura 2.4: Probabilidad Total





Se suman ahora los productos de la ramas horizontales (una rama por cada elemento de la partición) obteniéndose

$$\mathrm{P}\,(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{36}.$$

Teorema 2.11 (Bayes) *Sea* $\{A_i\}_1^n$ *una partición de* Ω*, y sea* B *un suceso tal que,* $\mathrm{P}(B) > 0$*; entonces*

$$\mathrm{P}(A_k \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_k) \cdot \mathrm{P}(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B \mid A_i)}$$

Demostración: Aplicando el teorema de la Probabilidad Total

$$\mathrm{P}(A_k \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_k \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A_k) \cdot \mathrm{P}(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B \mid A_i)}$$

Resolvamos el segundo apartado del problema anterior usando el teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_1 \mid B) &= \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(B \mid A_1)}{\sum_{i=1}^{2} \mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B \mid A_i)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{17}{36}} = \frac{9}{17}. \end{aligned}$$

2.6 Problemas

Ley de Laplace. Unión de sucesos

2.1 En una ciudad se publican 3 periódicos A, B, y C. Mediante una encuesta se estima que el 30 % de la población lee el periódico A, el 20 % lee B, el 15 % lee C, el 10 % lee A y B, el 6 % lee A y C, el 5 % lee B y c, y el 3 % lee los tres periódicos.

(a) ¿Qué porcentaje lee al menos dos periódicos? (S: 15 %)

(b) ¿Qué porcentaje lee solo un periódico? (S: 32 %)

(c) ¿Qué porcentaje no lee ningún periódico? (S: 53 %)

(d) ¿Qué porcentaje lee A pero no B? (S: 20 %)

2.2 Durante un año, las personas de una ciudad utilizan tres tipos de transportes: metro(M), autobús (A) y coche particular (C). La probabilidad de que una persona haya usado un medio u otro durante este año es

$$\begin{array}{ll} \mathrm{P}\,(M) = 0'30 & \mathrm{P}\,(A) = 0'20 \\ \mathrm{P}\,(C) = 0'15 & \mathrm{P}\,(M \cap A) = 0'10 \\ \mathrm{P}\,(M \cap C) = 0'05 & \mathrm{P}\,(A \cap C) = 0'06 \\ \mathrm{P}\,(M \cap A \cap C) = 0'01 & \end{array}$$

Calcular las siguientes probabilidades

(a) Que una persona tome al menos dos medios de transporte. (S: 0'19)

(b) Que una persona viaje en metro y no en autobús. (S: 0'20)

(c) Que una persona viaje en metro o en coche y no en autobús. (S: 0'25)

(d) Que una persona viaje en metro y en autobús, pero no viaje en coche. (S: 0'09)

(e) Que vaya a pie. (S: 0'55)

2.3 Dados tres sucesos A, B, C expresar los siguientes sucesos y representarlos mediante diagramas de Venn.

(a) Ocurre alguno de ellos.

(b) Ocurre exactamente uno de ellos.

(c) Ocurren exactamente dos de ellos.

(d) Ocurren no más de dos de ellos.

(e) Ocurren más de uno.

2.4 Sean A, B y C tres sucesos tales que

- La probabilidad de cada uno es p
- La probabilidad de la intersección de dos cualesquiera es q

- La probabilidad de la intersección de los tres es r

Calcular las siguientes probabilidades

(a) $\mathrm{P}(A \cup B)$ (S: $2p - q$)

(b) $\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$ (S: $3p - 3q + r$)

(c) De que ocurra exactamente uno de los sucesos. (S: $3(p - 2q + r)$)

(d) De que ocurran exactamente dos de los sucesos. (S: $3(q - r)$)

2.5 En una reunión de 20 personas hay 8 que sólo hablan inglés, 7 sólo español y 5 ambos idiomas. Se eligen, al azar, dos de ellas ¿cuál es la probabilidad de que hablen el mismo idioma? (S: 67/95)

2.6 Una urna contiene 7 bolas blancas y 5 negras. Calcular la probabilidad de que en 10 extracciones haya 5 bolas de cada color. (S: 7/22)

2.7 Una urna contiene $2n - 1$ bolas numeradas del 1 al $2n - 1$. Se extraen simultáneamente dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que sus números sumen impar? (S: $\frac{n}{2n-1}$)

2.8 De una baraja de 40 cartas se extraen 3 al azar.

(a) Probabilidad de que salga exactamente un as. (S: 0'2551)

(b) Probabilidad de que salga al menos un as. (S: 0'2773)

2.9 De entre 10 números positivos, y 6 negativos, se eligen 3 sin repetición. Calcular la probabilidad de que su producto sea negativo. (S: 0'5179)

2.10 Se lanzan cuatro dados ¿qué es más probable, que salga al menos un 6 ó que no? (S: Que salga al menos un 6 tiene $p = 0'5177$)

2.11 Lanzamos 6 dados ¿Cuál es la probabilidad de que salgan las seis caras del dado? (S: $0'0154$) ¿Y si lanzamos 7 dados? (S: $0'1080$)

2.12 Se lanza un dado 5 veces. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) $A = \{\text{Salen 5 unos}\}$ (S: $0'0001$)

(b) $B = \{\text{Salen exactamente 2 treses}\}$ (S: $0'1608$)

(c) $C = \{$En las tres primeras tiradas sale 1 y en las restantes no$\}$ (S: $0'0032$)

(d) $D = \{$Salen al menos 4 seises$\}$ (S: $0'0033$)

(e) $E = \{$No sale el 5$\}$ (S: $0'4019$)

2.13 ¿Cuál es la probabilidad de que en una reunión con n personas, haya 2 que tengan el mismo cumpleaños? ¿Cuál es el mínimo n para que la probabilidad supere $0'5$? (S: 23)

2.14 Si se lanzan 6 bolas iguales (distintas) en tres cajas de modo que todas tengan la misma probabilidad de caer en cualquier caja ¿cuál es la probabilidad de que las tres cajas queden ocupadas? (S: véanse los problemas (1.36) y (1.37) 5/14, 20/27)

2.15 Si se lanzan 10 bolas iguales (distintas) en tres cajas de modo que todas tengan la misma probabilidad de caer en cualquier caja, ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera caja caigan 4 bolas? (S: 7/66, $0'2276$)

Independencia. Sucesos condicionados

2.16 Si Ω es el suceso seguro, pruébese que los sucesos A y Ω son independientes.

2.17 En el lanzamiento de un dado, se consideran los sucesos

$A = \{$ Obtener una puntuación mayor o igual a 4$\}$

$B = \{$ Obtener 3 ó 6$\}$.

¿ Son independientes los sucesos A y B ? (S: sí)

2.18 Dados los sucesos A y B independientes, con $\mathrm{P}(A) = 0'4$ y $\mathrm{P}(B) = 0'6$, hallar la probabilidad de que sólo se presente uno de ellos. (S: 0'52)

2.19 Sean A y B sucesos independientes; sea C otro suceso. Averígüese si se cumple

$$\mathrm{P}(A \cap B \mid C) = \mathrm{P}(A \mid C)\,\mathrm{P}(B \mid C)$$

2.20 Sean A y B dos sucesos independientes tales que la probabilidad de que ocurran simultáneamente es de 1/6. Determinar $\mathrm{P}(A)$ y $\mathrm{P}(B)$ en los siguientes casos:

(a) La probabilidad de que ninguno ocurra es 1/3 (S: $1/2, 1/3$ ó $1/3, 1/2$)

(b) La probabilidad de que ocurra A y no B es 1/3 (S: $1/2, 1/3$)

2.21 Dados A y B tales que $\mathrm{P}(A) = 0'4$, $\mathrm{P}(B) = 0'3$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0'1$. Determínense las siguientes probabilidades:

(a) $\mathrm{P}\left(\overline{A} \mid \overline{B}\right)$ (S: 4/7)

(b) $\mathrm{P}(A \mid A \cup B)$ (S: 2/3)

(c) $\mathrm{P}(A \mid A \cap B)$ (S: 1)

(d) $\mathrm{P}\left(\overline{A} \mid B\right)$ (S: 2/3)

2.22 Una urna contiene 5 bolas blancas, 4 rojas y 3 negras. Otra contiene 3 blancas, 6 rojas y 7 negras. Se elige al azar una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean del mismo color? (S: $\frac{5}{16}$)

2.23 Una máquina A produce piezas de buena calidad con una probabilidad de $0'8$. Otra máquina B (independiente de A) lo hace con probabilidad $0'9$. Se separa una pieza de cada máquina. Hallar

(a) Probabilidad de que ambas sean defectuosas. (S: $0'02$)

(b) Probabilidad de que sólo una sea defectuosa. (S: $0'26$)

2.24 Se lanzan tres dados. Si resultan tres caras distintas ¿cuál es la probabilidad de que haya salido un uno? (S: 1/2)

2.25 Se extraen dos bolas de una urna que contiene 8 blancas y 7 negras. Si se sabe que una de las bolas extraidas es negra, calcúlese la probabilidad de que la otra sea blanca. (S: 56/77)

2.26 Se lanza una moneda hasta que aparezca por primera vez el mismo resultado dos veces consecutivas. Calcular la probabilidad de que

(a) El experimento se termine antes del sexto lanzamiento. (S: 15/16)

(b) Se necesite un número par de lanzamientos. (S: 2/3)

2.27 Consideremos una moneda trucada de tal forma que la probabilidad de cara $\mathrm{P}(C) = 0'7$, y la probabilidad de cruz $\mathrm{P}(\times) = 0'3$. Si se arroja la moneda 5 veces, calcúlense las probabilidades de los siguientes sucesos

(a) Cinco caras. (S: 0'1681)

(b) Dos cruces. (S: 0'3087)

(c) En las dos primeras tiradas cruces y caras en el resto. (S: 0'0309)

(d) Al menos una cara. (S: 0'9976)

(e) Dos o tres caras. (S: 0'4410)

2.28 La probabilidad de que un componente de una máquina se averíe es de $0'01$. Si la máquina tiene 50 componentes, calcula la probabilidad de que se averíe la máquina en los siguientes casos:

(a) La máquina se avería cuando lo hace algún componente. (S: $0'3950$)

(b) La máquina se avería cuando fallan dos o mas componentes. (S: $0'0894$)

(c) La máquina se avería solo si fallan todos los componentes. (S: $10^{-100} \approx 0$)

2.29 Dos personas A y B, juegan con una moneda con las reglas siguientes: la moneda es arrojada alternativamente por los jugadores, comenzando a jugar A; gana la partida el primero que obtenga cara. Calcular la probabilidad de cada jugador de ganar. (S: $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$)

2.30 En una urna hay bolas (más de una) blancas y negras. Se extraen dos al azar; pruébese que son iguales las probabilidades de los sucesos siguientes tanto si se hace con devolución o sin ella:

(a) { La primera es blanca }.

(b) { La segunda es blanca }.

2.31 Cada uno de los 10 miembros de una determinada sociedad, lanza una moneda para decidir si acude o no a una reunión de la misma. Un miembro de la reunión acude si sale cara. Hallar la probabilidad de que acuda una mayoría de miembros a la reunión. (S: $0'3770$). Repetir el problema con un número impar de miembros. (S: $0'5$)

2.32 Simultáneamente A lanza tres monedas al aire y B lanza dos. Gana quien obtiene el mayor número de caras. Calcular la probabilidad de que

(a) Gane A (S: $8/16 = 0'5$)

(b) Gane B (S: 3/16)

(c) Empate (S: 5/16)

(d) Gana A si en caso de empate se repiten los lanzamientos. (S: 8/11)

2.33 Dos personas juegan con dos dados, arrojándolos sucesivamente de forma que la persona A gana si obtiene diez puntos antes de que B obtenga ocho, y gana B si saca ocho puntos antes que A saque diez. Si empieza a jugar A, hallar la probabilidad de ganar de cada uno. (S: $\frac{36}{91}$ y $\frac{55}{91}$)

2.34 Se lanza un dado las veces necesarias hasta que aparezca un uno. Si se sabe que en el primer lanzamiento no ha salido el uno, calcular

(a) Probabilidad de que sean necesarios más de tres lanzamientos. (S: 25/36)

(b) Si además sabemos que se ha necesitado un número par de lanzamientos, ¿cuál es la probabilidad de que hayan sido exactamente 2? (S: 11/36)

2.35 De una baraja española se extraen 6 cartas con devolución. Calcúlese la probabilidad de que figuren los 4 palos. Generalizar para n cartas.

Solución: Llamemos

$$\begin{array}{ll} B = \{\text{aparecen los 4 palos}\} & \overline{B} = \{\text{algún palo no aparece}\} \\ A_O = \{\text{falta el palo OROS}\} & A_C = \{\text{falta el palo COPAS}\} \\ A_B = \{\text{falta el palo BASTOS}\} & A_E = \{\text{falta el palo ESPADAS}\} \end{array}$$

entonces $\overline{B} = A_O \cup A_C \cup A_B \cup A_E$. Aplicando la probabilidad de una unión y teniendo en cuenta que

- La probabilidad de que no aparezca un palo determinado es $\left(\frac{3}{4}\right)^6$.
- La probabilidad de que no aparezcan dos palos determinados es $\left(\frac{2}{4}\right)^6$.
- La probabilidad de que no aparezcan tres palos determinados es $\left(\frac{1}{4}\right)^6$.
- La probabilidad de que no aparezcan los 4 palos es (obviamente) 0.

Por tanto

$$\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^6 - 6\left(\frac{2}{4}\right)^6 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{317}{512} \rightarrow \mathrm{P}\left(B\right) = \frac{195}{512}.$$

Para n cartas se razona de la misma forma y se obtiene

$$1 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^n + 6\left(\frac{2}{4}\right)^n - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

2.36 De una baraja española se extraen cartas con devolución, una a una, hasta que aparezcan los cuatro palos ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten exactamente 6 extracciones?

Solución: Si p_n es la probabilidad de que en n extracciones han salido los 4 palos, y q_n la probabilidad de necesitar exactamente n extracciones, se tiene

$$\begin{aligned} p_n &= q_4 + q_5 + \cdots + q_n \\ p_{n-1} &= q_4 + q_5 + \cdots + q_{n-1} \end{aligned}$$

Por lo que $q_n = p_n - p_{n-1}$, y aplicando el problema anterior:

$$\begin{aligned} q_6 = p_6 - p_5 &= \left[1 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^6 + 6\left(\frac{2}{4}\right)^6 - 4\left(\frac{1}{4}\right)^6\right] - \\ &- \left[1 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^5 + 6\left(\frac{2}{4}\right)^5 - 4\left(\frac{1}{4}\right)^5\right] \\ &= 0'1465. \end{aligned}$$

Probabilidad total y Teorema de Bayes

2.37 Un juego consiste en lanzar dos dados; se gana si la suma de puntuaciones es 7. Si un jugador es tramposo (lleva sus dados trucados), gana con seguridad. Suponiendo que el 50 % de los jugadores de dados son tramposos, hallar la probabilidad de que un determinado jugador que ha ganado sea tramposo. (S: $\frac{6}{7}$)

2.38 Se tienen 80 dados normales y 20 trucados, de forma que la probabilidad de obtener AS (uno) en los trucados es triple que la de obtener otro número. De los 100 dados se elige uno al azar, se lanza y se obtiene un 1. Probabilidad de que el dado sea normal. (S: 0'64)

2.39 Se tienen 10 monedas de forma que 5 son legales, 3 tienen dos caras y las otras dos tienen dos cruces. Se elige una moneda al azar y se lanza al aire.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara? (S: 11/20)

(b) Si sale cara ¿cuál es la probabilidad de que sea legal? (S: 5/11)

(c) Lanzamos de nuevo la moneda ¿cuál es la probabilidad de que salga cara si en el primer lanzamiento también salió cara? (S: 17/22)

2.40 En una urna hay 7 bolas blancas y 5 negras. Se extrae una bola al azar y se desecha; a continuación se introducen en la urna dos bolas de color distinto a la que se extrajo, y se extrae otra bola.

(a) Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea blanca. (S: 0'5577)

(b) Si la segunda bola ha resultado blanca, hallar la probabilidad de que la primera haya sido negra. (S: 0'5172)

2.41 La persona A miente una de cada cinco veces; la persona B miente (independientemente de A) dos de cada cinco veces. De una urna que contiene 3 bolas blancas y 2 negras, se extrae una al azar. Si A y B dicen que es blanca, hállese la probabilidad de que realmente sea blanca. (S: 9/10)

2.42 Se tienen 7 urnas con 6 bolas cada una de forma que la urna i con $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ contiene i bolas blancas y $6 - i$ negras. Tomamos una urna al azar y sacamos tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color? (S: 1/2)

2.43 Una urna contiene 3 bolas blancas y 2 bolas negras y otra contiene 2 blancas y 3 negras. Se trasladan dos bolas de la primera a la segunda y de ésta se extrae una bola que resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de haber trasladado bolas del mismo color? (S: 7/16)

2.44 Se tiene una urna con 10 bolas blancas y 5 negras. Se extrae una bola y se introducen en la urna 3 bolas de color distinto a la que se extrajo. A continuación se extrae una bola.

(a) ¿ Cuál es la probabilidad de que sea blanca? (S: $0'6078$)

(b) Si la bola extraida es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola fuera negra? (S: $0'4194$)

2.45 Un proceso de fabricación puede estar ajustado o desajustado. Cuando está ajustado produce un 1 % de piezas defectuosas y cuando está desajustado un 10 %. La probabilidad de desajuste es de $0'3$. Se toma una muestra de diez piezas y resultan todas buenas; ¿cuál es la probabilidad de que el proceso esté desajustado? (S: $0'1418$)

2.46 En un sistema de alarma, la probabilidad de que se produzca un peligro es $0'1$. Si este se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es $0'95$. La probabilidad de que funcione la alarma sin haber peligro es $0'03$. Hallar la probabilidad de que

(a) Habiendo funcionado la alarma, no haya habido peligro. (S: 0'2213)

(b) Haya peligro y la alarma no funcione. (S: 0'005)

(c) No habiendo funcionado la alarma, haya un peligro. (S: 0'00569)

2.47 Supongamos que un test para diagnosticar cierta enfermedad tiene el 85 % de probabilidad de acierto. Si sabemos que el 5 % de cierta población tiene dicha enfermedad, calcular la probabilidad de que un paciente tenga la enfermedad habiendo dado positivo el test. (S: 0'2297)

2.48 En una tienda con rebajas hay dos mostradores con 100 prendas cada uno; en el primero hay 25 prendas en mal estado y en el segundo hay 20. Un cliente pasa una prenda del primer mostrador al segundo. Calcúlese la probabilidad de que otro cliente compre una prenda en buen estado del segundo mostrador. (S: $0'7995$)

2.49 Un estudiante tiene un despertador que sonará a la hora fijada con probabilidad $0'7$. Si suena, le despertará a tiempo de llegar a clase con probabilidad $0'8$. Si no suena la probabilidad de que llegue a clase es de $0'3$. Calcular la probabilidad de que llegue a tiempo a clase.

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{aligned}
S &= \{\text{el despertador suena a la hora}\}\\
\overline{S} &= \{\text{el despertador no suena a la hora}\}\\
T &= \{\text{el estudiante llega a tiempo}\}\\
\overline{T} &= \{\text{el estudiante llega a tiempo}\}
\end{aligned}$$

Conocemos las probabilidades

$$\mathrm{P}\,(S) = 0'7, \quad \mathrm{P}\,(T \mid S\,) = 0'8, \quad \mathrm{P}\left(T \;\middle|\; \overline{S}\right) = 0'3.$$

Aplicando la probabilidad total

$$\mathrm{P}(T) = \mathrm{P}(S) \cdot \mathrm{P}(T \mid S) + \mathrm{P}\left(\overline{S}\right) \cdot \mathrm{P}\left(T \mid \overline{S}\right) = 0'7 \cdot 0'8 + 0'3 \cdot 0'3 = 0'65.$$

2.50 Una empresa desea lanzar al mercado un nuevo producto para el próximo año. Al estudiar la posible situación económica que existirá dicho año se contemplan tres posibilidades: existencia de inflación, estabilidad o depresión; estimando que dichas alternativas son igualmente probables, y que la probabilidad de lanzar el nuevo producto al mercado es $0'7$ si hay inflación, $0'4$ si hay estabilidad y $0'1$ si hay depresión. ¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo producto esté en el mercado el próximo año? (S: $0'4$)

2.51 Para controlar la calidad de ciertas piezas se establece un test que se ha probado sobre 50 piezas correctas y 50 defectuosas dando el resultado de la tabla adjunta.

	negativo	positivo
correcta	49	1
defectuosa	2	48

Si se supone que la producción actual tiene un 5 % de defectuosos, se pide:

(a) Probabilidad de que el test dé resultado erróneo.

(b) Si el test da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la pieza sea realmente defectuosa?

(c) Al considerar un grupo de piezas aparecen 3 resultados positivos, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos sea erróneo?

Solución: Consideremos los sucesos

- $B = \{$la pieza es correcta$\}$
- $D = \{$la pieza es defectuosa$\}$
- $T_{+} = \{$el test da positivo$\}$
- $T_{-} = \{$el test da negativo$\}$

(a) Sea $E = \{\text{el test da error}\}$. E se verifica cuando el test da negativo siendo la pieza correcta o cuando da positivo siendo defectuosa. Por lo que, de la tabla, tenemos:

$$\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(T_+ \mid B) + \mathrm{P}(T_- \mid D) = \frac{1}{50} + \frac{2}{50} = 0'06$$

(b)

$$\mathrm{P}(D \mid T_+) = \frac{\mathrm{P}(T_+ \mid D)\,\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(T_+ \mid D)\,\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(T_+ \mid B)\,\mathrm{P}(B)} =$$

$$= \frac{\frac{48}{50}\frac{5}{100}}{\frac{48}{50}\frac{5}{100} + \frac{1}{50}\frac{95}{100}} = \frac{48}{67} = 0'716418$$

(c) Si A es el suceso $\{\text{alguna pieza es correcta}\}$, como cuando el test da positivo la probabilidad de defectuosa es 0'716418, obtenemos

$$\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = (0'716418)^3 = 0'367705 \rightarrow \mathrm{P}(A) = 0'632295$$

2.52 Se tienen $n+1$ bolsas iguales con n bolas cada una siendo $n \geq 3$. En la primera las n bolas son negras; en la segunda hay $n-1$ negras y una blanca; en la tercera hay $n-2$ negras y 2 blancas y así sucesivamente hasta la última bolsa en la que hay n bolas blancas. Se toma una bolsa al azar y de ella se sacan también al azar tres bolas a la vez. Probabilidad de que sean blancas las tres. (S: $0'25$. Véase el problema 1.29)

Problemas de examen

2.53 Una urna contiene 2 bolas blancas, 2 negras y 4 rojas. Se extrae una bola al azar sin mirarla, y a continuación sin devolverla se extrae otra que resulta ser blanca ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola haya sido roja? (S: 4/7)

2.54 En una urna hay 5 bolas entre rojas y blancas (se incluye el caso en que no hay ninguna blanca o ninguna roja). Se extrae una al azar y resulta ser roja. Calcular la probabilidad de que el contenido de la urna sea 3 rojas y 2 blancas. (S: 1/5)

2.55 Una urna A contiene 2 bolas blancas y 2 negras; una urna B contiene 3 bolas blancas y 2 negras. Se traslada una bola de la urna A (elegida al azar) a la urna B; después se extrae al azar una bola de la urna B que resulta ser blanca. Calcular la probabilidad de que la bola trasladada fuese blanca. (S: 4/7)

2.56 Se dispone de dos urnas; la primera U_1 contiene el 70 % de bolas blancas y el 30 % de negras, mientras que la composición de la segunda U_2 es el 30 % de blancas y el 70 % de negras. Se selecciona una urna al azar y se toman de ella 10 bolas una tras otra con reemplazamiento. El resultado es el suceso $B = \{\text{bnbbbbnbbb}\}$, donde b indica blanca y n negra ¿Cuál es la probabilidad de que ésta muestra provenga de la urna U_1 ? (S: $0'9938$)

2.57 Tenemos 9 monedas en una bolsa. Dos monedas son legales, tres tienen dos caras y cuatro tienen dos cruces. Elegimos al azar una moneda:

(a) Probabilidad de obtener cara al lanzarla. (S: 4/9)

(b) Si al lanzarla se ha obtenido cara, probabilidad de que sea legal. (S: 1/4)

(c) Se ha lanzado una vez y ha salido cara. Probabilidad de que al volverla a lanzar se obtenga cara de nuevo. (S: 7/8)

2.58 El 80 % de las jarras de cristal de una cierta fábrica, son producidas por la máquina A y el 20 % por la máquina B. Una jarra es defectuosa si contiene burbujas de aire o materia extraña o ambas cosas. Una jarra contiene burbujas de aire independientemente de si contiene materia extraña. La probabilidad de que una jarra fabricada por la máquina A tenga burbujas es 0'05 y de que tenga materia extraña es 0'02. Para la máquina B las probabilidades son de 0'01 y 0'03 respectivamente.

(a) Calcular el porcentaje de jarras defectuosas. (S: $6'3\,\%$)

(b) Si una jarra tiene burbujas pero no materia extraña,¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la máquina A? (S: $0'9528$)

2.59 Un concursante de TV opta a un premio de la siguiente forma: hay tres sobres, en uno de los cuales está el premio y elige uno de ellos; el presentador retira de entre los dos restantes uno que **no** tiene premio y le da al concursante la posibilidad de elegir el sobre restante ¿Qué es más ventajoso para el concursante, quedarse con el sobre elegido o cambiar su elección? Razónese la respuesta. (S: cambiar)

2.60 La probabilidad de hacer diana con un dardo para un jugador es $\dfrac{1}{3}$. Dicho jugador lanza tres veces un dardo; calcular la probabilidad de:

(a) Fallar todos.

(b) Acertar exactamente una vez.

(c) Acertar al menos una vez.

(d) Acertar todos, sabiendo que al menos ha acertado uno.

Solución:

(a) La probabilidad de fallar uno es $\frac{2}{3}$. Luego la de fallar todos es

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

(b) La probabilidad de acertar uno y fallar dos en un orden determinado es $\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{4}{27}$. Esto se puede conseguir de tres formas AFF,FAF,FFA por lo que la probabilidad pedida es $\frac{12}{27}$.

(c) $1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$.

(d) Si $T = \{$ acertar todos $\}$ y $B = \{$ acertar al menos uno $\}$, se tiene

$$\mathrm{P}\,(T \mid B\,) = \frac{\mathrm{P}\,(T \cap B)}{\mathrm{P}\,(B)} = \frac{\mathrm{P}\,(T)}{\mathrm{P}\,(B)} = \frac{1/27}{19/27} = \frac{1}{19}.$$

2.61 Tres máquinas A,B y C, fabrican piezas similares. La máquina A produce 300 piezas por hora con un porcentaje del 2 % de defectuosas, la máquina B produce 450 piezas a la hora con un porcentaje de defectuosas del 3,5 % y la máquina C produce 600 piezas en una hora y tiene un porcentaje del 2,5 % de defectuosas. Todas las piezas producidas se reunen en un almacén. Si se elige una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

Solución: Llamando $A = \{$la pieza proviene de A$\}$, (análogamente B y C) y $D = \{$la pieza es defectuosa$\}$, aplicando el Teorema de la probabilidad Total:

$$\mathrm{P}\,(D) = \frac{300}{1350} \cdot 0'02 + \frac{450}{1350} \cdot 0'035 + \frac{600}{1350} \cdot 0'025 = 0'0272.$$

2.62 Una fábrica elabora rotuladores azules y rojos en la misma proporción. Por defectos en el proceso de fabricación, algunos rotuladores salen con la tinta de otro color. Sabemos que el porcentaje de rotuladores azules que llevan tinta azul es 82 %, y el de rotuladores rojos que llevan tinta roja es 92 %.

(a) Calcular la probabilidad de que un rotulador tomado al azar tenga la tinta del color que le corresponde. (S: $0'87$)

(b) Si sabemos que un rotulador tomado al azar es defectuoso, calcular la probabilidad de que escriba en rojo. (S: $9/13$)

2.63 Una oposición consiste en contestar dos temas elegidos al azar de entre 20, aprobando si se contesta al menos uno bien. A tal examen se presentan dos opositores A y B. A sabe 16 temas mientras que B sólo 10. Si sólo uno de ellos aprobó ¿cuál es la probabilidad de que fuera B?

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{aligned} A &= \{\text{aprueba A}\} \\ B &= \{\text{aprueba B}\} \\ C &= \{\text{sólo aprueba uno}\} = (A \backslash B) \cup (B \backslash A). \end{aligned}$$

Se tiene $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{20}{2}} = \dfrac{3}{95}$ por lo que

$$\mathrm{P}\left(A\right) = 1 - \frac{3}{95} = \frac{92}{95}.$$

De la misma forma se calcula $\mathrm{P}\left(B\right) = \dfrac{29}{38}$. El suceso { aprueba B sabiendo que sólo uno aprobó } es

$$\mathrm{P}\left(B \mid C\right) = \frac{\mathrm{P}\left(B \backslash A\right)}{\mathrm{P}\left(C\right)} = \frac{\mathrm{P}\left(B \backslash A\right)}{\mathrm{P}\left(B \backslash A\right) + \mathrm{P}\left(A \backslash B\right)}.$$

Puesto que A y B son independientes:

$$\mathrm{P}\left(B \backslash A\right) = \mathrm{P}\left(B\right) - \mathrm{P}\left(A \cap B\right) = \mathrm{P}\left(B\right) - \mathrm{P}\left(A\right)\mathrm{P}\left(B\right) = \frac{29}{38} - \frac{92}{95}\frac{29}{38} = \frac{87}{3610}.$$

De la misma forma

$$\mathrm{P}\left(A \backslash B\right) = \mathrm{P}\left(A\right) - \mathrm{P}\left(A \cap B\right) = \mathrm{P}\left(A\right) - \mathrm{P}\left(A\right)\mathrm{P}\left(B\right) = \frac{92}{95} - \frac{92}{95}\frac{29}{38} = \frac{828}{3610}.$$

Por tanto

$$\mathrm{P}\left(B \mid C\right) = \frac{\dfrac{87}{3610}}{\dfrac{87}{3610} + \dfrac{828}{3610}} = \frac{87}{915}.$$

2.64 Se dispone de dos dados: el dado A tiene cuatro caras rojas y dos blancas y el dado B tiene dos caras rojas y cuatro blancas. Para decidir cuál de los dos se usa, se lanza una moneda y si sale cara se toma el dado A, mientras que si sale cruz se toma el dado B. El dado así seleccionado se lanza sucesivamente.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara roja en un lanzamiento? (S: 1/2)

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el *tercer* lanzamiento haya salido cara roja sabiendo que ha salido cara roja en los dos primeros? (S: 3/5)

(c) Probabilidad de que se haya usado el dado A sabiendo que en n lanzamientos, todos han salido rojos. (S: $\frac{2^n}{2^n+1}$)

2.65 Una empresa produce motores de los que el 30 % salen defectuosos. Antes de venderlos, se someten a un control de calidad que conduce a resultados erróneos en un 5 % de los casos (tanto para motores buenos como para los defectuosos), vendiéndose sólo aquellos que superan el control.

(a) Calcular el % de vendidos. (S: 68 %)

(b) Calcular el % de defectuosos entre los vendidos. (S: $2'2$ %)

(c) Calcular el % de motores buenos entre los rechazados por el control. (S: $10'94$ %)

2.66 El 42 % de la población activa de cierto pais está formada por mujeres. Se sabe que el 24 % de las mujeres y el 16 % de los hombres está en paro.

(a) Hallar la probabilidad de que una persona, elegida al azar, esté en paro. (S: $0'1936$)

(b) Elegida una persona al azar y, sabiendo que está en paro, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre? (S: $0'4793$)

2.67 Un armario tiene dos cajones. El cajón A contiene 4 monedas de oro y dos de plata; el cajón B contiene 3 de oro y 3 de plata. Se abre un cajón al azar y se extrae una moneda. Calcular:

(a) Probabilidad de que se haya abierto el cajón B y se haya extraido una moneda de oro. (S: 1/4)

(b) Probabilidad de que se haya abierto el cajón A, sabiendo que se ha extraido una moneda de oro. (S: 4/7)

2.68 El 30 % de los equipos informáticos que llegan a un determinado distribuidor son defectuosos. Antes de adquirirlos, el distribuidor realiza un test de calidad que da resultados erróneos en el 10 % de los casos.

Calcular la probabilidad de que sea defectuoso un determinado equipo al que el test ha calificado como defectuoso. (S: 27/34)

2.69 Supóngase que el 30 % de las botellas fabricadas en una planta son defectuosas. Si una botella es defectuosa, la probabilidad de que un controlador la detecte y la saque de la cadena de producción es $0'9$. Si una botella no es defectuosa, la probabilidad de que el controlador piense que es defectuosa y la saque de la cadena de producción es $0'2$.

(a) Si una botella se saca de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

(b) Si un cliente compra una botella que no ha sido sacada de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

Solución: Sean los sucesos $D = \{$ la botella es defectuosa $\}$ y $S = \{$ el controlador la saca de la cadena de producción $\}$; se tienen las probabilidades $\mathrm{P}(D) = 0'3$, $\mathrm{P}(S \mid D) = 0'9$ y $\mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right) = 0'2$

(a) aplicando el teorema de Bayes

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D \mid S) &= \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right)} \\ &= \frac{0'3 \cdot 0'9}{0'3 \cdot 0'9 + 0'7 \cdot 0'2} = \frac{27}{41}. \end{aligned}$$

(b) de la misma forma

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(D \mid \overline{S}\right) &= \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid \overline{D}\right)} \\ &= \frac{0'3 \cdot 0'1}{0'3 \cdot 0'1 + 0'7 \cdot 0'8} = \frac{3}{59}. \end{aligned}$$

2.70 Una empresa de software que diseña juegos para ordenador somete los diseños preliminares de sus productos a la evaluación previa de un grupo seleccionado de clientes. Según muestra la experiencia, el 95 % de los productos que tuvieron un gran éxito en el mercado recibieron buenas evaluaciones, el 60 % de los de éxito moderado recibieron buenas evaluaciones y sólo el 10 % de los que tuvieron escaso éxito fueron valorados favorablemente. Además, globalmente el 40 % de los productos de la empresa han tenido mucho éxito, el 35 % un éxito moderado y el 25 % una baja aceptación.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto, elegido al azar entre la producción de la fábrica, obtenga una buena evaluación previa?

(b) Si un nuevo producto obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

(c) Si un producto no obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{array}{ll} G = \{\text{el producto tiene mucho éxito}\} & M = \{\text{el producto tiene éxito moderado}\} \\ E = \{\text{el producto tiene escaso éxito}\} & B = \{\text{el producto tiene buena evaluación}\} \end{array}$$

Se tienen las probabilidades

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(G) = 0'4 & \mathrm{P}(M) = 0'35 & \mathrm{P}(E) = 0'25 \\ \mathrm{P}(B \mid G) = 0'95 & \mathrm{P}(B \mid M) = 0'4 & \mathrm{P}(B \mid E) = 0'1. \end{array}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(G)\cdot \mathrm{P}(B \mid G) + \mathrm{P}(M)\cdot \mathrm{P}(B \mid M) + \mathrm{P}(E)\cdot \mathrm{P}(B \mid E) \\ &= 0'95\cdot 0'4 + 0'6\cdot 0'35 + 0'1\cdot 0'25 \\ &= 0'615. \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{P}(G \mid B) = \frac{\mathrm{P}(G)\cdot \mathrm{P}(B \mid G)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0'4\cdot 0'95}{0'615} = 0'6179.$$

(c) Puesto que $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0'615 = 0'385$ y $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid G\right) = 1 - 0'95 = 0'05$, se tiene

$$\mathrm{P}\left(G \mid \overline{B}\right) = \frac{\mathrm{P}(G)\cdot \mathrm{P}\left(\overline{B} \mid G\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)} = \frac{0'4\cdot 0'05}{0'385} = 0'0519.$$

2.71 Una tienda vende CDs de dos marcas: A y B. Un CD de la marca A sale defectuoso el 10 % de las veces, mientras que uno de la marca B sale defectuoso el 6 % de las veces. El 35 % de las veces la tienda tiene CDs de las dos marcas, por lo tanto compro de la marca B, y el resto de las veces sólo tiene de la marca A. Si compro una caja y el CD que grabo sale defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que comprara una caja de la marca B?

Solución: Sean los sucesos $A = \{$ el CD comprado es de la marca A $\}$, $B = \{$ el CD comprado es de la marca B $\}$ y $D = \{$ el CD es defectuoso $\}$. Del enunciado se deduce

$$\mathrm{P}(A) = 0'65 \quad \mathrm{P}(B) = 0'35 \quad \mathrm{P}(D \mid A) = 0'1 \quad \mathrm{P}(D \mid B) = 0'06$$

Nos preguntan sobre el suceso $(B \mid D)$; aplicamos el teorema de Bayes

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B \mid D) &= \frac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(D \mid B)}{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(D \mid B) + \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(D \mid A)} \\ &= \frac{0'35 \cdot 0'06}{0'35 \cdot 0'06 + 0'65 \cdot 0'1} = 0'2442. \end{aligned}$$

2.72 La probabilidad de que un artículo provenga de una fábrica A_1 es 0'7, y la probabilidad de que provenga de otra A_2 es 0'3. Se sabe que la fábrica A_1 produce un 4 por mil de artículos defectuosos y la A_2 un 8 por mil.

(a) Se pide un artículo a una de las dos fábricas, elegida al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?

(b) Se observa un artículo y se ve que está defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica A_2?

(c) Se piden 5 artículos a la fábrica A_1 ¿Cuál es la probabilidad de que haya alguno defectuoso?

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{aligned} D &= \{\text{el artículo es defectuoso.}\} \\ A_1 &= \{\text{el artículo proviene de la fábrica } \mathrm{A}_1.\} \\ A_2 &= \{\text{el artículo proviene de la fábrica } \mathrm{A}_2.\} \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(D \mid A_1) + \mathrm{P}(A_2)\,\mathrm{P}(D \mid A_2) \\ &= 0'7 \cdot 0'004 + 0'3 \cdot 0'008 = 0'0052. \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{P}(A_2 \mid D) = \frac{\mathrm{P}(A_2)\,\mathrm{P}(D \mid A_2)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{0'3 \cdot 0'008}{0'0052} = \frac{6}{13}.$$

(c) Sean $B_i = \{$ el artículo -i- es defectuoso$\}$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Son independientes y $\mathrm{P}(B_i) = 0'004$, $\mathrm{P}\left(\overline{B}_i\right) = 0'996$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\{\text{alguno defectuoso}\}) &= 1 - \mathrm{P}(\{\text{ninguno defectuoso}\}) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(\overline{B}_1\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}_2\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}_3\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}_4\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}_5\right) \\ &= 1 - 0'996^5 = 1 - 0'9802 = 0'0198. \end{aligned}$$

2.73 En una etapa de producción de un artículo se aplica soldadura y para eso se usan tres robots. La probabilidad de que la soldadura sea defectuosa, así como la proporción de artículos procesados varía para cada robot de acuerdo a la tabla siguiente

Robot	Prob. Defectos	% artículos proc.
A	$0'002$	18
B	$0'005$	42
C	$0'001$	40

Calcúlese

(a) La proporción global de defectos producidos por los tres robots.

(b) La probabilidad de que un artículo con defectos haya sido soldado por el robot C.

Solución: Sea el suceso $D = \{$ La soldadura de un artículo es defectuosa$\}$ y sean A, B, C los sucesos $\{$ la soldadura la efectúa $\}$ el robot A,B,C respectivamente.

(a) Hay que hallar $\mathrm{P}(D)$ para lo que contamos con los datos

$$\mathrm{P}(D \mid A) = 0'002 \quad \mathrm{P}(D \mid B) = 0'005 \quad \mathrm{P}(D \mid C) = 0'001$$

Por el teorema de la probabilidad total

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(D \mid A) + \mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(D \mid B) + \mathrm{P}(C)\cdot\mathrm{P}(D \mid C)\\
&= 0'18\cdot 0'002 + 0'42\cdot 0'005 + 0'40\cdot 0'001 = 0'00286.
\end{aligned}$$

Así que globalmente, el 3 por mil (aproximadamente) de las piezas son defectuosas.

(b)

$$\mathrm{P}(C \mid D) = \frac{\mathrm{P}(C)\cdot\mathrm{P}(D \mid C)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{0'40\cdot 0'001}{0'00286} = 0'1399.$$

2.74 Dos compañías producen software informático. La primera proporciona el 70 % y la segunda el 30 % de la producción total. Por otra parte, se sabe que el 83 % del software suministrado por la primera compañía se ajusta a las normas establecidas , mientras que sólo el 63 % del suministrado por la segunda, se ajusta a dichas normas. Calcular la probabilidad de que un determinado software haya sido suministrado por la primera compañía, si se sabe que se ajusta a las normas.

Solución: Sean los sucesos

$A_1 = \{$El software es suministrado por la primera compañía$\}$
$A_2 = \{$El software es suministrado por la segunda compañía$\}$
$B = \{$El software se ajusta a las normas$\}$

Se pide calcular $\mathrm{P}(A_1 \mid B)$ y, puesto que $\{A_1, A_2\}$ forman un sistema completo de sucesos, por el teorema de Bayes

$$\mathrm{P}(A_1 \mid B) = \frac{\mathrm{P}(B \mid A_1)\cdot\mathrm{P}(A_1)}{\mathrm{P}(B \mid A_1)\cdot\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(B \mid A_2)\cdot\mathrm{P}(A_2)}$$

Del enunciado se deducen las probabilidades

$$\mathrm{P}(A_1) = 0'7,\quad \mathrm{P}(A_2) = 0'3,\quad \mathrm{P}(B \mid A_1) = 0'83,\quad \mathrm{P}(B \mid A_2) = 0'63.$$

Por lo que

$$\mathrm{P}(A_1 \mid B) = \frac{0'83\cdot 0'7}{0'83\cdot 0'7 + 0'63\cdot 0'3} \cong 0'75.$$

2.75 Supongamos que la probabilidad de exposición a la gripe durante una epidemia es $0'6$. Cierta vacuna tiene el 80 % de efectividad en proteger a una persona contra la gripe, si está expuesta a la epidemia. Una persona no vacunada tiene una probabilidad de $0'9$ de ser afectada por la gripe al ser expuesta.

Si tomamos dos personas, una vacunada y otra no, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una sea afectada por la gripe? (Supóngase la independencia de la exposición a la gripe de las dos personas)

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{aligned} E &= \{\text{Una persona se expone}\} \\ A &= \{\text{La persona vacunada se contagia}\} \\ B &= \{\text{La persona no vacunada se contagia}\} \end{aligned}$$

Nos piden $\mathrm{P}(A \cup B)$ y tenemos los datos siguientes

$$\mathrm{P}(E) = 0'6, \quad \mathrm{P}(A \mid E) = 0'2, \quad \mathrm{P}(B \mid E) = 0'9.$$

Entonces

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(E) \cdot \mathrm{P}(A \mid E) + \mathrm{P}\left(\overline{E}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A \mid \overline{E}\right) = 0'6 \cdot 0'2 + 0'4 \cdot 0 = 0'12.$$

Del mismo modo para el suceso B se tiene

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(E) \cdot \mathrm{P}(B \mid E) + \mathrm{P}\left(\overline{E}\right) \cdot \mathrm{P}\left(B \mid \overline{E}\right) = 0'6 \cdot 0'9 + 0'4 \cdot 0 = 0'54.$$

Como A y B son independientes

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0'12 + 0'54 - 0'0648 = 0'5952.$$

2.76 Se enseña a un mono a reconocer los colores introduciendo tres pelotas, una roja, una negra y una blanca en tres cajas con los mismos colores, una pelota para cada caja. Si el mono introduce las pelotas al azar, encuéntrense las siguientes probabilidades:

(a) Ninguna pelota se introduce en la caja del mismo color

(b) Al menos una pelota se introduce en la caja del mismo color

(c) Hay sólo una pelota en su caja correspondiente

(d) Hay dos pelotas (exactamente) en sus cajas

(e) Las tres pelotas están en sus cajas correspondientes.

Solución: El problema es equivalente al de elegir una de las seis permutaciones de $\{A, B, C\}$. Si la correcta es ABC, en la tabla siguiente se anotan los aciertos en todos los casos posibles

Permutación	Aciertos
ABC	3
ACB	1
BAC	1
BCA	0
CAB	0
CBA	1

(a) $\mathrm{P}\,(0 \text{ aciertos}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

(b) $\mathrm{P}\,(\text{ al menos un acierto}) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

(c) $\mathrm{P}\,(\text{ un acierto}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

(d) $\mathrm{P}\,(\text{ dos aciertos}) = \dfrac{0}{6} = 0$

(e) $\mathrm{P}\,(\text{tres aciertos}) = \dfrac{1}{6}$.