EGM0013

Controle Adaptativo

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

2023.1: 4T1234 (60h) (13:00-14:40h; 14:55-16:35)

Modelos para estimação - paralelo

Seja o sistema: $\dot{x} = -ax + bu, \quad a > 0$. Supor $u \in \mathcal{L}_\infty \implies x \in \mathcal{L}_\infty$, visto que,

$$x(t) = e^{-at}x_0 + \int_0^t e^{-a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau, \quad u, x \text{ mensuráveis}$$

Sol. homogênea Sol. particular

Objetivo: estimar a, b tal que $\epsilon = x - \hat{x} \to 0$

Modelo Paralelo: $\dot{\hat{x}} = -\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u$

$$\begin{aligned}\epsilon = x - \hat{x} \implies \dot{\epsilon} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= -ax + bu + \hat{a}\hat{x} - \hat{b}u. \text{ Somando e subtraindo o termo } a\hat{x},\\ &= -ax + bu + \hat{a}\hat{x} - \hat{b}u - a\hat{x} + a\hat{x}\\ &= -a(x - \hat{x}) + (\hat{a} - a)\hat{x} - (\hat{b} - b)u \implies\\ \dot{\epsilon} &= -a\epsilon + \tilde{a}\hat{x} - \tilde{b}u\end{aligned}$$

Se $\tilde{a} \equiv \tilde{b} \equiv 0 \implies \dot{\epsilon} = -a\epsilon \implies \epsilon(t) = e^{-at}\epsilon(0)$. Como $a > 0 \implies \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = 0$

Modelos para estimação – paralelo

Prova de estabilidade modelo paralelo: Candidata V :

$$V(\epsilon,\tilde{a},\tilde{b}) = \frac{1}{2}\left(\epsilon^2 + \frac{\tilde{a}^2}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}^2}{\gamma_2}\right) > 0, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$$

Erro de estimação e erros paramétricos envolvidos Quadráticos

$$\dot{V} = \left(\epsilon\dot{\epsilon} + \frac{\tilde{a}\dot{\tilde{a}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}\dot{\tilde{b}}}{\gamma_2}\right) = \epsilon\left[-a\epsilon + \tilde{a}\hat{x} - \tilde{b}u\right] + \frac{\tilde{a}\dot{\tilde{a}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}\dot{\tilde{b}}}{\gamma_2} = -a\epsilon^2 + \underbrace{\tilde{a}\epsilon\hat{x} - \tilde{b}\epsilon u}_{\textbf{Indefinido}} + \frac{\tilde{a}\dot{\tilde{a}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}\dot{\tilde{b}}}{\gamma_2}$$

Escolher portanto $\dot{\tilde{a}}, \dot{\tilde{b}}$ de modo a anular o termo de sinal indefinido

$\dot{\tilde{a}} = -\gamma_1\epsilon\hat{x}$ e $\dot{\tilde{b}} = \gamma_2\epsilon u$. Lembrando que para a, b constantes, $\dot{\tilde{a}} = \dot{\hat{a}}, \dot{\tilde{b}} = \dot{\hat{b}}$

Então, $\dot{V}(\epsilon,\tilde{a},\tilde{b}) = -a\epsilon^2 \leq 0.$ $\quad \epsilon,\tilde{a},\tilde{b} \in \mathcal{L}_\infty \implies \hat{a},\hat{b} \in \mathcal{L}_\infty$

$$\epsilon \in \mathcal{L}_\infty \implies \hat{x} \in \mathcal{L}_\infty, \quad \hat{x} = x - \epsilon$$

Modelos para estimação - paralelo

V é não crescente e tem um mínimo $(V \leq 0)$, então, $\exists \lim_{t \to \infty} V(t) = V_\infty < \infty$

$$\dot{V} = -a\epsilon^2 \implies \epsilon^2 = -\frac{1}{a}\dot{V} \implies \int_0^\infty \epsilon^2(\tau)d\tau = -\frac{1}{a}\int_0^\infty \dot{V}(\tau)d\tau = -\frac{1}{a}(V_\infty - V(0)) < \infty \implies \epsilon \in \mathcal{L}_2$$

Como $\epsilon \in \mathcal{L}_\infty, \tilde{a} \in \mathcal{L}_\infty, \tilde{b} \in \mathcal{L}_\infty, \hat{x} \in \mathcal{L}_\infty, u \in \mathcal{L}_\infty$, tem-se que $\dot{\epsilon} = -a\epsilon + \tilde{a}\hat{x} - \tilde{b}u \implies \dot{\epsilon} \in \mathcal{L}_\infty$

$\epsilon \in \mathcal{L}_\infty, \epsilon \in \mathcal{L}_2 (\epsilon \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2), \dot{\epsilon} \in \mathcal{L}_\infty$. Logo, pelo Lema de Barbalat: $\lim_{t \to \infty} \epsilon(t) = 0$

$$\lim_{t \to \infty} \dot{\hat{a}}(t) = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} \dot{\hat{b}}(t) = 0$$

E $\lim_{t \to \infty} \tilde{a}(t) = 0$ e $\lim_{t \to \infty} \tilde{b}(t) = 0$ apenas com sinal rico em frequências

Modelos para estimação – série-paralelo

Seja o sistema: $\dot{x} = -ax + bu, \quad a > 0$. Supor $u \in \mathcal{L}_\infty \implies x \in \mathcal{L}_\infty$, visto que,

Objetivo: estimar a, b tal que $\epsilon = x - \hat{x} \to 0$

Modelo Série-Paralelo: $\dot{x} = -ax + bu - a_m x + a_m x = -a_m x + (a_m - a)x + bu, a_m > 0$

$$\dot{x} + a_m x = (a_m - a)x + bu \implies (s + a_m)x(s) = (a_m - a)x(s) + bu(s)$$

$$x(s) = \frac{1}{s + a_m}\left[(a_m - a)x(s) + bu(s)\right] = b\frac{u(s)}{s + a_m} + (a_m - a)\frac{x(s)}{s + a_m}$$

$$\implies x(s) = {\theta^*}^T \phi, \text{ onde } \quad \theta^* = \begin{bmatrix} b \\ a_m - a \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} \dfrac{u(s)}{s + a_m} \\ \dfrac{x(s)}{s + a_m} \end{bmatrix}. \text{ Logo,}$$

$$\implies \hat{x}(s) = \theta^T \phi, \text{ onde } \quad \theta = \begin{bmatrix} \hat{b} \\ a_m - \hat{a} \end{bmatrix} \implies \dot{\hat{x}} = -a_m \hat{x} + \hat{b}u + (a_m - \hat{a})x$$

Modelos para estimação – série-paralelo

$$\Longrightarrow \ \hat{x}(s) = \theta^T \phi, \text{ onde } \ \theta = \begin{bmatrix} \hat{b} \\ a_m - \hat{a} \end{bmatrix} \Longrightarrow \dot{\hat{x}} = -a_m \hat{x} + \hat{b}u + (a_m - \hat{a})x$$

$$\begin{aligned} \epsilon = x - \hat{x} \ \Longrightarrow \ \dot{\epsilon} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= -a_m x + (a_m - a)x + bu + a_m \hat{x} - (a_m - \hat{a})x - \hat{b}u \\ &= -a_m(x - \hat{x}) + (\hat{a} - a)x - (\hat{b} - b)u \\ &= -a_m \epsilon + \tilde{a}x - \tilde{b}u \end{aligned}$$

$$\text{Se } \tilde{a} \equiv \tilde{b} \equiv 0 \ \Longrightarrow \ \dot{\epsilon} = -a_m \epsilon \ \Longrightarrow \ \epsilon(t) = e^{-a_m t}\epsilon(0). \text{ Como } a_m > 0 \ \Longrightarrow \ \lim_{t \to \infty} \epsilon(t) = 0$$

É possível controlar a convergência pela escolha do polo do filtro

Modelos para estimação – série-paralelo

Prova de estabilidade modelo série-paralelo: Candidata V :

$$V(\epsilon,\tilde{a},\tilde{b}) = \frac{1}{2}\left(\epsilon^2 + \frac{\tilde{a}^2}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}^2}{\gamma_2}\right) > 0, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$$

Erro de estimação e erros paramétricos envolvidos Quadráticos

$$\dot{V} = \left(\epsilon\dot{\epsilon} + \frac{\tilde{a}\dot{\tilde{a}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}\dot{\tilde{b}}}{\gamma_2}\right) = \epsilon\left[-a_m\epsilon + \tilde{a}\hat{x} - \tilde{b}u\right] + \frac{\tilde{a}\dot{\tilde{a}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}\dot{\tilde{b}}}{\gamma_2} = -a_m\epsilon^2 + \underbrace{\tilde{a}\epsilon\hat{x} - \tilde{b}\epsilon u}_{\textbf{Indefinido}} + \frac{\tilde{a}\dot{\tilde{a}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}\dot{\tilde{b}}}{\gamma_2}$$

Escolher portanto $\dot{\tilde{a}}, \dot{\tilde{b}}$ de modo a anular o termo de sinal indefinido

$\dot{\tilde{a}} = -\gamma_1\epsilon x$ e $\dot{\tilde{b}} = \gamma_2\epsilon u$. Lembrando que para a, b constantes, $\dot{\tilde{a}} = \dot{\hat{a}}, \dot{\tilde{b}} = \dot{\hat{b}}$

Então, $\dot{V}(\epsilon,\tilde{a},\tilde{b}) = -a_m\epsilon^2 \leq 0.$ $\quad \epsilon,\tilde{a},\tilde{b} \in \mathcal{L}_\infty \implies \hat{a},\hat{b} \in \mathcal{L}_\infty$

$$\epsilon \in \mathcal{L}_\infty \implies \hat{x} \in \mathcal{L}_\infty, \quad \hat{x} = x - \epsilon$$

Modelos para estimação – série-paralelo

Prova de estabilidade modelo série-paralelo:

V é não crescente e tem um mínimo $(V \leq 0)$, então, $\exists \lim_{t\to\infty} V(t) = V_\infty < \infty$

$$\dot{V} = -a_m\epsilon^2 \implies \epsilon^2 = -\frac{1}{a_m}\dot{V} \implies \int_0^\infty \epsilon^2(\tau)d\tau = -\frac{1}{a_m}\int_0^\infty \dot{V}(\tau)d\tau = -\frac{1}{a_m}(V_\infty - V(0)) < \infty \implies \epsilon \in \mathcal{L}_2$$

Como $\epsilon \in \mathcal{L}_\infty, \tilde{a} \in \mathcal{L}_\infty, \tilde{b} \in \mathcal{L}_\infty, \hat{x} \in \mathcal{L}_\infty, u \in \mathcal{L}_\infty,$ tem-se que $\dot{\epsilon} = -a_m\epsilon + \tilde{a}\hat{x} - \tilde{b}u \implies \dot{\epsilon} \in \mathcal{L}_\infty$

$\epsilon \in \mathcal{L}_\infty, \epsilon \in \mathcal{L}_2(\epsilon \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2), \dot{\epsilon} \in \mathcal{L}_\infty$. Logo, pelo Lema de Barbalat: $\lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = 0$

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\hat{a}}(t) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\hat{b}}(t) = 0$$

E $\lim_{t\to\infty} \tilde{a}(t) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} \tilde{b}(t) = 0$ apenas com sinal rico em frequências

Modelos para estimação – Comparação

Paralelo: $\dot{V} = -a\epsilon^2$, a desconhecido
Série-Paralelo: $\dot{V} = -a_m\epsilon^2$, a_m conhecido

Método série-paralelo é mais complexo, porém pode-se ajustar a velocidade de convergência

Desempenho na presença de ruído de medição: η, ou seja, $x = x + \eta$

Paralelo: $\dot{\hat{a}} = -\gamma_1 \epsilon \hat{x} = -\gamma_1 (x - \hat{x})\hat{x} = \gamma_1 (\hat{x}^2 - x\hat{x}) = \gamma_1 \left[\hat{x}^2 - (x + \eta)\hat{x}\right]$

Série-Paralelo: $\dot{\hat{a}} = -\gamma_1 \epsilon x = -\gamma_1 (x - \hat{x})x = \gamma_1 (-x^2 + x\hat{x}) = \gamma_1 \left[-(x + \eta)^2 + (x + \eta)\hat{x}\right]$

Ruído afeta mais o SP, pois depende do ruído e do seu valor quadrático. No caso P, depende só do ruído, ou seja, é menos afetado

Exemplo: série paralelo – Dynamic Parallel Model

$\dot{x} = -2x + \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) u, \quad$ com $f(x), g(x)$ funções conhecidas e α_1, α_2 constantes desconhecidas

Reescrevendo...

$$x = \frac{1}{s+2}[\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) u] = W(s) {\theta^*}^T \phi, \quad W(s) = \frac{1}{s+2}$$

Já modelos paramétricos no espaço de estados (SSPM) podem ser:

$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x$ é o estado disponível para medição

$\dot{x} = A_m x + (A - A_m)x + Bu, \quad x, u$ disponíveis para medição , A, B matrizes com parâmetros desconhecidos , A_m matriz estável de projeto

$$\dot{x} = A_m x + {\Theta^*}^T \Phi, {\Theta^*}^T = \begin{bmatrix} A_m - A & B \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix}^T$$

Exemplo: série paralelo – SSPM

Considere a planta

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

onde $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T$ e $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ são as matrizes com elementos desconhecidos.

O modelo SSPM é gerado como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_m & 0 \\ 0 & -a_m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a_{11} + a_m & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + a_m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} u,$$

onde $a_m > 0$ é uma constante de projeto.

Exemplo: série paralelo – SSPM

Este modelo pode ser reescrito como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_m & 0 \\ 0 & -a_m \end{bmatrix} x + \Theta^{*T}\Phi,$$

onde

$$\Theta^{*T} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_m & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + a_m & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad e \quad \Phi = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T.$$

Exercício:

Seja o sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

Suponha os estados x_1, x_2 acessíveis, bem como a entrada u. Os parâmetros $a_{11}, a_{12}, a_{21}, b_1, b_2$ são desconhecidos

Para efeito de simulação do sistema nominal, considere: $a_{11} = -0.25, a_{12} = 3, a_{21} = -5, b_1 = 1, b_2 = 2.2$

Objetivo: identificar os 5 parâmetros acima com:

a) $u = 10sin(2t)$
b) $u = 10sin(2t) + 7cos(3.6t)$

Vamos representar o sistema em função de cada variável de estado:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 u$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + b_2 u$$

Seja um parâmetro positivo a_m e dois modelos parâmetricos dados por:

$$z_1 = {\theta_1^*}^T \phi_1$$
$$z_2 = {\theta_2^*}^T \phi_2$$

Exercício:

Seja um parâmetro positivo a_m e dois modelos parâmetricos dados por:

$$z_1 = {\theta_1^*}^T \phi_1$$

$$z_2 = {\theta_2^*}^T \phi_2$$

$$z_1 = \frac{s}{s+a_m} x_1 \quad \theta_1^* = \begin{bmatrix} b_1 \\ a_{12} \\ a_{11} \end{bmatrix} \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{u}{s+a_m} \\ \frac{x_2}{s+a_m} \\ \frac{x_1}{s+a_m} \end{bmatrix}$$

$$z_2 = \frac{s}{s+a_m} x_2 \quad \theta_2^* = \begin{bmatrix} b_2 \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} \frac{u}{s+a_m} \\ \frac{x_1}{s+a_m} \end{bmatrix}$$

Leis adaptativas: $\dot{\theta}_1 = \Gamma_1 \epsilon_1 \phi_1$, $\dot{\theta}_2 = \Gamma_2 \epsilon_2 \phi_2,$ com $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0,$ simétricas

Lei adaptativa geral com normalização:

$$\dot{\theta} = \Gamma \frac{(z - \theta^T \phi)}{(1 + \alpha \phi^T \phi)^2} \phi$$

Discretização via método de Euler:

$$\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{\Delta t} = \Gamma \frac{(z_{k+1} - \theta_{k+1}^T \phi_{k+1})}{(1 + \alpha \phi_{k+1}^T \phi_{k+1})^2} \phi_{k+1},$$

$$\theta_{k+1} = \Gamma \frac{(z_{k+1} - \theta_{k+1}^T \phi_{k+1})}{(1 + \alpha \phi_{k+1}^T \phi_{k+1})^2} \phi_{k+1} \Delta t + \theta_k,$$

Exercício proposto:

Seja o sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

Suponha os estados x_1, x_2 acessíveis, bem como a entrada u. Os parâmetros $a_{11}, a_{22}, a_{21}, b_1, b_2$ são desconhecidos

Para efeito de simulação do sistema nominal, considere: $a_{11} = 0.7, a_{21} = 6, a_{22} = -0.4, b_1 = 1, b_2 = 3$

Objetivo: identificar os 5 parâmetros acima com:

a) $u = 11sin(4t)$
b) $u = 9sin(2t) + 11cos(4t)$