EGM0013

Controle Adaptativo

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

2023.1: 4T1234 (60h) (13:00-14:40h; 14:55-16:35)

Modelos paramétricos

Seja uma realização mínima de um sistema SISO, ou seja, supondo a planta controlável e observável

Uma realização mínima não descreve as componentes não controláveis ou não observáveis do sistema. Estas componentes podem resultar em estados não limitados na representação não mínima se alguma condição inicial associada com estas componentes seja não nula. Se, contudo, tais componentes sejam assintoticamente estáveis (AS), caem para zero exponencialmente rápido e o efeito pode ser desprezado na maioria das aplicações. Um sistema cujas componentes não controláveis são AS denomina-se ESTABILIZÁVEL e cujas componentes não observáveis são AS, DETECTÁVEIS.

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = h^T x \quad A_{n\times n}, \quad b_{n\times 1}, \quad h_{1\times n}$$

$n^2 + 2n$ elementos, n^2 de 0's e 1's
ou seja, especificam-se $2n$ parâmetros

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{z(s)}{r(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_{n-2}s^{n-2} + a_1 s + a_0},$$

Seja $s^n y = y^{(n)}(t)$

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_{n-1}u^{(n-1)} + b_{n-2}u^{(n-2)} + \cdots + b_0 u(t)$$

Modelos paramétricos – separando parâmetros de sinais E/S

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_{n-1}u^{(n-1)} + b_{n-2}u^{(n-2)} + \cdots + b_0 u(t)$$

$$\theta^* = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} u^{(n-1)} \\ u^{(n-2)} \\ \vdots \\ u \\ -y^{(n-1)} \\ -y^{(n-2)} \\ \vdots \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}(s)u \\ -\alpha_{n-1}(s)y \end{bmatrix}, \text{ onde } \alpha_{n-1} = \begin{bmatrix} s^{n-1} \\ s^{n-2} \\ \vdots \\ s \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $y^{(n)} = \theta^{*T} Y$ é linear em θ^* sendo apropriada para estimação de parâmetros

Visto que na maioria das aplicações apenas u, y estão disponíveis para medição e o uso de diferenciação não é desejável, usam-se filtros

Modelos paramétricos – separando parâmetros de sinais E/S

Seja um filtro estável de ordem n dado por $\Lambda(s) = s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \lambda_0$

$$\text{Logo, } z = \theta^{*T}\phi, \text{ onde } z \triangleq \frac{1}{\Lambda(s)}y^{(n)} = \frac{s^n}{\Lambda(s)}y$$

$$\phi \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_{n-1}(s)}{\Lambda(s)}u \\ -\dfrac{\alpha_{n-1}(s)}{\Lambda(s)}y \end{bmatrix} \rightarrow \text{ Vetor Regressor. No contexto de controle, é comum adicionar o setpoint}$$

$$\text{Exemplo com 1 parâmetro desconhecido: } \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b}{s+2}, \quad y^{(1)} + 2y = bu$$

$$\text{Seja } \Lambda(s) = s+2, \quad \frac{y^{(1)} + 2y}{s+2} = b\frac{1}{s+2}u \implies z = \theta^*\phi, \quad \theta^* = b, \phi = \frac{\alpha_0}{\Lambda(s)}u = \frac{1}{s+2}u$$

Mas θ^* é desconhecido, então define-se um erro de estimação $\epsilon = z - \hat{z}, \quad \hat{z} = \theta^T\phi$

Modelos paramétricos – separando parâmetros de sinais E/S

Mas θ^* é desconhecido, então define-se um erro de estimação $\epsilon = z - \hat{z}, \quad \hat{z} = \theta^T \phi$

Introduz-se um sinal de normalização n_s tal que $\dfrac{\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty, \quad m^2 = 1 + n_s^2$

$$\epsilon = \frac{\theta^{*T}\phi - \theta^T\phi}{m^2} = \frac{z - \theta^T\phi}{m^2} = -\frac{(\theta^T - \theta^*)^T\phi}{m^2} \implies \epsilon = \frac{-\tilde{\theta}^T\phi}{m^2} \implies \epsilon m = -\tilde{\theta}^T \frac{\phi}{m}$$

Escolhas típicas são $n_s^2 = \phi^T\phi, n_s^2 = \phi^T P \phi, P = P^T > 0, n_s^2 = \alpha\phi^T\phi, \alpha > 0$. Logo,

$$\epsilon = \frac{z - \hat{z}}{m^2} = \frac{z - \theta^T\phi}{m^2}$$

Método do gradiente, função de custo instantânea: $J(\theta) = \dfrac{\epsilon^2 m^2}{2} = \dfrac{(z - \theta^T\phi)^2}{m^4} . \dfrac{m^2}{2} = \dfrac{(z - \theta^T\phi)^2}{2m^2}$

Modelos paramétricos – separando parâmetros de sinais E/S

$$\epsilon = \frac{z - \hat{z}}{m^2} = \frac{z - \theta^T \phi}{m^2}$$

Método do gradiente, função de custo instantânea: $J(\theta) = \dfrac{\epsilon^2 m^2}{2} = \dfrac{(z - \theta^T \phi)^2}{m^4} . \dfrac{m^2}{2} = \dfrac{(z - \theta^T \phi)^2}{2m^2}$

$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla J(\theta), \Gamma = \Gamma^T > 0$. Como $\nabla J(\theta) = -\dfrac{(z - \theta^T \phi)\phi}{m^2}$, chega-se a: $\boxed{\dot{\theta} = \Gamma \epsilon \phi}$

Ver script em: https://github.com/josenalde/adaptive_control/tree/main/scripts

Análise de estabilidade por Lyapunov

Seja a candidata à função de Lyapunov $V = \dfrac{\tilde{\theta}^2}{2\gamma}$. Lembremos que:

$$\epsilon = \frac{{\theta^*}^T\phi - \theta^T\phi}{m^2} = \frac{z - \theta^T\phi}{m^2} = -\frac{(\theta^T - \theta^*)^T\phi}{m^2} \implies \epsilon = \frac{-\tilde{\theta}^T\phi}{m^2} \implies -\epsilon m^2 = \tilde{\theta}^T\phi$$

$\dot{V} = \dfrac{dV}{d\tilde{\theta}}\dfrac{d\tilde{\theta}}{dt} = \dfrac{\tilde{\theta}}{\gamma}\dfrac{d\tilde{\theta}}{dt}$. Como $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$, $\quad \dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}^* = \dot{\theta}$. Assim, $\dot{V} = \tilde{\theta}\epsilon\phi$. Substituindo $\tilde{\theta}\phi = -\epsilon m^2$

$\dot{V} = -\epsilon^2 m^2 \leq 0$. ou seja, o ponto de equilíbrio $\tilde{\theta}_e = 0$ é estável. Algumas conclusões:

i) $V, \tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$, $\quad \lim\limits_{t\to\infty} V(\tilde{\theta}(t)) = V_\infty$.

ii) $\epsilon, \epsilon m \in \mathcal{L}_\infty$

$$\int_0^t \dot{V}(\tau)d\tau = -\int_0^t \epsilon^2(\tau)m^2(\tau)d\tau$$

$$V(t) - V(0) = -\int_0^t \epsilon^2(\tau)m^2(\tau)d\tau \implies \int_0^t \epsilon^2(\tau)m^2(\tau)d\tau = V_0 - V_\infty$$

Análise de estabilidade por Lyapunov

$$V(t) - V(0) = -\int_0^t \epsilon^2(\tau) m^2(\tau) d\tau \implies \int_0^t \epsilon^2(\tau) m^2(\tau) d\tau = V_0 - V_\infty$$

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \epsilon^2(\tau) m^2(\tau) d\tau = V_0 - V_\infty < +\infty$$

$$||\epsilon m||_2 = \left(\int_0^{+\infty} \epsilon^2(\tau) m^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} < +\infty, \text{ logo } \epsilon m \in \mathcal{L}_2. \text{ Além disto, como } m^2 \geq 1$$

$$\text{então } \epsilon^2 \leq \epsilon^2 m^2. \text{ Logo, } \epsilon \in \mathcal{L}_2$$

Da igualdade $\epsilon = -\dfrac{\tilde{\theta}\phi}{m^2}$ tem-se que $\dfrac{\tilde{\theta}\phi}{m} \in \mathcal{L}_2,$ já que $\epsilon m \in \mathcal{L}_2$. Também $\dfrac{\tilde{\theta}\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty,$ pois $\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$ e $\dfrac{\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty$

Assim $\dfrac{\tilde{\theta}\phi}{m} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty \implies \epsilon m \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$. $\quad ||\epsilon||_\infty \leq ||\tilde{\theta}||_\infty ||\dfrac{\phi}{m}||_\infty \leq +\infty \implies \epsilon \in \mathcal{L}_\infty$ e $\epsilon \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$

Como $\dot{\theta} = \gamma \epsilon \phi = \gamma \epsilon m \dfrac{\phi}{m}$ e $\dfrac{\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty$ e $\epsilon m \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ então $\dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ e $\theta \in \mathcal{L}_\infty$

Característica do sinal de entrada:

Contudo ainda não concluímos que $\epsilon, \epsilon m$ e $\dot{\theta} \to 0$ quando $t \to \infty$.Iremos ver com sinais persistentemente excitantes

É preciso impor que $\dfrac{\phi}{m}$ seja PE, isto é, satisfazer $\displaystyle\int_t^{t+T_0} \phi(\tau)\phi^T(\tau)d\tau \succeq \alpha_0 T_0 I,$ para algum $\alpha_0 > 0, T_0 > 0, \forall t \geq 0.$

Esta condição é necessária e suficiente para que $\theta(t) \to \theta^*$ quando $t \to +\infty$. Na prática, ocorre por escolha do u

$\displaystyle\int_t^{t+T_0} u^2(\tau)d\tau \geq \alpha_0 T_0,$ para algum $\alpha_0 > 0, T_0 > 0, \forall t \geq 0,$ onde α_0 é um nível de excitação

Ex.1: $u(t) = U, \forall t \geq 0, \quad U\displaystyle\int_t^{t+T_0} d\tau = U\tau_t^{t+T_0} = U(t + T_0 - t) = UT_0 \geq \alpha_0 T_0, \quad \alpha_0 \in (0, U]$ é PE

Ex.2: $u(t) = e^{-t} = \displaystyle\int_t^{t+T_0} (e^{-t})^2 d\tau = \frac{1}{2}(e^{2T_0} - 1)e^{-2(t+T_0)}$ não é PE

Ex.3: $u(t) = \dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\int_t^{t+T_0} \left(\frac{1}{1+\tau}\right)^2 d\tau = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{t + T_0 + 1}$ não é PE

Característica do sinal de entrada:

Ex.4: $u(t) = sen(\omega t) = \int_t^{t+T_0} (sen(\omega t))^2 d\tau = \frac{-sen(2\omega(t+T_0)) + sen(2\omega t) + 2T_0\omega}{4\omega} = \frac{-sen(2\omega(t+T_0)) + sen(2\omega t)}{4\omega} + 0.5T_0$

PE de ordem 2

Analisar estimação para o sistema de 1. ordem com um polo desconhecido $G(s) = \frac{4}{s+a}, \quad y^{(1)} - 4u = -ay$

https://github.com/josenalde/adaptive_control/blob/main/scripts/gradient_1_2.m

$$\text{Seja } \Lambda(s) = s+2, \quad \frac{y^{(1)} - 4u}{s+2} = a\frac{-y}{s+2} \implies z = \theta^*\phi, \quad \theta^* = a, \phi = \frac{-\alpha_0 y}{\Lambda(s)} = \frac{-y}{s+2}$$

$$z = \frac{s}{s+2}y - \frac{4}{s+2}u \qquad \epsilon = \frac{z-\hat{z}}{m^2} = \frac{z-\theta^T\phi}{m^2}, m^2 = 1+n_s^2 \ \ , n_s^2 = \alpha\phi^T\phi, \alpha > 0.$$

Característica do sinal de entrada:

E um exemplo de ordem 2 com 3 parâmetros? $\dfrac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}, \quad b_0 = 2, a_1 = 2, a_0 = 1$

https://github.com/josenalde/adaptive_control/blob/main/scripts/gradient_2_1.m

Se u tem ao menos uma frequência distinta a cada dois parâmetros desconhecidos, então é suficientemente rico, ou seja, contém um número suficiente de frequências para excitar todos os modos da planta. Um modo natural é a função temporal associada a cada polo.

Exemplo: se o número de parâmetros desconhecidos é n, então $m \geq \dfrac{n}{2}$ frequencias distintas em u são suficientes para que u seja qualificado como sendo suficientemente rico em frequências de ordem n

Definição: um sinal $u : R^+ \rightarrow R$ é suficientemente rico de ordem n se consiste de ao menos $n/2$ diferentes frequências. Por exemplo:

$$u = \sum_{i=1}^{m} A_i sen\omega_i t \text{ com } m \geq n/2, A_i \neq 0 \text{ e } \omega_i \neq \omega_k, i \neq k$$

Característica do sinal de entrada:

Seja a planta: $y = \dfrac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} u = G(s)u, \quad a_1, a_0 > 0$ e $G(s)$ não tem cancelamentos polo-zero

Para $u = sen(\omega_0 t), \quad y(t)$ não traz info suficiente para determinar a_1, a_0, b_1, b_0. Já $u(t) = sen(\omega_0 t) + sen(\omega_1 t), \omega_0 \neq \omega_1$ leva a:

$y(t) = A_0 sen(\omega_0 t + \rho_0) + A_1 sen(\omega_1 t + \rho_1),$ onde $A_0 = |G(j\omega_0)|, \rho_0 = \angle G(j\omega_0), A_1 = |G(j\omega_1)|, \rho_1 = \angle G(j\omega_1).$

Com 4 equações algébricas determina-se a_1, a_0, b_1, b_0. Em geral, diz-se que o número de frequências em u é proporcional ao número de parâmetros