EGM0013

Controle Adaptativo

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

2023.1: 4T1234 (60h) (13:00-14:40h; 14:55-16:35)

Exemplo de projeto – ordem 1 - MIT

(1) Planta: $\dot{y} = -ay + bu \Leftrightarrow \dfrac{y}{u} = \dfrac{b}{s+a}$ $\quad a, b$ desconhecidos, com y mensurável

(2) Modelo de Referência: $\dot{y}_m = -a_m y_m + b_m r \Leftrightarrow \dfrac{y_m}{r} = \dfrac{b_m}{s+a_m}$

(3) Lei de Controle para condição de matching: $u = \theta_1 r - \theta_2 y$

Substitutindo (3) em (1): $\dot{y} = -ay + b[\theta_1 r - \theta_2 y] = -a_m y_m + b_m r$

$$= -(a + b\theta_2)y + b\theta_1 r = -a_m y_m + b_m r$$

Logo: $\theta_1^* = \dfrac{b_m}{b} \quad \theta_2^* = \dfrac{a_m - a}{b}$

Como a, b são desconhecidos, usam-se estimativas

Exemplo de projeto – ordem 1 - MIT

Regra de ajuste do MIT, com $e_0 = y - y_m$

$$\dot{\theta}_1 = -\alpha e_0 \frac{\partial y}{\partial \theta_1} \qquad \dot{y} = -(a + b\theta_2)y + b\theta_1 r$$

Seja o operador de diferenciação $p = \dfrac{d}{dt}(.)$

$$\dot{\theta}_2 = -\alpha e_0 \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \qquad py = -(a + b\theta_2)y + b\theta_1 r$$

$$(p + a + b\theta_2)y = b\theta_1 r$$

$$y = \frac{b\theta_1 r}{p + a + b\theta_2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{br}{p + a + b\theta_2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_2} = -\frac{b^2\theta_1 r}{(p + a + b\theta_2)^2} = \frac{-b}{p + a + b\theta_2} y$$

Mas a, b são desconhecidos. Sabemos contudo que:

$$a_m = a + b\theta_2 \implies p + a + b\theta_2 = p + a_m$$

Exemplo de projeto – ordem 1 - MIT

$$a_m = a + b\theta_2 \implies p + a + b\theta_2 = p + a_m$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{br}{p + a + b\theta_2} = \frac{b}{p + a_m} r \qquad \dot{\theta}_1 = -\alpha e_0 \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = -\alpha \frac{b}{p + a_m} r e_0 = -\alpha \frac{b}{a_m} \frac{a_m r}{p + a_m} e_0 = -\gamma \frac{a_m r}{p + a_m} e_0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_2} = -\frac{b^2 \theta_1 r}{(p + a + b\theta_2)^2} = \frac{-b}{p + a + b\theta_2} y = \frac{-b}{p + a_m} y \quad \dot{\theta}_2 = -\alpha e_0 \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = \alpha \frac{b}{a_m} \frac{a_m y}{p + a_m} e_0 = \gamma \frac{a_m y}{p + a_m} e_0$$

Resolvendo para o operador p :

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma \frac{a_m r}{p + a_m} (y - y_m) \implies \ddot{\theta}_1 + a_m \dot{\theta}_1 = -\gamma a_m r y + \gamma a_m y_m r$$

$$\dot{\theta}_2 = \gamma \frac{a_m y}{p + a_m} (y - y_m) \implies \ddot{\theta}_2 + a_m \dot{\theta}_2 = \gamma a_m y^2 - \gamma a_m y_m y$$

$$\dot{y} = -ay + b\theta_1 r - b\theta_2 y$$

Exemplo de projeto – ordem 1 - MIT

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma \frac{a_m r}{p + a_m}(y - y_m) \implies \ddot{\theta}_1 + a_m \dot{\theta}_1 = -\gamma a_m r y + \gamma a_m y_m r$$

$$\dot{\theta}_2 = \gamma \frac{a_m y}{p + a_m}(y - y_m) \implies \ddot{\theta}_2 + a_m \dot{\theta}_2 = \gamma a_m y^2 - \gamma a_m y_m y$$

$$\dot{y} = -ay + b\theta_1 r - b\theta_2 y$$

Ideia de implementação com vetor de estados. Seja:

$$x_1 = \theta_1, x_2 = \dot{\theta}_1, x_3 = \theta_2, x_4 = \dot{\theta}_2, x_5 = y$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_m x_2 - \gamma a_m r x_5 + \gamma a_m y_m r$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -a_m x_4 + \gamma a_m x_5^2 - \gamma a_m y_m x_5$$

$$\dot{x}_5 = -a x_5 + b r x_1 - b x_3 x_5$$

Ver scripts [1]() e [2]() no github

Sistema NÃO-LINEAR. Simular para $a_m = 2, b_m = 2, a = 1, b = 0.5$ com $\gamma = 1, 5, 0.2$

Exemplo de projeto – ordem 2 - MIT

Mas a_1, a_2 são desconhecidos. Então substitui-se por $\hat{a}_1, \hat{a}_2$. Lembremos que

$$(\hat{a}_1 - \theta_1) = 2 \implies \hat{a}_1 = \theta_1 + 2$$

$$(\hat{a}_2 - \theta_2) = 1 \implies \hat{a}_2 = \theta_2 + 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{1}{p^2 - (\theta_1 - a_1)p - (\theta_2 - a_2)}\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{1}{p^2 + 2p + 1}\dot{y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_2} = \frac{1}{p^2 - (\theta_1 - a_1)p - (\theta_2 - a_2)}y = \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = \frac{1}{p^2 + 2p + 1}y$$

Sensibilidades aproximadas, sendo o MRAC com a regra do MIT localmente estável para γ pequeno, r pequena amplitude, número suficiente de frequências, $\theta_1(0), \theta_2(0)$ próximos de θ_1^*, θ_2^*

Proposta: implementar e verificar hipóteses acima

Ver Aparow (2014) para exemplo prático em PID adaptativo

Exemplo de projeto – ordem 2 - MIT

(1) Planta: $\ddot{y} = -a_1\dot{y} - a_2 y + u \Leftrightarrow \dfrac{y}{u} = \dfrac{1}{s^2 + a_1 s + a_2}$ a_1, a_2 desconhecidos, com $y, \dot{y}$ mensuráveis

(2) Modelo de Referência: $\ddot{y}_m = -2\dot{y}_m - y_m + r \Leftrightarrow \dfrac{y_m}{r} = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 1}$

(3) Lei de Controle para condição de matching: $u = \theta_1^*\dot{y} + \theta_2^* y + r = {\theta^*}^T \phi + r, \theta^* = \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix}, \phi = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ y \end{bmatrix}$

Substitutindo (3) em (1): $\ddot{y} = -a_1\dot{y} - a_2 y + \theta_1^*\dot{y} + \theta_2^* y + r$

$$= -(a_1 - \theta_1^*)\dot{y} - (a_2 - \theta_2^*)y + r = -2\dot{y}_m - y_m + r$$

Logo: $= (a_1 - \theta_1^*) = 2 \implies \theta_1^* = a_1 - 2$

$= (a_2 - \theta_2^*) = 1 \implies \theta_2^* = a_2 - 1$

Como a_1, a_2 são desconhecidos, usam-se estimativas e $u = \theta_1\dot{y} + \theta_2 y + r$ (4)

Exemplo de projeto – ordem 2 - MIT

Regra de ajuste do MIT, com $e_0 = y - y_m$

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma e_0 \frac{\partial y}{\partial \theta_1}$$

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma e_0 \frac{\partial y}{\partial \theta_2}$$

Usando (4) em (1):

$$\ddot{y} = -a_1\dot{y} - a_2 y + \theta_1\dot{y} + \theta_2 y + r$$

$$\frac{\partial \ddot{y}}{\partial \theta_1} = -a_1\frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta_1} - a_2\frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \dot{y} + \theta_1\frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta_1} + \theta_2\frac{\partial y}{\partial \theta_1}$$

$$\frac{\partial \ddot{y}}{\partial \theta_2} = -a_1\frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta_2} - a_2\frac{\partial y}{\partial \theta_2} + \theta_1\frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta_2} + y + \theta_2\frac{\partial y}{\partial \theta_2}$$

Seja o operador de diferenciação $p = \frac{d}{dt}(.)$

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial \theta_1} = (\theta_1 - a_1)\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial \theta_1} + (\theta_2 - a_2)\frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \dot{y} \implies \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{1}{p^2 - (\theta_1 - a_1)p - (\theta_2 - a_2)}\dot{y}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial \theta_2} = (\theta_1 - a_1)\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial \theta_2} + (\theta_2 - a_2)\frac{\partial y}{\partial \theta_2} + y \implies \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = \frac{1}{p^2 - (\theta_1 - a_1)p - (\theta_2 - a_2)}y$$

Exemplo de projeto – ordem 2 - MIT

Mas a_1, a_2 são desconhecidos. Então substitui-se por $\hat{a}_1, \hat{a}_2$. Lembremos que

$$(\hat{a}_1 - \theta_1) = 2 \implies \hat{a}_1 = \theta_1 + 2$$

$$(\hat{a}_2 - \theta_2) = 1 \implies \hat{a}_2 = \theta_2 + 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{1}{p^2 - (\theta_1 - a_1)p - (\theta_2 - a_2)}\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{1}{p^2 + 2p + 1}\dot{y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_2} = \frac{1}{p^2 - (\theta_1 - a_1)p - (\theta_2 - a_2)}y = \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = \frac{1}{p^2 + 2p + 1}y$$

Sensibilidades aproximadas, sendo o MRAC com a regra do MIT localmente estável para γ pequeno, r pequena amplitude, número suficiente de frequências, $\theta_1(0), \theta_2(0)$ próximos de θ_1^*, θ_2^*

Proposta: implementar e verificar hipóteses acima

Ver Aparow (2014) para exemplo prático em PID adaptativo