EGM0013

Controle Adaptativo

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

2023.1: 4T1234 (60h) (13:00-14:40h; 14:55-16:35)

Modelos paramétricos

Seja uma realização mínima de um sistema SISO, ou seja, supondo a planta controlável e observável

Uma realização mínima não descreve as componentes não controláveis ou não observáveis do sistema. Estas componentes podem resultar em estados não limitados na representação não mínima se alguma condição inicial associada com estas componentes seja não nula. Se, contudo, tais componentes sejam assintoticamente estáveis (AS), caem para zero exponencialmente rápido e o efeito pode ser desprezado na maioria das aplicações. Um sistema cujas componentes não controláveis são AS denomina-se ESTABILIZÁVEL e cujas componentes não observáveis são AS, DETECTÁVEIS.

$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = h^T x \quad A_{n\times n}, \quad b_{n\times 1}, \quad h_{1\times n}$ $\quad n^2 + 2n$ elementos, n^2 de 0's e 1's ou seja, especificam-se $2n$ parâmetros

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{z(s)}{r(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_{n-2}s^{n-2} + a_1 s + a_0}, \quad \text{Seja } s^n y = y^{(n)}(t)$$

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_{n-1}u^{(n-1)} + b_{n-2}u^{(n-2)} + \cdots + b_0 u(t)$$

Modelos paramétricos – separando parâmetros de sinais E/S

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_{n-1}u^{(n-1)} + b_{n-2}u^{(n-2)} + \cdots + b_0 u(t)$$

$$\theta^* = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} u^{(n-1)} \\ u^{(n-2)} \\ \vdots \\ u \\ -y^{(n-1)} \\ -y^{(n-2)} \\ \vdots \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}(s)u \\ -\alpha_{n-1}(s)y \end{bmatrix}, \text{ onde } \alpha_{n-1} = \begin{bmatrix} s^{n-1} \\ s^{n-2} \\ \vdots \\ s \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $y^{(n)} = \theta^{*T}Y$ é linear em θ^* sendo apropriada para estimação de parâmetros

Visto que na maioria das aplicações apenas u, y estão disponíveis para medição e o uso de diferenciação não é desejável, usam-se filtros

Modelos paramétricos – separando parâmetros de sinais E/S

Seja um filtro estável de ordem n dado por $\Lambda(s) = s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \lambda_0$

$$\text{Logo, } z = \theta^{*T}\phi, \text{ onde } z \triangleq \frac{1}{\Lambda(s)}y^{(n)} = \frac{s^n}{\Lambda(s)}y$$

$$\phi \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_{n-1}(s)}{\Lambda(s)}u \\ -\dfrac{\alpha_{n-1}(s)}{\Lambda(s)}y \end{bmatrix} \rightarrow \text{ Vetor Regressor. No contexto de controle, é comum adicionar o setpoint}$$

$$\text{Exemplo com 1 parâmetro desconhecido: } \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b}{s+2}, \quad y^{(1)} + 2y = bu$$

$$\text{Seja } \Lambda(s) = s+2, \quad \frac{y^{(1)}+2y}{s+2} = b\frac{1}{s+2}u \implies z = \theta^*\phi, \quad \theta^* = b, \phi = \frac{\alpha_0}{\Lambda(s)}u = \frac{1}{s+2}u$$

Mas θ^* é desconhecido, então define-se um erro de estimação $\epsilon = z - \hat{z}, \quad \hat{z} = \theta^T\phi$

Modelos paramétricos – separando parâmetros de sinais E/S

Mas θ^* é desconhecido, então define-se um erro de estimação $\epsilon = z - \hat{z}, \quad \hat{z} = \theta^T \phi$

Introduz-se um sinal de normalização n_s tal que $\dfrac{\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty, \quad m^2 = 1 + n_s^2$

$$\epsilon = \frac{\theta^{*T}\phi - \theta^T\phi}{m^2} = \frac{z - \theta^T\phi}{m^2} = -\frac{(\theta^T - \theta^*)^T\phi}{m^2} \implies \epsilon = \frac{-\tilde{\theta}^T\phi}{m^2} \implies \epsilon m = -\tilde{\theta}^T\frac{\phi}{m}$$

Escolhas típicas são $n_s^2 = \phi^T\phi, n_s^2 = \phi^T P\phi, P = P^T > 0, n_s^2 = \alpha\phi^T\phi, \alpha > 0$. Logo,

$$\epsilon = \frac{z - \hat{z}}{m^2} = \frac{z - \theta^T\phi}{m^2}$$

Método do gradiente, função de custo instantânea: $J(\theta) = \dfrac{\epsilon^2 m^2}{2} = \dfrac{(z - \theta^T\phi)^2}{m^4}.\dfrac{m^2}{2} = \dfrac{(z - \theta^T\phi)^2}{2m^2}$

Modelos paramétricos – separando parâmetros de sinais E/S

$$\epsilon = \frac{z - \hat{z}}{m^2} = \frac{z - \theta^T \phi}{m^2}$$

Método do gradiente, função de custo instantânea: $J(\theta) = \frac{\epsilon^2 m^2}{2} = \frac{(z - \theta^T \phi)^2}{m^4} . \frac{m^2}{2} = \frac{(z - \theta^T \phi)^2}{2m^2}$

$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla J(\theta), \Gamma = \Gamma^T > 0$. Como $\nabla J(\theta) = -\frac{(z - \theta^T \phi)\phi}{m^2}$, chega-se a: $\boxed{\dot{\theta} = \Gamma \epsilon \phi}$

Ver script em: https://github.com/josenalde/adaptive_control/tree/main/scripts

Análise de estabilidade por Lyapunov

Seja a candidata à função de Lyapunov $V = \dfrac{\tilde{\theta}^2}{2\gamma}$. Lembremos que:

$$\epsilon = \frac{\theta^{*T}\phi - \theta^T\phi}{m^2} = \frac{z - \theta^T\phi}{m^2} = -\frac{(\theta^T - \theta^*)^T\phi}{m^2} \implies \epsilon = \frac{-\tilde{\theta}^T\phi}{m^2} \implies -\epsilon m^2 = \tilde{\theta}^T\phi$$

$\dot{V} = \dfrac{dV}{d\tilde{\theta}}\dfrac{d\tilde{\theta}}{dt} = \dfrac{\tilde{\theta}}{\gamma}\dfrac{d\tilde{\theta}}{dt}$. Como $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$, $\quad \dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}^* = \dot{\theta}$. Assim, $\dot{V} = \tilde{\theta}\epsilon\phi$. Substituindo $\tilde{\theta}\phi = -\epsilon m^2$

$\dot{V} = -\epsilon^2 m^2 \leq 0$. ou seja, o ponto de equilíbrio $\tilde{\theta}_e = 0$ é estável. Algumas conclusões:

i) $V, \tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$, $\quad \lim\limits_{t\to\infty} V(\tilde{\theta}(t)) = V_\infty$.

ii) $\epsilon, \epsilon m \in \mathcal{L}_\infty$

$$\int_0^t \dot{V}(\tau)d\tau = -\int_0^t \epsilon^2(\tau)m^2(\tau)d\tau$$

$$V(t) - V(0) = -\int_0^t \epsilon^2(\tau)m^2(\tau)d\tau \implies \int_0^t \epsilon^2(\tau)m^2(\tau)d\tau = V_0 - V_\infty$$

Análise de estabilidade por Lyapunov

$$V(t) - V(0) = -\int_0^t \epsilon^2(\tau)m^2(\tau)d\tau \implies \int_0^t \epsilon^2(\tau)m^2(\tau)d\tau = V_0 - V_\infty$$

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \epsilon^2(\tau)m^2(\tau)d\tau = V_0 - V_\infty < +\infty$$

$$||\epsilon m||_2 = \left(\int_0^{+\infty} \epsilon^2(\tau)m^2(\tau)d\tau\right)^{1/2} < +\infty,$$ logo $\epsilon m \in \mathcal{L}_2$. Além disto, como $m^2 \geq 1$ então $\epsilon^2 \leq \epsilon^2 m^2$. Logo, $\epsilon \in \mathcal{L}_2$

Da igualdade $\epsilon = -\dfrac{\tilde{\theta}\phi}{m^2}$ tem-se que $\dfrac{\tilde{\theta}\phi}{m} \in \mathcal{L}_2,$ já que $\epsilon m \in \mathcal{L}_2$. Também $\dfrac{\tilde{\theta}\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty,$ pois $\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$ e $\dfrac{\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty$

Assim $\dfrac{\tilde{\theta}\phi}{m} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty \implies \epsilon m \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$. $||\epsilon||_\infty \leq ||\tilde{\theta}||_\infty ||\dfrac{\phi}{m}||_\infty \leq +\infty \implies \epsilon \in \mathcal{L}_\infty$ e $\epsilon \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$

Como $\dot{\theta} = \gamma\epsilon\phi = \gamma\epsilon m\dfrac{\phi}{m}$ e $\dfrac{\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty$ e $\epsilon m \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ então $\dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ e $\theta \in \mathcal{L}_\infty$

Análise de estabilidade por Lyapunov

Contudo ainda não concluímos que $\epsilon, \epsilon m$ e $\dot{\theta} \to 0$ quando $t \to \infty$.Iremos ver com sinais persistentemente excitantes