

EGM0013

# Controle Adaptativo

**Prof. Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**



josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

2023.1: 4T1234 (60h) (13:00-14:40h; 14:55-16:35)

# Ferramentas e resultados matemáticos

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados em:

- Não linear, variante no tempo, com parâmetro desconhecido  $\theta$   $\dot{x} = f(x, u, t, \theta), \quad y = h(x, u, \theta, t)$
- Linear, variante no tempo, com parâmetro desconhecido  $\theta$   $\dot{x} = A(\theta, t)x + B(\theta, t)u, \quad y = C(\theta, t)x + D(\theta, t)u$
- Linear, invariante no tempo (LTI, autônomo) com parâmetro desconhecido  $\theta$   $\dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u, \quad y = C(\theta)x + D(\theta)u$ 
  - Sendo Linear, obedece ao princípio da superposição  
 $u_1 \rightarrow y_1, u_2 \rightarrow y_2 \implies \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$
  - Supondo  $D=0$ , ou seja, sem transferência direta de energia da entrada para a saída do sistema, caso SISO

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad y(t) = h^T x(t)$$
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

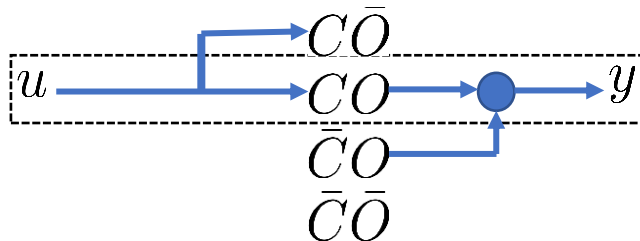
# Ferramentas e resultados matemáticos

**Sistema controlável:** se existe sinal de controle que leva um sistema de um estado para qualquer outro estado. Está associada à capacidade de influenciar todos os estados através das entradas do sistema.

$P_c = [b | Ab | \dots | A^{n-1}b] \rightarrow$  matriz de controlabilidade. Se  $\det(P_c) \neq 0$  ( $\rho(P_c) = n$ )  $\rightarrow$  sistema controlável  
O posto da matriz  $P_c$ , dado por  $\rho$ , é o número de colunas ou linhas linearmente independentes

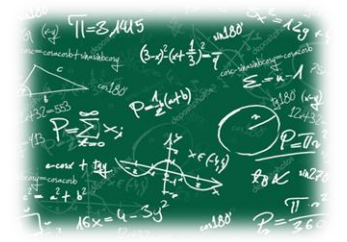
**Sistema observável:** quando é possível a partir da entrada e saída, encontrar a condição inicial. É a capacidade de “ver” todos os estados por meio das saídas do sistema.  
Se qualquer condição inicial  $x(0)$  pode ser obtida conhecendo-se  $u(t)$  e  $y(t)$  para todo instante  $t$  entre 0 e  $T > 0$ , finito.

$P_o = \begin{bmatrix} h^T \\ h^T A \\ \vdots \\ h^T A^{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow$  matriz de observabilidade. Se  $\det(P_o) \neq 0$  ( $\rho(P_o) = n$ )  $\rightarrow$  sistema observável  
ou seja, é apenas a solução homogênea  $y(t) = h^T e^{At} x(0)$



Decomposição de Kalman. O que não é controlável, sendo estável, é estabilizável. O que não é observável, sendo estável, é detetável. Ou seja, existem dinâmicas não conhecidas e que não se pode influenciar via controle, mas se sabe ao menos que são estáveis, ou seja, decaem para zero com  $t \rightarrow \infty$

# Exemplo 1: testar control/observer



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

## Exemplo 2:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

# Aplicação de Laplace $\mathcal{L}$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0 \implies \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s\hat{x}(s)$$

$$s\hat{x}(s) = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \implies (sI - A)\hat{x}(s) = B\hat{u}(s) \implies \hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s)$$

$$\text{Como } y(t) = h^T x(t) \implies \hat{y}(s) = h^T \hat{x}(s) \implies \hat{y}(s) = h^T (sI - A)^{-1} B \hat{u}(s)$$

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = h^T (sI - A)^{-1} B \rightarrow \text{função de transferência}$$

Seja  $u(t) = \delta(t) \rightarrow$  impulso unitário, logo  $\hat{u}(s) = 1$ .  $\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s) = \hat{g}(s) \implies y(t) = g(t) \rightarrow$  resposta ao impulso

$\hat{g}(s) \rightarrow$  transformada de Laplace da resposta ao impulso. Obs:  $\hat{g}(s) = h^T (sI - A)^{-1} b = h^T \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} b$

Grau de cada elemento da Adjunta é no máximo  $n - 1$  elimina um  $s$ .  $\hat{g}(s)$  é uma função racional denominada estritamente própria,  $\deg(n) < \deg(d)$

# Funções de transferência

$$\hat{g}(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{r}(s)}, \quad m < n$$

Grau relativo de  $\hat{g}(s) \rightarrow n^* = n - m$  (excesso de polos)

As raízes de  $\det(sI - A) = 0 \rightarrow$  autovalores de  $A$

As raízes de  $\hat{r}(s) = 0 \rightarrow$  polos de  $\hat{g}(s) \rightarrow$  levam a função para infinito.  $\{\text{polos de } \hat{g}(s)\} \subset \{\text{autovalores de } A\}$

Se o sistema é controlável e observável não há cancelamentos na obtenção de  $\hat{g}(s)$ , logo,

$\{\text{polos de } \hat{g}(s)\} = \{\text{autovalores de } A\}$

Quando há cancelamento, o sistema tem subsistema não controlável ou não observável

As raízes de  $\hat{z}(s) = 0 \rightarrow$  zeros de  $\hat{g}(s) \rightarrow$  deixam a função nula.

Realização de uma função de transferência: obtenção do modelo por variáveis de estado para o subsistema controlável e observável

# Forma canônica do controlador

$$\hat{g}(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{r}(s)}, \quad m < n \quad \text{função racional: divisão de polinômios}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \text{Para esta forma,}$$

$$Adj(sI - A)b = \begin{bmatrix} s^{n-1} \\ s^{n-2} \\ \vdots \\ s \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_{n-1}(s)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_m & \beta_{m-1} & \dots & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} x$$

$\alpha_{n-1}(s)$  independe dos coeficientes de  $\hat{g}(s) \rightarrow$  sem preocupação com desconhecimento dos coeficientes

# Forma canônica do observador (dual à forma do controlador)

$$\hat{g}(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{r}(s)}, \quad m < n \quad \text{função racional: divisão de polinômios}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_m \\ \beta_{m-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u$$

Para esta forma,  
 $h^T \text{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^{n-1} & s^{n-2} & \dots & s & 1 \end{bmatrix} = \alpha_{n-1}^T(s)$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$



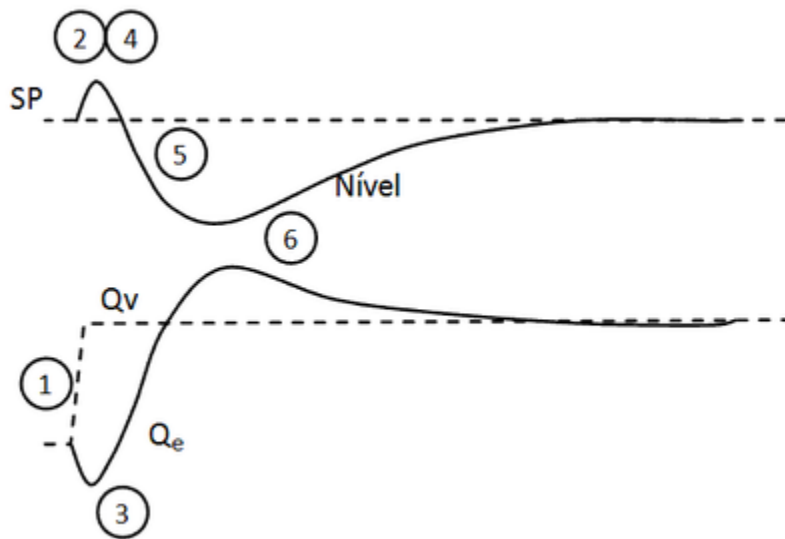
# Polinômios

mônico  $\rightarrow$  o coeficiente do termo de maior grau é 1.  $\hat{r}(s)$  é mônico

Hurwitz  $\rightarrow$  raízes da equação polinomial (polinomio=0) tem parte real negativa

Se  $\hat{z}(s)$  é Hurwitz  $\rightarrow$  sistema de fase mínima. Zeros com parte real negativa

Se  $\hat{r}(s)$  é Hurwitz  $\rightarrow$  sistema estável. Polos com parte real negativa



1 - Aumento na demanda de vapor ( $Q_v$ )



2 - Aumento no nível (inchamento)



3 - Diminuição da vazão de água  $Q_e$  (ação PI)



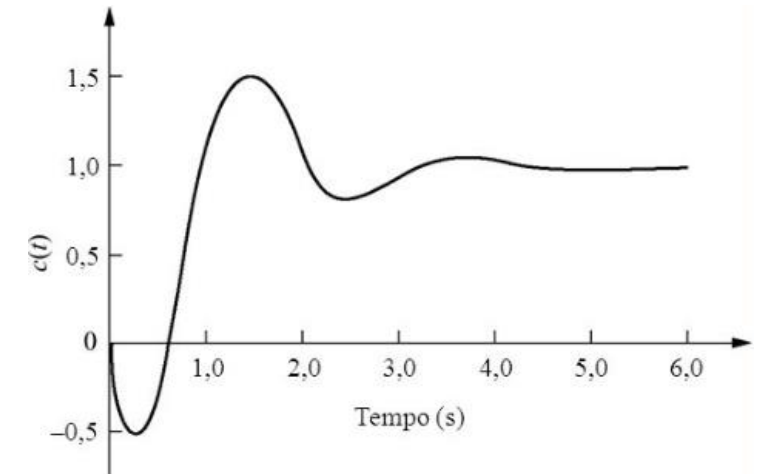
4 - Outro aumento no nível (têmpera)



5 - Fim do efeito inchamento/têmpera, queda brusca no nível



6 - Aumento da vazão  $Q_e$  e estabilização do nível (ação PI)



OBS:

MRAC: fase mínima

APPC: fase mínima e não mínima

# Polinômios coprimos

Dois polinômios  $a(s)$  e  $b(s)$  são coprimos se eles não tem fator comum (exceto uma constante)

Exemplo:  $a(s) = 2(s + 1)$  e  $b(s) = 4(s + 2)$

Identidade de Bezout:

Dois polinômios  $a(s), b(s)$  são coprimos se e somente se existem polinômios  $c(s), d(s)$  tal que

$$c(s)a(s) + d(s)b(s) = 1$$

Exemplo:  $a(s) = (s + 1)$  e  $b(s) = (s + 2) \implies c(s) = s^n + 2s^{n-1} - 1, \text{ para } n \geq 1$   
 $d(s) = -s^n - s^{n-1} + 1$

**Teorema 1** Se  $a(s)$  e  $b(s)$  são coprimos e de graus  $n_a$  e  $n_b$ , respectivamente, onde  $n_a > n_b$ , então, para qualquer polinômio arbitrário  $a^*(s)$  com grau  $n_a^* \geq n_a$  a equação polinomial (Diofantina)

$$a(s)l(s) + b(s)p(s) = a^*(s)$$

tem uma única solução  $l(s)$  e  $p(s)$  cujos graus  $n_l$  e  $n_p$ , respectivamente, satisfazem as restrições

$$n_p < n_a$$

$$n_l \leq \max(n_a^* - n_a, n_b - 1)$$

# Projeto de alocação de polos

Seja  $\hat{g}(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s-1}{s^3}$ . Projetar controlador por alocação de polos para  $a^*(s) = (s+1)^5$

O controlador é dado pela razão  $\frac{p(s)}{l(s)}$ . Em malha aberta:  $\frac{p(s)b(s)}{a(s)l(s)}$ .

Em malha fechada:  $\frac{p(s)b(s)}{a(s)l(s) + p(s)b(s)} = \frac{p(s)b(s)}{a^*(s)}$

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = a_3 s^3, \quad a_3 = 1$$

$$b(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 = b_1 s^1 + b_0, \quad b_1 = 1, b_0 = -1$$

$$n_p < n_a \implies n_p < 3 \implies p(s) = p_2 s^2 + p_1 s + p_0$$

$$n_l \leq \max(n_a^* - n_a, n_b - 1) \implies n_l \leq \max(2, 0) \implies n_l \leq 2 \implies l(s) = l_2 s^2 + l_1 s + l_0$$

$$\text{Resolver: } (s^3)(l_2 s^2 + l_1 s + l_0) + (s-1)(p_2 s^2 + p_1 s + p_0) = (s+1)^5$$

<https://pt.symbolab.com/solver/binomial-expansion-calculator>

$$\text{Resposta: } \frac{-(16s^2 + 6s + 1)}{s^2 + 5s + 26}$$

# Projeto de alocação de polos

Resolver:  $(s^3)(l_2s^2 + l_1s + l_0) + (s - 1)(p_2s^2 + p_1s + p_0) = (s + 1)^5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ l_1 \\ l_0 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 26 \\ -16 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$S \qquad x \qquad f \qquad \Rightarrow x = S^{-1}f$

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = a_3 s^3, \quad a_3 = 1$$

$$b(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 = b_1 s^1 + b_0, \quad b_1 = 1, b_0 = -1$$

linha 0 :  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

linha 1 :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

linha 2 :  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

linha 3 :  $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

linha 4 :  $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

linha 5 :  $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

linha 0 : 1

linha 1 : 1    1

linha 2 : 1    2    1

linha 3 : 1    3    3    1

linha 4 : 1    4    6    4    1

linha 5 : 1    5    10    10    5    1

# Forma geral Sylvester

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = a_3 s^3, \quad a_3 = 1$$

$$b(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 = b_1 s^1 + b_0, \quad b_1 = 1, b_0 = -1$$

$$\left[ \begin{array}{ccccccccc} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & & \vdots & b_1 & b_2 & b_3 & & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & & \vdots & b_0 & b_1 & b_2 & & \vdots \\ 0 & a_0 & a_1 & & \vdots & 0 & b_0 & b_1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_0 & & a_1 & \vdots & \vdots & b_0 & \cdots & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{array} \right] a(s), b(s) \text{ coprimos, para } \det(S) \neq 0 \implies \exists S^{-1}$$

# Normas e outras métricas

Para analisar a estabilidade de sistemas adaptativos, faz-se necessário ferramentas e métricas que permitam avaliar se os sinais envolvidos são limitados, ou seja, possuem cota superior, ou mesmo se convergem para zero (ou para seus pontos de equilíbrio)

a) Norma de um vetor  $x = [x_1 \cdots x_n]^T$ ,  $x_i \in R$ ,  $\|x\|$  é uma função com as propriedades:

i)  $\|x\| \in R$ ,  $\|x\| \geq 0$  com  $\|x\| = 0$  se e somente se  $x = 0$  vetor nulo

ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,  $\forall \alpha \in R$

iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \rightarrow$  desigualdade triangular

$$\text{Norma } p \text{ de } x = \|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| > \|x\|_2 = \|x\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} > \|x\|_\infty = \max_{i \leq i \leq n} |x_i|$$

Norma Euclidiana

# Normas e outras métricas

Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  uma aplicação linear (operador) do espaço  $\mathbb{R}^n$  no espaço  $\mathbb{R}^m$

**Definição:** Seja  $|\cdot|$  uma norma dada. Então, para uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , a quantidade  $\|A\|$  definida por

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0, x \in \mathbb{R}^m} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax|.$$

é denominada norma matricial induzida correspondente a norma de vetores  $|\cdot|$ .

e a correspondente norma induzida

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0, x \in \mathbb{R}^m} \frac{|Ax|_p}{|x|_p} = \sup_{|x|_p=1} |Ax|_p.$$

A collage of mathematical formulas and diagrams. At the top left, a triangle with sides labeled 'a', 'b', and 'c' is shown. Below it, the formula  $E=mc^2$  is written. To the right, the formula  $P=mv$  is written. In the center, a coordinate system with x and y axes is shown, with a point labeled  $x \in \mathbb{R}^n$ . To the right of the coordinate system, the formula  $P=U$  is written. At the bottom left, the formula  $10 = 15 \times 4 - 3 \times 5$  is written. At the bottom right, the formula  $P = \frac{\pi}{\lambda}$  is written. Other formulas include  $\pi = 3.1415$ ,  $(\frac{1}{2})^n$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^2$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^3$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^4$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^5$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^6$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^7$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^8$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^9$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{10}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{11}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{12}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{13}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{14}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{15}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{16}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{17}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{18}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{19}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{20}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{21}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{22}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{23}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{24}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{25}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{26}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{27}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{28}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{29}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{30}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{31}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{32}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{33}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{34}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{35}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{36}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{37}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{38}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{39}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{40}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{41}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{42}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{43}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{44}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{45}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{46}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{47}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{48}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{49}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{50}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{51}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{52}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{53}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{54}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{55}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{56}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{57}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{58}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{59}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{60}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{61}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{62}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{63}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{64}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{65}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{66}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{67}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{68}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{69}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{70}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{71}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{72}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{73}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{74}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{75}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{76}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{77}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{78}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{79}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{80}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{81}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{82}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{83}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{84}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{85}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{86}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{87}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{88}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{89}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{90}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{91}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{92}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{93}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{94}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{95}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{96}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{97}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{98}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{99}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{100}$ .

Exemplos:  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$

$$\|A\|_2 = (\lambda_{max} A^T A)^{1/2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \left( \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right)$$



# Normas e outras métricas

Normas de um vetor  $x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ ,  $x_i(t) \rightarrow$  função do tempo

Norma  $\mathcal{L}_p$  :  $\|x\|_p = \left( \int_0^\infty \|x(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p}$ ,  $p \in [1, \infty]$

$\|x\|_1 = \int_0^\infty \|x(\tau)\| d\tau$ ;  $\|x\|_2 = \left( \int_0^\infty \|x(\tau)\|^2 d\tau \right)^{1/2}$ ;  $\|x\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\|$

Dizemos que  $x \in \mathcal{L}_p$  se  $\|x\|_p$  existe, ou seja, se  $\|x\|_p$  é finita.

Espaço vetorial  $\mathcal{L}_p \rightarrow f(t)$  que pertencem ao  $\mathcal{L}_p$

# Normas de funções no tempo

Exemplo 1:  $x(t) = e^{-t}$ ,  $t \geq 0$

$$\|x\|_1 = \int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau} \Big|_0^{\infty} = 1, \quad \text{logo } x(t) = e^{-t} \in \mathcal{L}_1$$

Exemplo 2:  $f(t) = \frac{1}{1+t}$

$$\|f\|_1 = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+\tau} \right) d\tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \left( \frac{1}{1+\tau} \right) d\tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1+t) = +\infty$$

$$\|f\|_2 = \left( \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+\tau} \right)^2 d\tau \right)^{1/2} = \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \left( \frac{1}{1+\tau} \right)^2 d\tau \right)^{1/2} = \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{1+t} + 1 \right) \right)^{1/2} = 1$$

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \geq 0} \left| \frac{1}{1+t} \right| = 1$$

Logo  $f \notin \mathcal{L}_1$ ,  $f \in \mathcal{L}_2$ ,  $f \in \mathcal{L}_{\infty}$  e  $f \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_{\infty}$

# Normas de funções no tempo

## Espaço $\mathcal{L}_p$

Para cada  $p \in [1, +\infty)$ , o conjunto das funções que pertencem a  $\mathcal{L}_p$  formam um espaço vetorial chamado de Espaço  $\mathcal{L}_p$ . Pode ser verificado que a norma  $\mathcal{L}_p$  satisfaz as propriedades (i)-(iii) de norma de vetores vistas anteriormente. Os resultados a seguir apresentam algumas propriedades da norma  $\mathcal{L}_p$ .

**Lema (Desigualdade de Holder):** Se  $p, q \in [1, +\infty)$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , então  $f \in \mathcal{L}_p$  e  $g \in \mathcal{L}_q$  implicam que  $fg \in \mathcal{L}_1$  e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

OBS: Quando  $p = q = 2$ , a desigualdade de Holder torna-se a desigualdade de Schwarz, isto é,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

**Lema (Desigualdade de Minkowski):** Para  $p \in [1, +\infty)$ ,  $f, g \in \mathcal{L}_p$  implicam que  $f + g \in \mathcal{L}_p$  e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

# Norma estendida $\mathcal{L}_{pe}$

Norma  $\mathcal{L}_{pe} : \|x_t\|_p = \left( \int_0^t \|x(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p}$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Espaço vetorial  $\mathcal{L}_{pe} \rightarrow f(t) \in \mathcal{L}_{pe}$

Exemplo:  $x(t) = t^2$ ,  $t \geq 0$

$$\|x(t)\|_1 = \int_0^\infty \tau^2 d\tau = \frac{\tau^3}{3} \Big|_0^\infty \rightarrow \infty \notin \mathcal{L}_1$$

$$\|x_t(t)\|_1 = \int_0^t \tau^2 d\tau = \frac{\tau^3}{3} \Big|_0^t \rightarrow \frac{\tau^3}{3} \text{ finito para } t \text{ finito} \rightarrow t^2 \in \mathcal{L}_{1e}$$

# Algumas propriedades de funções

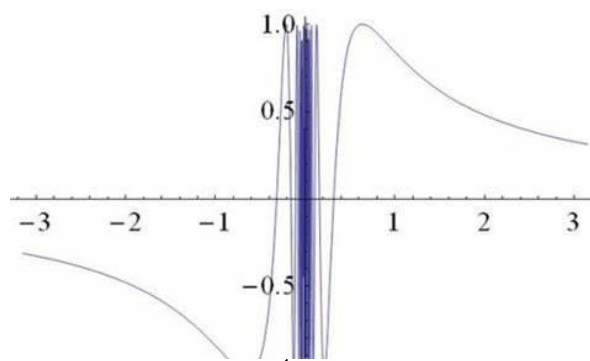
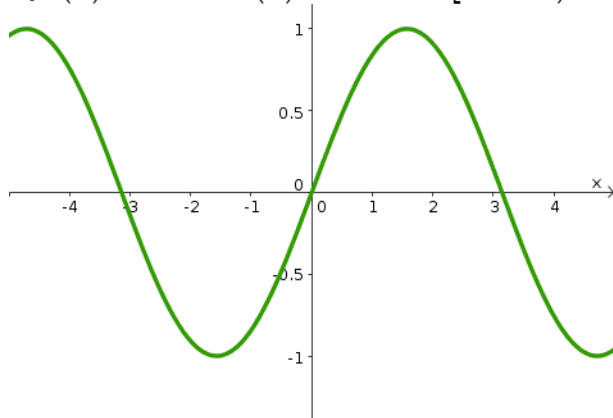
Uma função  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $[0, \infty)$  se  $\forall \epsilon_0 > 0, \exists \delta(\epsilon_0, t_0)$  tal que  $\forall t_0, t \in [0, \infty)$  para os quais  $|t - t_0| < \delta(\epsilon_0, t_0)$  temos  $|f(t) - f(t_0)| < \epsilon_0$

Intuitivamente a função  $f$  é contínua em  $a \in D_f$  se não dá um salto em  $(a, f(a))$

Quando  $\delta(\epsilon_0)$  a continuidade é uniforme, ou seja  $|t - t_0| < \delta(\epsilon_0)$

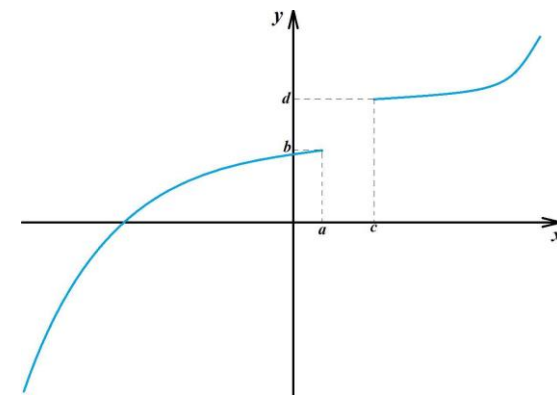
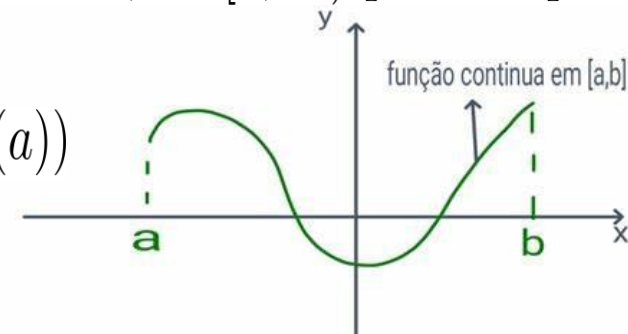
$f(t) = \text{sen}(t), \quad \forall \epsilon_0 > 0 \implies \exists \delta(\epsilon_0)$  tal que  $|t - t_0| < \delta(\epsilon_0) \implies |f(t) - f(t_0)| < \epsilon_0$

$$f(t) = \text{sen}(t), \quad t \in [0, \infty)$$



$$f(t) = \text{sen}\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in (0, \infty)$$

$f(t) = \text{sen}(1/t), \quad \forall \epsilon_0 > 0 \implies \exists \delta(\epsilon_0, t_0)$  tal que  $|t - t_0| < \delta(\epsilon_0, t_0) \implies |f(t) - f(t_0)| < \epsilon_0$



# Algumas propriedades de funções

Uma função  $f$  com  $\dot{f} \in \mathcal{L}_\infty(\textit{limitada})$  é uniformemente contínua

Fato 1:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0 \not\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \text{constante}$

Exemplo 1:  $f(t) = \textit{sen}(\sqrt{1+t})$ ,  $\dot{f}(t) = \frac{\cos(\sqrt{1+t})}{2\sqrt{1+t}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0 \not\Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

sen(\sqrt{1+t})



NATURAL LANGUAGE



MATH INPUT

POPULAR

$\frac{\square}{\square}$

$\square^\square$

$\sqrt{\square}$

$\sqrt[3]{\square}$

$\sqrt[n]{\square}$

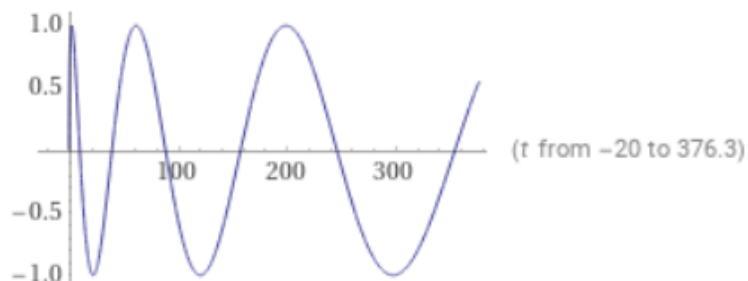
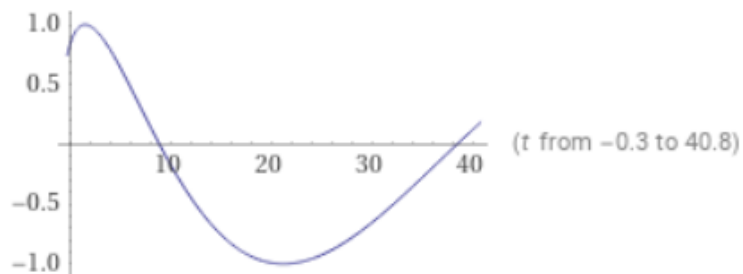
$\frac{d}{d\square}$

$\frac{d^2}{d^2\square}$

Input

$\sin(\sqrt{1+t})$

Plots



$\frac{d}{dt} \sin(\sqrt{1+t})$



NATURAL LANGUAGE



MATH INPUT



POPULAR

$\frac{\square}{\square}$

$\square^\square$

$\sqrt{\square}$

$\sqrt[3]{\square}$

$\sqrt[n]{\square}$

$\frac{d}{d\square}$

$\frac{d^2}{d^2\square}$

$\int \square$

$\int \square$

$\sum \square$

$\lim_{\square \rightarrow \square}$

$[\square, \square, \square]$

$(\square, \square, \square)$

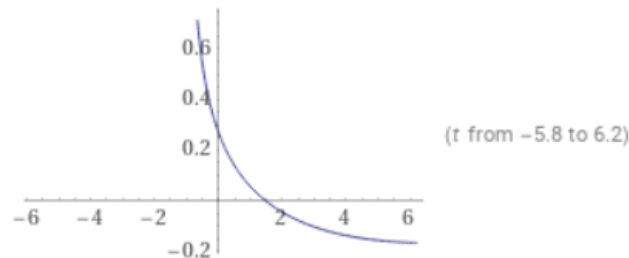
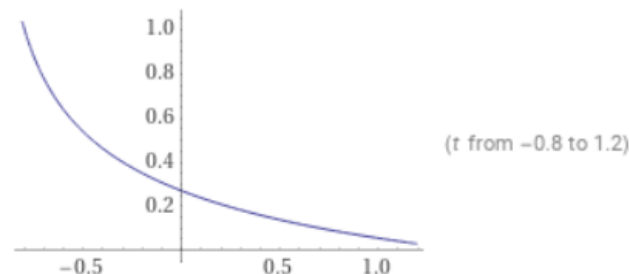
Derivative

☒ Step-by-step solution

$$\frac{d}{dt}(\sin(\sqrt{1+t})) = \frac{\cos(\sqrt{1+t})}{2\sqrt{1+t}}$$

Plots

Real-valued plots ▾



# Algumas propriedades de funções

Uma função  $f$  com  $\dot{f} \in \mathcal{L}_\infty$  (*limitada*) é uniformemente contínua

Fato 1:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0 \not\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \text{constante}$

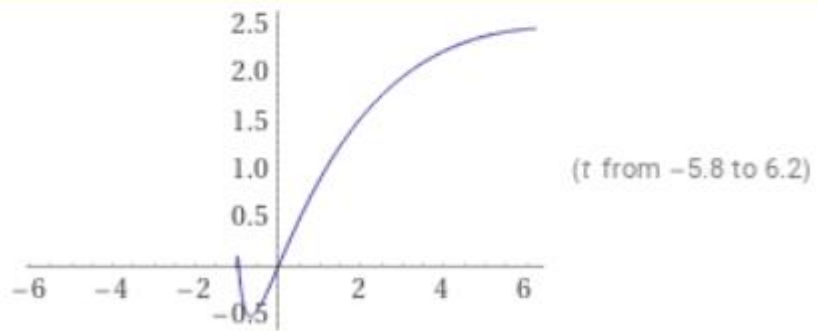
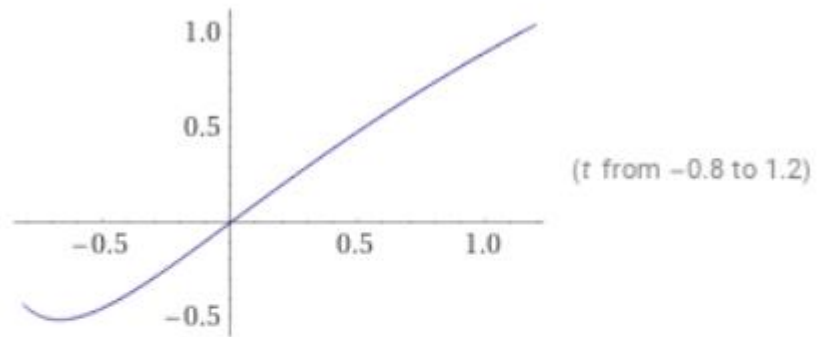
Exemplo 2:  $f(t) = \sqrt{1+t} \operatorname{sen}(\ln(1+t)) \Rightarrow \nexists \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

$$\dot{f}(t) = \frac{\operatorname{sen}(\ln(1+t))}{2\sqrt{1+t}} + \frac{\sqrt{1+t} \cos(\ln(1+t))}{1+t} = \frac{\operatorname{sen}(\ln(1+t))}{2\sqrt{1+t}} + \frac{\cos(\ln(1+t))}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0$$



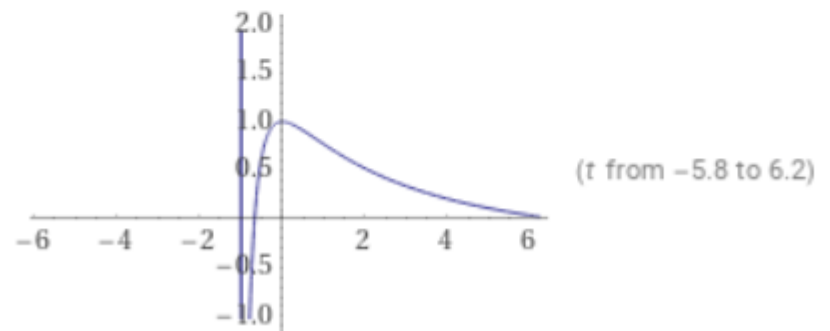
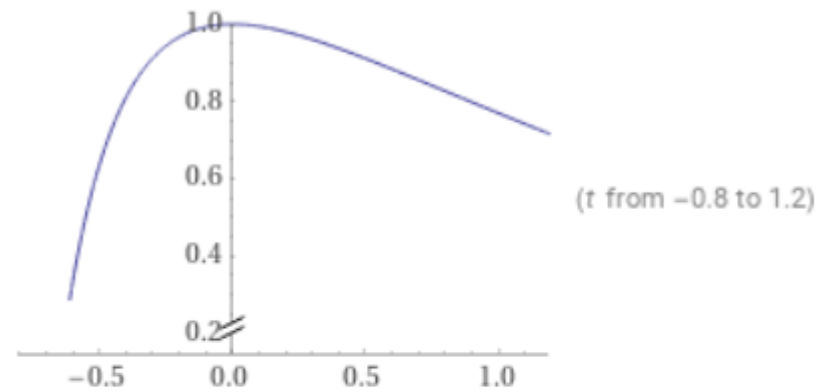
$$f(t)$$

Plots

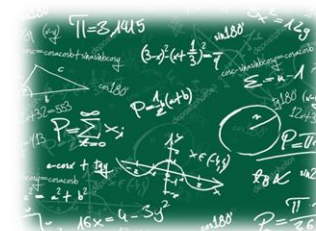


$$\dot{f}(t)$$

Plots



# Algumas propriedades de funções



Fato 2:  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c \not\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0$

Exemplo:  $f(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$ , com  $g(t)$  sendo uma sequência de triângulos isósceles com base igual a  $1/n^2$  e altura 1, centrados em,  $n, n = 1, 2, \dots$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{\pi^2}{12}$  série convergente, mas  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t)$  não existe

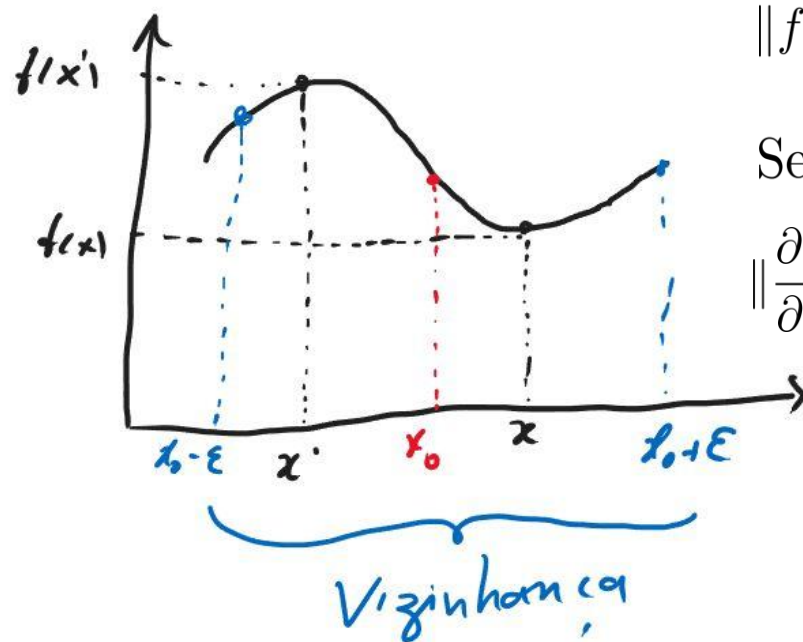
**Teorema 1** Uma função  $f(t)$  que é limitada inferiormente e não é crescente tem um limite quando  $t \rightarrow \infty$

Exemplo:  $V(x) > 0$ ,  $V(x) = 0$  se  $x = 0$ . Seja  $\dot{V}(x) \leq 0$

**Lemma 1** (Barbalat) Se  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existe e é finito e  $\dot{f}(t)$  é uniformemente contínua ( $\dot{f} \in \mathcal{L}_{\infty}$ ), então  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0$

## Teorema (existência e unicidade local de uma solução)

Seja  $f(x, t)$  contínua em  $x$  e contínua por partes em  $t$ . Se  $f(x, t)$  satisfaz uma condição de Lipschitz, ou seja,  $\|f(x, t) - f(x', t)\| \leq L\|x - x'\|$  onde  $L$  é uma constante finita e positiva (constante de Lipschitz),  $\forall x, x' \in B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \epsilon\}, \forall t \in [t_0, t_1]$ , então existe um  $\delta$  tal que a equação de estado  $\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0$  tem uma única solução no intervalo  $[t_0, t_0 + \delta]$



$$\|f(x, t) - f(x', t)\| \leq L\|x - x'\|, \quad \frac{\|f(x, t) - f(x', t)\|}{\|x - x'\|} \leq L$$

Se  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$  é contínua, e existe  $K \geq 0$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq K, \forall (t, x) \in B, \quad L = K$$

A função é *Lipschitziana*

A interpretação é de que se a variação de  $f$  é limitada,  $\dot{x}$  é definida e é possível escrever uma solução para  $x(t)$

Naturalmente dependerá da função e do conjunto  $B$

# Solução de equações diferenciais

## Exemplo 1

Seja  $B = \mathbb{R}^2$  e  $f(x, t) := t^2 + 2x$  Para  $\forall(t, x), (t, x') \in B$

$$|f(x, t) - f(x', t)| = |(t^2 + 2x) - (t^2 + 2x')| = 2|x - x'|$$

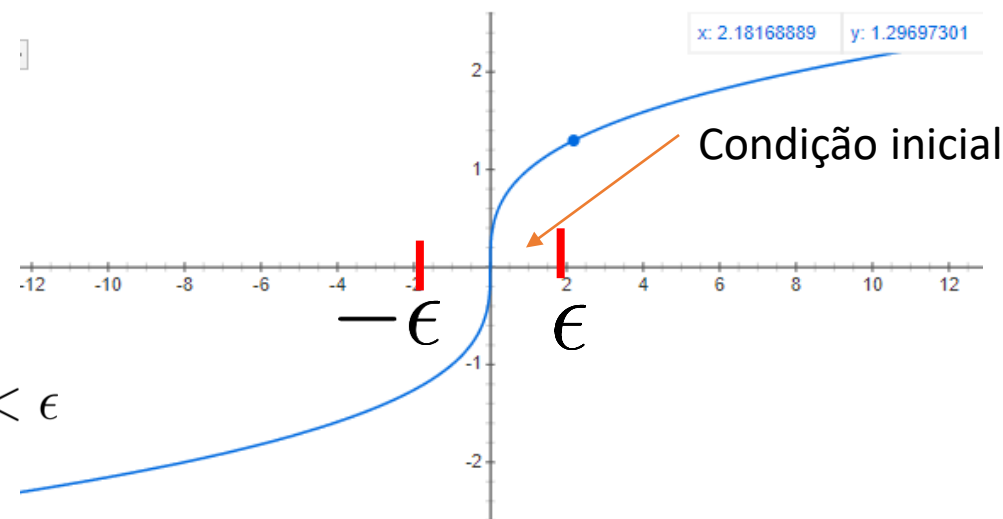
então  $f$  satisfaz condição de Lipschitz em  $B$  com  $L = 2$

## Exemplo 2

$$f(x) = x^{1/3}, \quad x(0) = 0$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{3} \frac{1}{x^{2/3}}. \text{ Para } x = 0 \implies \frac{df}{dx} \rightarrow \infty$$

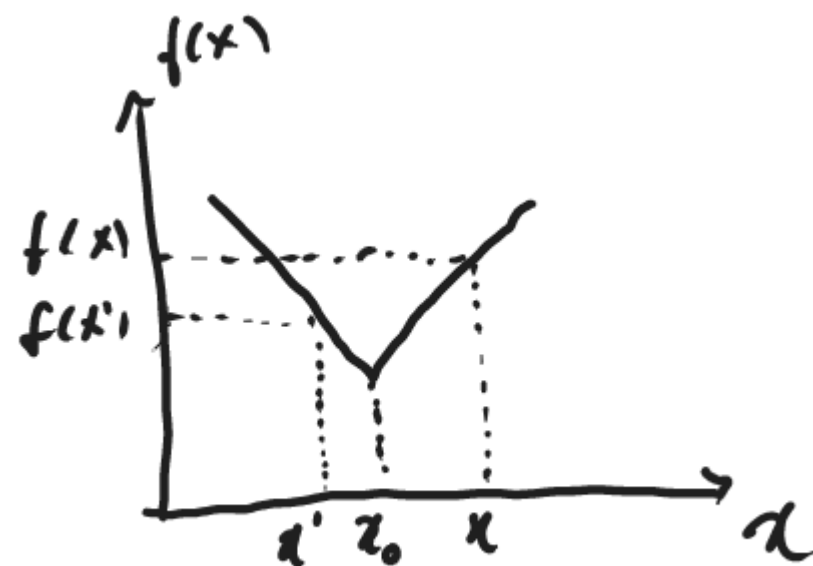
$f(x)$  não satisfaz uma condição de Lipschitz para  $x \in B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \epsilon\}$   
ou seja, para  $x$  pertencente a uma “bola” que engloba a origem. Isto não garante que a solução é única, e pode ou não ter solução, isto é, se tiver são muitas



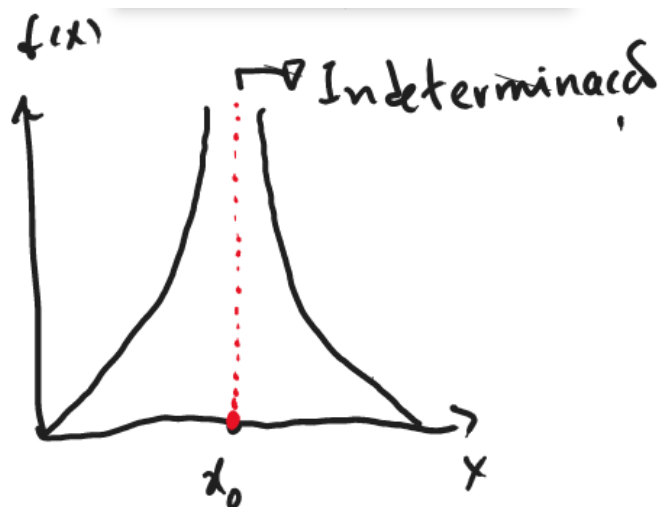
# Solução de equações diferenciais

## Exemplo 3

$f(x)$  é localmente Lipschitziana mesmo com função não diferenciável.  
Se  $x$  é limitado, variação de  $f(x)$  também é!



## Exemplo 4



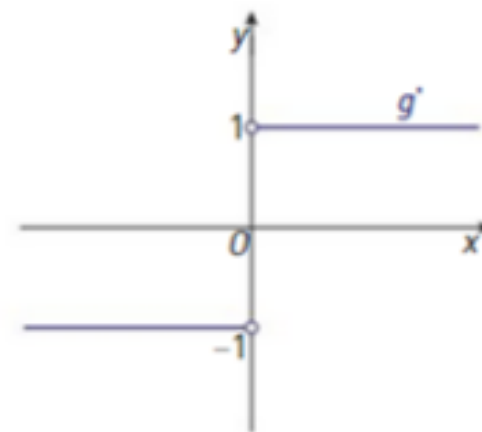
$f(x)$  não é localmente Lipschitziana  
para "bolas" que englobem  $x_0$

Definindo a função  $g$ , sem se utilizar  
o sinal de módulo, tem-se:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



# Solução de equações diferenciais

## Exemplo 5

$f(x)$  não é localmente Lipschitziana para bolas que englobem  $x_0$ . Descontinuidade

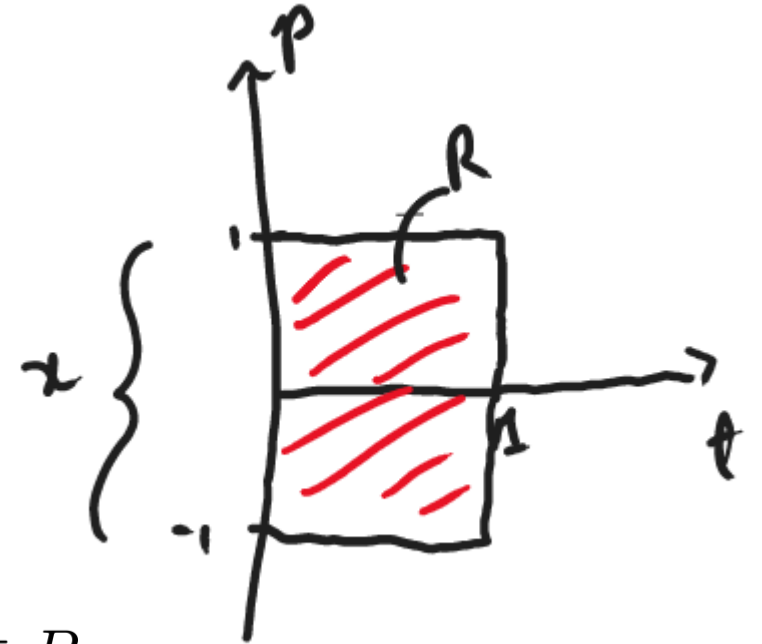
## Exemplo 6

$$f(t, x) = \cos(t) + x^3, \quad B = R : (t, p) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 1], \quad |p| \leq 1$$

$$\forall (t, x) \in B, \text{ tem-se } \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| = |3x^2| \leq 3$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$  é contínua em  $B$ . Assim  $K = 3$ . Logo,

$$|(\cos(t) + x^3) - (\cos(t) + x'^3)| \leq 3|x - x'|, \quad \forall (t, x), (t, x') \in B$$



# Comparação assintótica de sinais

Seja  $g(x) > 0$  e suponha que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} \leq c$  então, dizemos que  $f$  é da mesma forma de grandeza de  $g$  e representamos por  $f = \mathcal{O}(g)$

Exemplo:  $f(x) = x \operatorname{sen} x$ ,  $g(x) = x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x \operatorname{sen} x|}{x} = \frac{x |\operatorname{sen} x|}{x} = |\operatorname{sen} x| \leq 1$

Seja  $g(x) > 0$  e suponha que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  então, dizemos que  $f$  é desprezível em relação a  $g$  e representamos por  $f = o(g)$

Exemplo:  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$