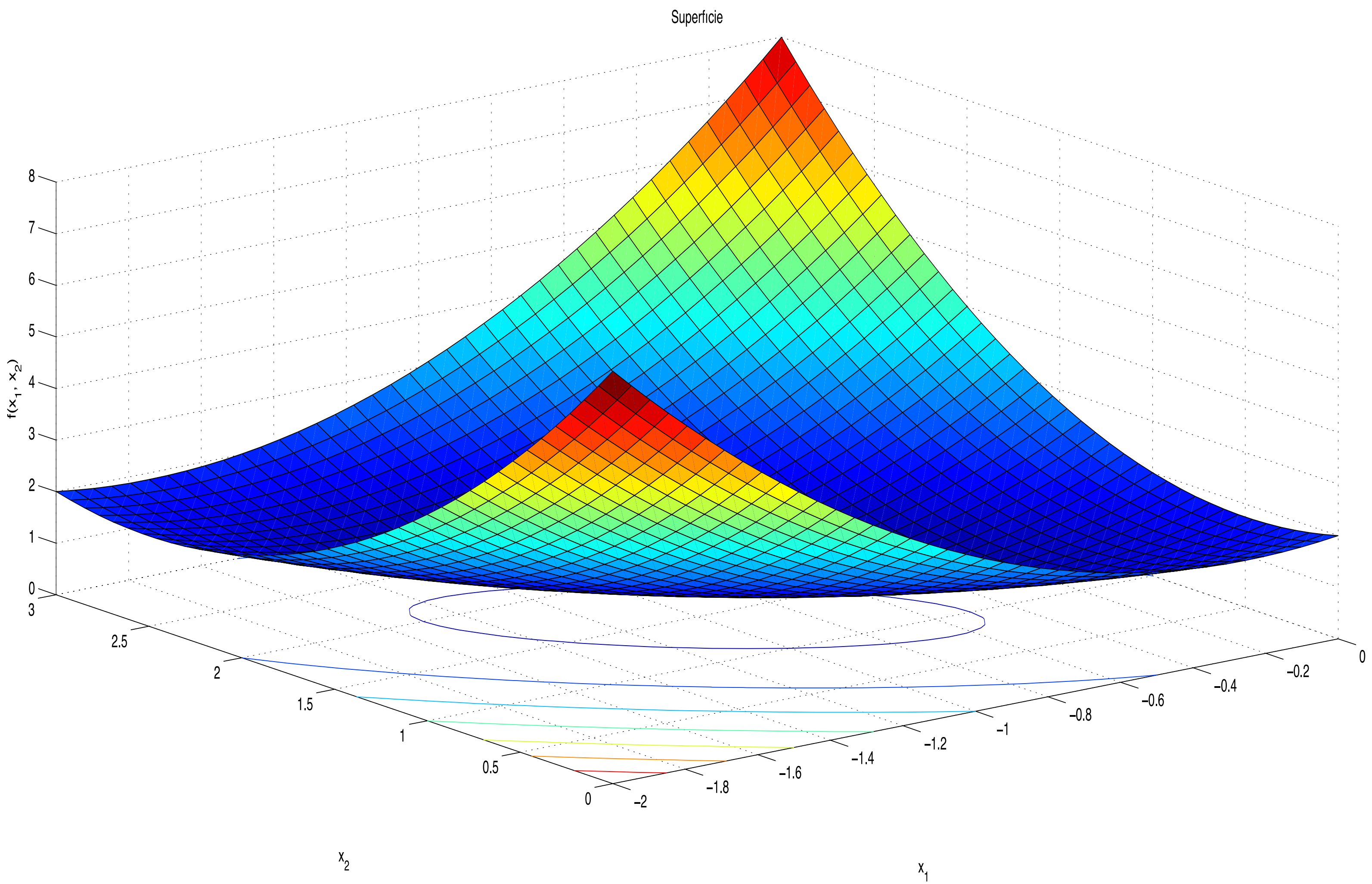
Solução de Problemas de Otimização via Programação Linear no Excel Solver

Josenalde B. Oliveira
UFRN

Sumário

- Por que otimizar?
- Problemas de otimização sem restrições
- Otimização com restrições
- Programação linear
- Ferramentas: Solver
- Conclusões
- Referências

Por que otimizar?



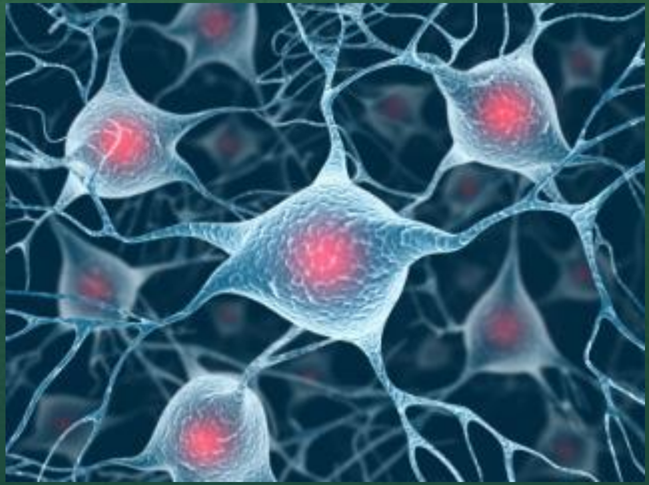
Por que otimizar?

- É o processo de criação de algo que é o mais eficiente possível (sentido mais geral)
- Projetar dispositivos e produtos que desempenhem tarefas de forma eficiente com o menor custo
- Soluções buscam equilibrar desempenho e limitações
- Processo de distribuir os “recursos” disponíveis para resolver um problema: obter os melhores resultados a um CUSTO mínimo ou, decidir de modo a obter um LUCRO máximo.
- Palavras-chave: MAXIMIZAR / MINIMIZAR
- Busca pelo ÓTIMO, não apenas pelo viável (factível)

Por que otimizar?

- A natureza apresenta vários exemplos de otimização



Por que otimizar?

- Pequena otimização pode representar economia substancial na produção em larga escala
  - Produzir mais, com a mesma área disponível, com sustentabilidade
  - Otimização no processo de projeto (economia de dinheiro e tempo de desenvolvimento)

Problemas de otimização

- Do ponto de vista matemático, a otimização trata da determinação dos máximos e mínimos de uma função que depende de uma ou mais variáveis. Em seguida, esses valores podem ser substituídos de volta na função para calcular os valores ótimos.

- Exemplo 1: otimização unidimensional

Considerando a produção de matéria seca de feijão f(x) (g/vaso) em função da dose de fósforo x (ppm), em que

$$f(x) = 6.575 + 0.0788x - 0.000174x^2, \quad 0 \le x \le 230$$

encontre a dose de fósforo que dá a produção máxima.

Problemas de otimização

- Solução: encontrar o ponto crítico significa resolver a equação f′(x) = 0. Então:

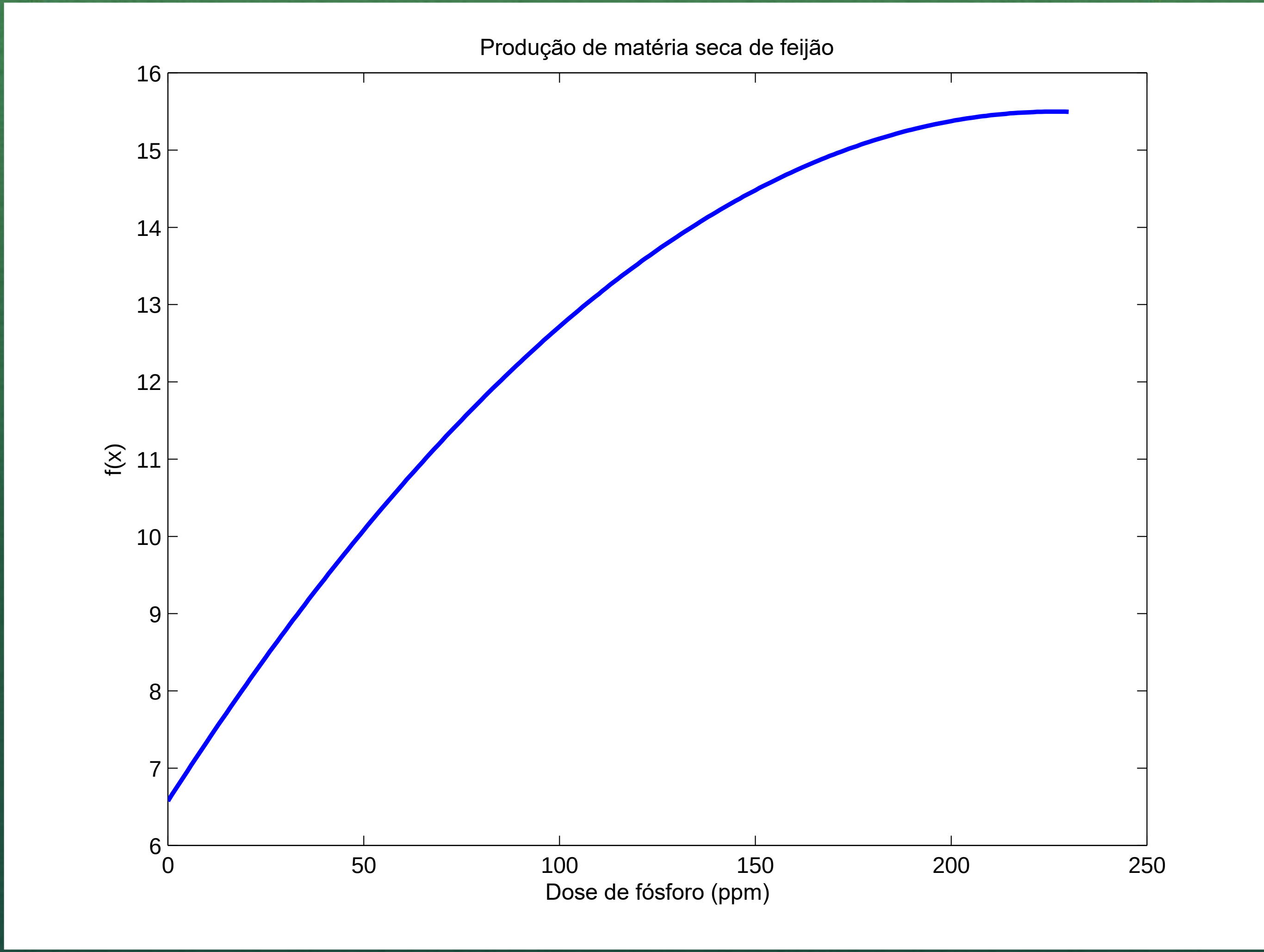
$$f'(x) = 0.0788x - 0.000348x = 0 \Rightarrow x = 226.44$$

- utilizando o teste da segunda derivada em x, temos:

$$f''(226.44) = -0.000348 \Rightarrow f''(x) < 0$$

- o que implica que x=226.44 ppm é um ponto de máximo local, isto é, a produção máxima será de f(226.44) = 15.497 (g/vaso)

Problemas de otimização



Problemas de otimização

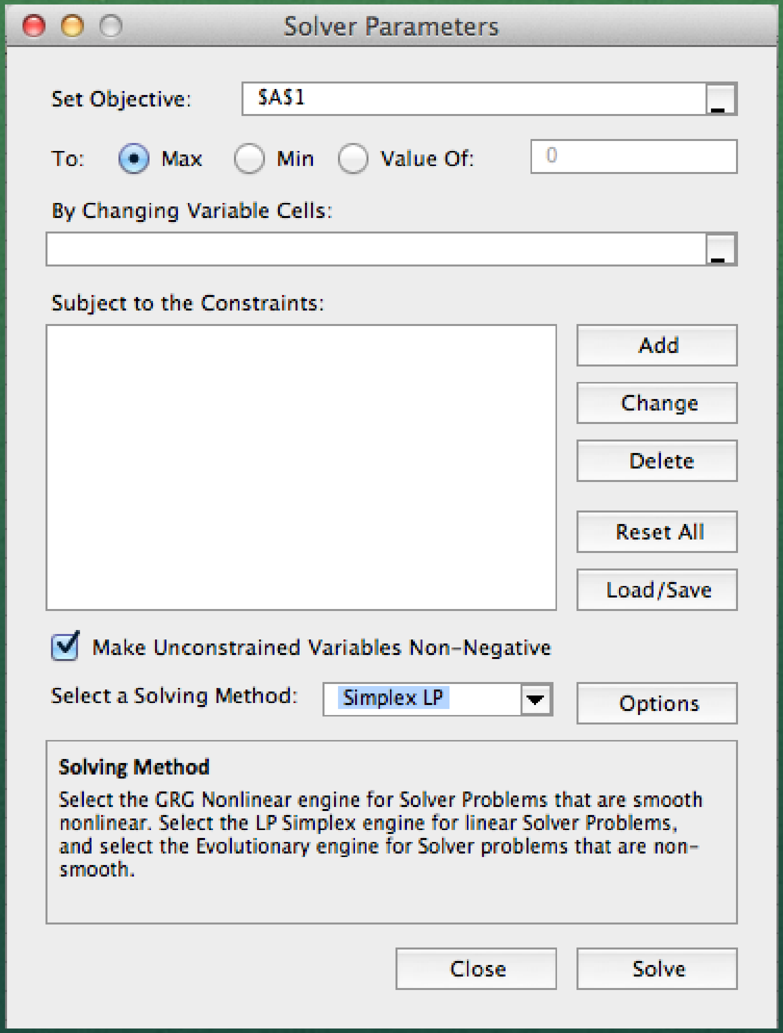
- Inúmeras ferramentas computacionais para resolução numérica: Matlab, Maple, Scilab, Excel etc.
- Destacamos o Excel pela história e simplicidade para organização e tratamento de dados estatísticos, construção de tabelas e gráficos, e execução de procedimentos mais complexos, como obtenção de raízes de funções, máximos e mínimos, solução de sistemas lineares e não-lineares, integração numérica e solução de equações diferenciais.

Problemas de otimização

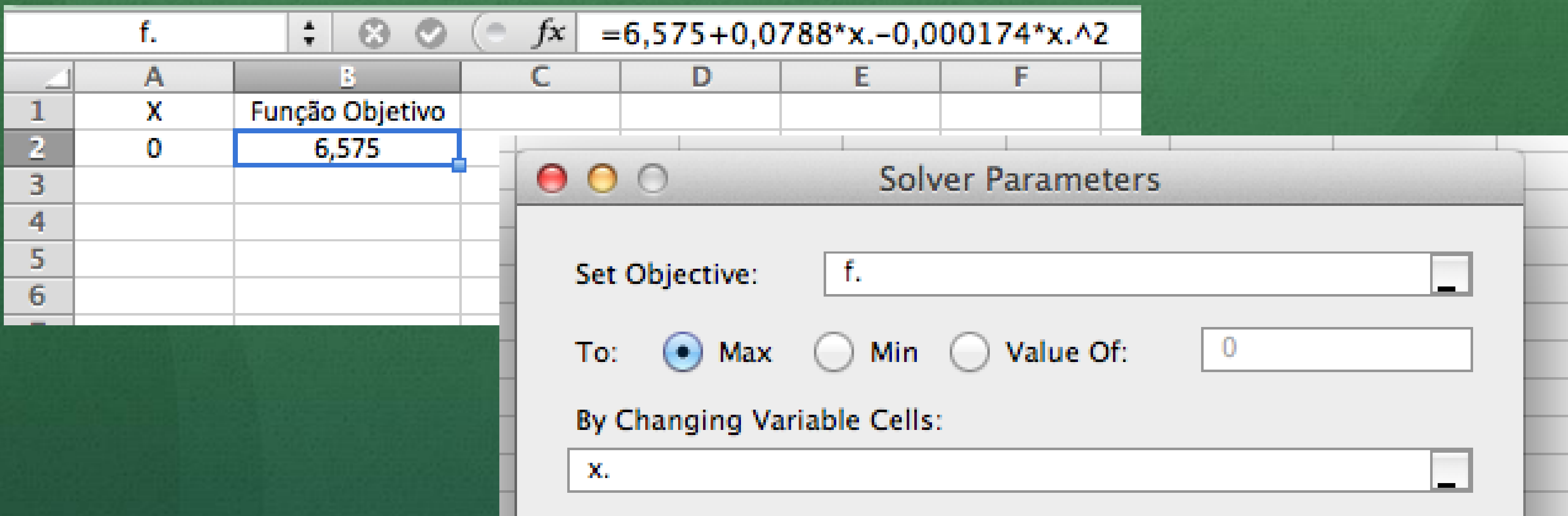
- Ferramentas adicionais do Excel
  - Atingir Meta (Goal seek)
  - Solver (www.solver.com)

- A instalação padrão do Excel não inclui o Solver (instalação no primeiro uso) – Ir no Menu Ferramentas (Tools) e verificar se aparece o Solver. Caso não esteja, selecionar Ferramentas -> Suplementos (Tools->Add-ins) e ativar a caixa Solver. Caso não encontre esta caixa, é necessário recorrer ao CD de instalação.

Problemas de otimização

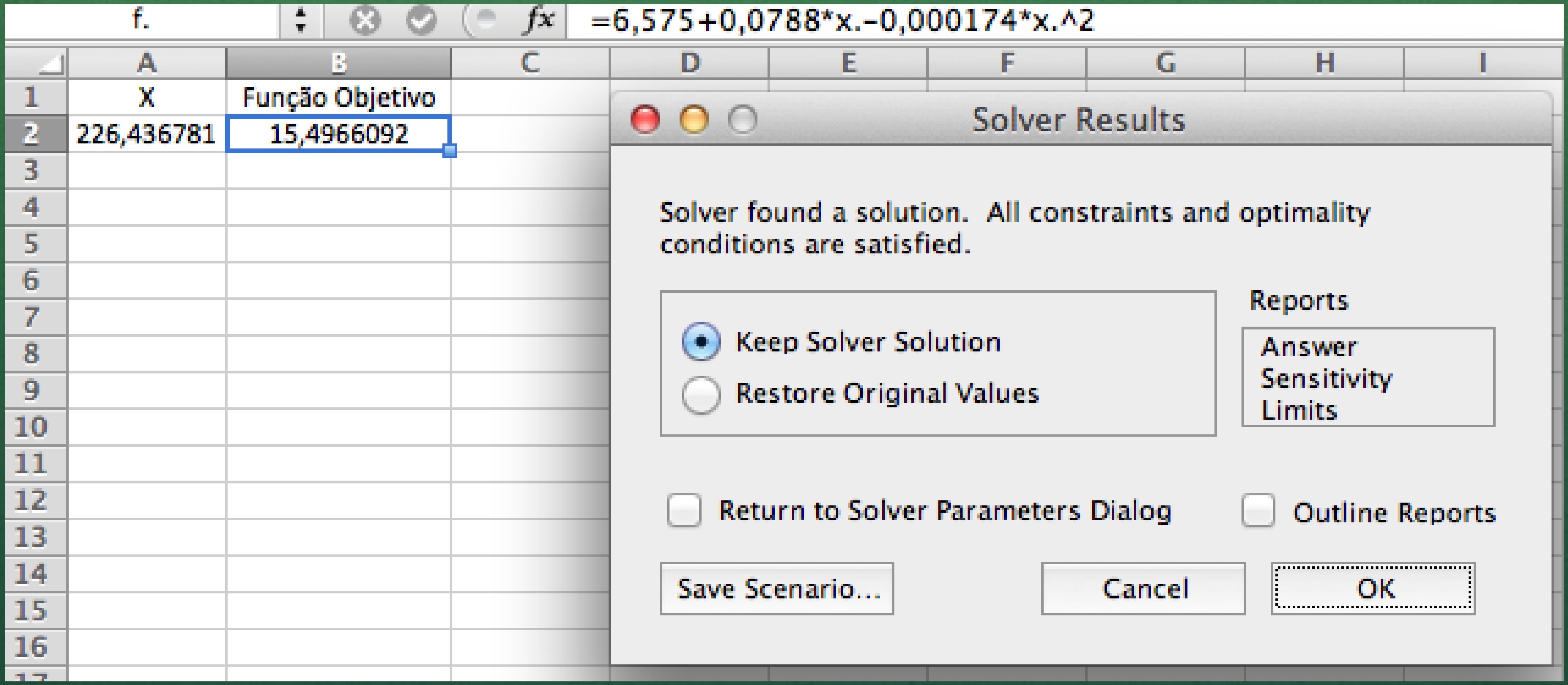


Problemas de otimização



Nomear A2 como x. e B2 como f. (função objetivo)
Introduzir 0 em A2 e a fórmula = 6,575 + 0,0788*x. – 0,000174*x.^2 em B2
Acionar o Solver
OBS: deixar a opção padrão do algoritmo GRG Nonlinear (Generalized Reduced Gradient

Problemas de otimização



Problemas de otimização

- Na prática, funções de uma variável constituem um universo restrito, pois os fenômenos, em sua maioria, dependem de mais de uma variável, por exemplo, $f(x,y)$.
- Tem-se portanto uma equação funcional cuja imagem é o conjunto de todos os pontos obtidos a partir da aplicação de todos os pontos do domínio na equação funcional. Geometricamente, é a “altura” de cada ponto do domínio, dada pelo eixo $f(x,y) = z$ perpendicular ao domínio. Tem-se portanto um gráfico no subconjunto do espaço tridimensional R^3.

Problemas de otimização

- Exemplo 2: A equação a seguir modela um experimento de produção de feijão (Phaseolus vulgaris L.) (kg/ha) como função da quantidade de nitrogênio x (kg/ha) e da quantidade de lâmina de água y (mm).

$$P(x,y) = 759,29 + 12,771x + 7,96y + 0,0152xy - 0,0913x^2 - 0,00854y^2$$

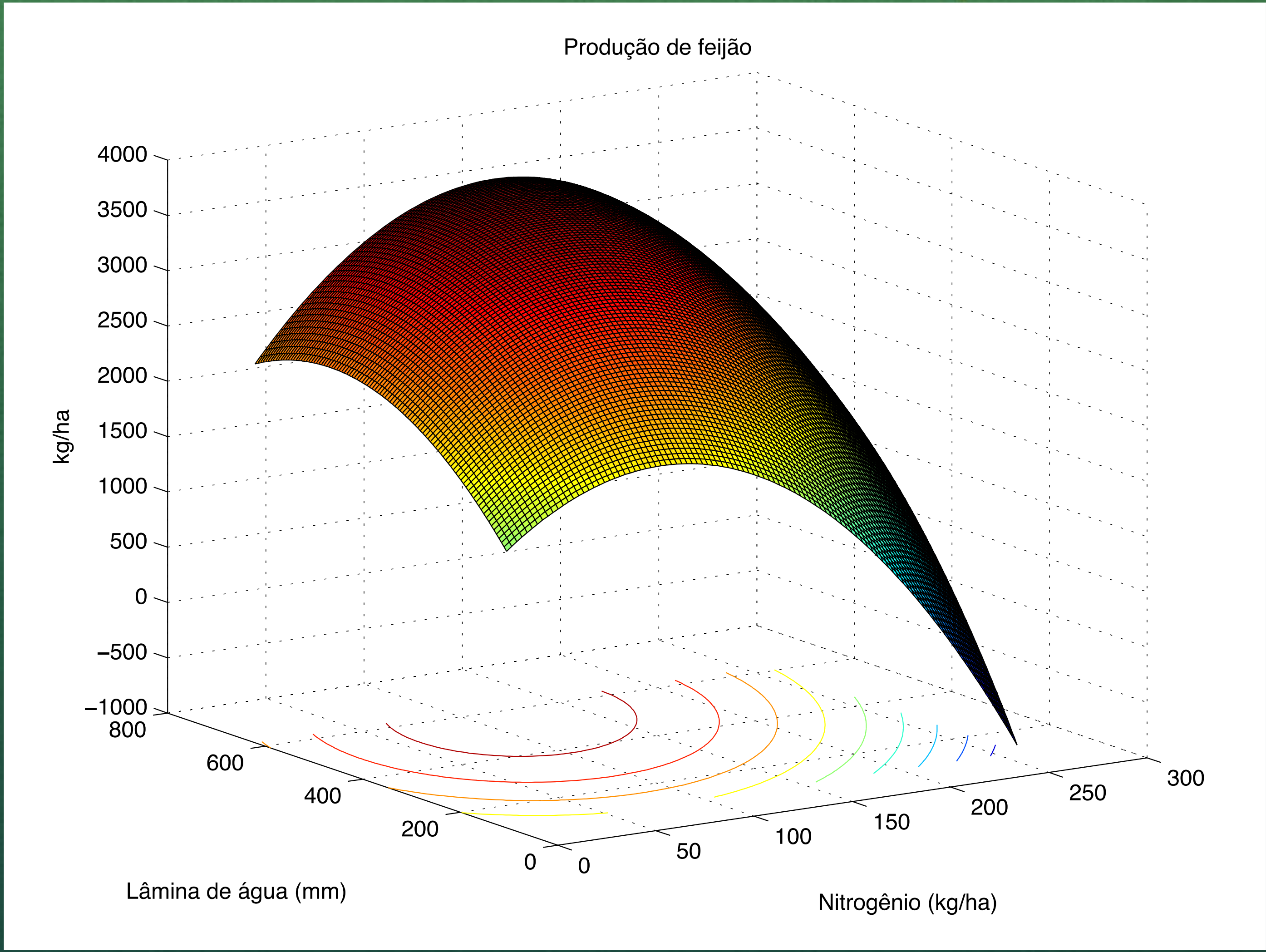
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 260, 105 \leq y \leq 621 \right\}$$

Problemas de otimização

- Exemplo 2:

$$P(10,120) = 1728,3$$

$$P(150,550) = 2540,74$$



Problemas de otimização

- A determinação de pontos críticos em funções de mais de uma variável baseia-se no cálculo de DERIVADAS PARCIAIS

- Seja f(x,y), então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y)$$

- e , para a segunda derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Problemas de otimização

- Introduz-se também o conceito de **vetor gradiente**: vetor das derivadas parciais – o vetor gradiente em um ponto (x_0, y_0) dá a direção e o sentido, a partir do ponto, nos quais a variação é máxima. Se o vetor gradiente se anula neste ponto, não há variação, e este é um ponto crítico ou estacionário de f(x,y).

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 12,771 + 0,0152y - 0,1856x = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 7,96 + 0,0152x - 0,01708y = 0$$

$$\begin{cases} 0,1826x - 0,0152y = 12,771 \\ -0,0152x + 0,0170y = 7,96 \end{cases} \Rightarrow \quad y = 570,55, \quad x = 117,43$$

Problemas de otimização

- Seja (x_0,y_0) um ponto crítico de f e um número D (denominado discriminante) definido por

$$D = f_{xx}(x_0,y_0).f_{yy}(x_0,y_0) - \left[f_{xy}(x_0,y_0)\right]^2$$

- Então:
  - Se $D > 0$ e $f_{xx} < 0$, (x_0,y_0) é ponto de máximo local de f
  - Se $D > 0$ e $f_{xx} > 0$, (x_0,y_0) é ponto de mínimo local de f
  - Se $D < 0$, (x_0,y_0) é um ponto de sela de f
  - Se $D = 0$ nada se pode afirmar
- Portanto, para o exemplo em estudo,

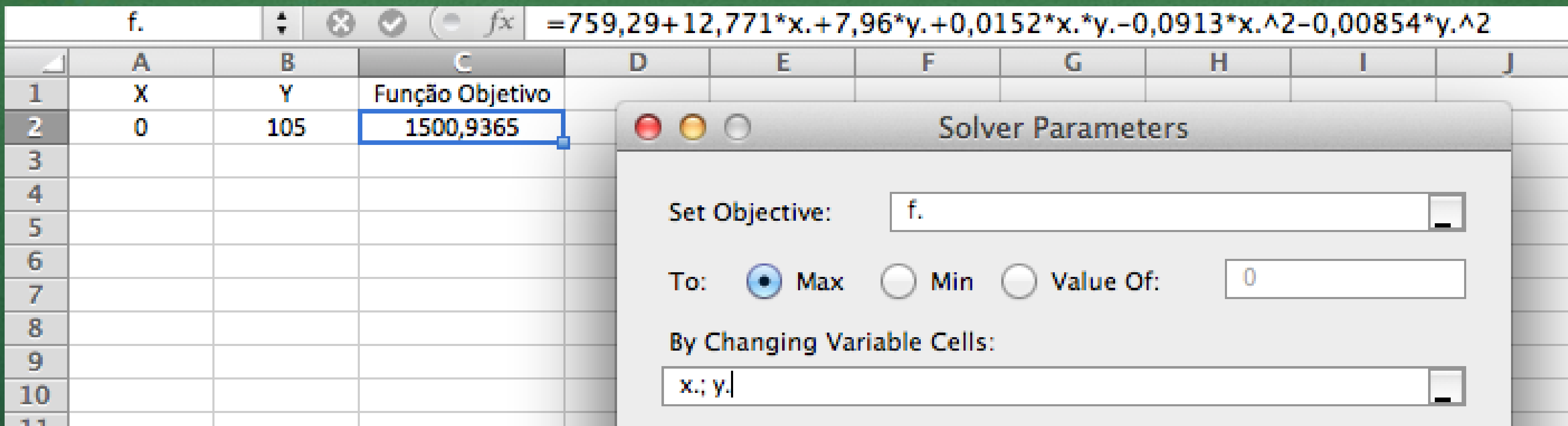
Problemas de otimização

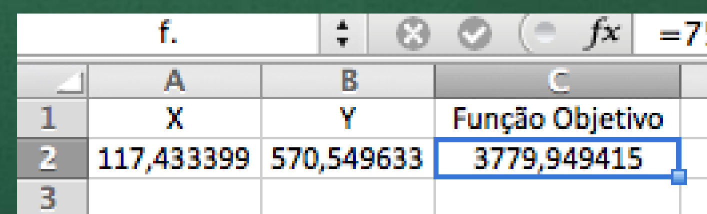
$$P_{xx}(117.43, 570.55) = -0.1826 \qquad P_{yy}(117.43, 570.55) = -0.01708$$

$$P_{xy}(117.43, 570.55) = 0.0152$$

- O discriminante D é: $D = 0.00288 > 0, \quad P_{xx} < 0 \Rightarrow$
- Ponto (117.43, 570,55) é ponto de máximo, ou seja, para estes valores de quantidade de nitrogênio e lâmina de água, a produção é máxima, de P(117.43,570.55)=3779.90 (kg/ha)
- No SOLVER…

Problemas de otimização





Nomear A2 como x., B2 como y. e C2 como f. (função objetivo)
Introduzir 0 em A2, 105 em B2 e a fórmula de P(x,y) em C2
Acionar o Solver
OBS: deixar a opção padrão do algoritmo GRG Nonlinear (Generalized Reduced Gradient

Problemas de otimização com restrições

- Quando as variáveis são INDEPENDENTES entre si, ou seja, a decisão tomada em relação a uma variável não afeta a outra, dizemos que não há restrições sobre as variáveis, com exceção dos próprios limites estabelecidos no domínio.
- No exemplo anterior, foram encontradas as quantidades de nitrogênio e lâmina d'água que maximizaram a produção em levar em consideração, por exemplo, o custo para obtê-la (mão-de-obra, implementos, máquinas etc.)
- Tem-se portanto a Otimização com Restrição e o valor encontrado será um ótimo restrito, menor ou igual ao ótimo irrestrito.

Problemas de otimização com restrições

- Quando as funções de custo e restrições são descritas por funcionais lineares, os métodos de otimização baseiam-se na técnica de Programação Linear (Linear Programming), sendo um dos recursos mais utilizados na prática.
- O método SIMPLEX é amplamente utilizado, por exemplo, por companhias aéreas (escalar pessoal de bordo, localizar aeronaves etc.), problema de transporte (roteamento), problema da dieta (respeitando os limites nutricionais e algumas restrições de quantidades de porções por dia, minimizar o gasto com alimentação, processos químicos etc.)

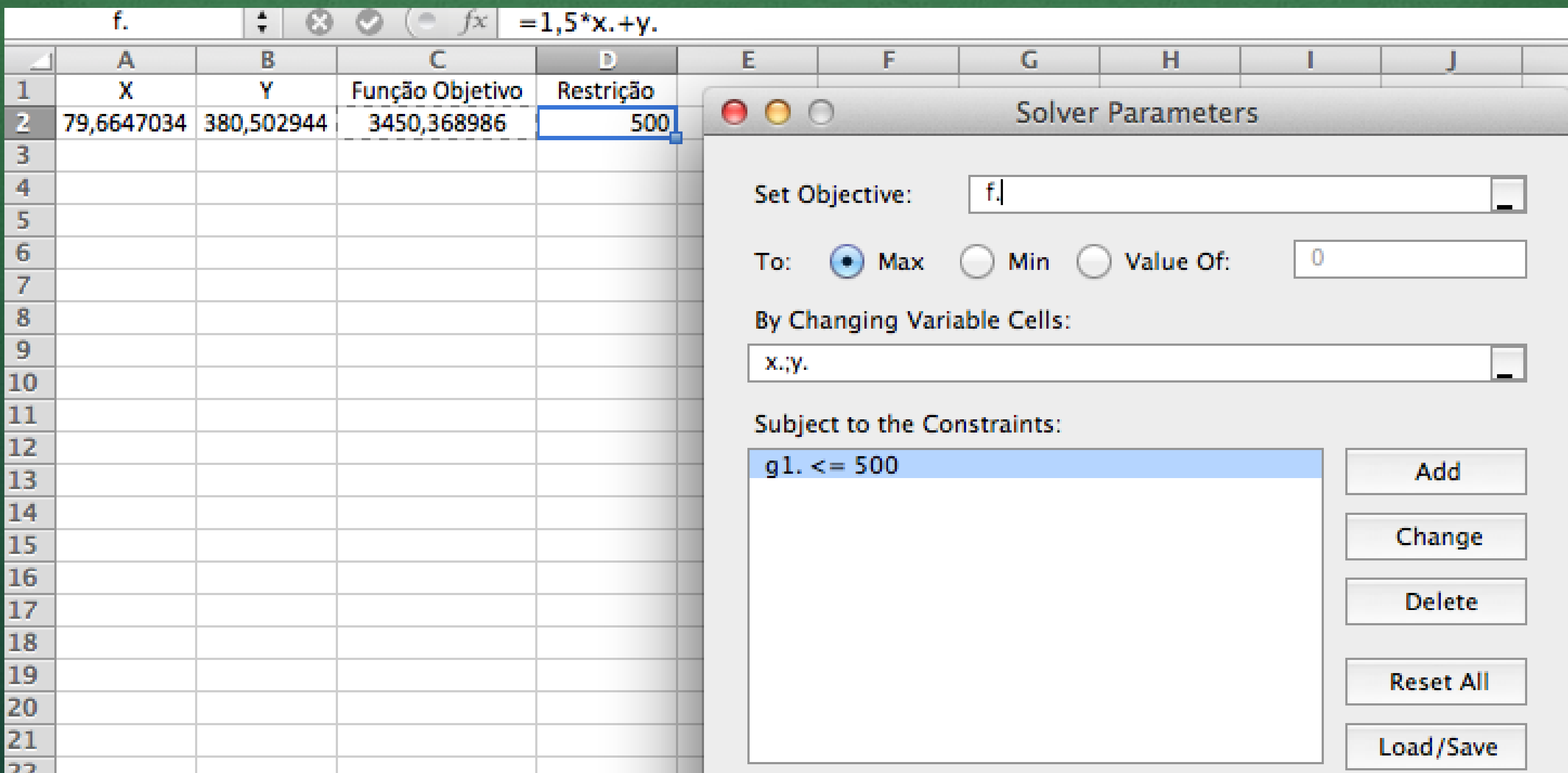
Problemas de otimização com restrições

- Em 1947, George B. Dantzig propõe um procedimento iterativo, chamado algoritmo SIMPLEX (tetraedro generalizado). Baseia-se nos conceitos de diferencial de uma função, derivadas direcionais e multiplicadores de Lagrange.

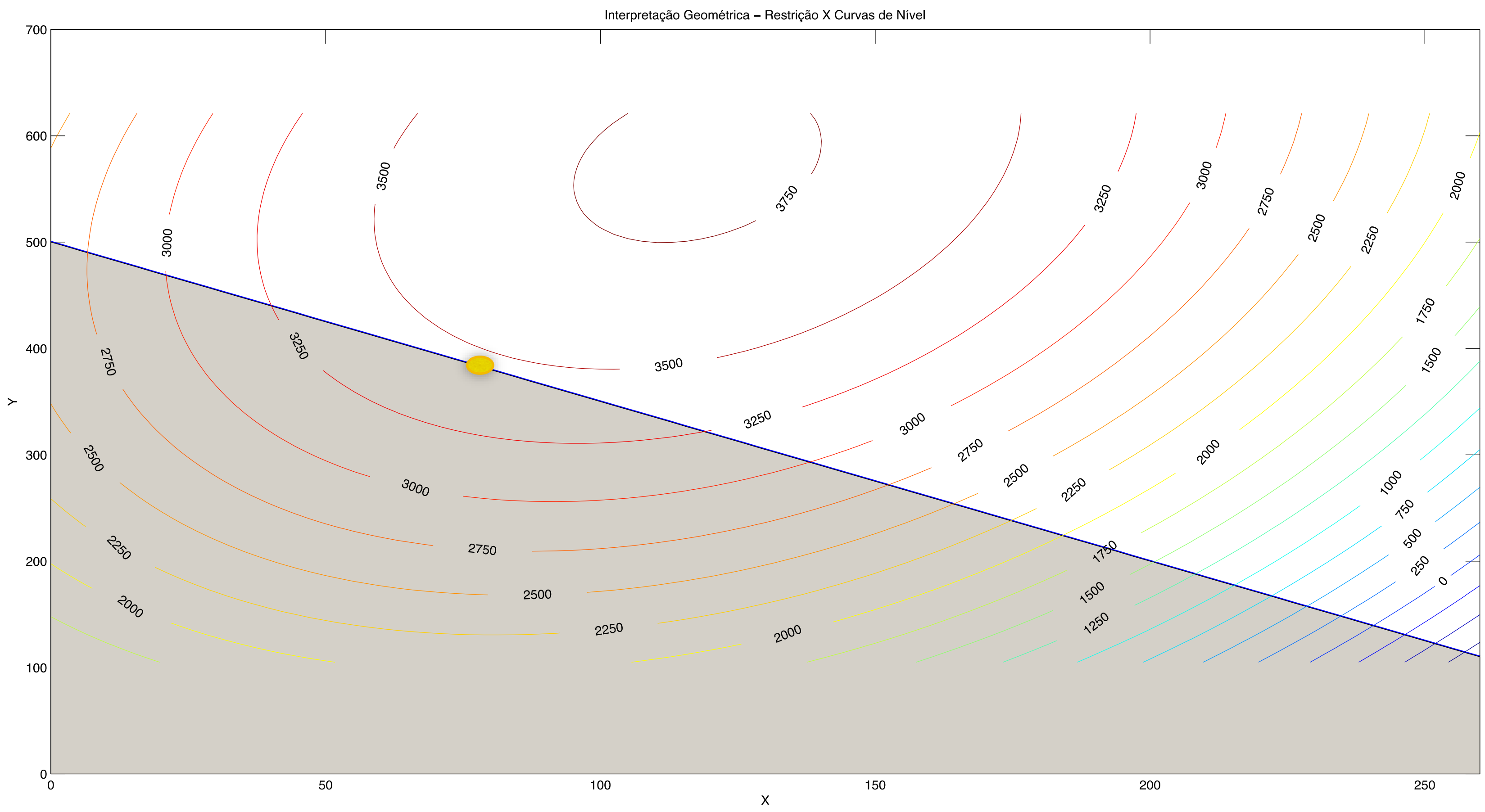
- Exemplo 3: Considerar, para o exemplo, anterior, que o custo do nitrogênio seja R$ 1,50 / kg e o de água, R$ 1,00/mm (mão-de-obra, máquinas etc.) e que o produtor esteja disposto a gastar com estes dois implementos no máximo R$ 500,00/ha

- Objetivo: encontrar ponto que maximize a produção P(x,y) sujeita à restrição do custo, dada por $1{,}5x + y <= 500$

Problemas de otimização com restrições



Problemas de otimização com restrições



Problemas de otimização com restrições

- Exemplo 4: Deseja-se adubar uma área de 20 hectares, dispondo-se de dois tipos de adubo com as seguintes especificações e condições:

	Adubo orgânico	Adubo químico	Neces. Mín. Do solo (kg/20 ha)
Fósforo (kg/t)	1.5	100	500
Nitrogênio (kg/t)	6	250	1500
Potássio (kg/t)	4	100	700
Custo (R$/t)	5	130	

- Quanto se deve comprar de cada adubo de modo a obter o custo mínimo?

Problemas de otimização com restrições

- Deseja-se minimizar o custo, o qual depende das quantidades de adubo orgânico (x) e da quantidade de adubo químico (y), dado pela **função de custo**: $f(x,y) = 5x + 130y$

- Este custo está restrito às especificações de cada adubo e às necessidades mínimas do solo (restrições):

$$\begin{cases} 1,5x + 100y \geq 500 & \text{Restrição de fósforo} \\ 6x + 250y \geq 1500 & \text{Restrição de nitrogênio} \\ 4x + 100y \geq 700 & \text{Restrição de potássio} \\ x \geq 0 & \\ y \geq 0 & \text{Restrição de não-negatividade} \end{cases}$$

Problemas de otimização com restrições

- Resumindo, deseja-se minimizar $f(x,y) = 5x + 130y$
- Sujeito a $\begin{cases} 1,5x + 100y \geq 500 \\ 6x + 250y \geq 1500 \\ 4x + 100y \geq 700 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Minimize $f(x,y)$

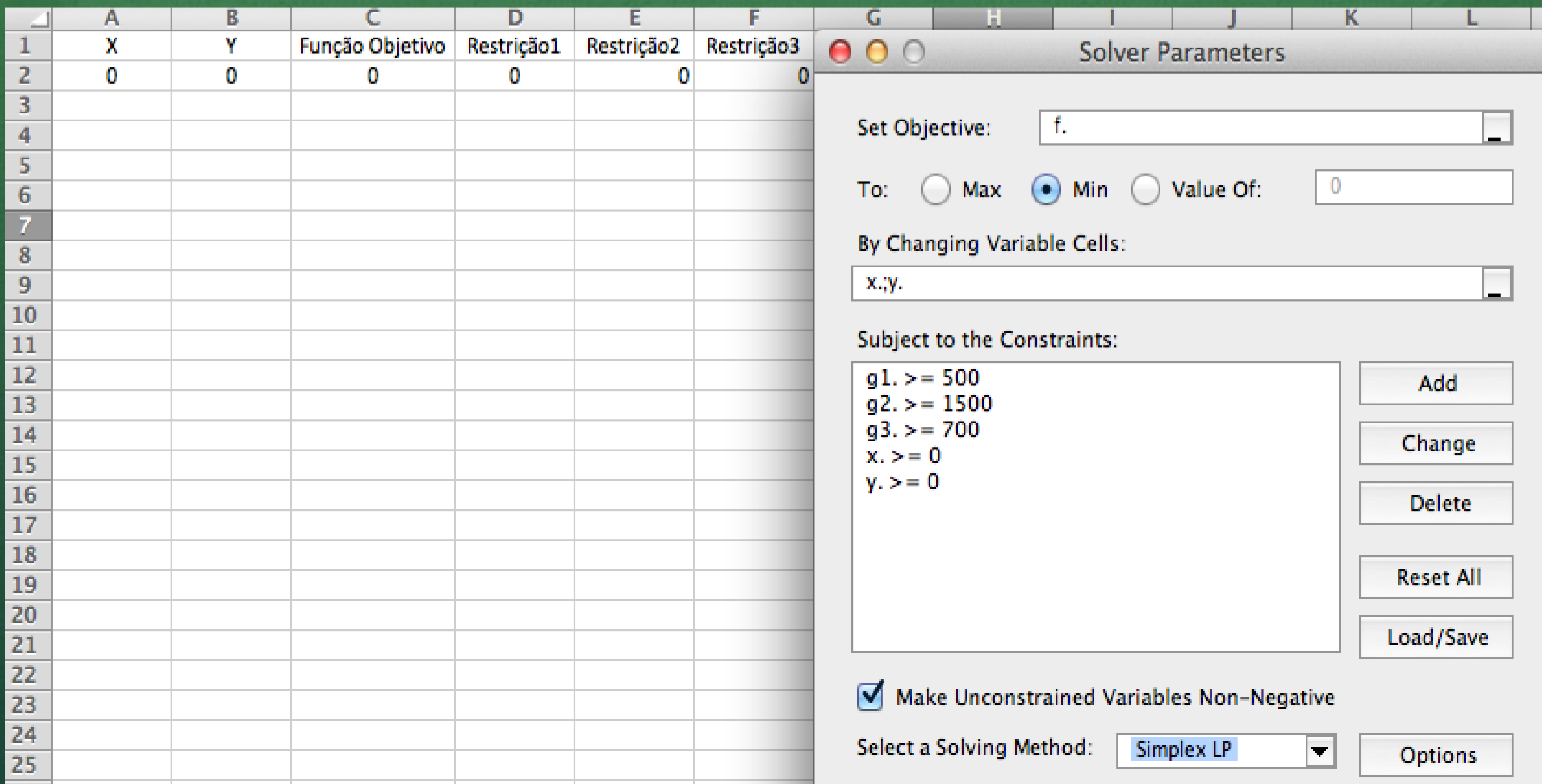
Sujeito a

$Ax \geq b$

$x \geq 0$

- A é a matriz associada ao sistema, x é o vetor de incógnitas (var. independentes) e b é o vetor dos níveis das restrições.

Problemas de otimização com restrições

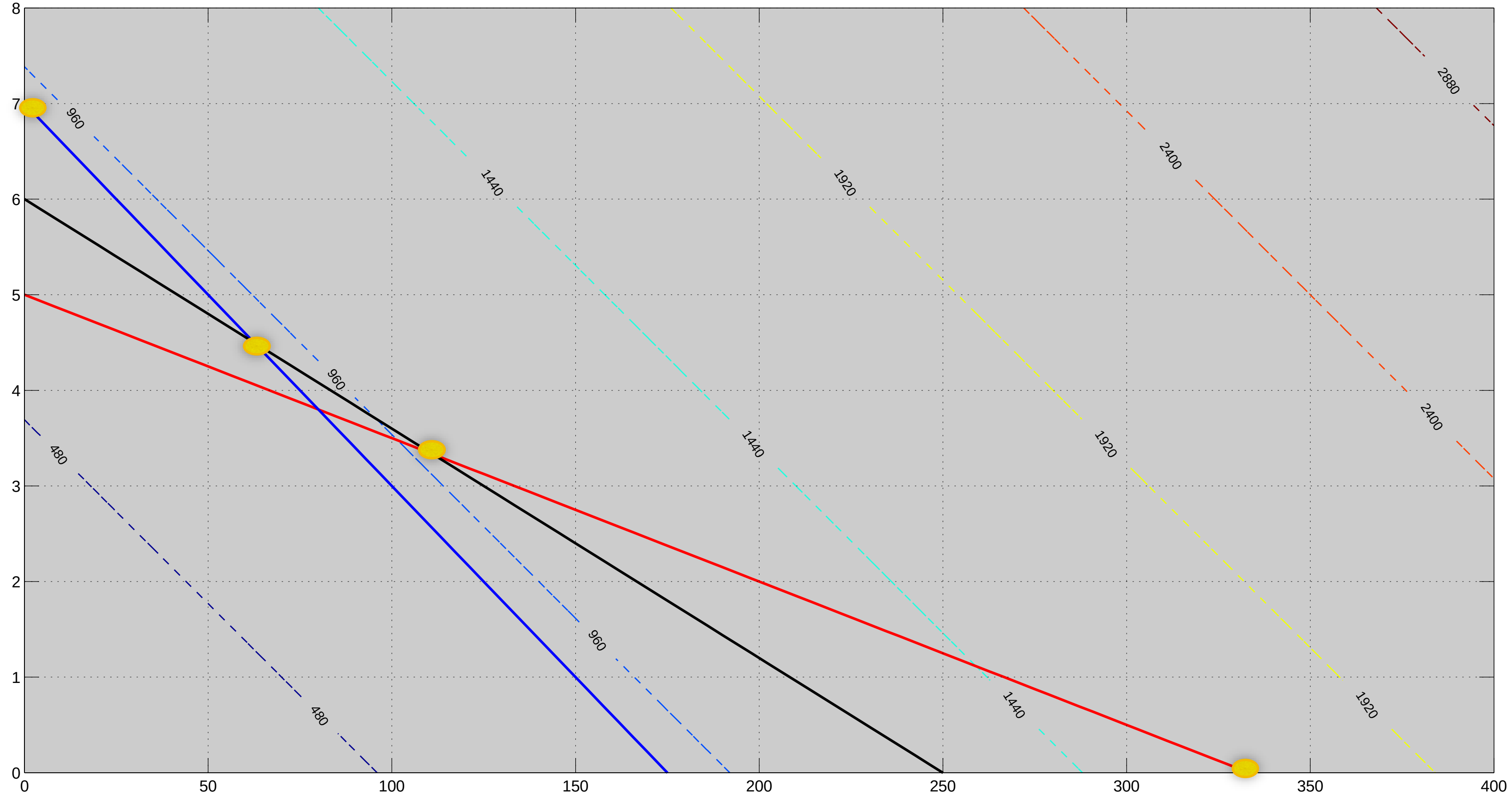


Problemas de otimização com restrições

	A	B	C	D	E	F
1	X	Y	Função Objetivo	Restrição1	Restrição2	Restrição3
2	62,5	4,5	897,5	543,75	1500	700
3						

- Logo, a combinação de adubo que minimiza o custo é 62.5t do adubo orgânico e 4.5t do adubo químico, sendo o custo mínimo f(62.5, 4.5) = R$ 897,50 / 20 ha

Problemas de otimização com restrições



Problemas de otimização com restrições

- Interpretação geométrica: a região factível é delimitada pelas intersecções das equações de cada restrição (retas fronteira). Como o conjunto é fechado (convexo), os vértices também pertencem a este conjunto.

- Os pontos de máximo e mínimo de uma função linear estão na fronteira do domínio; neste caso, do conjunto viável. Na teoria do método SIMPLEX mostra-se que esses pontos, quando existem, são os vértices do conjunto viável.

Problemas de otimização com restrições

Vértice	F(x,y)=5x+130y
(0.7) V1	910,00
(62.5, 4.5) V2	**897,50**
(111.1, 3.3) V3	984,5
(333.3, 0) V4	1666,50

Problemas de otimização com restrições

- Um criador de frangos de corte quer fornecer uma ração balanceada para sua criação, combinando apenas necessidades protéicas e calóricas. Admite-se que a ração ótima para estes animais necessita ter, no mínimo, 17,16% de proteína e 3.000 quilocalorias (Kcal) de energia metabolizável aparente. Sabe-se que o criador tem disponíveis apenas milho e farelo de soja e que cada quilograma do milho contém 45,6% de proteína e 3.146 Kcal de energia. O farelo de soja, por sua vez, contém 45,6% de proteína e 2.283 Kcal de energia por quilograma, mas tem-se disponível apenas 0.2 Kg de farelo de soja para cada porção de ração. Considerando que o preço do milho será de R$ 0,80/kg e o do farelo de soja, R$ 3,80/kg, quanto de milho e farelo de soja deve ser misturado para ser fazer uma porção de ração que minimize o custo? Qual o peso desta porção?

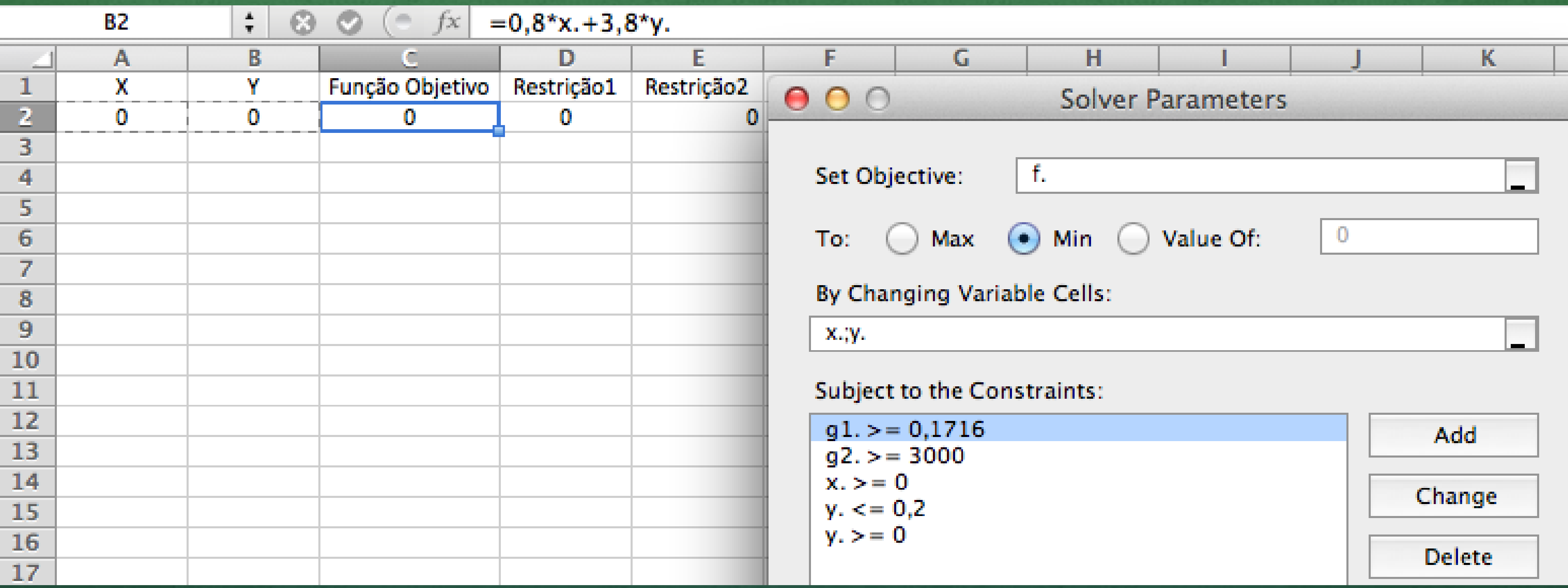
Problemas de otimização com restrições

	Milho (x)	**Farelo de Soja (y)**	**Necessidades Mínimas**
Proteína (%)	8,51	45,6	17,16
Energia (Kcal)	3.146	2.283	3.000
Custo (R$/kg)	0,80	3,80	

- Seja x a quantidade de milho e y a quantidade de farelo de soja a serem misturadas, deseja-se minimizar C(x,y)=0,8x+3,8y sujeito a

$$\begin{cases} 0,0851x + 0,456y \geq 0,1716 \\ 3146x + 2283y \geq 3000 \\ y \leq 0,2 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Problemas de otimização com restrições



Problemas de otimização com restrições

f. | f_x | =0,8*x.+3,8*y.

	A	B	C	D	E
1	X	Y	Função Objetivo	Restrição1	Restrição2
2	0,94477086	0,2	1,515816686	0,1716	3428,84912
3					

- De onde conclui-se que o custo mínimo será dado, misturando 0,944 kg de milho e 0,2 kg de farelo de soja, obtendo-se uma porção de 1,144 kg de ração a um preço de R$ 1,51.

Conclusões e perspectivas

- Agronômos, engenheiros, técnicos agrícolas, enfim, os usuários finais dos sistemas de informação podem abstrair o conhecimento detalhado dos algoritmos de otimização, focando sua atenção na descrição e formulação do problema, de modo a ser tratável por ferramenta de software, tal como o Solver.
- Desenvolvedores de software e especialistas em computação podem, a partir do conhecimento da matemática computacional envolvida nos algoritmos, propor melhorias e modificações visando melhor desempenho e confiabilidade de resultados.

Conclusões e perspectivas

- Explorar outras técnicas de otimização, como:
  - Programação Não-Linear
  - Busca por razão áurea, interpolação quadrática
  - Programação inteira
  - Programação dinâmica
  - Meta heurísticas como algoritmos genéticos e enxame de partículas
  - …

Referências

- Belegundu, A. D.; Chandrupatla, T. R. Optimization Concepts and Applications in Engineering, 2. ed. Cambridge University Press, 2011.
- Chapra, S. C. Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas, 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.
- Hoffmann, R. et al. Administração de Empresa Agrícola. São Paulo: Pioneira, 1976.
- Kwong, Wu H. Programação Linear: uma abordagem prática. In: *Série Apontamentos*. São Carlos: edUFSCar, 2013.
- Moura, L. F. Excel para Engenharia: formas simples para resolver problemas complexos, v. 1. São Carlos: edUFSCar, 2007.
- Peres, F. C.; Marques, P. V. Manual de cálculo de rações de custo mínimo. Piracicaba: ESALQ, 1988.
- Sviercoski, R. F. Matemática Aplicada às Ciências Agrárias: análise de dados e modelos. Viçosa: UFV, 2010.

Muito obrigado

josenalde.oliveira@ufrn.br