EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Plano de fase (R^2, R)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

Mostra como x_1 varia em função do tempo, sendo função tanto de x_1 como de x_2

$$\dot{x} = f(x) \quad f : (R^2, R) \to (R^2, R)$$

Traçado do retrato de fase – método das isóclinas

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2}{dx_1}.\frac{dx_1}{dt} \implies f_2 = \frac{dx_2}{dx_1} f_1 \implies \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1}, \quad f_1 \neq 0$$

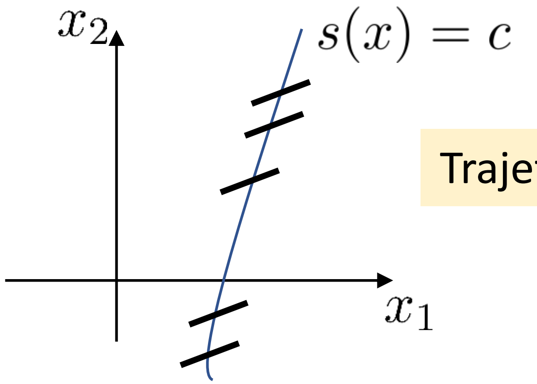
a) A inclinação de uma trajetória em um ponto x é dada por:

$$s(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}, \quad f_1 \neq 0, \text{ ou melhor, } s(x) = c$$

A equação **s(x)=c** define uma curva no plano de fase onde as trajetórias (ou órbita) tem inclinação igual a c, esta curva denomina-se **Isóclina**, ou seja, o lugar geométrico onde a inclinação das Trajetórias tem um determinado valor

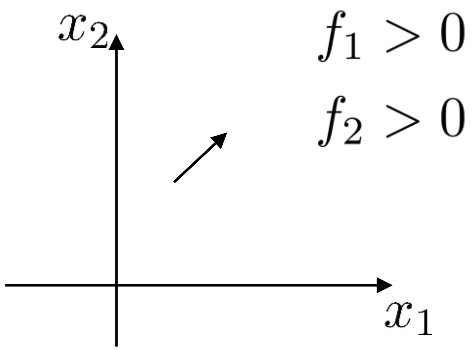
Plano de fase (R^2, R)

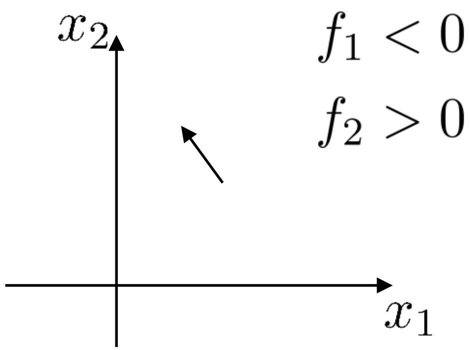
Visualmente:



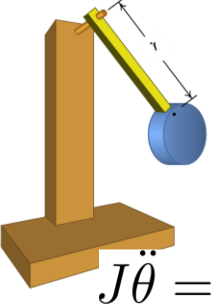
Trajetórias cortam com a mesma inclinação

Os sinais de f_1 e f_2 determinam o sentido com que uma trajetória corta uma isóclina





A construção de uma trajetória a partir de uma condição inicial x_0 é feita seguindo as inclinações das isóclinas e o sentido de corte das mesmas



Pêndulo simples sem atrito

$$J\ddot{\theta} = \sum \text{ torques}$$ Equação de Newton de movimentos rotacionais

$J = ml^2, \quad l$: raio de giração em relação ao eixo

$$ml^2\ddot{\theta} = -mglsen\theta \implies \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}sen\theta. \quad \text{Seja } g = l = 10,$$

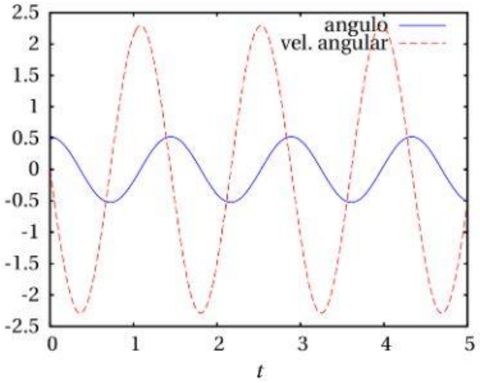
$$\begin{array}{l} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{array} \implies \begin{array}{r} \dot{x}_1 = x_2 = f_1 \\ \dot{x}_2 = -senx_1 = f_2 \end{array}$$

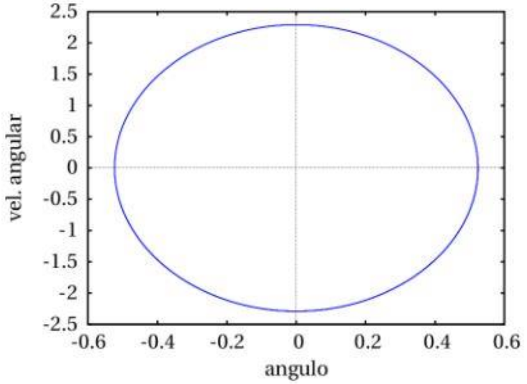
$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; x^* = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \; x^* = \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$ Pontos de equilíbrio

$$\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi \ldots, \dot{\theta} = \omega = 0$$

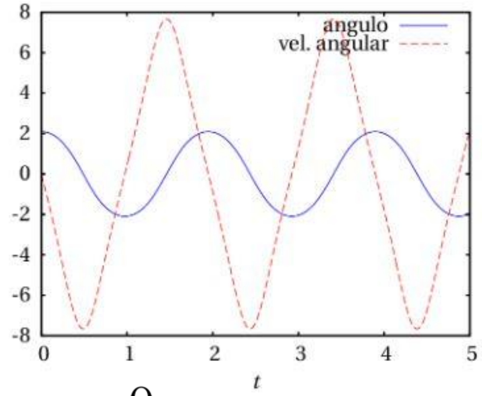
$$s(x) = \frac{-senx_1}{x_2}, x_2 \neq 0, \text{ Para } s(x) = c \implies c = \frac{-senx_1}{x_2} \implies x_2 = \frac{-1}{c}senx_1$$

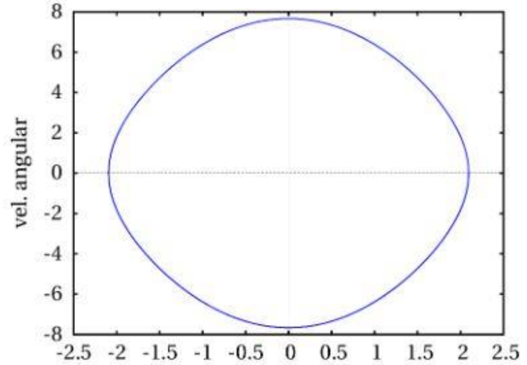
30 graus, T=1.44-1.45s



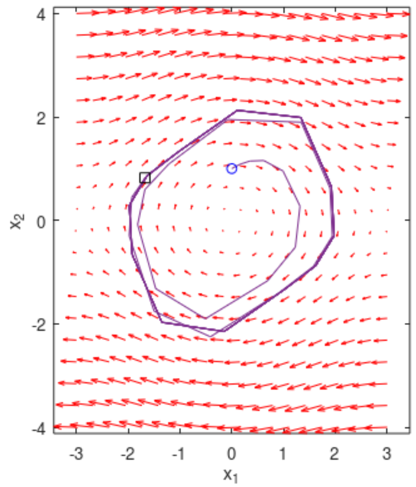


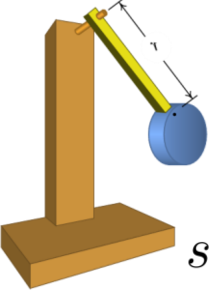
120 graus, T=1.94-1.95





$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

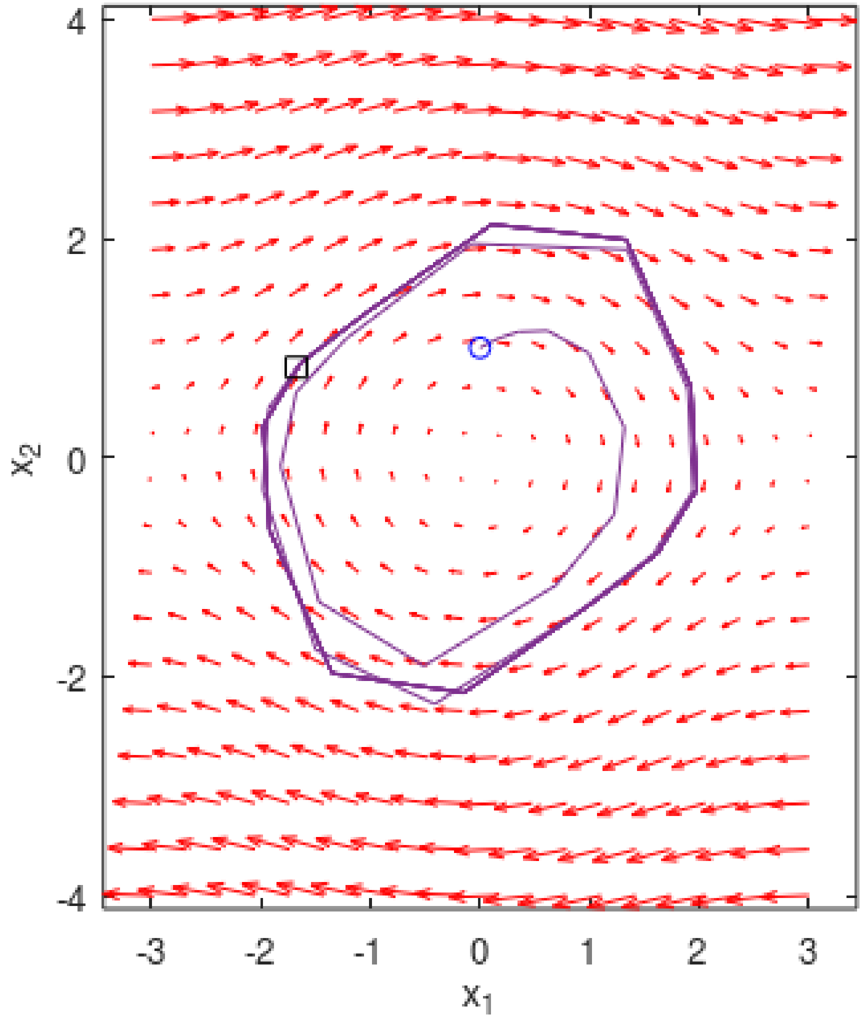




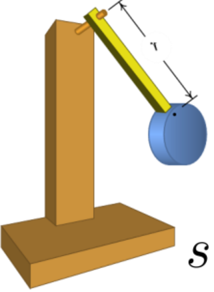
Pêndulo simples sem atrito

$$s(x) = \frac{-sen x_1}{x_2}, x_2 \neq 0,\ \text{Para } s(x) = c \implies c = \frac{-sen x_1}{x_2} \implies x_2 = \frac{-1}{c} sen x_1$$

c	Inclinação em °	Equação da isóclina
1	45	$x_2 = -sen x_1$
1/2	26.5	$x_2 = -2 sen x_1$
1/3	18	$x_2 = -3 sen x_1$
1/4	14	$x_2 = -4 sen x_1$
-1	-45	$x_2 = sen x_1$
-1/2	-26.5	$x_2 = 2 sen x_1$
-1/3	-18	$x_2 = 3 sen x_1$
-1/4	-14	$x_2 = 4 sen x_1$
0	0	$sen x_1 = 0 \implies x_1 = m\pi, m \in Z$
∞	90	$x_2 = 0$

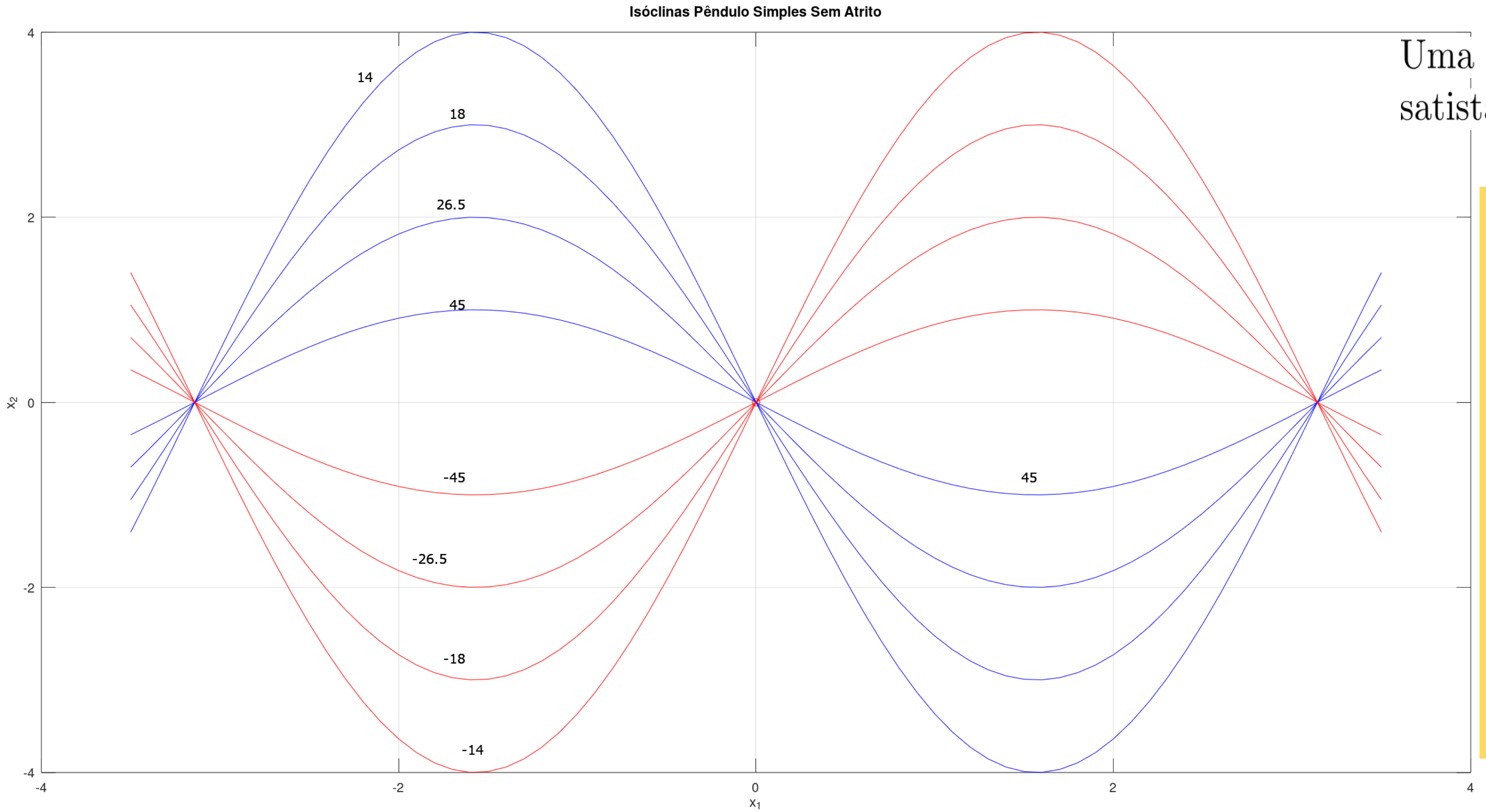


No octave/matlab, y=atan(c) retorna radianos.
*Converter para graus: (y*180)/PI*



Pêndulo simples sem atrito

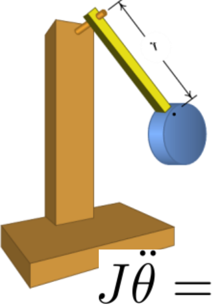
$$s(x) = \frac{-sen x_1}{x_2}, x_2 \neq 0, \text{ Para } s(x) = c \implies c = \frac{-sen x_1}{x_2} \implies x_2 = \frac{-1}{c} sen x_1$$



Uma solução $\phi(t)$ de $\dot{x} = f(x)$ é periódica se satistaz $\phi(t+T) = \phi(t)$ para algum $T > 0, \forall t \geq 0$

Em cada ponto do plano de fase, as funções f1 e f2 assumem determinados valores, originando, assim, a inclinação s(x)=f2/f1 em cada ponto de uma trajetória. Isto implica que as trajetórias não se cruzam, entretanto nos pontos de equilíbrio o valor da inclinação é 0/0, ou seja, uma indeterminação. Muitas isóclinas podem se cruzar em tais pontos, que são chamados pontos singulares no plano de fase.

https://github.com/josenalde/nonlinear_systems/blob/main/scripts/isoclines_pendulum_free.m

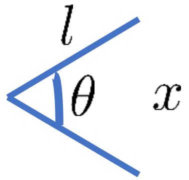


Pêndulo simples com atrito viscoso (sólido/ar)

$$J\ddot{\theta} = \sum \text{ torques}$$ Equação de Newton de movimentos rotacionais

$J = ml^2, \quad l$: raio de giração em relação ao eixo

$$ml^2\ddot{\theta} = -mglsen\theta - B\dot{x}l, \text{ mas } x = l\theta \implies \dot{x} = l\dot{\theta}$$

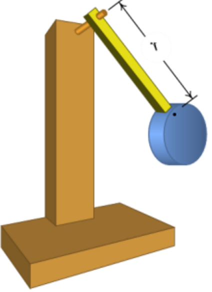


$$ml^2\ddot{\theta} = -mglsen\theta - Bl^2\dot{\theta} \implies \ddot{\theta} = \frac{-g}{l}sen\theta - \frac{B}{m}\dot{\theta}. \text{ Supor } g = l = 10, m = 1, B = 0.5$$

$$\ddot{\theta} = -sen\theta - 0.5\dot{\theta}$$

$$\begin{matrix} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{matrix} \implies \begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 = f_1 \\ \dot{x}_2 = -senx_1 - 0.5x_2 = f_2 \end{matrix}$$

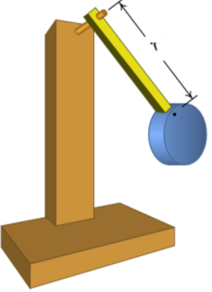
$$s(x) = \frac{-senx_1 - 0.5x_2}{x_2} = c \implies -senx_1 - 0.5x_2 = cx_2 \implies x_2 = \frac{-1}{c+0.5}senx_1$$



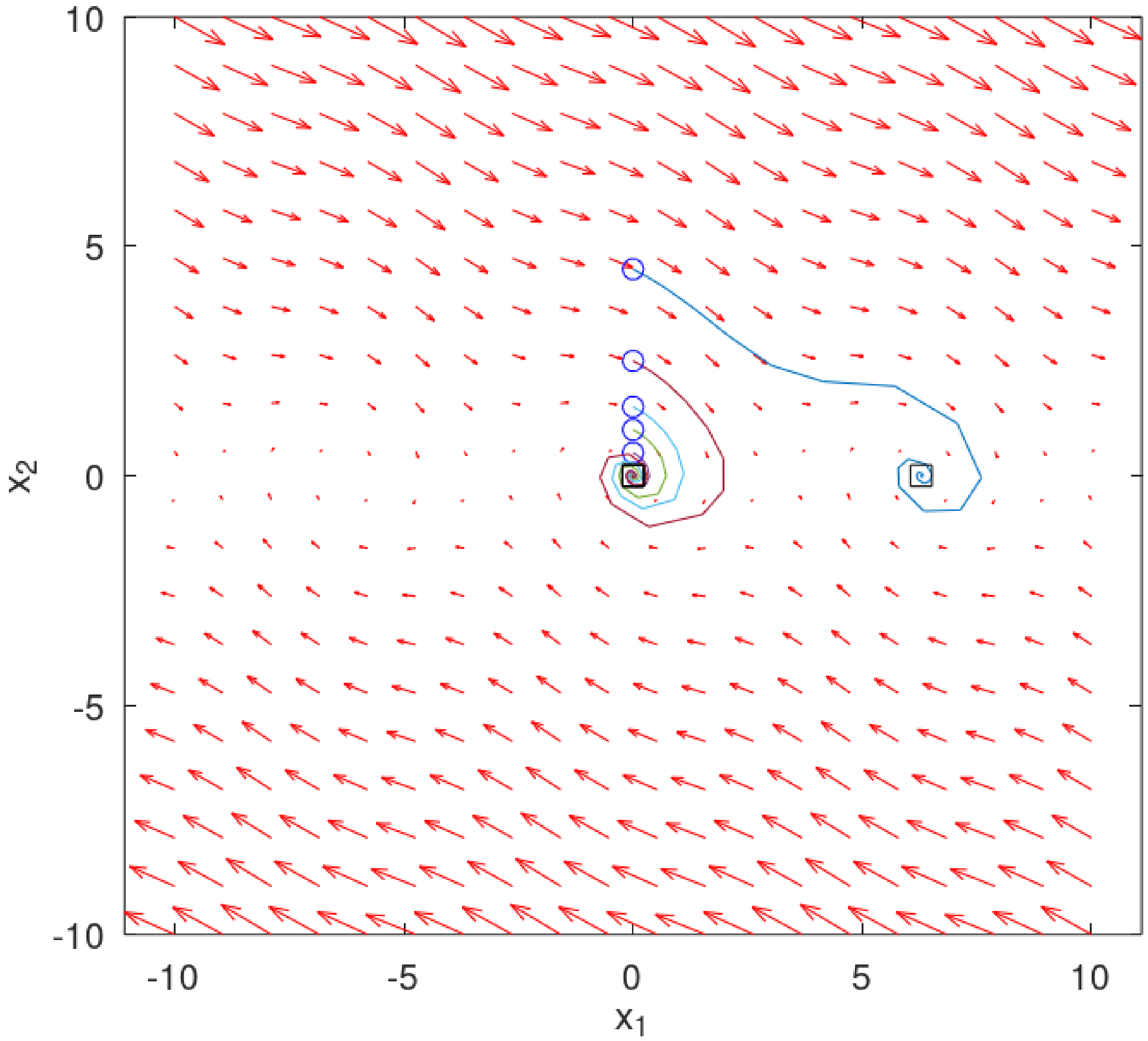
Pêndulo simples com atrito viscoso (sólido/ar)

$$s(x) = \frac{-senx_1 - 0.5x_2}{x_2} = c \implies -senx_1 - 0.5x_2 = cx_2 \implies x_2 = \frac{-1}{c+0.5}senx_1$$

c	Inclinação em °	Equação da isóclina
1/2	26.5	$x_2 = -senx_1$
0	0	$x_2 = -2senx_1$
-1/6	-9.5	$x_2 = -3senx_1$
-1/4	-14	$x_2 = -4senx_1$
-1/2	-26.6	$x_1 = 0$
-3/4	-36.9	$x_2 = 4senx_1$
-5/6	-39.8	$x_2 = 3senx_1$
-1	-45	$x_2 = 2senx_1$
-3/2	-56.3	$x_2 = senx_1$
∞	90	$x_2 = 0$



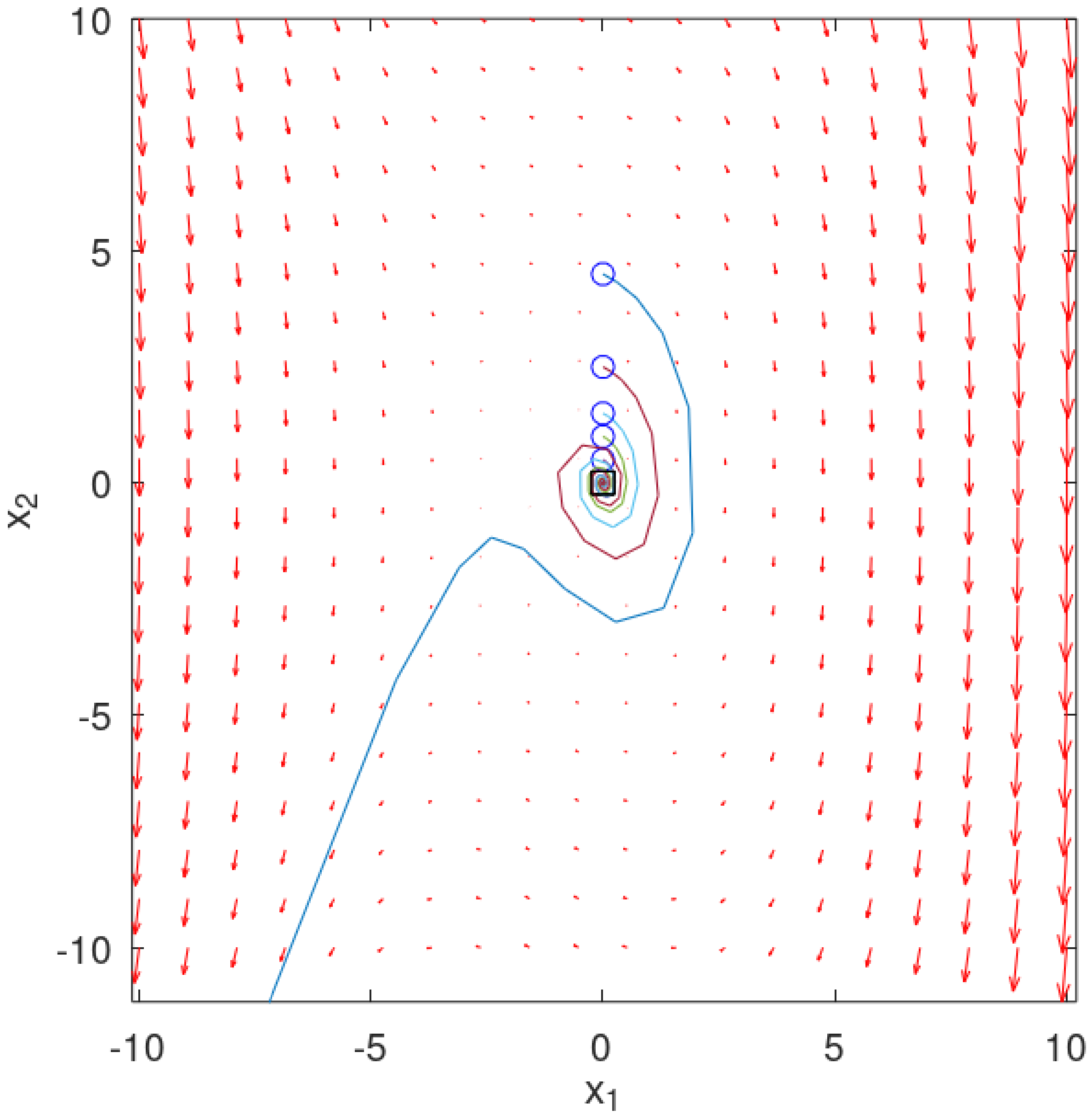
Pêndulo simples com atrito



Seja o sistema

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x + x^2 = 0$$

a) Determinar pontos de equilíbrio e classificar
b) Encontrar a equação da isóclina
c) Encontrar coordenadas x_1 e x_2
   de ponto de mínimo ou máximo
d) Construir tabela com valores
C=1,1/2/0/-1/2,-1/-3/2, inf
e) Simular e gerar retrato de fase



Seja o sistema

Sistema de regulação (r=0 graus) de atitude (orientação) de satélite, com duplo integrador e controle por comutação (1/-1)

a) Esboçar o plano de fase

$$J\ddot{\theta} = T_{motor} \implies Js^2\theta(s) = T(s) \implies \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2}$$