EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

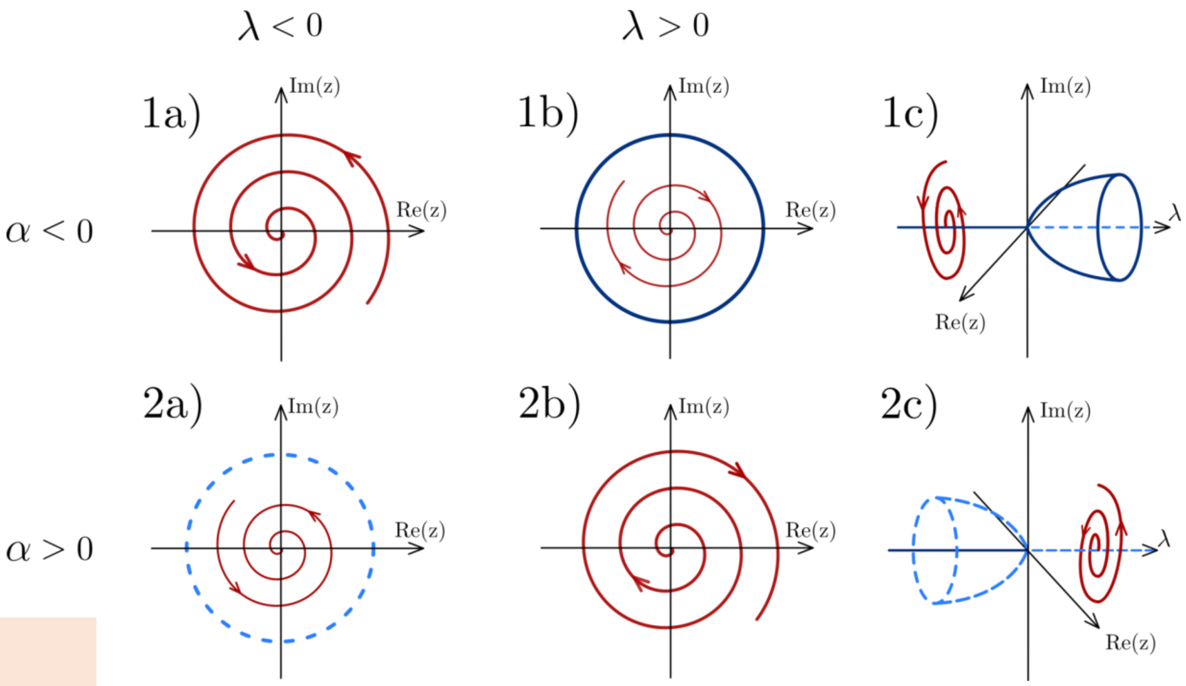
24T12 (60h) (13:00-14:40h) – 22.08.2022 : 21.12.2022

Ciclo limite – sistemas não conservativos com solução periódica

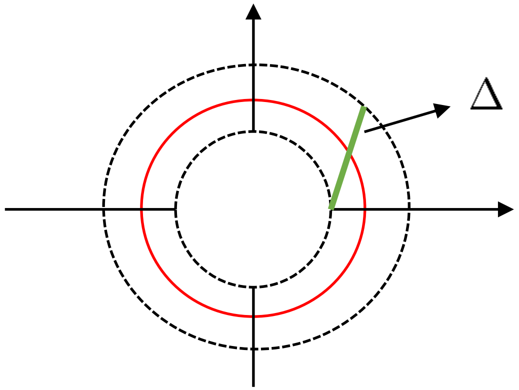
- Existência de ciclo-limite ou auto oscilação
- Um sistema oscila quando tem uma solução periódica não trivial $x(t+T) = x(t), \forall t \geq 0$ para algum T>0
- "não trivial" é usado para excluir soluções constantes correspondentes a pontos de equilíbrio
- Uma solução periódica é uma trajetória fechada no plano de fase

O ciclo-limite é uma solução periódica caracterizada por uma trajetória fechada e **ISOLADA**, ou seja, não existe outra solução periódica numa vizinhança suficientemente pequena do ciclo. As trajetórias numa vizinhança do ciclo ou convergem para o ciclo ou divergem do ciclo

- A oscilação é estruturalmente estável, ou seja, pequenas variações nos parâmetros do sistema não destroem o ciclo limite
- A amplitude da oscilação em regime permanente independe das condições iniciais



Bifurcação Hopf



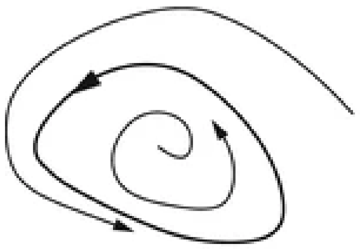
Em uma vizinhança Δ não há outra solução periódica
$\exists$Ciclo limite

Ciclo limite - Exemplos

- Aerodinâmica: Bunton, R.W.; Denegri Jr., C.M. **Limit cycle oscillation characteristics of fighter aircraft**.
  Journal of aircraft 37:5, 2000.
- Manipuladores robóticos: Jeon, S.; Tomikuza, M. **Limit cycles due to friction forces in flexible joint mechanisms**
  IEEE Int. Conf. on Adv. Intelligent Mechatronics, 723-728, 2005.
  H. Olsson and K. J. Astrom, **Friction Generated Limit Cycles**, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 9, No. 4, July 2001, pp. 629-636.
  Derek, A. An introduction to nonlinearity in control systems, 2012.
- Biologia: Hodgkin-Huxley (características elétricas de neurônios e células musculares)
  Glicólise (Sel'kov)
  Brückner, D. B. et al. (2019). "Stochastic nonlinear dynamics of confined cell migration in two-state systems". *Nature Physics*. **15** (6): 595–601. doi:10.1038/s41567-019-0445-4
- Circuitos eletrônicos (van der pol, etc.)
- Garrard, W.; Clark, L. On the suppresion of limit cycle oscillations. IEEE Trans. On Aut. Control, 1968.
- Schiehlen, W., Guse, N. (2005). Control of Limit Cycle Oscillations. IUTAM Symp .
  on Chaotic Dynamics and Control of Systems and Processes in Mechanics.
- Canudas-de-Wit et al. The oscillations killer: a mechanism to eliminate undesired limit cycles in a class of nonlinear systems
  Int. J. of Control, 2012.
- Brito, A. G. Computation of multiple limit cycles in nonlinear control systems – a describing function approach,
  Aerosp. Technol. Manag., 3:1, 21-28, 2011.

Tipos de ciclo limite - exemplos

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$\dot{r} = -r(r^2 - 1)$$
$$r = 1, \dot{r} = 0; r > 1, \dot{r} < 0; r < 1, \dot{r} > 0$$

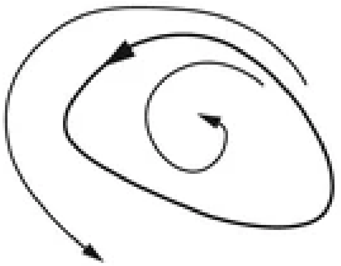


stable limit cycle

Henri Poincaré

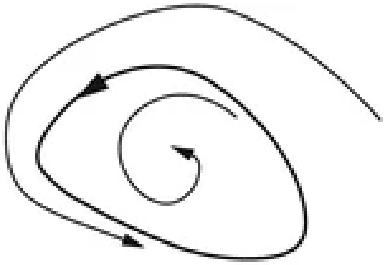
1854-1912

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$\dot{r} = r^3(r^2 - 1)$$
$$r = 1, \dot{r} = 0; r > 1, \dot{r} > 0; r < 1, \dot{r} < 0$$



unstable limit cycle

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$$
$$\dot{r} = -r^3(r^2 - 1)^2$$
$$r = 1, \dot{r} = 0; r > 1, \dot{r} < 0; r < 1, \dot{r} < 0$$



half-stable limit cycle

Tipos de ciclo limite – um caso de bifurcação Hopf

Seja o sistema de dimensão 2 dado por

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(\mu - {x_1}^2 - {x_2}^2) = f_\mu(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(\mu - {x_1}^2 - {x_2}^2) = g_\mu(x_1, x_2).$$

O único ponto de equilíbrio para todo μ é $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Nesse ponto a matriz Jacobiana é

$$J = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

Portanto, os autovalores de J são $\lambda_1 = \mu + i$ e $\lambda_2 = \mu - i$. Então, o equilíbrio é estável para $\mu < 0$ e instável para $\mu > 0$. Concluí-se que no ponto $\mu = 0$ tem-se uma perda de estabilidade. A seguir, estuda-se o que ocorre na região $\mu > 0$. Usando coordenadas polares, definidas por $x_1 = r\cos\theta$ e $x_2 = r\text{sen}\theta$, pode-se reescrever o sistema da seguinte forma

$$\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\text{sen}\theta = -r\text{sen}\theta + r\cos\theta(\mu - r^2),$$
$$\dot{r}\text{sen}\theta - r\dot{\theta}\cos\theta = r\cos\theta + r\text{sen}\theta(\mu - r^2).$$

Multiplicando a primeira equação por $\cos\theta$, a segunda por $\text{sen}\theta$, e somando-as tem-se um novo sistema

$$\dot{r} = r(\mu - r^2),$$

Fonte: Oliveira, V.A.; Rosolen, J.R. Análise de sistemas não lineares, 2011. Notas de aula.

$$\dot{r} = r(\mu - r^2),$$

e

$$\dot{\theta} = 1.$$

Verifica-se que existe uma órbita periódica para $\mu > 0$. De fato, em $r = \sqrt{\mu}$ tem-se $\dot{r} = 0$. Além disso, a órbita é estável já que $\dot{r} < 0$ para $r > \sqrt{\mu}$, e $\dot{r} > 0$ para $r < \sqrt{\mu}$. Pode-se ver claramente como isso ocorre na Figura 6.

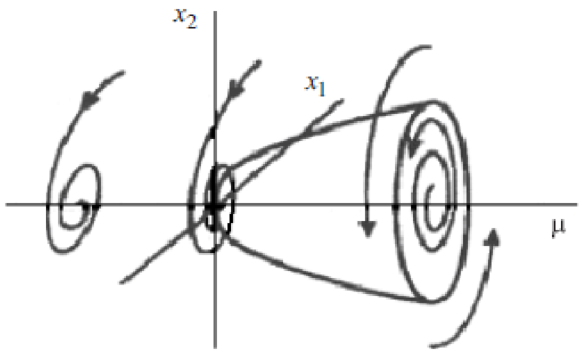


Figura 6: Bifurcação de Hopf.

A bifurcação que ocorre em $\mu = 0$, onde passa-se de um equilíbrio para uma oscilação periódica é chamada de *bifurcacão de Hopf*. Esse tipo de bifurcação apresenta a interessante característica de ligar um equilíbrio a movimento periódico via variação de μ.

Fonte: Oliveira, V.A.; Rosolen, J.R. Análise de sistemas não lineares, 2011. Notas de aula.

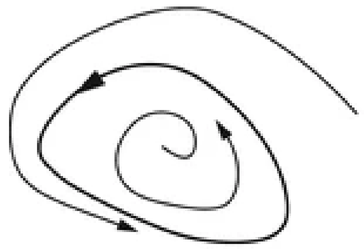
Tipos de ciclo limite – van der Pol

$$\ddot{x} + u(x)\dot{x} + v(x) = 0 \text{ Equação de Liénard}$$

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \mu > 0, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$x_1 = x \implies \dot{x}_1 = x_2 = f_1$$

$$x_2 = \dot{x} \implies \dot{x}_2 = -x_1 - \mu(x_1^2 - 1)x_2 = f_2$$



Ponto de equilíbrio: $x^* = [0 \quad 0]^T$

$$A = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 - 2\mu x_1 x_2 & -\mu(x_1^2 - 1) \end{array}\right]_{x=x^*} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{array}\right]$$

$$\sigma = \mu > 0, \Delta = 1 > 0, \sigma^2 - 4\Delta = \mu^2 - 4$$

$$1)\mu^2 - 4 > 0 \implies \mu^2 > 4 \implies \mu > 2, \text{ nó instável}$$

$$2)\mu^2 - 4 = 0 \implies \mu = 2, \text{ nó degenerado instável}$$

$$3)\mu^2 - 4 < 0 \implies 0 < \mu < 2, \text{ foco instável}$$

Supor $\mu = 1$, Esboçar plano de fase com algumas isóclinas

$$\frac{f_2}{f_1} = c \implies x_2 = \frac{x_1}{1 - x_1^2 - c}$$

c	Inclinação °	equação
0	0	$\frac{x_1}{1 - x_1^2}$
1	45	$-1/x_1$
-1	-45	$\frac{x_1}{2 - x_1^2}$
∞	90	$x_2 = 0$

Teorema de Levinson-Smith

Seja um sistema da forma:

$$\ddot{x} + u(x)\dot{x} + v(x) = 0 \text{ Equação de Liénard}$$

E que as seguintes condições são satisfeitas:

$$a) \quad u(x) \text{ é função par e contínua,}$$

$$b) \quad v(x) \text{ é função ímpar, } v(x) > 0 \text{ se } x > 0, \text{ e } v(x) \text{ é contínua } \forall x,$$

$$c) V(x) \to \infty \text{ com } t \to \infty, \text{ onde } V(x) = \int_0^x v(t)dt,$$

$$d) \text{ Para algum } k > 0,$$

$$\begin{aligned} U(x) < 0, &\quad 0 < x < k, \\ U(x) > 0, &\quad x > k, \\ U(x) \to \infty, &\quad x \to \infty \end{aligned} \quad \text{onde } U(x) = \int_0^x u(t)dt$$

Então o sistema tem:

i) Um único ponto crítico na origem

ii) Uma única trajetória fechada C, que é um Ciclo limite estável em torno da origem

iii) Todas as outras trajetórias se dirigem a C com t tendendo ao infinito.

Teorema de Poincaré

Para um sistema de segunda ordem, seja N o número de nós (incluindo degenerados), focos ou centros e S o número de pontos de sela englobados por uma trajetória fechada. Então, se a trajetória é um ciclo limite, tem-se

$$N - S = 1$$

Neste caso garante-se que pode ter ciclo limite, pois também pode ser CENTRO. No interior de um ciclo limite existe ao menos um nó ou um foco ou um centro

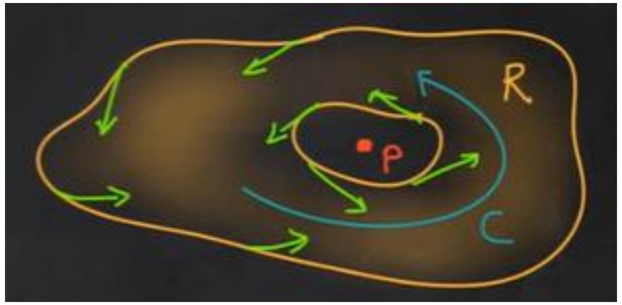
Teorema de Poincaré-Bendixson

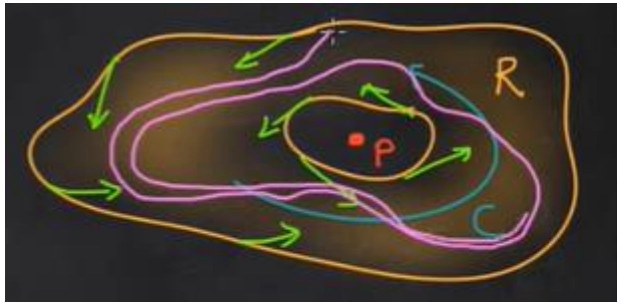
Se uma trajetória de um sistema de segunda ordem permanece em uma região finita R, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

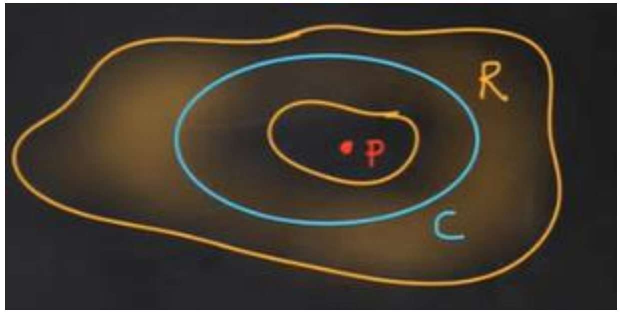
a) A trajetória tende a um ponto de equilíbrio
b) A trajetória corresponde a um centro
c) A trajetória tende assintoticamente a um ciclo limite estável ou a um dos tipos de ciclo limite semi-estável
d) A trajetória é um ciclo limite

Teorema de Poincaré-Bendixson

Seja uma região anelar R, sem pontos de equilíbrio em seu interior, tal que o campo vetorial sempre penetre em R ao longo de sua fronteira, então existe um ciclo limite estável no interior de R







Análise sala de aula de:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

Teorema (critério) de Bendixson – não existência

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \sigma = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

Divergente do campo vetorial – traço do Jacobiano

Para um sistema de segunda ordem, nenhum ciclo-limite pode existir em uma região R do plano de fase para a qual

$$\sigma = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$ não se anula e não muda de sinal

Prova por contradição usando o **Teorema de Green**
Para qualquer trajetória, tem-se:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1} \implies f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = 0$$

$$\int_C f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = \int\int_R \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Teorema

Seja C uma curva fechada, simples e orientada positivamente. Se P e Q são funções reais de duas variáveis com derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre C e na região plana D limitada por C, então

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Se é conservativo, este termo também é zero

Valor da função potencial nos extremos (iguais)=0

$$\text{Com } \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} > 0 (< 0) \text{ em R}$$ não podemos ter esta integral igual a zero. Assim não podemos ter uma trajetória periódica em R, e, consequentemente, um ciclo-limite

Teorema (critério) de Bendixson – não existência

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2^2 = f_1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = x_1^2 + x_2^2 > 0, \quad \forall x_1 \neq 0 \text{ e/ou } x_2 \neq 0, \quad R = R^n$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_1^2 x_2 = f_2$$

O sistema não tem ciclo limite no plano de fase

Exemplo: com o critério de Bendixson, analisar condições de existência de ciclo limite

$$\ddot{y} - [b - \frac{10}{3}\dot{y}^2]\dot{y} + y + y^2 = 0$$