EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Estabilidade de sistemas lineares

Teorema: seja $\dot{x} = Ax, x^* = 0$ é globalmente assintoticamente estável se e somente se (necessário e suficiente) $\forall Q = Q^T > 0$ existe uma única $P = P^T > 0$ tal que

$$A^T P + PA = -Q \text{ (Equação de Lyapunov)}$$

Prova (suficiência): Seja $V(x) = x^T P x, P = P^T > 0$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x = x^T (A^T P + PA) x = x^T (-Q) x = -x^T Q x < 0, Q = Q^T > 0$$

$x^* = 0$ é assintoticamente estável

$$\lim_{||x|| \to \infty} x^T P x \to \infty \text{ é GAS}$$

Estabilidade de sistemas lineares

Seja $V(x) = x^T P x, P = P^T > 0$

$\dot{V}(x) = -x^T Q x < 0, Q = Q^T > 0$

Estimativa de transitórios

Objetivo: $V(t) \leq V_0 e^{-\eta t}$

Lembrando que: $M \leq \lambda_{max}(M) I$ e $\lambda_{min}(M) I \leq M$

Sejam as desigualdades: $\lambda_{min}(P)||x||^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{max}(P)||x||^2$

$$\lambda_{min}(Q)||x||^2 \leq x^T Q x \leq \lambda_{max}(Q)||x||^2$$

$$\frac{\dot{V}(x)}{V(x)} = \frac{-x^T Q x}{x^T P x} \leq \frac{-\lambda_{min}(Q)||x||^2}{\lambda_{max}(P)||x||^2}, ||x|| \neq 0 \text{ e tem-se } \eta = \frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)} > 0$$

Com esta rapidez ou mais rápido, se $Q = I$

η ótimo: $\lambda_{min}(P^{-1}Q)$

$$\frac{\dot{V}(x)}{V(x)} \leq -\eta \implies \dot{V}(x) \leq -\eta V(x) \implies V(t) = V_0 e^{-\eta t}$$

Estabilidade de sistemas lineares

Estime o transitório do sistema abaixo, usando a equação de Lyapunov

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \text{ Hurwitz }, \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$-Q = A^T P + PA, \quad Q = I$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2p_{12} & p_{11} - 2p_{12} - p_{22} \\ p_{11} - 2p_{12} - p_{22} & 2(p_{12} - 2p_{22}) \end{bmatrix}$$

$$p_{12} = 1/2, \quad p_{22} = 1/2, \quad p_{11} = 3/2$$

$$P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad 3/2 > 0 \text{ e } 3/4 - 1/4 = 1/2 > 0 \implies P = P^T > 0$$

$$\eta = \frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)} = \frac{1}{1.7071} = 0.5858 \quad V(t) = V_0 e^{-0.5858t}$$

Estabilidade de sistemas lineares

Síntese de um controlador ótimo, caso linear SISO

$\dot{x} = Ax + bu, \quad A$ é estritamente Hurwitz, ou seja, autovalores com parte real negativa

Objetivo: determinar $u(t)$ tal que o estado do sistema seja levado à origem o mais rapidamente possível

ou seja, minimizando $\dfrac{dV(t)}{dt} = \dot{V}(t)$ (maximizando η)

$$\text{Seja } V(x) = x^T P x, P = P^T > 0 \qquad -Q = A^T P + PA, \quad Q = I$$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (x^T A^T + b^T u) P x + x^T P (Ax + bu)$$

$$= x^T (A^T P + PA) x + b^T P x u + x^T P b u$$

mas os termos $b^T P x = k_1$ e $x^T P b = k_2$ são escalares, ou seja $k_1 = k_1^T = k_2$

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x + 2 b^T P x u$$

Se estabelecemos que o sinal de controle é uniformemente limitado, $|u(t)| \leq U, U > 0, \forall t$

Estabilidade de sistemas lineares

Síntese de um controlador ótimo, caso linear SISO

$$\dot{V}(x) = -x^T Qx + 2b^T Pxu$$

Se estabelecemos que o sinal de controle é uniformemente limitado, $|u(t)| \leq U, U > 0, \forall t$

Então para minimizar $\dot{V}(x)$ em termos de sinal de controle , $u(t) = -U sign(b^T Px)$

$$\dot{V}(x) = -x^T Qx + 2b^T Px[-U sign(b^T Px)],\ \text{lembre que } x sign(x) = |x|$$

$$\dot{V}(x) = -x^T Qx - 2U|b^T Px|$$

Valor mínimo para $\dot{V}(x)$ com a restrição física $|u(t)| \leq U$

Estabilidade de sistemas não lineares

Método indireto de Lyapunov (primeiro método)

Teorema: seja $\dot{x} = f(x), f(0) = 0$. Se $\dot{x} = Ax + g(x)$ e $\lim\limits_{||x|| \to 0} \dfrac{||g(x)||}{||x||} = 0, \quad g(x)$ não linear

então, se $x^* = 0$ do sistema $\dot{x} = Ax$ (s. linearizado em torno de $x^* = 0$) é GAS, temos que $x^* = 0$ do sistema $\dot{x} = f(x)$ é assintoticamente estável. A é Jacobiano de $f(x)$ calculado em $x^* = 0$

Prova: se a origem de $\dot{x} = Ax$ é GAS, então $\forall Q = Q^T > 0, \exists$ uma única $P = P^T > 0$ associada a Q tal que $A^T P + PA = -Q$

Seja uma candidata $V(x) = x^T P x > 0$ para o sistema $\dot{x} = Ax + g(x)$ em uma vizinhança da origem

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = [x^T A^T + g^T(x)] P x + x^T P [Ax + g(x)]$$
$$= x^T (A^T P + PA) x + g^T(x) P x + x^T P g(x)$$

OBS: $x^T P g(x)$ é escalar $= [x^T P g(x)]^T = g^T(x) P^T x = g^T(x) P x$

Estabilidade de sistemas não lineares

$$\dot{V} = x^T(A^TP + PA)x + g^T(x)Px + x^TPg(x)$$

$$\dot{V} = -x^TQx + 2x^TPg(x)$$

$$= -x^TQx + \frac{2x^T}{||x||}P\frac{g(x)}{||x||}||x||^2, \quad ||x|| \neq 0$$

$$\leq -\lambda_{min}(Q)||x||^2 + 2\frac{||x||||P||}{||x||}\frac{||g(x)||}{||x||}||x||^2$$

$$\leq \left[-\lambda_{min}(Q) + 2||P||\frac{||g(x)||}{||x||}\right]||x||^2$$

$$\lambda_{min}(Q)||x||^2 \leq x^TQx \leq \lambda_{max}(Q)||x||^2$$

$$-\lambda_{min}(Q)||x||^2 \geq -x^TQx$$

$$x^TPg(x) \leq |x^TPg(x)| \leq ||x||||P||||g(x)||$$

$$\text{Se} \lim_{||x||\to 0}\frac{||g(x)||}{||x||} = 0, \quad \exists\gamma > 0 \text{ tal que } ||x|| < \gamma \implies 2||P||\frac{||g(x)||}{||x||} < \epsilon, \epsilon > 0$$

Estabilidade de sistemas não lineares

Então, para $||x|| < \gamma$, tem-se

$$\dot{V} = [-\lambda_{min}(Q) + \epsilon]||x||^2$$

Se $\epsilon < \lambda_{min}(Q) \implies \dot{V}(x) < 0 \implies x^* = 0$ de $\dot{x} = f(x)$ é assint. estável

Estabilidade de sistemas não lineares

Exercicio

$$\dot{x}_1 = -x_1^2 + 2x_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1x_2 + 0.5x_2 - x_2^2$$

a) Quais os pontos de equilíbrio e respectivas equações do sistema tomando como origem do sistema de coordenadas os pontos de equilíbrio

b) Analise a estabilidade desses pontos com o primeiro método de Lyapunov e a equação de Lyapunov

Estabilidade de sistemas não lineares

Exercicio

$$\dot{x}_1 = -x_1^2 + 2x_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1x_2 + 0.5x_2 - x_2^2$$

a) Quais os pontos de equilíbrio e respectivas equações do sistema tomando como origem do sistema de coordenadas os pontos de equilíbrio

$$x_a^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_b^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad x_c^* = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

Nó degenerado instável

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.5$

Ponto de sela

$\lambda_1 = -0.5, \lambda_2 = 1.0$

Foco estável

$\lambda_{1,2} = -0.15 \pm j0.2748$

Estabilidade de sistemas não lineares

Exercicio

$$\dot{x}_1 = -x_1^2 + 2x_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1x_2 + 0.5x_2 - x_2^2$$

b) Analise a estabilidade desses pontos com o primeiro método de Lyapunov e a equação de Lyapunov

$$x_a^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_b^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad x_c^* = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

$$-Q = A_1^T P_1 + P_1 A_1, \quad Q = I \qquad \nexists P_1$$

$$-Q = A_2^T P_2 + P_2 A_2, \quad Q = I \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = -0.76, \lambda_2 = 3.26, \quad \text{logo não p.d}$$

$$-Q = A_3^T P_3 + P_3 A_3, \quad Q = I \qquad P_3 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 5.0 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 2.5, \lambda_2 = 5.0, \quad P = P^T > 0$$

Estabilidade de sistemas não lineares

Exercicio

$$\dot{x}_1 = -x_1^2 + 2x_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1x_2 + 0.5x_2 - x_2^2$$

b) Analise a estabilidade desses pontos com o primeiro método de Lyapunov e a equação de Lyapunov

$$-Q = A_3^T P_3 + P_3 A_3, \quad Q = I$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 5.0 \end{bmatrix} A_3 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

$$V(x) = 2.5x_1^2 + 5x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2 < 0$$