

EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN



josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

24T12 (60h) (13:00-14:40h) – 22.08.2022 : 21.12.2022

Estabilidade em sistemas não lineares



A. Lyapunov
(1857-1918)

1) Equações diferenciais lineares, a estabilidade assintótica é sempre um atributo global. Ou seja, com um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, que necessariamente é único, as soluções se aproximam dele não importam as condições iniciais

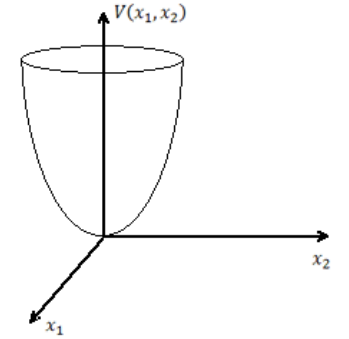
2) Numa equação diferencial não linear, um ponto de equilíbrio é **assintoticamente estável** se existir uma vizinhança na qual toda condição inicial a ela pertencente gera uma solução para todo t e que tende para o ponto de equilíbrio no decorrer do tempo. Esta vizinhança é denominada *domínio de estabilidade*.

3) Método direto de Lyapunov: não é restrito ao comportamento local de um sistema não linear. Utiliza “funções de energia” para a verificação de estabilidade. Vamos analisar sistemas autônomos (invariantes no tempo)

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{com } x^* \text{ um estado de equilíbrio de } \dot{x} = f(x), f(x^*) = 0$$

4) Para analisar o comportamento em uma vizinhança de x^* , faremos uma translação do estado de equilíbrio para a origem

Estabilidade em sistemas não lineares



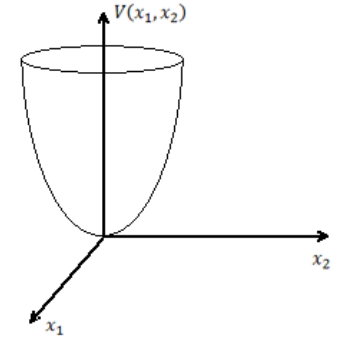
$$\begin{aligned}\bar{x} &= x - x^*, & x &= \bar{x} + x^* \\ \dot{\bar{x}} &= \dot{x} - \dot{x}^*, & \dot{x} &= f(x) = f(\bar{x} + x^*) \implies \dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)\end{aligned}$$

Com $\bar{x} = 0 \implies \dot{\bar{x}} = f(x^*) = 0$, ponto de equilíbrio no novo sistema de coordenadas

Existe uma relação biunívoca entre as soluções de $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$

- 1) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é **ESTÁVEL** se para qualquer estado inicial $\bar{x}(0)$ suficientemente próximo da origem, a solução $\bar{x}(t)$ se mantém suficientemente próxima da origem, $\forall t \geq 0$
- 2) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é **ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL** se para qualquer estado inicial $\bar{x}(0)$ suficientemente próximo da origem, a origem é estável e a solução $\bar{x}(t)$ se aproxima da origem quando $t \rightarrow \infty$
- 3) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é **EXPONENCIALMENTE ESTÁVEL** se, $\forall \bar{x}(0)$, suficientemente próximo da origem, a origem é estável e a solução $\bar{x}(t)$ se aproxima da origem exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$

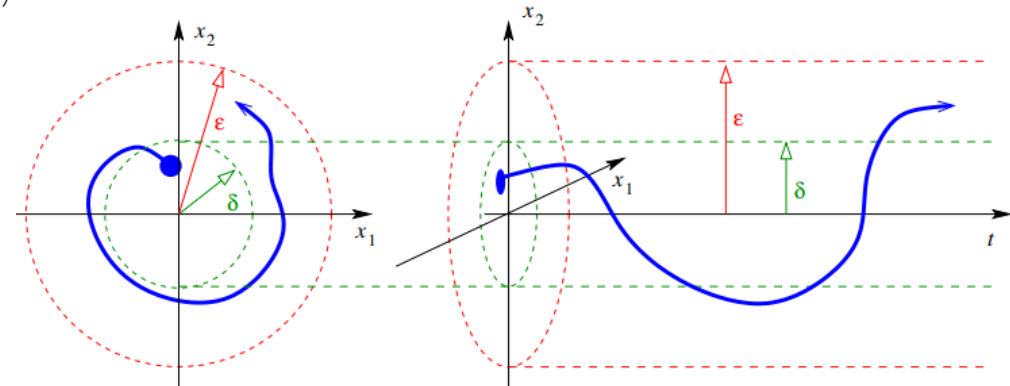
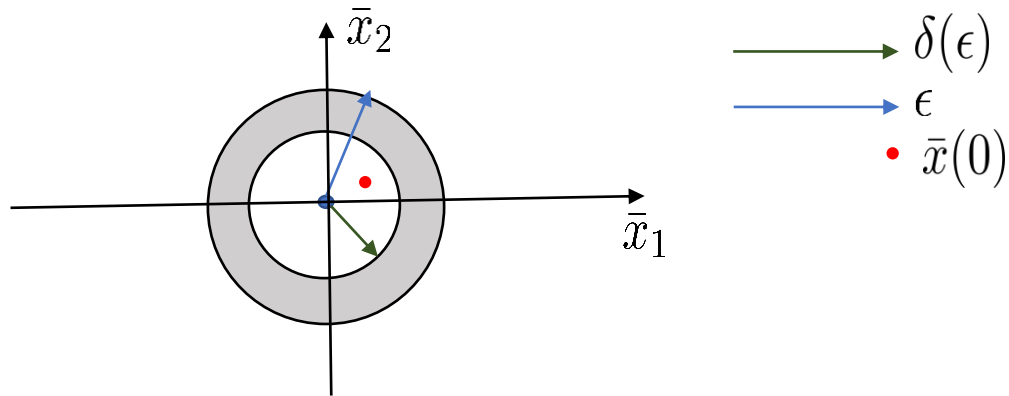
Estabilidade em sistemas não lineares



- 4) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é GLOBALMENTE ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL se para qualquer estado inicial $\bar{x}(0) \in R^n$, a origem é estável e a solução $\bar{x}(t)$ se aproxima da origem, quando $t \rightarrow \infty$ (a origem é o único ponto de equilíbrio)
- 5) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é GLOBALMENTE EXPONENCIALMENTE ESTÁVEL se para $\forall \bar{x}(0) \in R^n$, a origem é estável e a solução $\bar{x}(t)$ se aproxima da origem exponencialmente, quando $t \rightarrow \infty$ (a origem é o único ponto de equilíbrio)
- 6) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é GLOBALMENTE ESTÁVEL se, $\forall \bar{x}(0) \in R^n$, a origem é estável ou seja, não tende a infinito quando $t \rightarrow \infty$

Formalização...

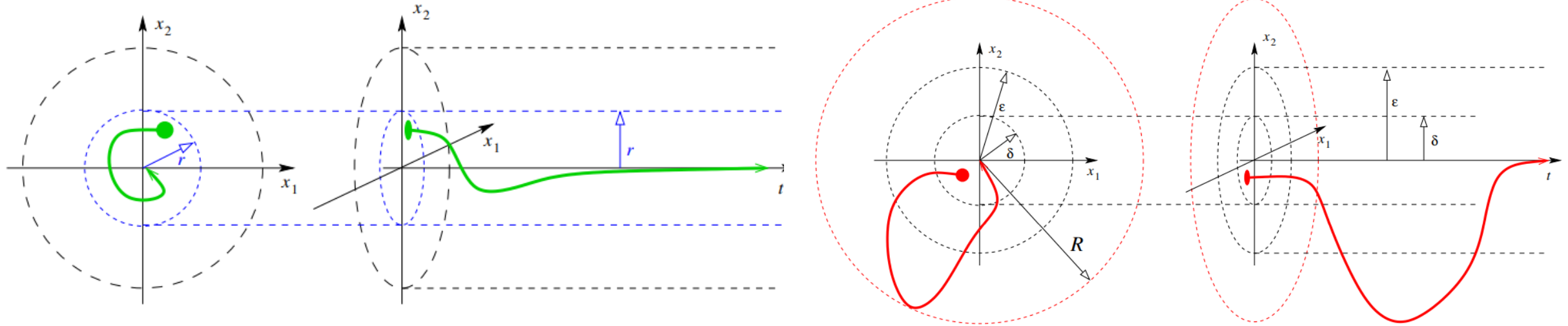
1) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é ESTÁVEL se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $\|\bar{x}(0)\| \leq \delta(\epsilon)$, então, $\|\bar{x}(t)\| \leq \epsilon, \forall t \geq 0$. Em caso contrário, a origem é instável



Fonte: Torres, L.A.B. UFMG

2) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL se a origem é estável e $\exists \delta > 0$ tal que $\|\bar{x}(0)\| \leq \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t)\| = 0$

Formalização...



Fonte: Torres, L.A.B. UFMG

Se ocorre $\bar{x}(t) \rightarrow 0$ mesmo indo além da região delimitada por ϵ , a origem é atrativa, embora instável no sentido de Lyapunov

Assintoticidade \rightarrow atratividade, Atratividade não implica assintoticidade

Formalização...

3) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é EXPONENCIALMENTE ESTÁVEL se $\exists \lambda > 0, \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $\|\bar{x}(0)\| \leq \delta(\epsilon)$ então $\|\bar{x}(t)\| \leq \epsilon e^{-\lambda t}$

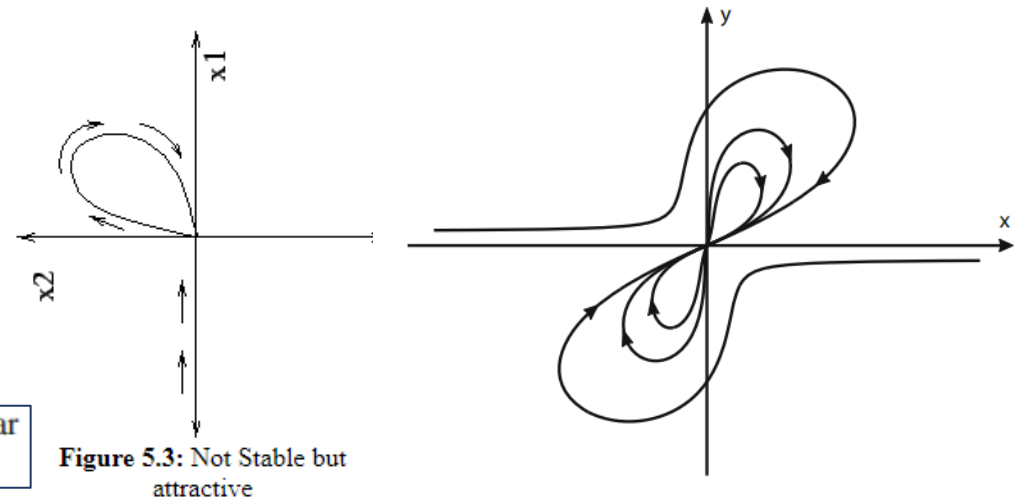
Exemplos: van der Pol

Único ponto de equilíbrio (0,0), mas possui ciclo limite estável. Não é possível definir ϵ suficiente pequeno, tal que exista $\delta(\epsilon)$ de tal forma que atenda à qualquer condição de estabilidade. Portanto, origem é instável.

Exemplos: Vinograd (origem instável, mas atrativa)

$$\dot{x} = \frac{x^2(y - x) + y^5}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)}, \quad \dot{y} = \frac{y^2(y - 2x)}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)}.$$

Vinograd, R.E.: The inadequacy of the method of characteristic exponents when applied to non-linear equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **114**, 239–240 (1957)



Formalização...

4) Estabilidade assintótica e Estabilidade exponencial

Seja o sistema $\dot{x} = -x^2$, $x(0) = x_0$, $x^* = 0 \rightarrow$ único ponto de equilíbrio, logo para ter dinâmica $x_0 \neq 0$

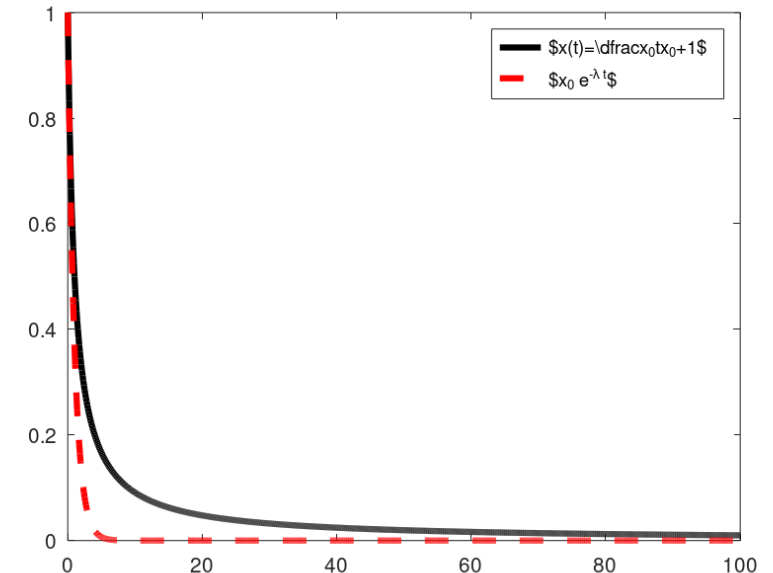
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = -x^2 &\implies -\frac{dx}{x^2} = dt \implies -\int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2} = \int_0^t dt \implies -\int_{x_0}^x x^{-2} = t_0^t \implies \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = t \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = t &\implies \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} + t \implies x(t) = \frac{x_0}{tx_0 + 1} \end{aligned}$$

Esta função é mais lenta que qualquer função exponencial $x_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$

Estabilidade assintótica não implica estabilidade exponencial

Estabilidade exponencial implica estabilidade assintótica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad \|x(t)\| \leq \|x(0)\|, \quad \forall t \geq 0$$



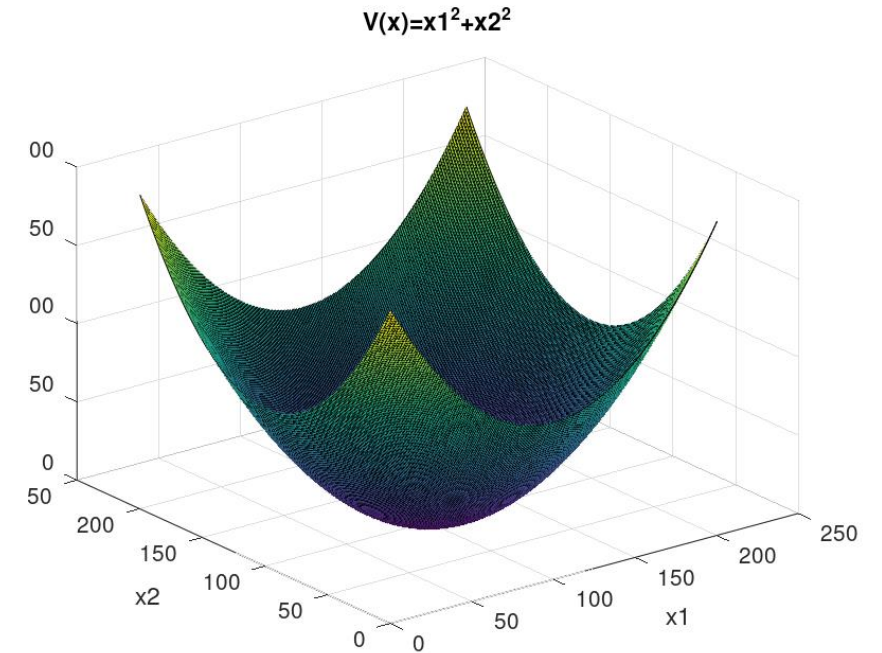
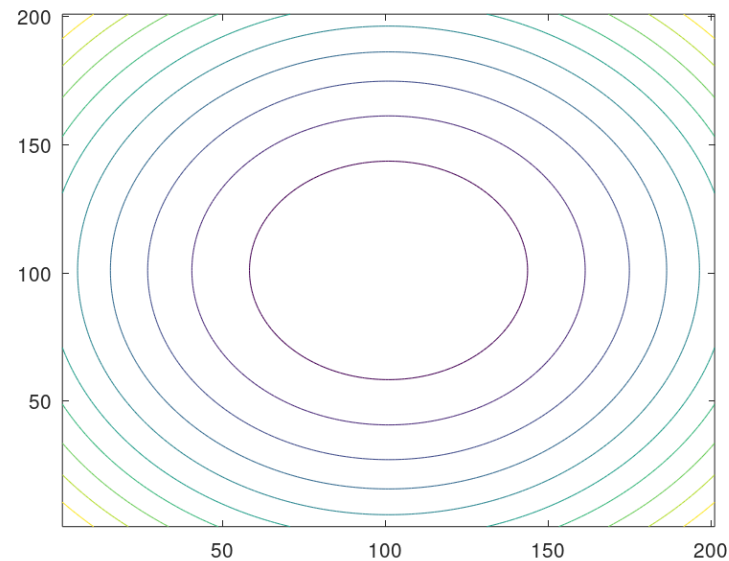
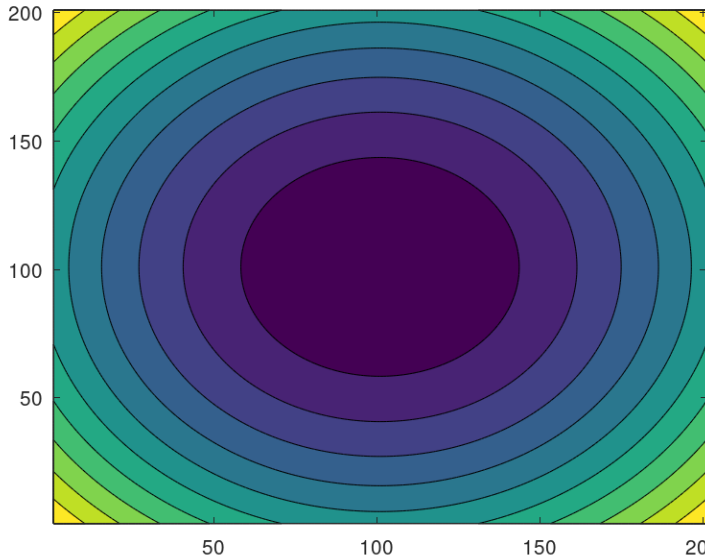
Funções definidas e semi-definidas

- 1) Uma função $V(x)$ é definida positiva ($V(x) > 0$) em uma vizinhança de $x = 0$ se $V(x) > 0, \forall x$ tal que $\|x\| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0, x \neq 0$, e $V(0) = 0$.
- 2) Uma função $V(x)$ é semi-definida positiva ($V(x) \geq 0$) em uma vizinhança de $x = 0$ se $V(x) \geq 0, \forall x$ tal que $\|x\| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0$ e $V(0) = 0$ (pode se anular noutros pontos) .
- 3) Uma função $V(x)$ é definida negativa ($V(x) < 0$) em uma vizinhança de $x = 0$ se $V(x) < 0, \forall x$ tal que $\|x\| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0, x \neq 0$, e $V(0) = 0$.
- 4) Uma função $V(x)$ é semi-definida negativa ($V(x) \leq 0$) em uma vizinhança de $x = 0$ se $V(x) \leq 0, \forall x$ tal que $\|x\| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0$ e $V(0) = 0$.

Se as propriedades são válidas $\forall x \in R^n$ as funções são definidas (ou semi-definidas) positivas (ou negativas) GLOBAIS

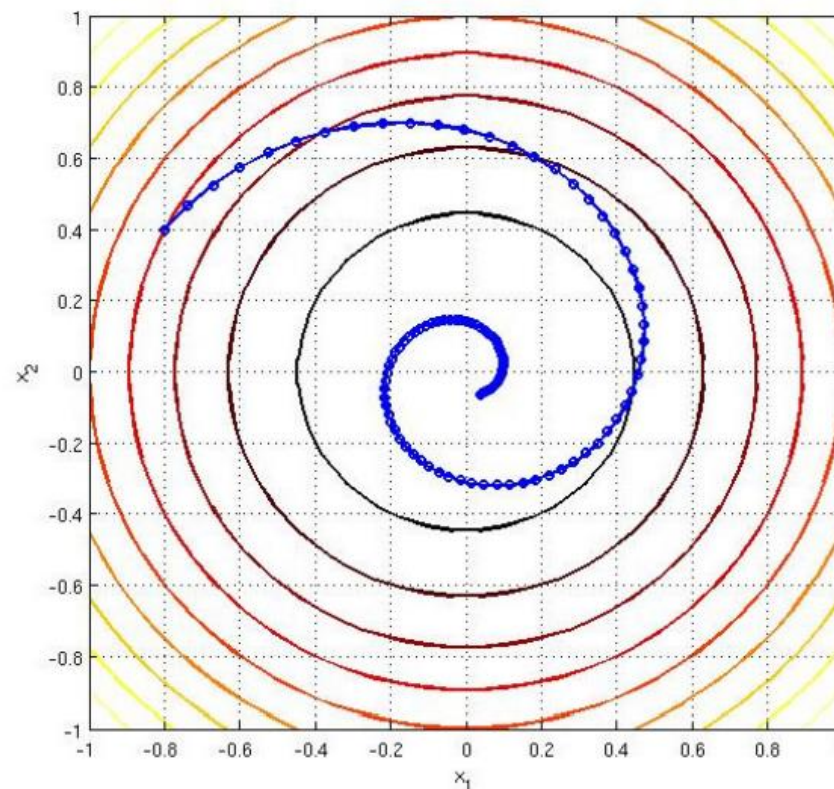
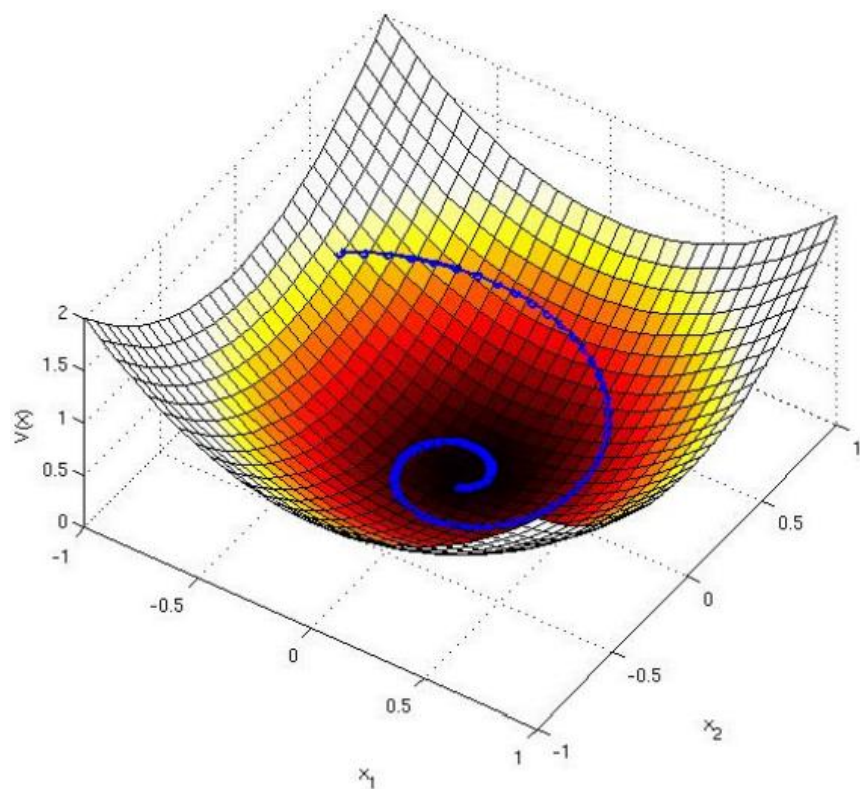
Funções definidas e semi-definidas

$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ Definida positiva, função de energia é escalar



Funções definidas e semi-definidas

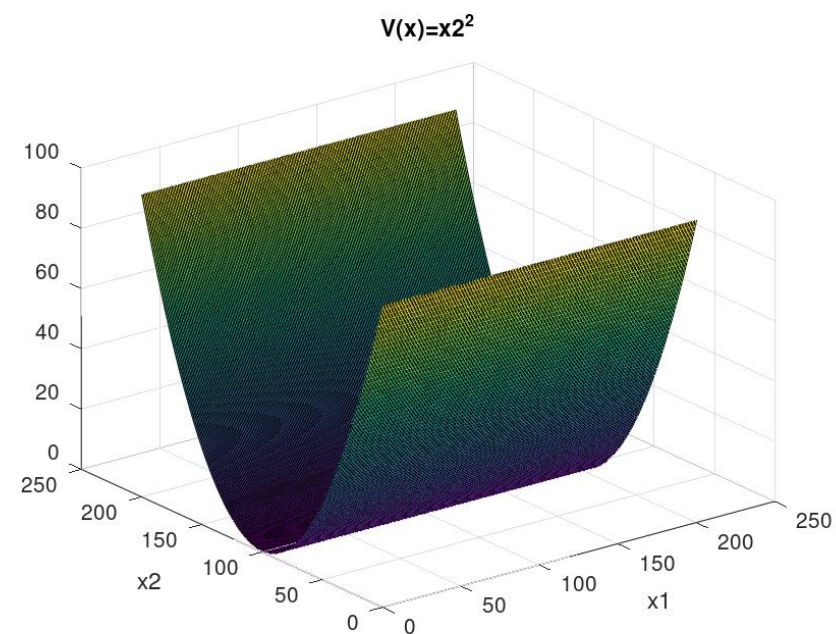
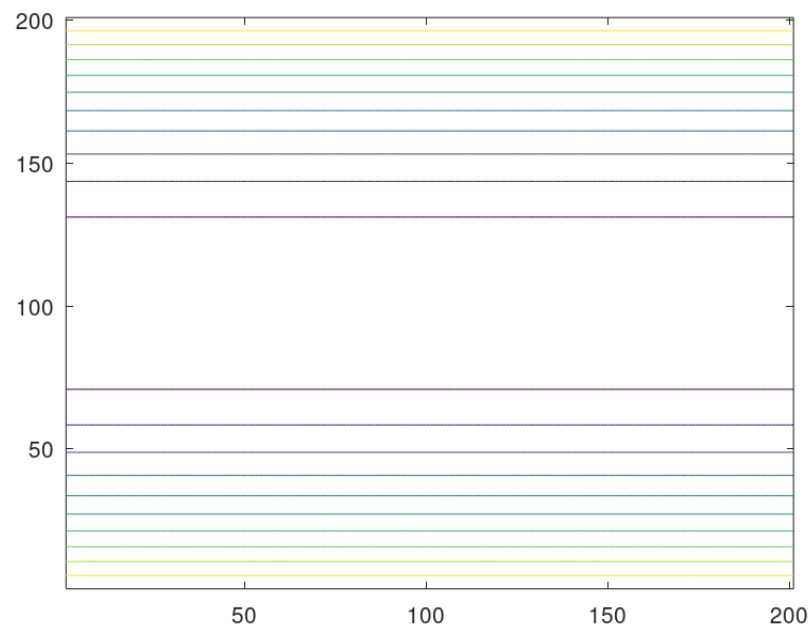
$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ Definida positiva, função de energia é escalar



[Fonte: Torres, L.A.B. UFMG](#)

Funções definidas e semi-definidas

$V(x) = x_2^2 \geq 0$ Semi-definida positiva



Interpretação geométrica

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle;$$

sendo $\nabla V = \partial V / \partial x$ o gradiente da Função de Lyapunov, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o operador produto escalar de dois vetores. Ou seja, para $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^\top$ e $f(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_n(x)]^\top$ vetores coluna, tem-se:

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(x); \\ f_2(x); \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}.$$

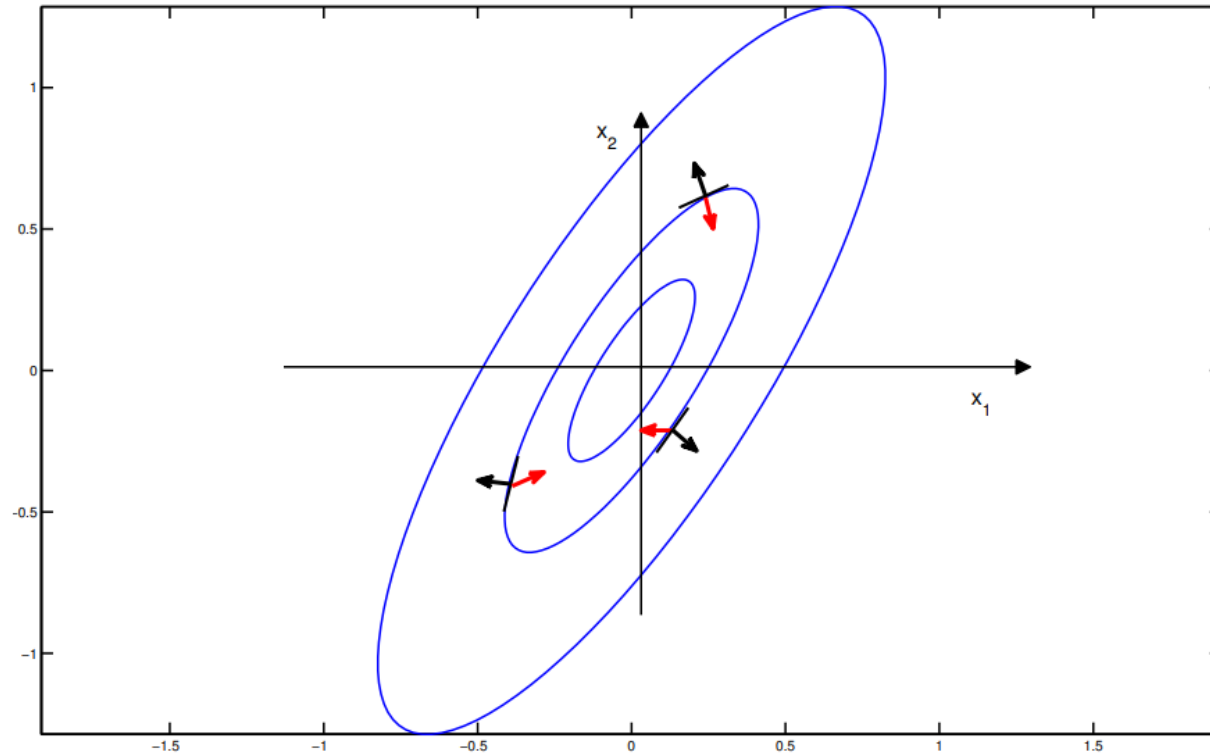
Interpretação geométrica

Neste caso, supondo superfícies de nível definidas por $V(x) = c$, sendo $c > 0$ uma constante real positiva, e lembrando que o gradiente $\nabla V(x)$ é perpendicular à superfície de nível em questão no ponto x , vê-se que os vetores “velocidade” $f(x)$ correspondentes devem apontar para dentro da superfície, uma vez que:

$$\frac{dV}{dt} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \|\nabla V(x)\| \|f(x)\| \cos(\theta);$$

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2};$$

Interpretação geométrica



Em preto os vetores gradiente $\nabla V(x)$ perpendiculares às superfícies de nível, e em vermelho os vetores “velocidade” $f(x)$.

[Fonte: Torres, L.A.B. UFMG](#)

Importantes observações sobre o Método Direto de Lyapunov:

- 1 Se a Função de Lyapunov Candidata mostra-se não ser uma Função de Lyapunov, isto é,

$$\frac{dV}{dt} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle > 0$$

para algum $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, nada podemos concluir sobre a estabilidade do Ponto de Equilíbrio.

- 2 Não há um procedimento formal geral por meio do qual se possa obter sempre uma Função de Lyapunov para o problema.
- 3 As Funções de Lyapunov não são únicas. Por exemplo, se $V(x)$ é uma Função de Lyapunov, então $W(x) = \rho[V(x)]^\alpha$, com $\rho > 0$ e $\alpha > 0$, também é uma F. de Lyapunov para o sistema.

Aplicação em controle...

[Fonte: Torres, L.A.B. UFMG](#)

Projete uma lei de controle para estabilizar o P.E. $x = \dot{x} = 0$,

$$\ddot{x} + (\dot{x})^3 - x^2 = u.$$

- 1 Tentativa 1: $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$;
- 2 Tentativa 2: $V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2$, isto é,

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [x_1 \ x_2]^\top \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^\top P x,$$

em que $P = P^\top = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica definida positiva, ou seja,

$$x^\top P x > 0, \forall x \neq 0.$$

Teoremas sobre estabilidade

Seja o sistema $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$ (a origem é no ponto de equilíbrio) onde $f(x)$ satisfaz uma condição de Lipschitz, para garantir a existência e a unicidade da solução

Teorema 1: se para o sistema $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, existe uma função $V(x)$ tal que

- a) $V(x) > 0$
 - b) $V(x)$ é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)
 - c) $\dot{V}(x) \leq 0$
- então, $x^* = 0$ é estável

Exemplo de sistema conservativo: massa-mola sem atrito viscoso $m\ddot{x} = -kx$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2 > 0 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad \text{por simplicidade, } k = m = 1$$

$\dot{V} = 0 \implies V$ constante. Permanece sobre uma curva de nível, trocando energia

Teoremas sobre estabilidade

E se o sistema massa-mola tem atrito viscoso b , $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2 > 0 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad \text{por simplicidade, } k = m = b = 1$$

$$\dot{V} = -x_2^2 \leq 0 \implies \text{origem estável}$$

Seja o sistema, com função setorial:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

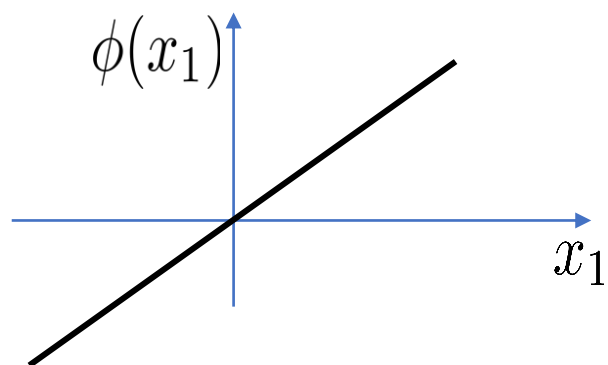
$$\dot{x}_2 = -\phi(x_1) - \mu x_2, \quad \mu > 0$$

Com $x_1 \times \phi(x_1) > 0$ se $x_1 \neq 0$ e se $x_1 = 0 \implies \phi(x_1) = 0$

$x^* = [0 \ 0]^T$ único PE

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \phi(\sigma)d\sigma > 0$$

Função de Lyapunov tipo Lur -Postnikov



Teoremas sobre estabilidade

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \phi(\sigma)d\sigma > 0$$

Função de Lyapunov tipo Lur -Postnikov

$$\dot{V}(x) = x_2\dot{x}_2 + \phi(x_1)\dot{x}_1 = x_2[-\phi(x_1) - \mu x_2] + \phi(x_1)x_2 = -\mu x_2^2 \leq 0, \text{ origem   estável}$$

Teoremas sobre estabilidade

Teorema 2: se para o sistema $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, existe uma função $V(x)$ tal que

a) $V(x) > 0$

b) $V(x)$ é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)

c) $\dot{V}(x) < 0$

então, $x^* = 0$ é assintoticamente estável

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 < 0, \quad x^* = [0 \quad 0]^T \text{ é assintoticamente estável}$$

Teoremas sobre estabilidade

Teorema 3: se para o sistema $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, existe uma função $V(x)$ tal que

a) $V(x) > 0$

b) $V(x)$ é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)

c) $\dot{V}(x) > 0$

então, $x^* = 0$ é instável

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + 2x_2^2 > 0, \quad \text{energia vai crescer, logo instável}$$

Teoremas sobre estabilidade

Teorema 4: se para o sistema $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, existe uma função $V(x)$ tal que

- a) $V(x) > 0$ ou $V(x) < 0$ sinal indefinido
 - b) $V(x)$ é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)
 - c) $\dot{V}(x) > 0$ ou exclusivo $\dot{V}(x) < 0$
- então, $x^* = 0$ é instável

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$V(x) = x_1 x_2 > 0 \text{ ou } x_1 x_2 < 0$$

$$\dot{V}(x) = x_2^2 + x_1^2 > 0, \quad \text{energia vai crescer, logo instável}$$

Teoremas sobre estabilidade

Teorema 5: se para o sistema $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, existe uma função $V(x)$ tal que

- a) $V(x) > 0$ ou $V(x) < 0$ sinal indefinido
- b) $V(x)$ é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)
- c) $\dot{V}(x) < 0$
- d) $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$ (radialmente ilimitada)

então, $x^* = 0$ é globalmente assintoticamente estável

A condição $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$ assegura que as curvas de nível $V(x) = cte$ sejam fechadas

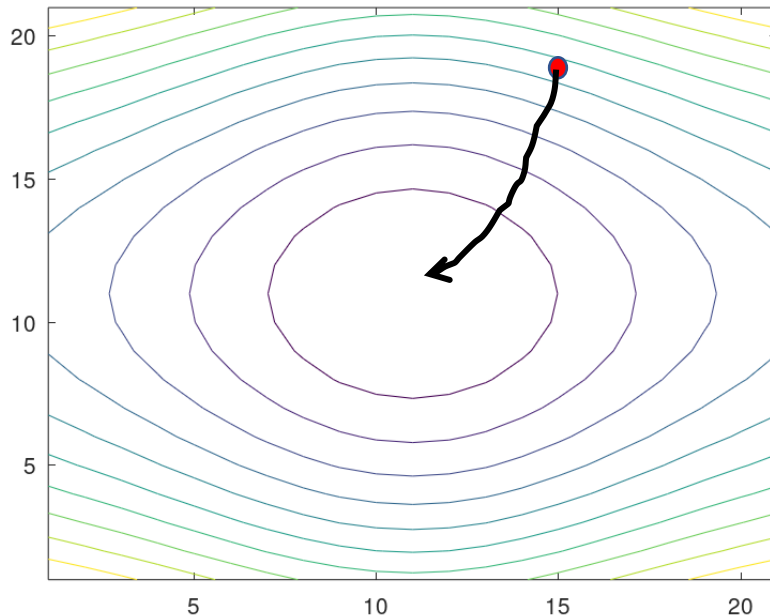
$$V(x) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2 \text{ e } \dot{V} < 0, \quad \forall x \in R^2$$

Teoremas sobre estabilidade

A condição $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$ assegura que as curvas de nível $V(x) = cte$ sejam fechadas

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \text{ e } \dot{V} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

As curvas $V(x) = cte$ são dadas por $V(x) = c$ ou seja, $V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 = c$



Para $c \geq 1$, não são fechadas

Se $x(0)$ tal que $V(x(0)) \geq 1$

Mesmo que $V(x) > 0$ e $\dot{V} < 0$

A solução poderia ser afastar da origem, ou seja,
 $|x_1| \rightarrow \infty$ e $V(x) \rightarrow \infty$

Teoremas sobre estabilidade

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2$$

$$V(x) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \text{Matriz definida negativa } \lambda_1 = -1.5, \lambda_2 = -0.5$$

$$\text{Menores principais: } -1 < 0 \text{ e } (-1)^2 - (-1/2)^2 = 1 - 1/4 = 3/4 > 0, \text{ logo resulta } < 0$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 < 0 \text{ e } \|x\| \rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow \infty$$

Portanto origem é GAS

Teoremas sobre estabilidade

Teorema 6: Teorema de La Salle