EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Estabilidade em sistemas não lineares

A. Lyapunov
(1857-1918)

1) Equações diferenciais lineares, a estabilidade assintótica é sempre um atributo global. Ou seja, com um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, que necessariamente é único, as soluções se aproximam dele não importam as condições iniciais

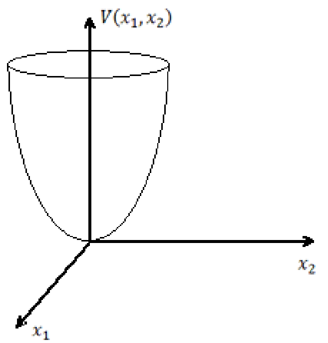
2) Numa equação diferencial não linear, um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se existir uma vizinhança na qual toda condição inicial a ela pertencente gera uma solução para todo t e que tende para o ponto de equilíbrio no decorrer do tempo. Esta vizinhança é denominada *domínio de estabilidade*.

3) Método direto de Lyapunov: não é restrito ao comportamento local de um sistema não linear. Utiliza "funções de energia" para a verificação de estabilidade. Vamos analisar sistemas autônomos (invariantes no tempo)

$$\dot{x} = f(x), \qquad \text{com } x^* \text{ um estado de equilíbrio de } \dot{x} = f(x), f(x^*) = 0$$

4) Para analisar o comportamento em uma vizinhança de x^*, faremos uma translação do estado de equilíbrio para a origem

Estabilidade em sistemas não lineares



$$\bar{x} = x - x^*, \quad x = \bar{x} + x^*$$
$$\dot{\bar{x}} = \dot{x} - \dot{x}^*, \quad \dot{x} = f(x) = f(\bar{x} + x^*) \implies \dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$$

Com $\bar{x} = 0 \implies \dot{\bar{x}} = f(x^*) = 0,$ ponto de equilíbrio no novo sistema de coordenadas

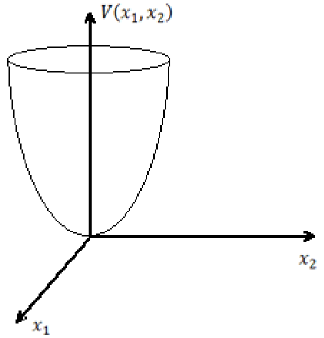
Existe uma relação biunívoca entre as soluções de $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$

1) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é ESTÁVEL se para qualquer estado inicial $\bar{x}(0)$ suficientemente próximo da origem, a solução $\bar{x}(t)$ se mantém suficientemente próxima da origem, $\forall t \geq 0$

2) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL se para qualquer estado inicial $\bar{x}(0)$ suficientemente próximo da origem, a origem é estável e a solução $\bar{x}(t)$ se aproxima da origem quando $t \to \infty$

3) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é EXPONENCIALMENTE ESTÁVEL se, $\forall \bar{x}(0),$ suficientemente $\bar{x}(0)$próximo da origem, a origem é estável e a solução $\bar{x}(t)$ se aproxima da origem exponencialmente quando $t \to \infty$

Estabilidade em sistemas não lineares



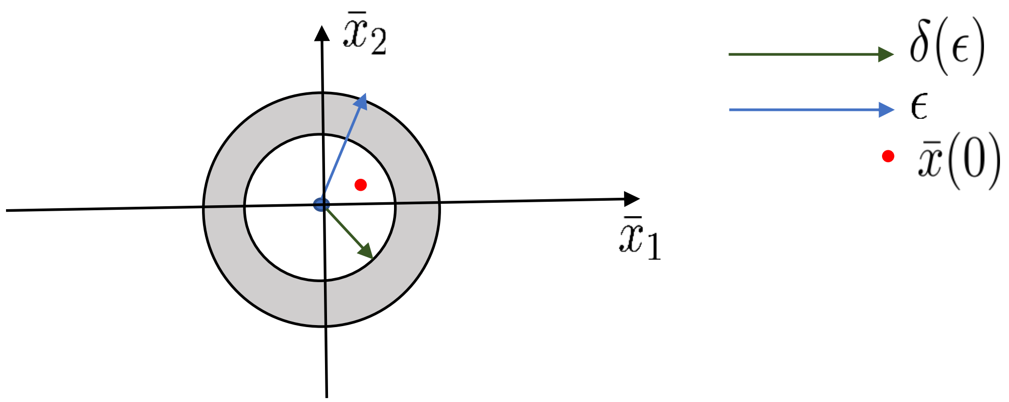
4) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é GLOBALMENTE ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL se para qualquer estado inicial $\bar{x}(0) \in R^n,$ a origem é estável e a solução $\bar{x}(t)$ se aproxima da origem , quando $t \to \infty$ (a origem é o único ponto de equilíbrio)

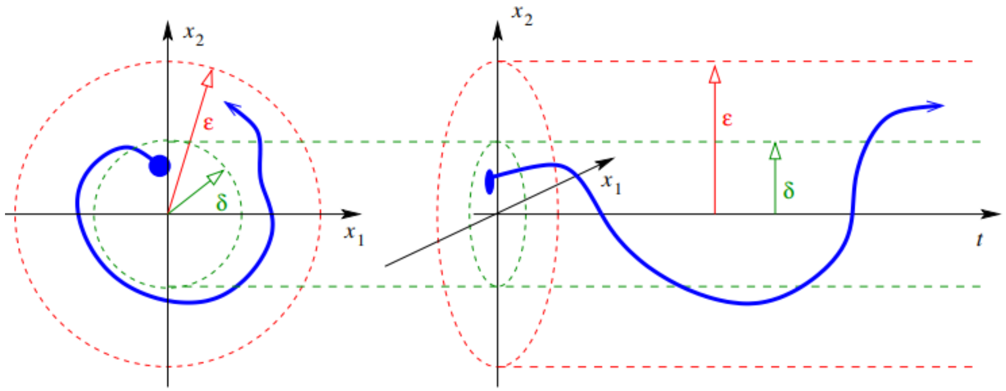
5) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é GLOBALMENTE EXPONENCIALMENTE ESTÁVEL se para $\forall \bar{x}(0) \in R^n,$ a origem é estável e a solução $\bar{x}(t)$ se aproxima da origem exponencialmente , quando $t \to \infty$ (a origem é o único ponto de equilíbrio)

6) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é GLOBALMENTE ESTÁVEL se, $\forall \bar{x}(0) \in R^n,$ a origem é estável ou seja, não tende a infinito quando $t \to \infty$

Formalização...

1) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é ESTÁVEL se $\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $||\bar{x}(0)|| \leq \delta(\epsilon)$, então, $||\bar{x}(t)|| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0$. Em caso contrário, a origem é instável

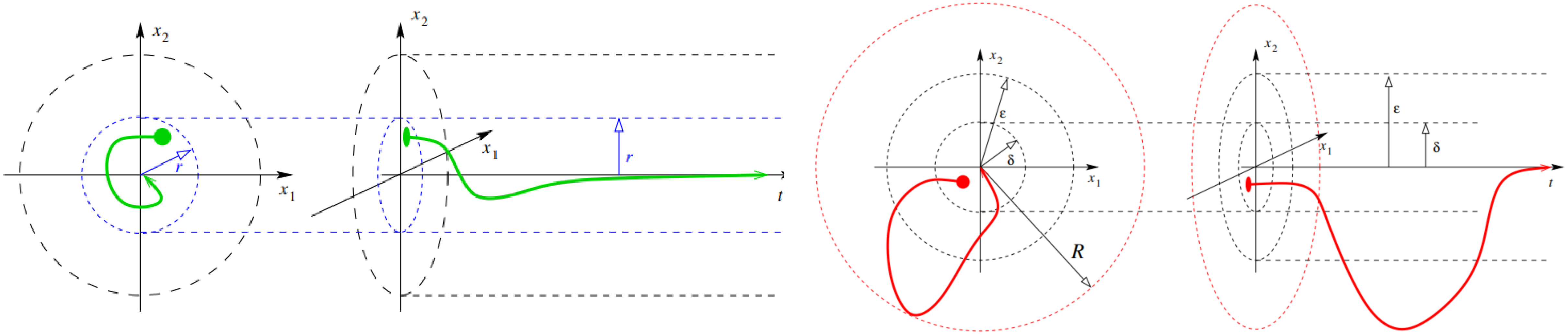




Fonte: Torres, L.A.B. UFMG

2) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL se a origem é estável e $\exists \delta > 0$ tal que $||\bar{x}(0)|| \leq \delta \implies \lim_{t \to \infty} ||\bar{x}(t)|| = 0$

Formalização...



[Fonte: Torres, L.A.B. UFMG]()

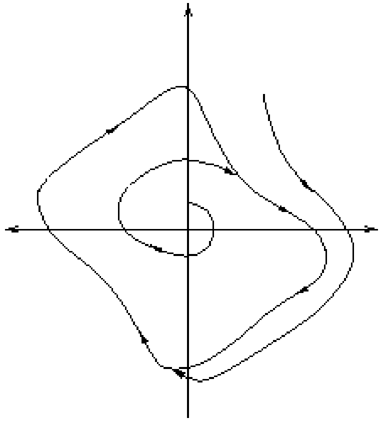
Se ocorre $\bar{x}(t) \rightarrow 0$ mesmo indo além da região delimitada por ϵ, a origem é atrativa, embora instável no sentido de Lyapunov

Assintoticidade $\rightarrow$ atratitivade, Atratatividade não implica assintoticidade

Formalização...

3) A origem de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$ é EXPONENCIALMENTE ESTÁVEL se $\exists \lambda > 0, \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $||\bar{x}(0)|| \leq \delta(\epsilon)$ então $||\bar{x}(t)|| \leq \epsilon e^{-\lambda t}$

Exemplos: van der Pol



Único ponto de equilíbrio (0,0), mas possui ciclo limite estável. Não é possível definir ϵ suficiente pequeno, tal que exista $\delta(\epsilon)$ de tal forma que atenda à qualquer condição de estabilidade. Portanto, origem é instável.

Exemplos: Vinograd (origem instável, mas atrativa)

$$\dot{x} = \frac{x^2(y-x) + y^5}{(x^2+y^2)(1+(x^2+y^2)^2)}, \qquad \dot{y} = \frac{y^2(y-2x)}{(x^2+y^2)(1+(x^2+y^2)^2)}.$$

Vinograd, R.E.: The inadequacy of the method of characteristic exponents when applied to non-linear equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **114**, 239–240 (1957)

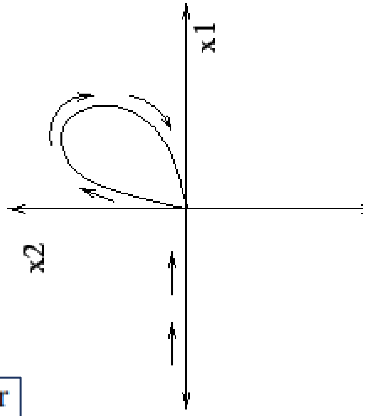
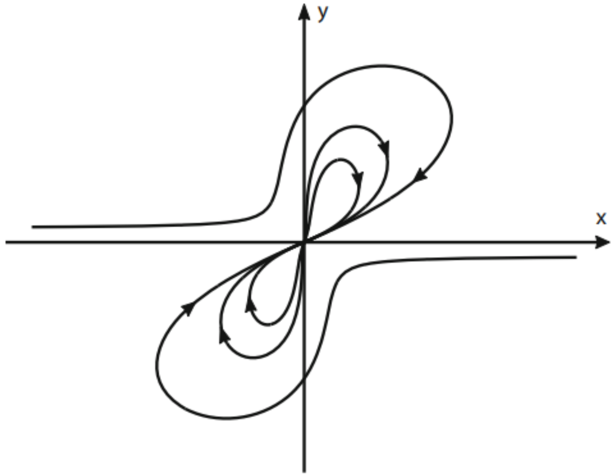


Figure 5.3: Not Stable but attractive



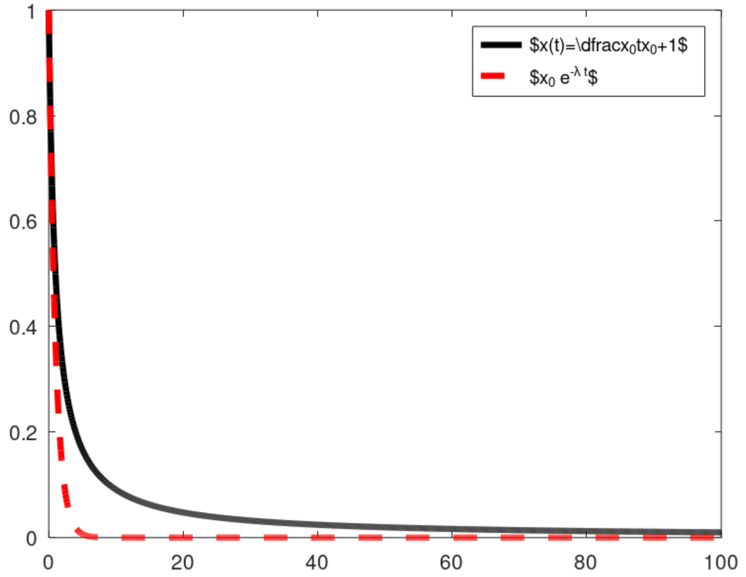
Formalização...

4) Estabilidade assintótica e Estabilidade exponencial

Seja o sistema $\dot{x} = -x^2, \quad x(0) = x_0, \quad x^* = 0 \rightarrow$ único ponto de equilíbrio, logo para ter dinâmica $x_0 \neq 0$

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 \implies -\frac{dx}{x^2} = dt \implies -\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^2} = \int_0^t \implies -\int_{x_0}^{x} x^{-2} = t_0^t \implies \frac{1}{x}{}_{x_0}^{x} = t$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = t \implies \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} + t \implies x(t) = \frac{x_0}{tx_0 + 1}$$



Esta função é mais lenta que qualquer função exponencial $x_0 e^{-\lambda t}, \lambda > 0$

Estabilidade assintótica não implica estabilidade exponencial
Estabilidade exponencial implica estabilidade assintótica

$$\lim_{t \to \infty} ||x(t)|| = 0 \qquad ||x(t)|| \leq ||x(0)||, \quad \forall t \geq 0$$

Funções definidas e semi-definidas

1) Uma função $V(x)$ é definida positiva $(V(x) > 0)$ em uma vizinhança de $x = 0$ se $V(x) > 0, \forall x$ tal que $||x|| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0, x \neq 0,$ e $V(0) = 0$.

2) Uma função $V(x)$ é semi-definida positiva $(V(x) \geq 0)$ em uma vizinhança de $x = 0$ se $V(x) \geq 0, \forall x$ tal que $||x|| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0$ e $V(0) = 0$ (pode se anular noutros pontos) .

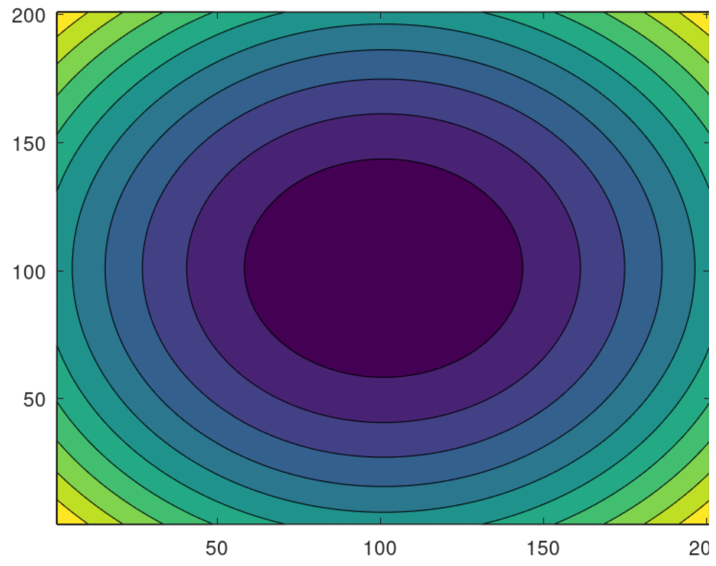
3) Uma função $V(x)$ é definida negativa $(V(x) < 0)$ em uma vizinhança de $x = 0$ se $V(x) < 0, \forall x$ tal que $||x|| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0, x \neq 0,$ e $V(0) = 0$.

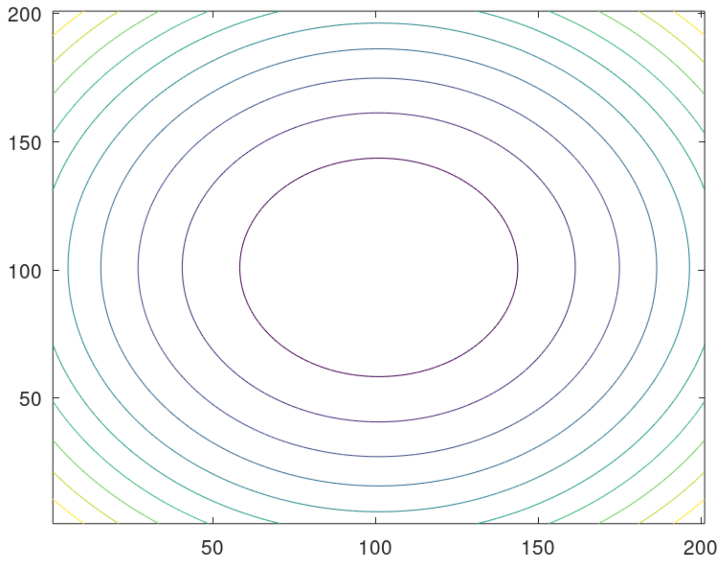
4) Uma função $V(x)$ é semi-definida negativa $(V(x) \leq 0)$ em uma vizinhança de $x = 0$ se $V(x) \leq 0, \forall x$ tal que $||x|| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0$ e $V(0) = 0$.

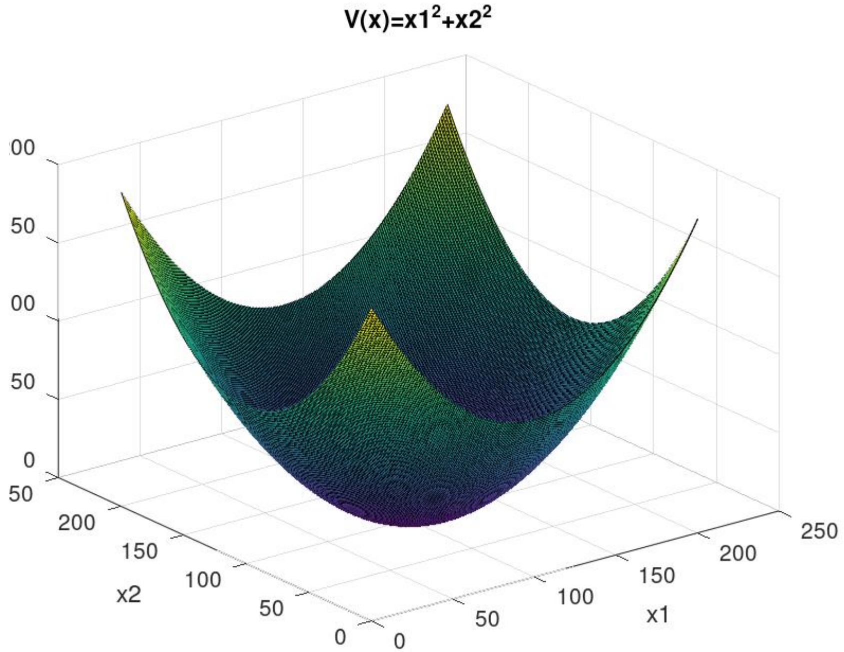
Se as propriedades são válidas $\forall x \in R^n$ as funções são definidas (ou semi-definidas) positivas (ou negativas) GLOBAIS

Funções definidas e semi-definidas

$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ Definida positiva, função de energia é escalar

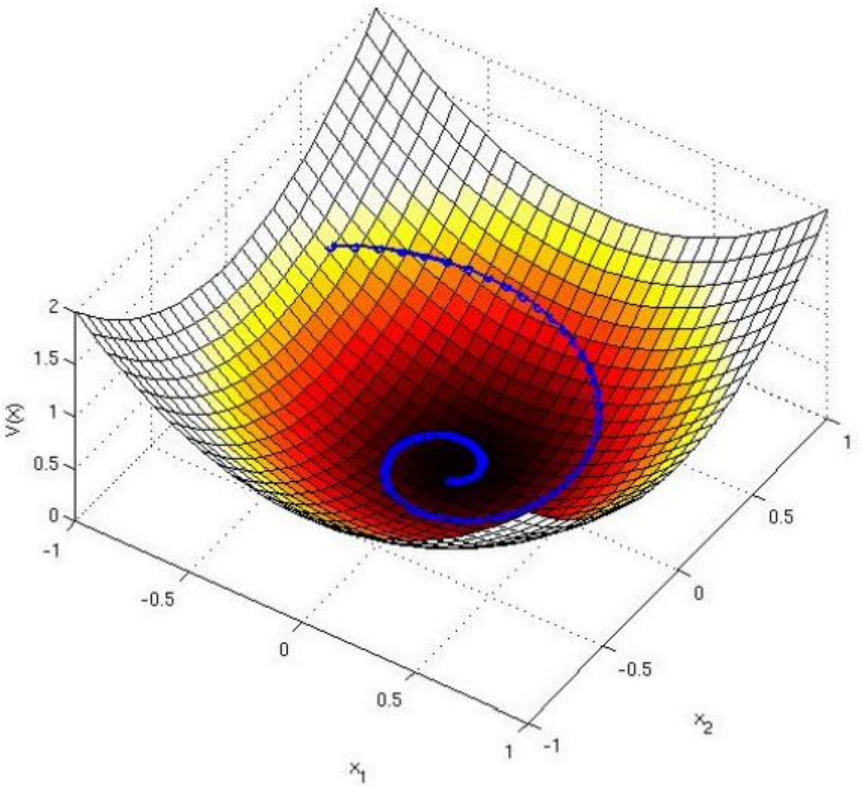


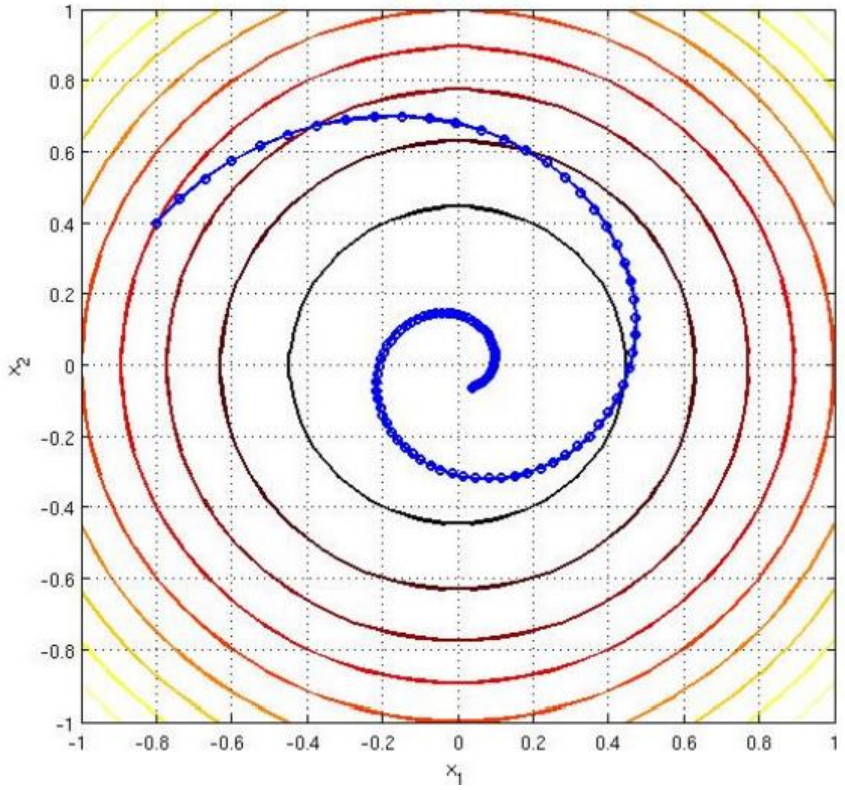




Funções definidas e semi-definidas

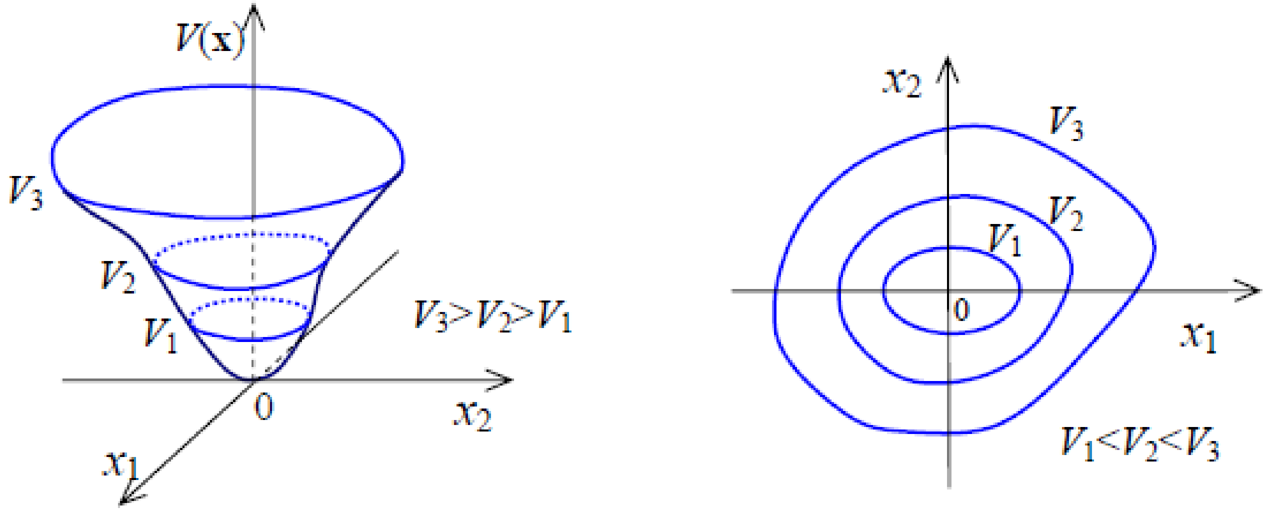
$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ Definida positiva, função de energia é escalar





Fonte: Torres, L.A.B. UFMG

Funções definidas e semi-definidas

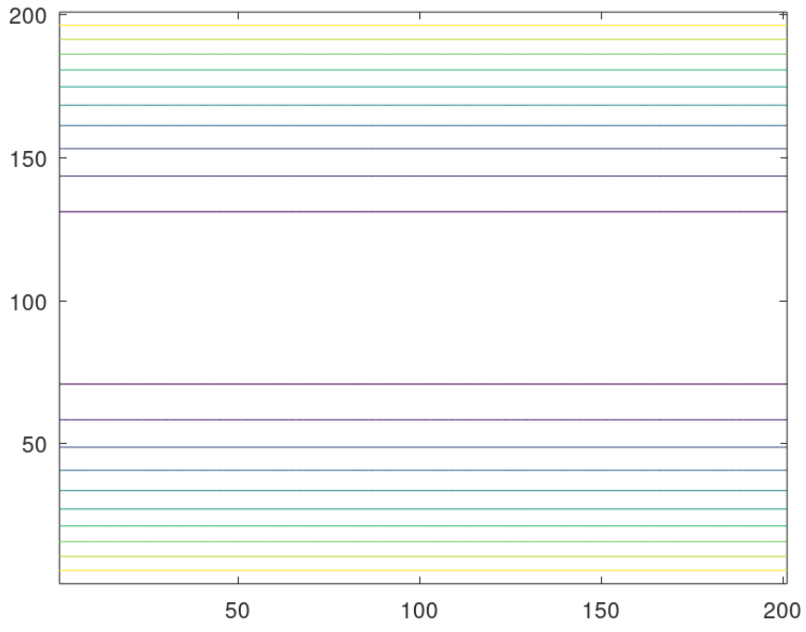


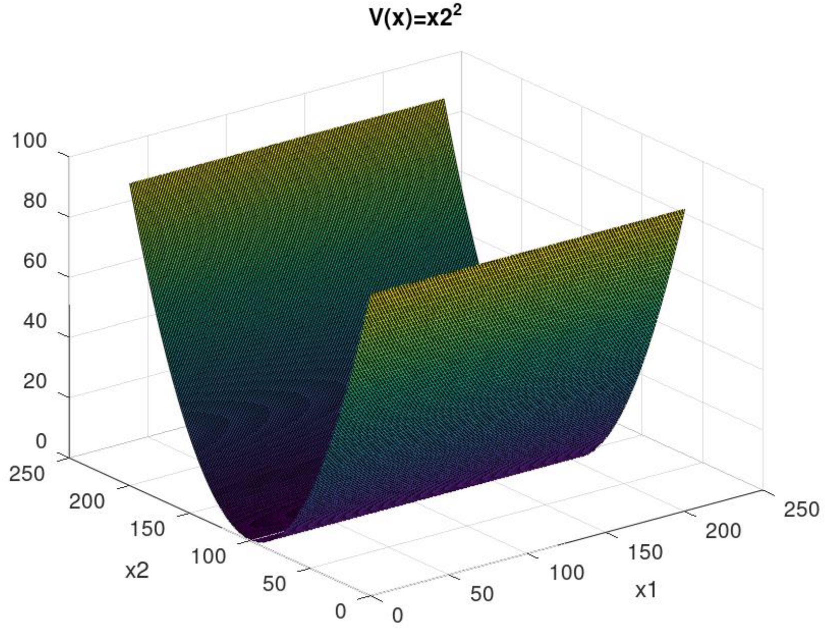
a) Representação 3D   b) Curvas de nível

Fonte: SILVA, Gustavo. V.M. Controlo Não Linear, 3. ed. IPS – Portugal, 2006

Funções definidas e semi-definidas

$V(x) = x_2^2 \geq 0$ Semi-definida positiva





Interpretação geométrica

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle;$$

sendo $\nabla V = \partial V / \partial x$ o gradiente da Função de Lyapunov, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o operador produto escalar de dois vetores. Ou seja, para $x = [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n]^\top$ e $f(x) = [f_1(x) \; f_2(x) \; \ldots \; f_n(x)]^\top$ vetores coluna, tem-se:

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \; \frac{\partial V}{\partial x_2} \; \ldots \; \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} f_1(x); \\ f_2(x); \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}.$$

Fonte: Torres, L.A.B. UFMG

Interpretação geométrica

Neste caso, supondo superfícies de nível definidas por $V(x) = c$, sendo $c > 0$ uma constante real positiva, e lembrando que o gradiente $\nabla V(x)$ é perpendicular à superfície de nível em questão no ponto x, vê-se que os vetores "velocidade" $f(x)$ correspondentes devem apontar para dentro da superfície, uma vez que:

$$\frac{dV}{dt} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \quad = \quad \|\nabla V(x)\| \|f(x)\| \cos(\theta);$$

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2};$$

Fonte: Torres, L.A.B. UFMG

Lembrete:

Teorema 3

Se f é uma função diferenciável, então f tem derivada direcional para qualquer vetor unitário $\mathbf{u}$ *e*

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} u_j$$

Observação:

Qualquer vetor unitário $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, para algum angulo θ. Nesse caso,

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\operatorname{sen}\theta.$$

Fonte: VALLE, Marcos. E. Notas de aula MA211 – Cálculo II@IMECC: Unicamp

Lembrete:

Vetor Gradiente

A derivada direcional de f na direção **u** pode ser escrita em termos do seguinte produto escalar

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} u_j = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}_{\text{vetor gradiente}} \cdot \mathbf{u} = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

Definição 4 (Vetor Gradiente)

O gradiente de uma função f, denotado por ∇f ou **grad** f, é a função vetorial cujas componentes são as derivadas parciais, ou seja,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Fonte: VALLE, Marcos. E. Notas de aula MA211 – Cálculo II@IMECC: Unicamp

Lembrete:

Interpretação do Vetor Gradiente

Sabemos que o produto escalar de dois vetores **a** e **b** satisfaz:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta,$$

em que θ é o angulo entre **a** e **b**. Assim, podemos escrever

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f\| \underbrace{\|\mathbf{u}\|}_{=1} \cos\theta = \|\nabla f\| \cos\theta.$$

O valor máximo de $\cos\theta$ é 1, e isso ocorre quando $\theta = 0$. Logo,

Teorema 5

O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f$ de uma função diferenciável é $\|\nabla f\|$ e ocorre quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção e sentido que ∇f.

Em outras palavras, a maior taxa de variação de $f(\mathbf{x})$ ocorre na direção e sentido do vetor gradiente.

Fonte: VALLE, Marcos. E. Notas de aula MA211 – Cálculo II@IMECC: Unicamp

Lembrete:

Em $\mathbb{R}^2$...

Considere uma função f de duas variáveis x e y e uma curva de nível dada pelo conjunto dos pontos

$$\{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) : f(x(t), y(t)) = k\}.$$

Se $P = (x(t_0), y(t_0))$, então pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0,$$

em que $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ e $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ é o vetor tangente a curva de nível em P.

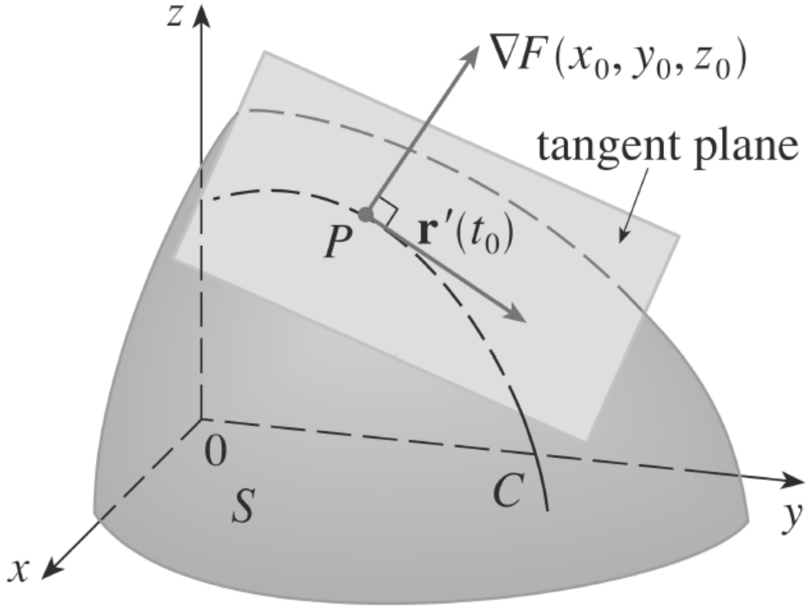
Conclusão:

O vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, além de fornecer a direção e sentido de maior crescimento, é perpendicular à reta tangente à curva de nível de $f(x, y) = k$ que passa por $P = (x_0, y_0)$.

Fonte: VALLE, Marcos. E. Notas de aula MA211 – Cálculo II@IMECC: Unicamp

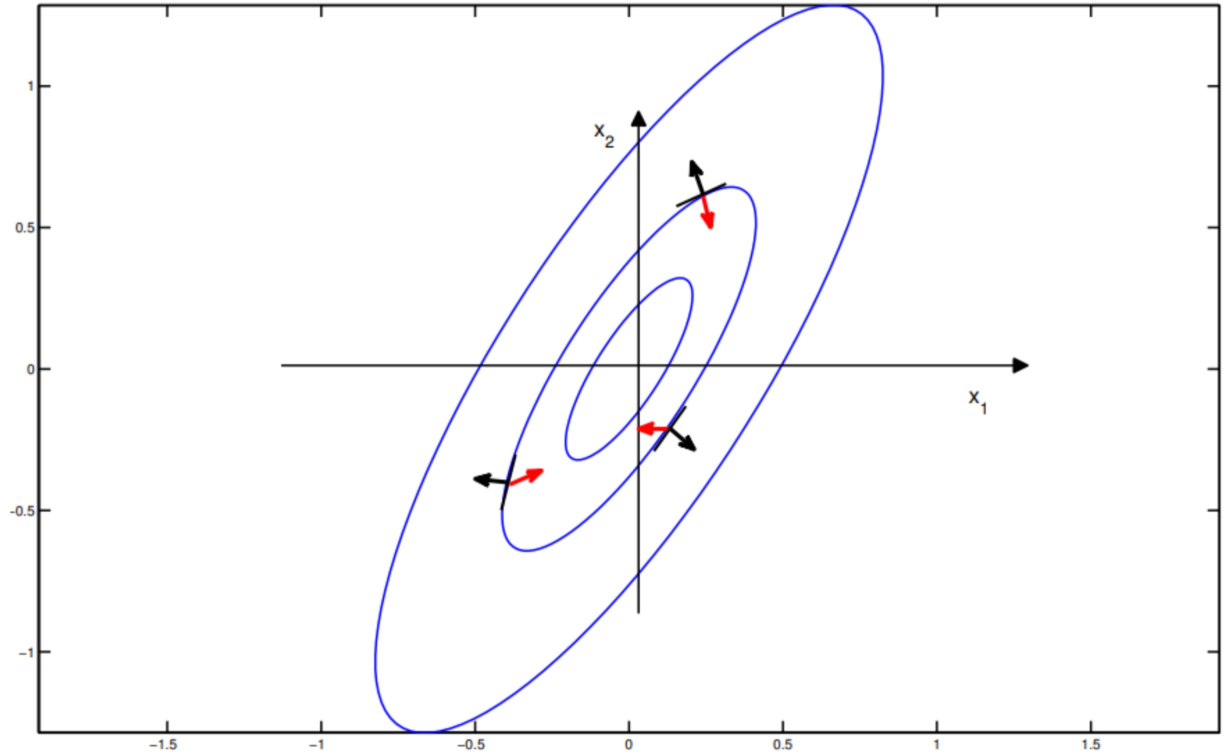
Lembrete: Em $\mathbb{R}^3$...

O vetor gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, além de fornecer a direção e sentido de maior crescimento, é perpendicular ao plano tangente à superfície de nível de $F(x, y, z) = k$ que passa por $P = (x_0, y_0, z_0)$.



Fonte: VALLE, Marcos. E. Notas de aula MA211 – Cálculo II@IMECC: Unicamp

Interpretação geométrica



Em preto os vetores gradiente $\nabla V(x)$ perpendiculares às superfícies de nível, e em vermelho os vetores "velocidade" $f(x)$.

[Fonte: Torres, L.A.B. UFMG]

Fonte: Torres, L.A.B. UFMG

Importantes observações sobre o Método Direto de Lyapunov:

1. Se a Função de Lyapunov Candidata mostra-se não ser uma Função de Lyapunov, isto é,

$$\frac{dV}{dt} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle > 0$$

para algum $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, nada podemos concluir sobre a estabilidade do Ponto de Equilíbrio.

2. Não há um procedimento formal geral por meio do qual se possa obter sempre uma Função de Lyapunov para o problema.

3. As Funções de Lyapunov não são únicas. Por exemplo, se $V(x)$ é uma Função de Lyapunov, então $W(x) = \rho[V(x)]^{\alpha}$, com $\rho > 0$ e $\alpha > 0$, também é uma F. de Lyapunov para o sistema.

Aplicação em controle...

Fonte: Torres, L.A.B. UFMG

Projete uma lei de controle para estabilizar o P.E. $x = \dot{x} = 0$,

$$\ddot{x} + (\dot{x})^3 - x^2 = u.$$

1. Tentativa 1: $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$;
2. Tentativa 2: $V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2$, isto é,

$$V(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\,[x_1\ x_2]^\top \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^\top P x,$$

em que $P = P^\top = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica definida positiva, ou seja,

$$x^\top P x > 0, \forall x \neq 0.$$

Teoremas sobre estabilidade

Seja o sistema $\dot{x} = f(x), f(0) = 0$ (a origem é no ponto de equilíbrio) onde $f(x)$ satisfaz uma condição de Lipschitz, para garantir a existência e a unicidade da solução

Teorema 1: se para o sistema $\dot{x} = f(x), f(0) = 0,$ existe uma função $V(x)$ tal que

a) $V(x) > 0$
b) $V(x)$ é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)
c) $\dot{V}(x) \leq 0$
então, $x^* = 0$ é estável

Exemplo de sistema conservativo: massa-mola sem atrito viscoso $m\ddot{x} = -kx$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2 > 0 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad \text{por simplicidade, } k = m = 1$$

$\dot{V} = 0 \implies V$ constante. Permanece sobre uma curva de nível, trocando energia

Teoremas sobre estabilidade

E se o sistema massa-mola tem atrito viscoso $b, m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

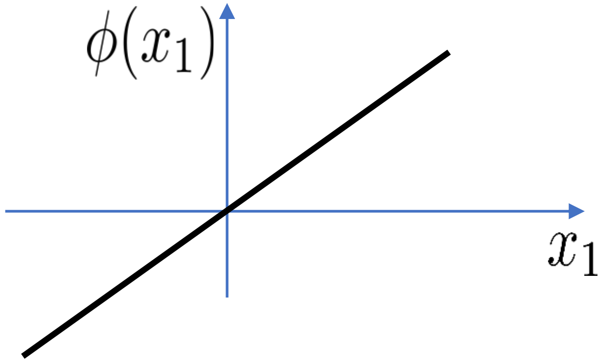
$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2 > 0 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad \text{por simplicidade, } k = m = b = 1$$

$$\dot{V} = -x_2^2 \leq 0 \implies \text{ origem estável}$$

Seja o sistema, com função setorial:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\phi(x_1) - \mu x_2, \quad \mu > 0$$



Com $x_1 \times \phi(x_1) > 0$ se $x_1 \neq 0$ e se $x_1 = 0 \implies \phi(x_1) = 0$

$x^* = [0 \quad 0]^T$ único PE

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \phi(\sigma)d\sigma > 0$$

Função de Lyapunov tipo Luré-Postnikov

Teoremas sobre estabilidade

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \phi(\sigma)d\sigma > 0$$

Função de Lyapunov tipo Luré-Postnikov

$$\dot{V}(x) = x_2\dot{x}_2 + \phi(x_1)\dot{x}_1 = x_2\left[-\phi(x_1) - \mu x_2\right] + \phi(x_1)x_2 = -\mu x_2^2 \leq 0, \text{ origem é estável}$$

Teoremas sobre estabilidade

Teorema 2: se para o sistema $\dot{x} = f(x), f(0) = 0,$ existe uma função $V(x)$ tal que

a) $V(x) > 0$
b) $V(x)$ é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)
c) $\dot{V}(x) < 0$
então, $x^* = 0$ é assintoticamente estável

Exemplo:
$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$
$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 < 0, \quad x^* = [0 \quad 0]^T \text{ é assintoticamente estável}$$

Teoremas sobre estabilidade

Teorema 3: se para o sistema $\dot{x} = f(x), f(0) = 0,$ existe uma função $V(x)$ tal que

a) $V(x) > 0$
b) $V(x)$ é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)
c) $\dot{V}(x) > 0$
então, $x^* = 0$ é instável

Exemplo:
$\dot{x}_1 = x_1$
$\dot{x}_2 = 2x_2$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + 2x_2^2 > 0,$$ energia vai crescer, logo instável

Teoremas sobre estabilidade

Teorema 4: se para o sistema $\dot{x} = f(x), f(0) = 0,$ existe uma função $V(x)$ tal que

a) $V(x) > 0$ ou $V(x) < 0$ sinal indefinido
b) $V(x)$ é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)
c) $\dot{V}(x) > 0$ ou exclusivo $\dot{V}(x) < 0$
então, $x^* = 0$ é instável

Exemplo:
$\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = x_1$

$V(x) = x_1 x_2 > 0$ ou $x_1 x_2 < 0$

$\dot{V}(x) = x_2^2 + x_1^2 > 0,$ energia vai crescer, logo instável

Teoremas sobre estabilidade

Teorema 5: se para o sistema $\dot{x} = f(x), f(0) = 0,$ existe uma função $V(x)$ tal que

a) $V(x) > 0$ ou $V(x) < 0$ sinal indefinido
b) $V(x)$ é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)
c) $\dot{V}(x) < 0$
d) $V(x) \to \infty$ quando $||x|| \to \infty$ (radiamelmente ilimitada)

então, $x^* = 0$ é globalmente assintoticamente estável

A condição $V(x) \to \infty$ quando $||x|| \to \infty$ assegura que as curvas de nível $V(x) = cte$ sejam fechadas

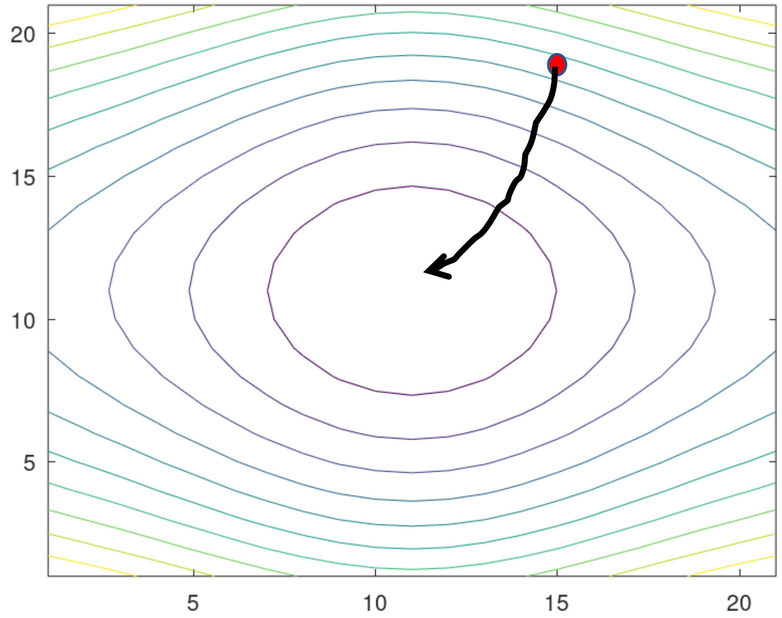
$$V(x) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2 \text{ e } \dot{V} < 0, \quad \forall x \in R^2$$

Teoremas sobre estabilidade

A condição $V(x) \rightarrow \infty$ quando $||x|| \rightarrow \infty$ assegura que as curvas de nível $V(x) = cte$ sejam fechadas

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \text{ e } \dot{V} < 0, \quad \forall x \in R^2$$

As curvas $V(x) = cte$ são dadas por $V(x) = c$ ou seja, $V(x) = \dfrac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 = c$



Para $c \geq 1$, não são fechadas

Se $x(0)$ tal que $V(x(0)) \geq 1$

Mesmo que $V(x) > 0$ e $\dot{V} < 0$

A solução poderia ser afastar da origem, ou seja,

$|x_1| \rightarrow \infty$ não produz $V(x) \rightarrow \infty$

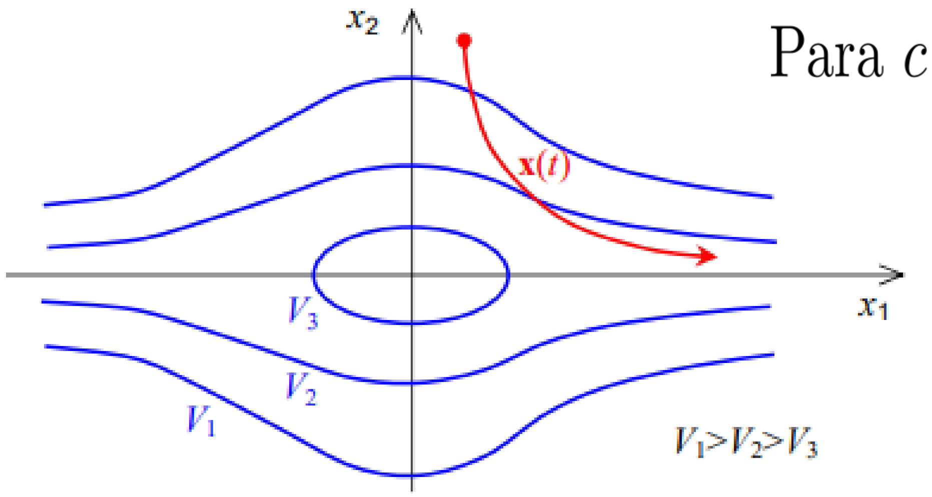
Teoremas sobre estabilidade

A condição $V(x) \to \infty$ quando $||x|| \to \infty$ assegura que as curvas de nível $V(x) = cte$ sejam fechadas

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \text{ e } \dot{V} < 0, \quad \forall x \in R^2$$

As curvas $V(x) = cte$ são dadas por $V(x) = c$ ou seja, $V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 = c$

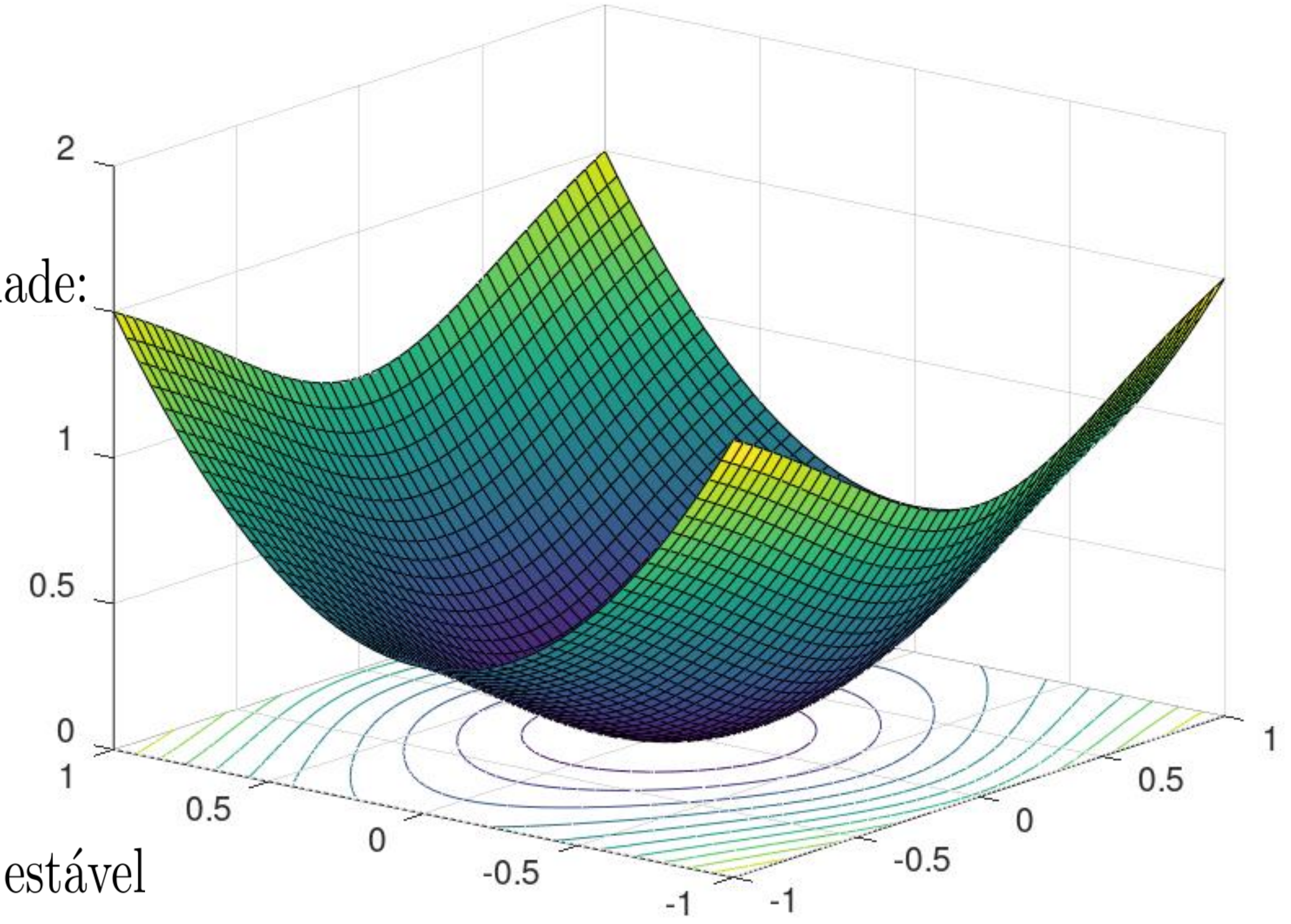
Para $c \geq 1$, não são fechadas Se $x(0)$ tal que $V(x(0)) \geq 1$



– Caso em que o sistema não é globalmente estável.

Terrell, William J. (2009), Stability and stabilization, Princeton University Press,

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \text{ e } \dot{V} < 0, \quad \forall x \in R^2$$



Seja o sistema dado, concluir sobre estabilidade:

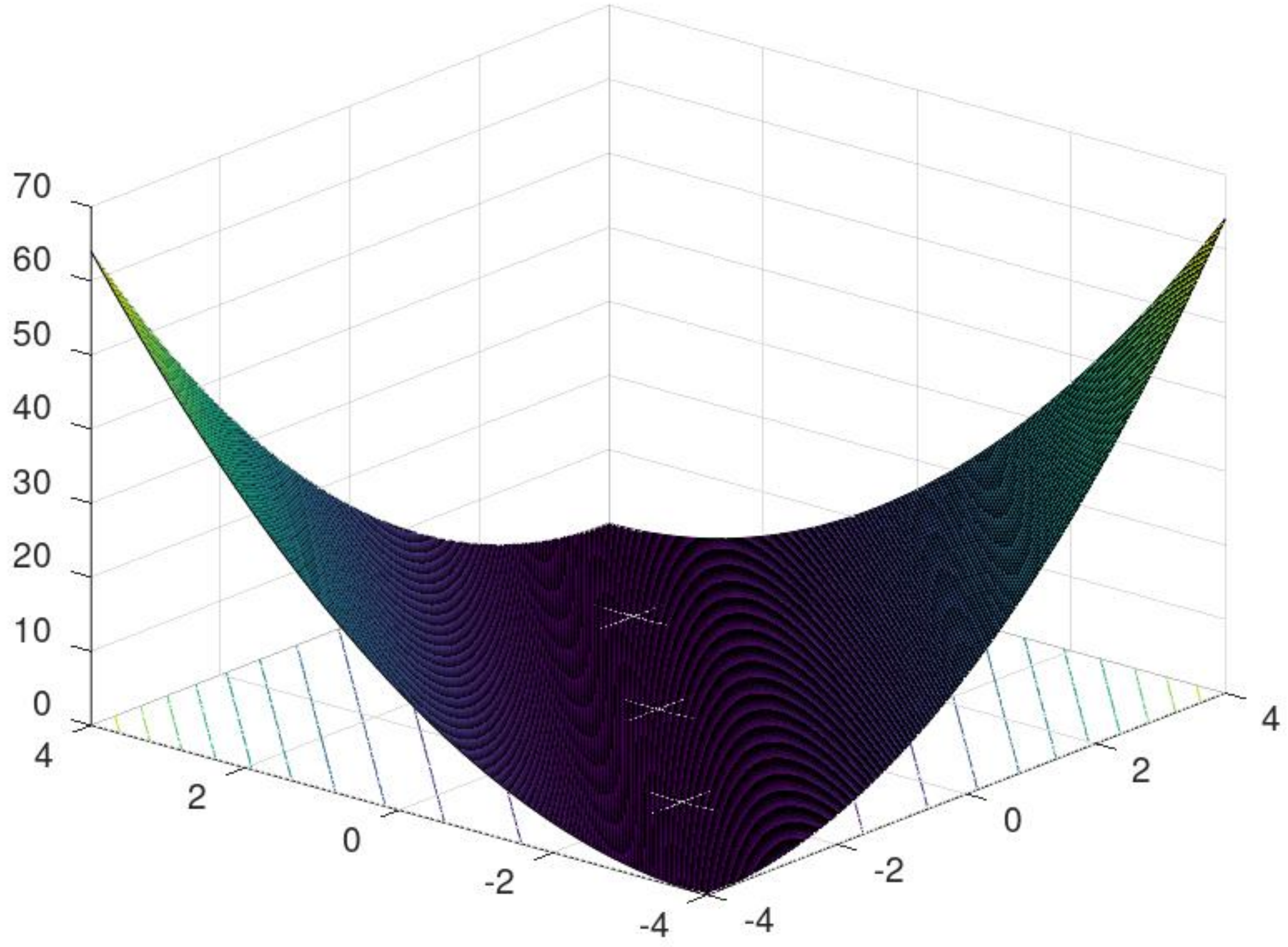
$$\dot{x}_1 = -\frac{x_2^2}{x_1}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{(1+x_1^2)^2}$$

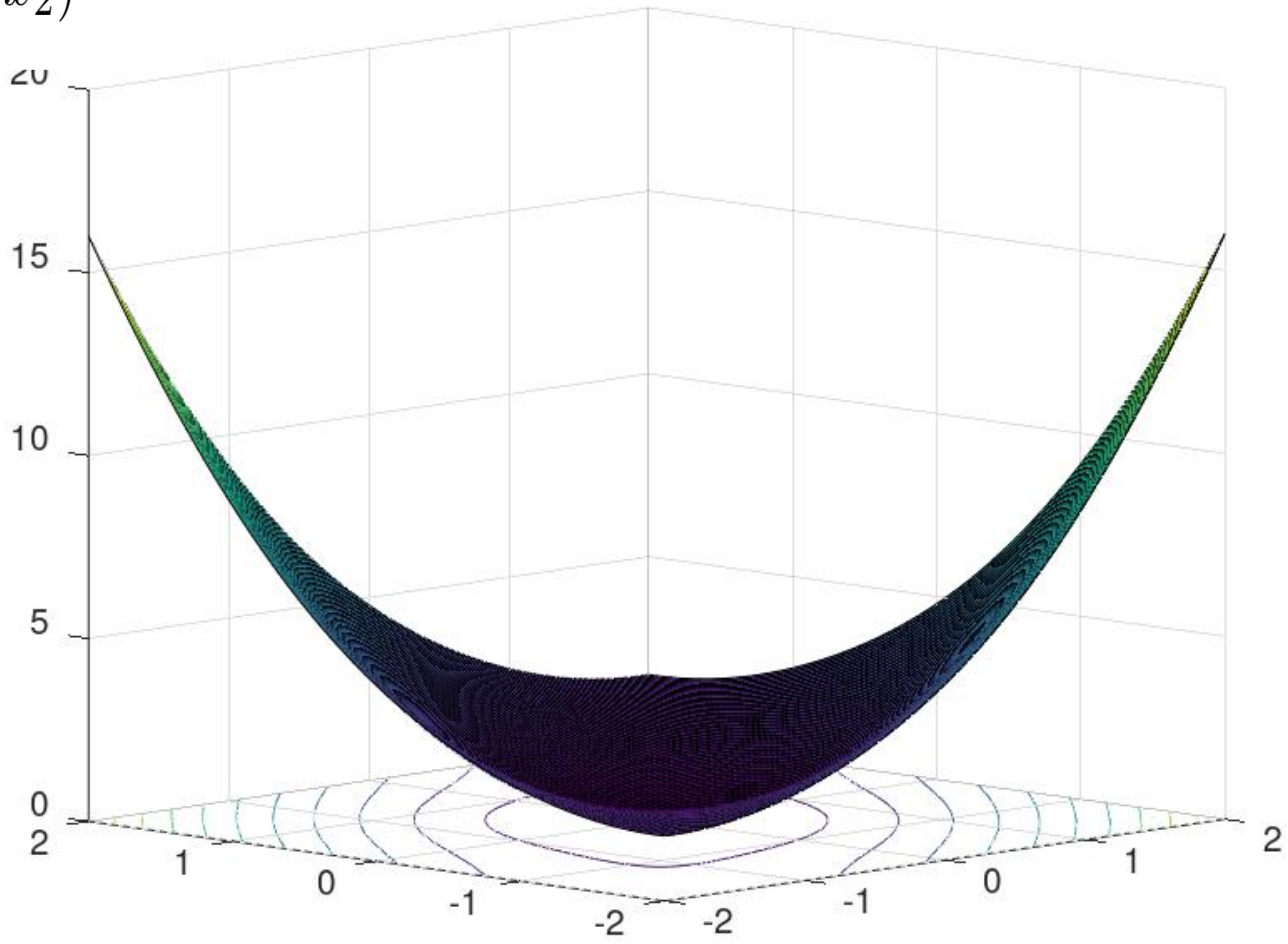
$$\dot{V} = \frac{2x_1^3\dot{x}_1 + 2x_2(1+x_1^2)^2\dot{x}_2}{(1+x_1^2)^2} = -\frac{4x_2^2}{(1+x_1^2)^2}$$

$\dot{V} < 0,$ origem localmente assintoticamente estável

$$V(x) = (x_1 - x_2)^2$$



$$V(x) = \frac{(x_1 + x_2)^2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)} + (x_1 - x_2)^2$$



Teoremas sobre estabilidade

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2$$

$$V(x) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$
$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ Matriz definida negativa $\lambda_1 = -1.5, \lambda_2 = -0.5$

Menores principais: $-1 < 0$ e $(-1)^2 - (-1/2)^2 = 1 - 1/4 = 3/4 > 0$, logo resulta < 0

Determinantes dos menores principais se alternam, sendo o primeiro negativo:

Definida negativa

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2 < 0 \text{ e } ||x|| \to \infty \implies V(x) \to \infty$$

Portanto origem é GAS