EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Sistemas Conservativos – caso linear

Exemplo: sistema massa-mola sem amortecimento: conservação da energia total do sistema (cinética <-> potencial)

$$m\ddot{x} = -kx \implies m\ddot{x} + kx = 0, \quad m, k > 0$$

Primeira escolha de variáveis de estado:

$$x_1 = mx \implies x = \frac{x_1}{m}, \quad \dot{x}_1 = mx_2$$

$$x_2 = \dot{x}, \qquad \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x = -\frac{k}{m^2}x_1 = -f(x_1)$$

Energia Total do Sistema: $E(x_1, x_2) =$ energia potencial (elástica) + energia cinética

$$E(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} f(x_1)dx_1 + \int_0^{x_2} mx_2dx_2$$

Lembremos que: $E_c = m\frac{\dot{x}^2}{2}, \quad E_p = \int_0^{x}(kx)dx = k\frac{x^2}{2}$

$$= \frac{k}{m^2}\frac{x_1^2}{2} + m\frac{x_2^2}{2} \implies \frac{k}{m^2}\frac{m^2x^2}{2} + m\frac{x_2^2}{2} = k\frac{x^2}{2} + m\frac{\dot{x}^2}{2}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{k}{m^2}x_1\dot{x}_1 + mx_2\dot{x}_2 = \frac{k}{m^2}x_1mx_2 + mx_2\left(-\frac{k}{m^2}x_1\right) \implies \frac{dE}{dt} = 0 \text{ não há dissipação}$$

Sistemas Conservativos – caso linear

Exemplo: sistema massa-mola sem amortecimento: conservação da energia total do sistema (cinética <-> potencial)

$$m\ddot{x} = -kx \implies m\ddot{x} + kx = 0, \quad m, k > 0$$

Outra escolha de variáveis de estado:

$$x_1 = x, \quad \dot{x}_1 = x_2$$

$$x_2 = \dot{x}, \quad \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 = -f(x_1)$$

Função da Energia Total do Sistema: $E'(x_1, x_2)$

$$E(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} f(x_1)dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2$$

$$= \frac{k}{m}\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = \frac{1}{m}\left(m\frac{x_2^2}{2} + k\frac{x_1^2}{2}\right)$$

$$\frac{dE'}{dt} = \frac{1}{m}\left(mx_2\dot{x}_2 + kx_1x_2\right) = \frac{1}{m}\left(mx_2\frac{-k}{m}x_1 + kx_1x_2\right) = 0$$

Função da energia cinética: $\frac{x_2^2}{2}$

Função da energia potencial: $\frac{k}{m}\frac{x_1^2}{2}$

Análise pode ser com energia total ou função da energia total

$E_p = \frac{k}{m}\frac{x_1^2}{2}$ é mínima em $x^* = 0$

$x_1 = 0 \implies E_p(x_1) = 0$

$x_1 \neq 0 \implies E_p(x_1) > 0$

Uma primeira ideia para definir candidata à função de Lyapunov seria usar função de energia total:

(primeiras noções do método direto de Lyapunov (2. método de Lyapunov)

$$\text{Função da Energia Total do Sistema: } V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} V(0) = 0 \text{ se } x_1, x_2 = 0 \\ V(x_1, x_2) > 0 \text{ definida positiva} \end{array}}$$

Aplicação em controle...

Fonte: Torres, L.A.B. UFMG

Projete uma lei de controle para estabilizar o P.E. $x = \dot{x} = 0$,

$$\ddot{x} + (\dot{x})^3 - x^2 = u.$$

1. Tentativa 1: $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$;
2. Tentativa 2: $V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2$, isto é,

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[x_1\ x_2]^\top \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^\top P x,$$

em que $P = P^\top = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica definida positiva, ou seja,

$$x^\top P x > 0, \forall x \neq 0.$$

Sistemas conservativos hamiltonianos

Classe especial de sistemas conservativos. Sistemas autônomos da forma:

$$\dot{x} = f(x, y)$$
$$\dot{y} = g(x, y)$$

tal que existe uma função $H(x, y)$ *hamiltoniana* com a propriedade:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -g(x, y), \quad \frac{\partial H}{\partial y} = f(x, y)$$

Para um sistema Hamiltoniano $H(x, y) = C$ sempre será uma lei conservativa

Seja uma solução $(x(t), y(t))$. Calculando $\dfrac{d}{dt}H(x, y)$

$$\frac{d}{dt}H(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -gf + fg = 0 \implies H(x, y) = \text{ constante}$$

Sistemas conservativos hamiltonianos

Exemplos:

$$\dot{x} = f(x,y) = y$$
$$\dot{y} = g(x,y) = -sen(x) \quad \text{, com } H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - cos(x)$$

$$\dot{x} = -sen(2xy) - x$$
$$\dot{y} = sen(2xy) + y$$

$$\dot{x} = x^3 + 3sen(2x+3y) + 4$$
$$\dot{y} = -3x^2y - 2sen(2x+3y) + 1$$

Sistemas conservativos hamiltonianos

Adaptando para nossa notação $x_1 = x, x_2 = y$ e considerando $H(x_1, x_2)$ uma função da energia total do sistema:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

Resolvendo $\dfrac{dH}{dt}$ tem-se a conservação de energia total

Alguns casos particulares:

a) $H(x_1, x_2) = \dfrac{x_2^2}{2} + \displaystyle\int_0^{x_1} f(x_1)dx_1, \quad$ com: $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -f(x_1)$

b) $H(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ hamiltoniano quadrático