

EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN



josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

4T1234 (60h) (13:00-14.40/14.55-16:35h) – 28.02.2024 : 03.07.2024

Apresentação

- Conteúdo planejado (ementa):
 - Introdução à dinâmica de sistemas não-lineares;
 - Conceitos fundamentais de equações diferenciais ordinárias (ODE);
 - Análise de **estabilidade** de sistemas não-lineares através do plano de fase;
 - **Estabilidade** de sistemas autônomos (invariantes no tempo):
 - teoremas de Lyapunov, princípio de invariância, teoremas em instabilidade;
 - **Estabilidade** de sistemas não autônomos;
 - Aplicações em controle não linear: linearização por realimentação, controle por modos deslizantes, controle adaptativo.

Apresentação

- Datas chave propostas para *deadline* de instrumentos avaliativos
 - 03.04, 22.05, 26.06
 - Ferramentas simulação: Matlab/Simulink, Scilab, Octave (.m), Python, R, Julia etc.
 - https://github.com/josenalde/nonlinear_systems
 - <https://octave.org/> (<https://octave.sourceforge.io/control/>)
 - `pkg install -forge control; pkg load control`
 - <https://octave-online.net/>

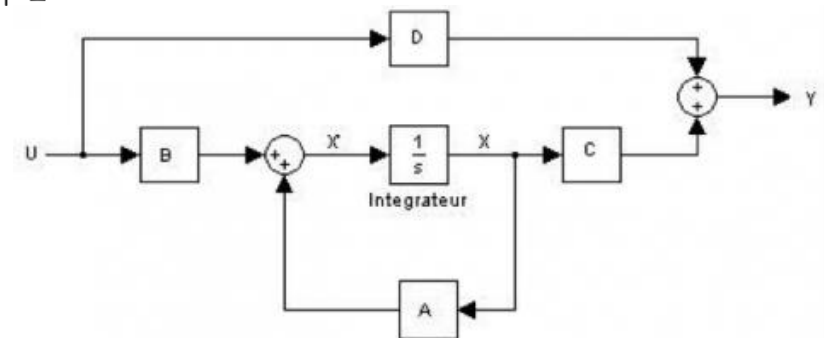
```
T=0.4  
G=tf([1], [T 1])  
step(G,1)  
hold on  
plot([0 T], [0 1], 'g')  
plot([T T], [0 1], 'k')  
hold off
```



`syslin(dom,A,B,C,D,x0)`

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2dT s + 1} \equiv T^2 \ddot{y}(t) + 2dT \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$$

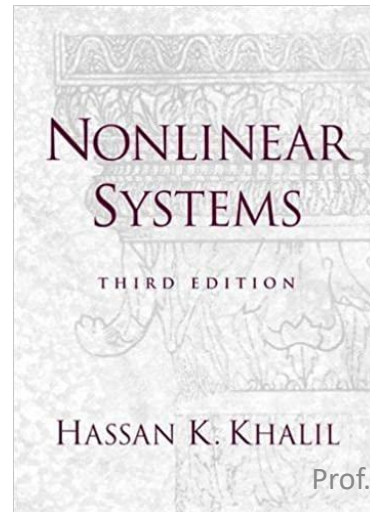
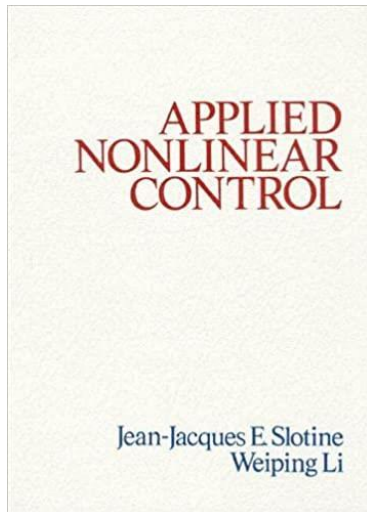
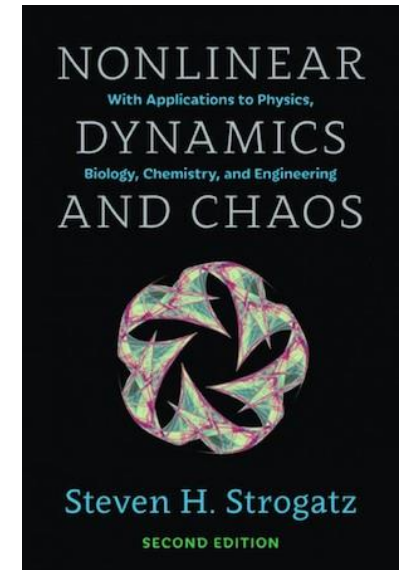
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$



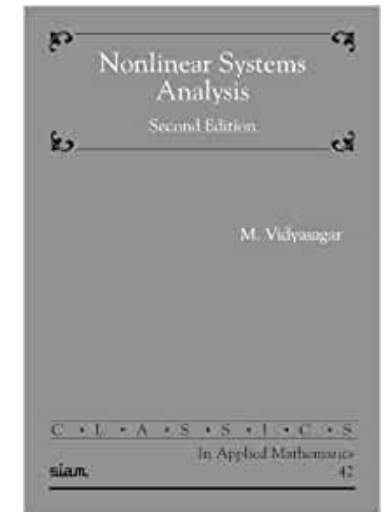
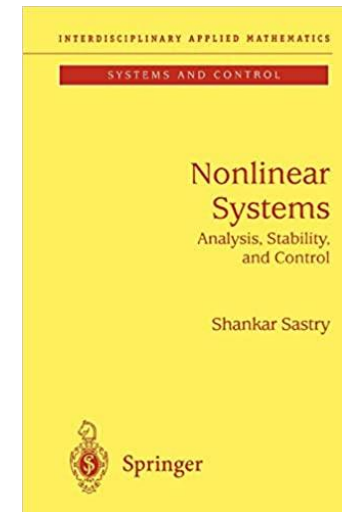
Apresentação

- Referências

- Notas de aula / Playlist Richard Pates: <https://www.richardpates.com/teaching/>
- J.-J. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, 1991.
 - Aulas disponíveis: <https://web.mit.edu/nsl/www/videos/lectures.html>
- H. K. Khalil, Nonlinear Systems, 3rd edition, Prentice Hall, 2001;
- S. Sastry, Nonlinear Systems, Springer, 1999;
- Strogatz, S.H. Nonlinear dynamics and chaos, 2nd ed, Taylor&Francis, 2015.



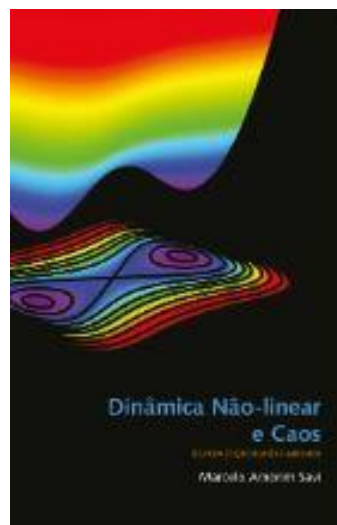
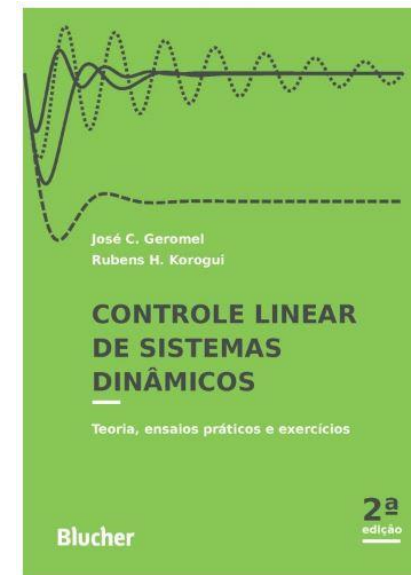
Prof. Josenalde Oliveira



Apresentação

- Referências

- Geromel, J.C.; Korogui, R.H. Controle linear de sistemas dinâmicos 2. ed., Blucher, 2019.
- Oliveira, J.B. Estabilidade e Robustez de um Controlador Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável. Tese de Doutorado, UFRN. 2007. Apêndice A <https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/15112/1/JosenaldeBO.pdf>
- Castrucci, Plinio. Sistemas Não Lineares, 1981. (4 na BCZM!)



- Savi, M.A. Dinâmica não linear e caos, 2017.

| | | |
|----------|------------------------------------------------------|------------|
| 6 | Sistemas Não Lineares | 221 |
| 6.1 | Introdução | 221 |
| 6.2 | Equações Diferenciais Não Lineares | 221 |
| 6.2.1 | Linearização | 228 |
| 6.2.2 | Classes Especiais de Sistemas Não Lineares | 229 |
| 6.3 | Sistemas de Segunda Ordem | 231 |
| 6.3.1 | Soluções Periódicas | 239 |
| 6.4 | Estabilidade | 246 |
| 6.4.1 | Linearização Harmônica | 247 |
| 6.4.2 | Crítério de Popov | 260 |
| 6.4.3 | Crítério de Persidiskii | 270 |
| 6.5 | Notas Bibliográficas | 272 |
| 6.6 | Exercícios | 273 |

Motivação

- Sistemas lineares X Sistemas não lineares
 - Teoria de análise linear sólida (sistemas dinâmicos com comportamento linear)

- Exemplo:

$$\dot{x} = f(x), f(x) = ax, \quad \text{com } x(0) = x_0$$

$$\implies x(t) = x_0 e^{at}$$

LINEAR

$$a_0 y + a_1 \dot{y} + a_2 \ddot{y} + a_3 \dddot{y} + \cdots + a_n y^{(n)} = u(x), \quad \text{com } a_i, i = 0, 1, \dots, n \text{ constantes}$$

Exemplos lineares:

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad 3y' + 2y = 1$$

Exemplos não lineares:

$$y' + y^2 = 0 \quad yy'' + y' = 0$$

- Aplicações em áreas variadas, por exemplo, otimização (programação linear), controle preditivo com restrições etc.

$$\max x_1 + x_2$$

s.r.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 20$$

$$180x_1 + 20x_2 \leq 600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min x_1 + 2x_2$$

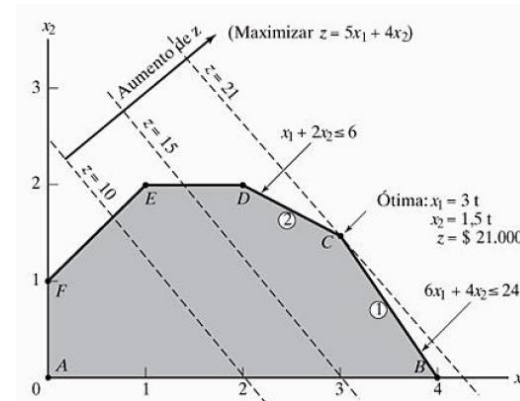
s.r.

$$2x_1 + 3x_2 \geq 20$$

$$180x_1 + 20x_2 = 600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Prof. Josévalde Oliveira



Motivação

- Sistemas lineares X Sistemas não lineares

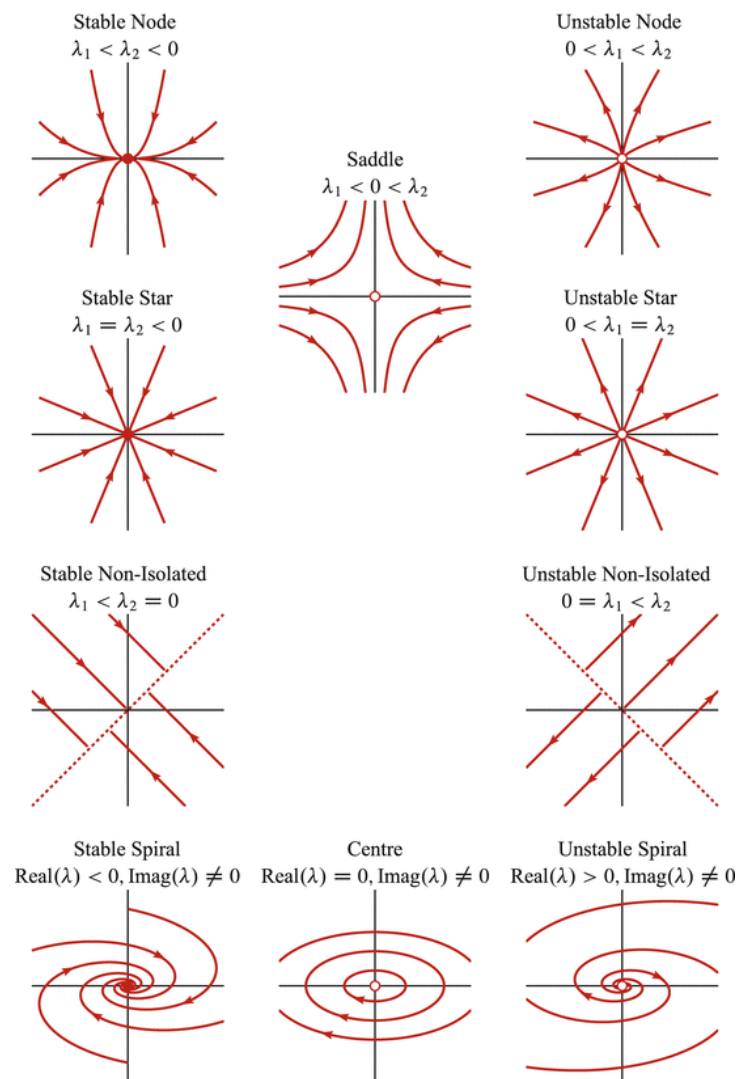
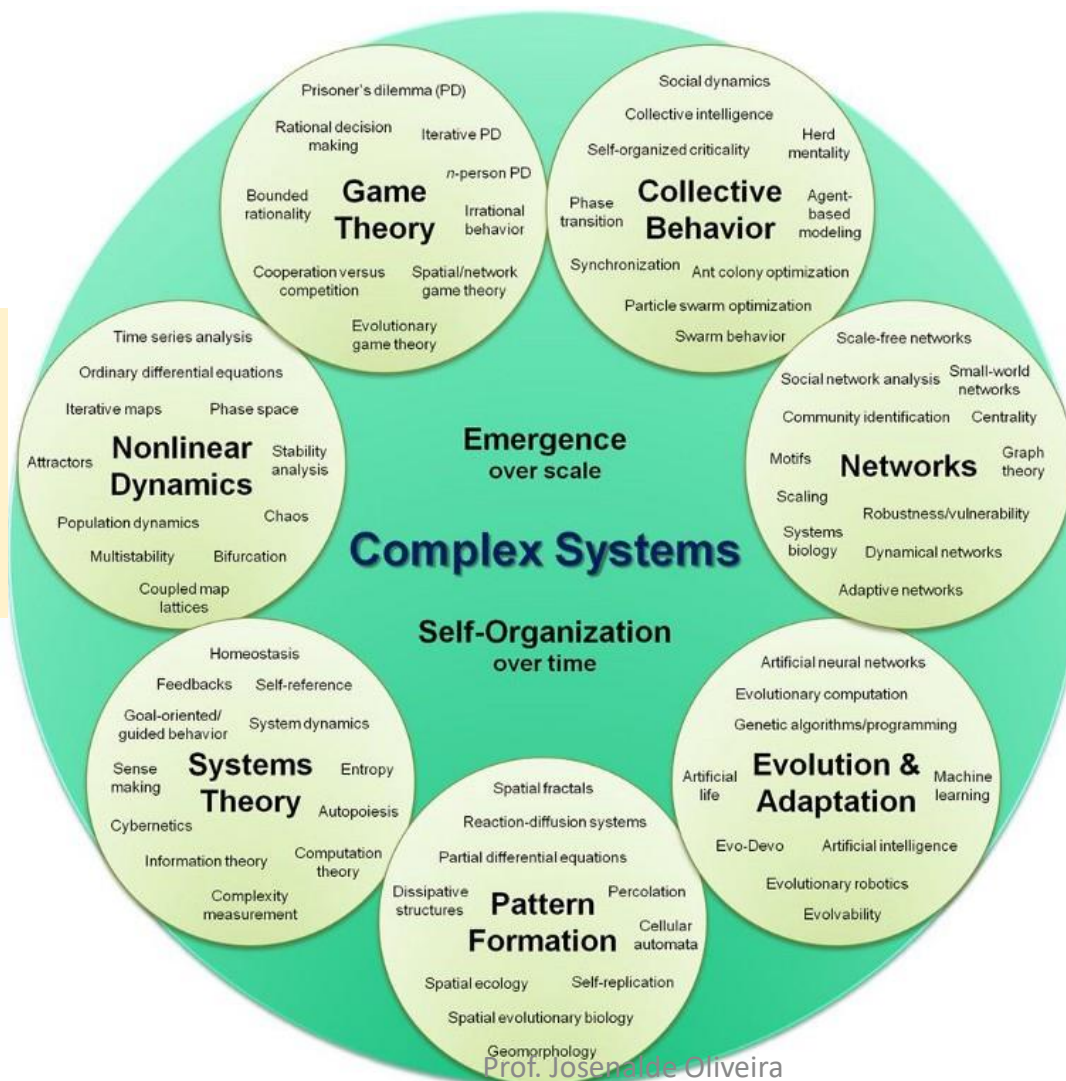
Matemática computacional

Física

Bioinformática

Engenharia

...



Exemplos de comportamento de trajetórias em relação a pontos fixos

Motivação

- Sistemas lineares X Sistemas não lineares
 - Os sistemas físicos são intrinsecamente não lineares.
 - Sistemas **lineares** obedecem ao princípio da superposição e da homogeneidade

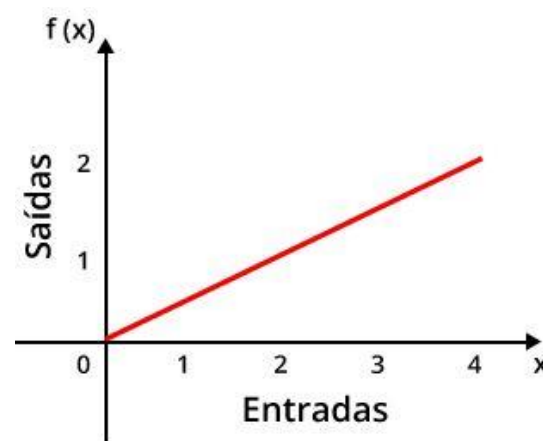
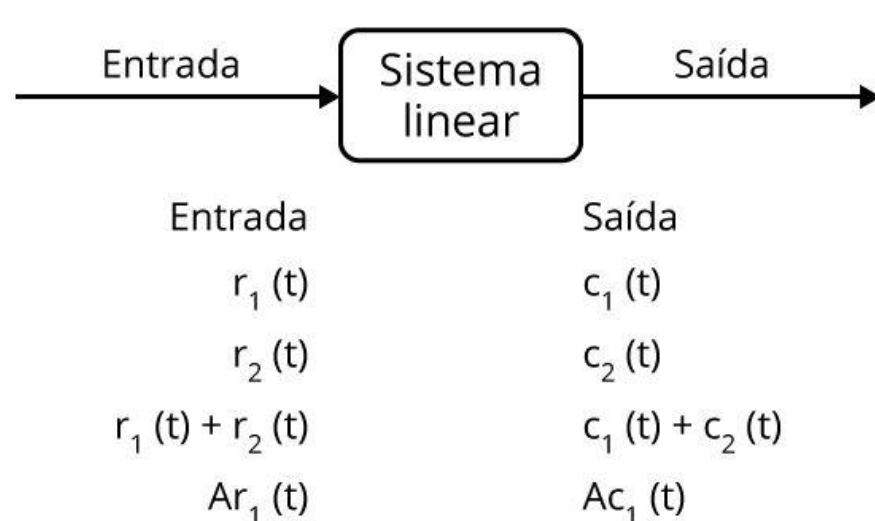
$$u_1(t) \rightarrow y_1(t) = H u_1(t)$$

$$u_2(t) \rightarrow y_2(t) = H u_2(t)$$

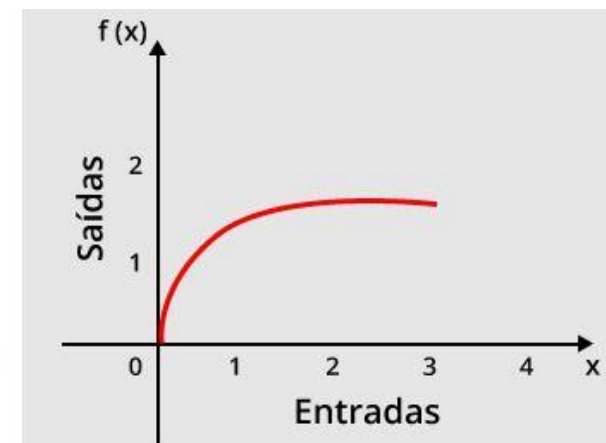
$$\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \rightarrow y(t) = H[\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)]$$

$$\alpha_1 H u_1(t) + \alpha_2 H u_2(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t), \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Fonte: [\[1\]](#)



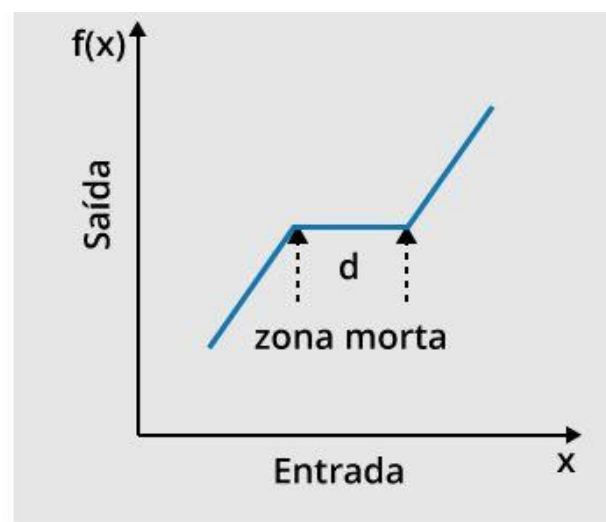
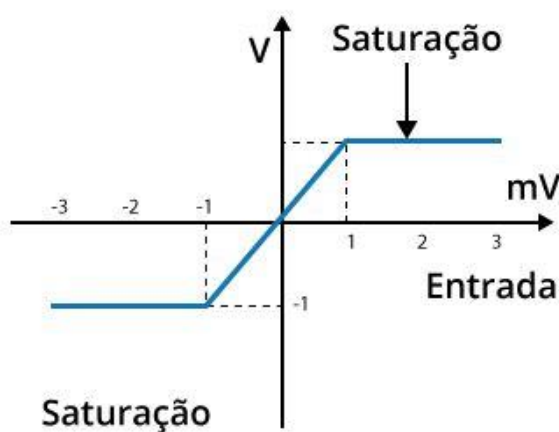
Linear



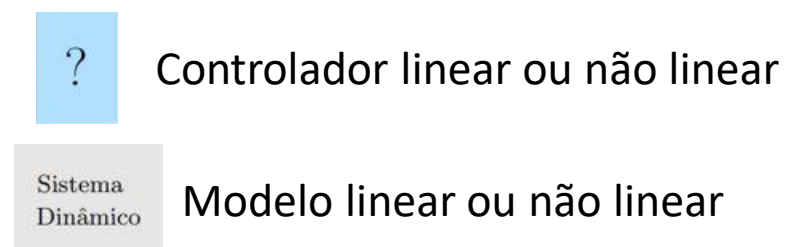
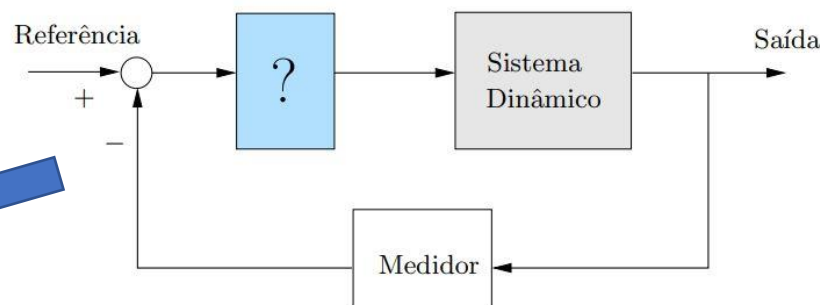
Não Linear

Motivação

- Sistemas lineares X Sistemas não lineares
 - A introdução de elementos não lineares pode melhorar e até mesmo otimizar sob alguns aspectos o desempenho de sistemas de controle

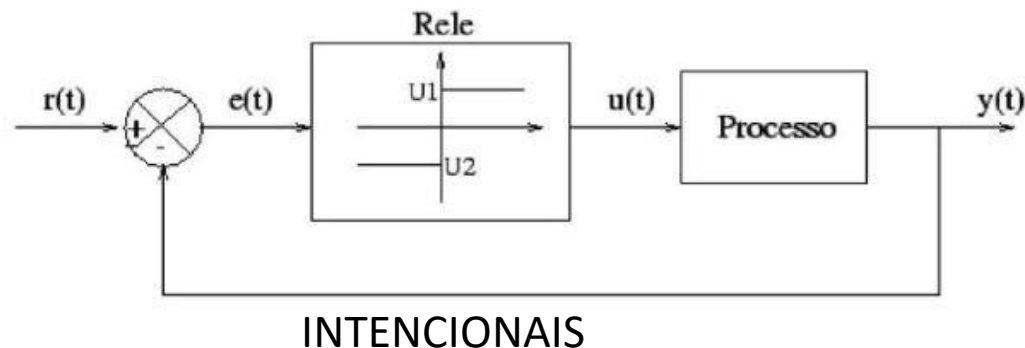


Malha fechada
pode ser não linear!



Motivação

- Análise de equações diferenciais não lineares
- Análise de fenômenos que não podem ser explicados por modelos lineares
- Introdução de controladores não lineares (adaptativo, a relé etc.)
 - Estas não linearidades podem ser
 - INERENTES ou NATURAIS (presentes no sistema)
 - INTENCIONAIS ou ARTIFICIAIS (introduzidas por um controlador)



$$\dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} [Q_{i1} - \alpha_3 \sqrt{H_1 - H_2} \text{sign}(H_1 - H_2) - \alpha_1 \sqrt{H_1}]$$

$$\dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} [Q_{i2} + \alpha_3 \sqrt{H_1 - H_2} \text{sign}(H_1 - H_2) - \alpha_2 \sqrt{H_2}]$$

NATURAL

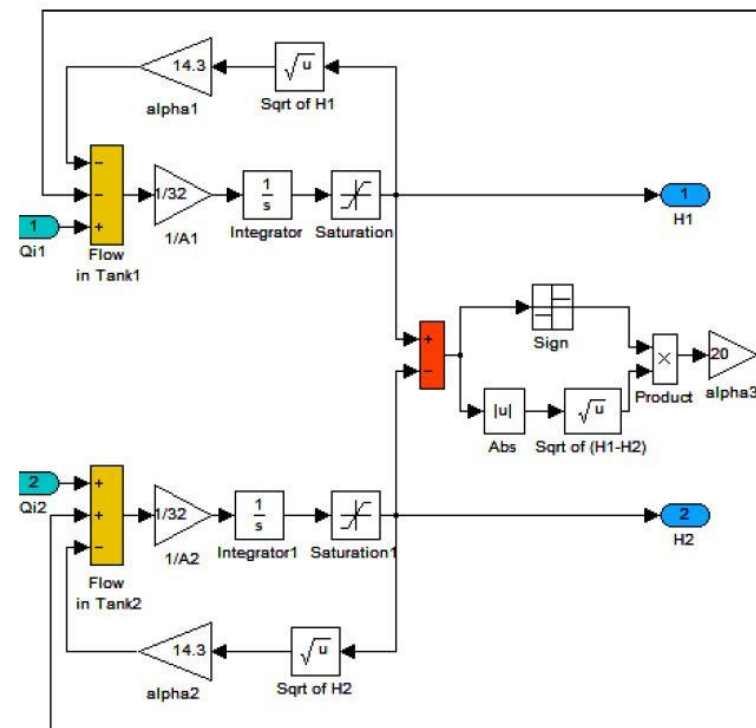
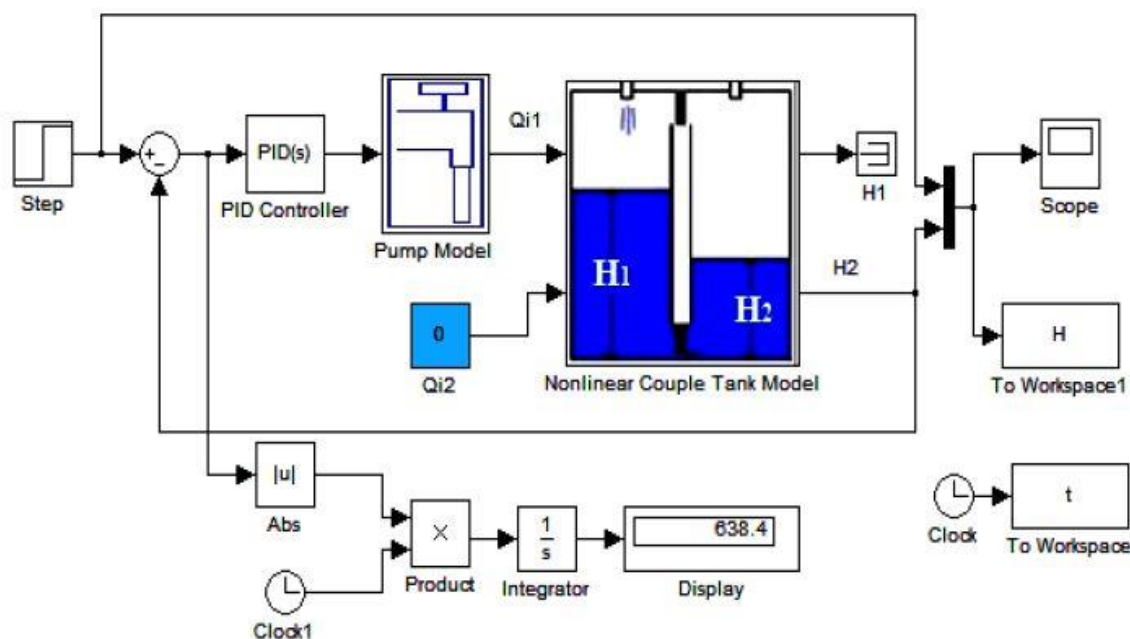
SAAD, M. Performance analysis of a **nonlinear** coupled tank system using PI controller. *Univ. J. of Control and Automation*, 5(4), p. 55-62, 2017.

Motivação

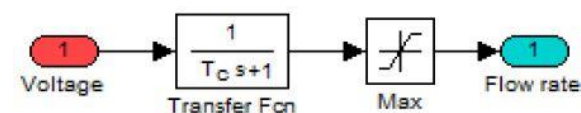


$$\dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} [Q_{i1} - \alpha_3 \sqrt{H_1 - H_2} \text{sign}(H_1 - H_2) - \alpha_1 \sqrt{H_1}]$$

$$\dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} [Q_{i2} + \alpha_3 \sqrt{H_1 - H_2} \text{sign}(H_1 - H_2) - \alpha_2 \sqrt{H_2}]$$



Detalhe Modelo não linear dos tanques

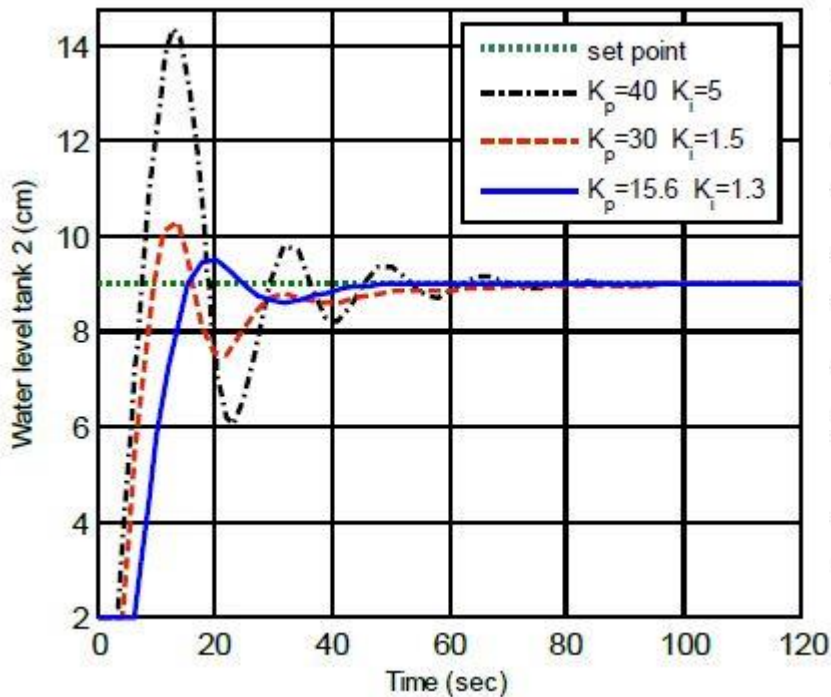


Detalhe Modelo linear bomba d'água

Motivação



Resultados (gráfico + tabela de indicadores (KPI))



| | | | |
|----------------------------|-------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| Performance Specifications | $K_p = 40$ $K_i = 5$ | $K_p = 30$ $K_i = 1.5$ | $K_p = 15.6$ $K_i = 1.3$ |
| Overshoot % | 59.55% | 15.5% | 5.77% |
| Peak Time (sec.) | 9.57 | 9.1 | 13.86 |
| Raise Time (sec.) | 3.46 | 4.14 | 7.06 |
| Settling Time (sec.) | 56.47 | 43.90 | 32.88 |
| Steady State Error | 0 | 0 | 0 |
| Dead Time (sec.) | 3.53 | 4.6 | 6.52 |

| | | | |
|----------------------------|-------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| Performance Specifications | $K_p = 40$ $K_i = 5$ | $K_p = 30$ $K_i = 1.5$ | $K_p = 15.6$ $K_i = 1.3$ |
| ITAE | 1782 | 1031 | 638.4 |

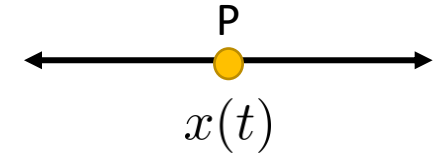
Parâmetros nominais para simulação do modelo

| Name | Expression | Value | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| Cross section area of the couple tank reservoir | $A_1 \& A_2$ | 32 cm^2 | | |
| Proportionality constant that depends on discharge coefficient, orifice cross Sectional area and gravitational constant | Subscript i denotes Which tank it refers | α_1 | α_2 | α_3 |
| | | $14.3 \text{ cm}^{2/3}/\text{sec}$ | $14.3 \text{ cm}^{2/3}/\text{sec}$ | $20 \text{ cm}^{2/3}/\text{sec}$ |
| Pump motor time constant | T_c | 1 sec | | |
| Maximum allowable volumetric flow rate pumped by motor | $Q_{i\max}$ | $300 \text{ cm}^3/\text{sec}$ | | |

Análise de uma equação diferencial não linear

Exemplo 1: prever posição futura da partícula P

$$\frac{dx}{dt} = \cos(x), \quad \text{Encontrar } x \text{ para } t \rightarrow \infty \text{ para } x(0) = x_0$$



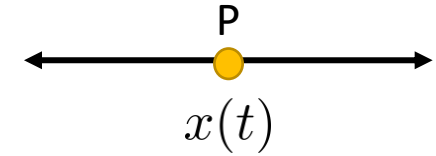
Passos para analisar $\frac{dx}{dt} = f(x)$

- 1) Esboçar gráfico de $f(x)$
- 2) Achar pontos de equilíbrio graficamente ou resolver $\frac{dx}{dt} = 0$
- 3) Determinar os fluxos (setas)
- 4) Determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio
- 5) Se aplicável determinar trajetória de qualquer condição inicial

Análise de uma equação diferencial não linear

Exemplo 2: prever posição futura da partícula P

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - \sin(x), \quad \text{Encontrar } x \text{ para } t \rightarrow \infty \text{ para } x(0) = \frac{\pi}{2}$$

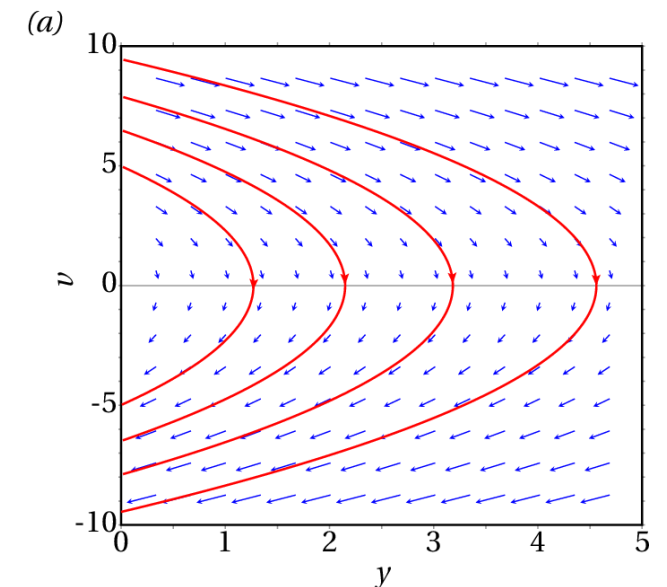
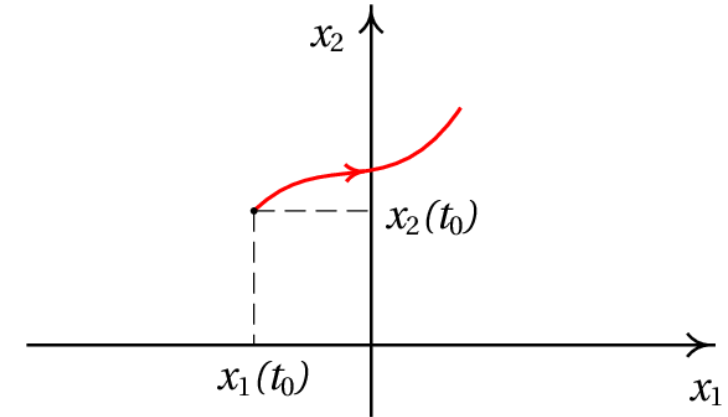


Análise de uma equação diferencial não linear

Definições:

- a) ESPAÇO DE FASE: conjunto de pontos que contém todos possíveis estados do sistema dinâmico. No caso 1-D em estudo até agora, o espaço de fase é o eixo x . No caso 2-D um plano...
- b) TRAJETÓRIA: caminho de uma solução no espaço de fase a partir de condição inicial
- c) RETRATO DE FASE (phase Portrait): gráfico que mostra trajetórias que um sistema/equação diferencial tende a seguir (exemplo pêndulo)
- d) PONTO DE EQUILÍBRIO (Fixo, Estacionário): é um ponto x_f onde $\frac{dx}{dt} = 0$, com classificação geral:

ESTÁVEL: trajetórias na vizinhança convergem
INSTÁVEL: trajetórias na vizinhança divergem



Referências

- [1] Almeida, Tiago A.; Cavalcanti, A.L.O. Notas de aula. Curso Automação Industrial, Controle de Processos 1. ed. IMD, 2016. Disponível em: <https://materialpublic.imd.ufrn.br/curso/disciplina/1/63/2/5>