EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

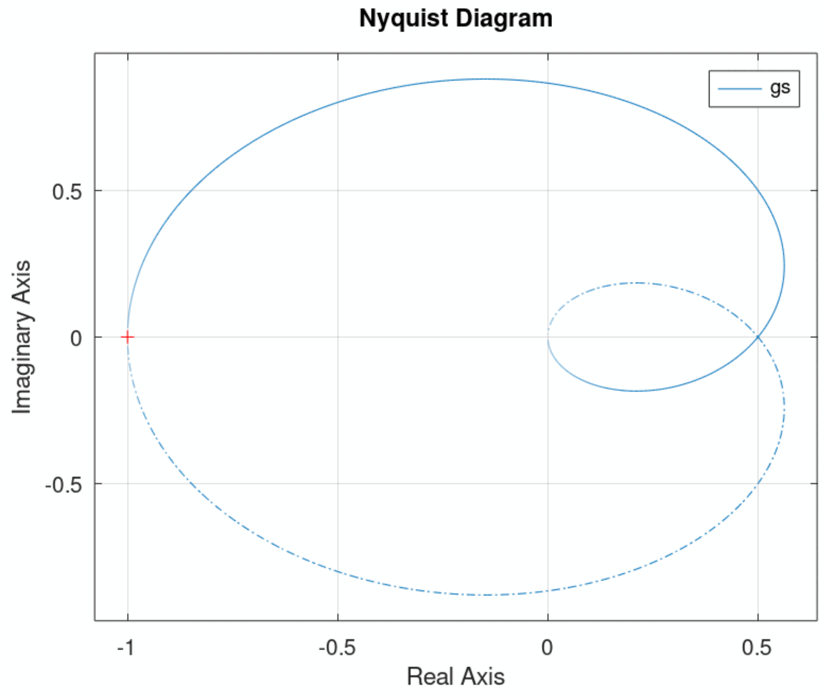
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Funções de transferência estritamente reais positivas (ERP ou SRP)

Uma função $G(s)$ é ERP se $Re[G(s)] > 0, \forall Re[s] > 0$

Lema: uma função $G(s)$ é ERP se e somente se

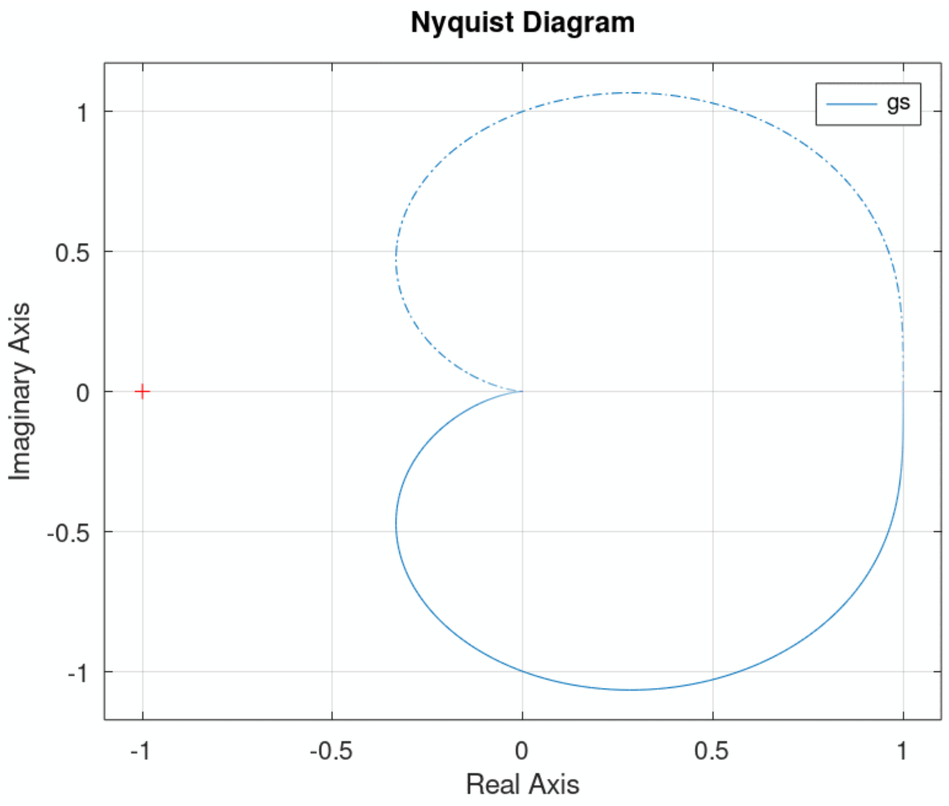
1) $G(s)$ é uma função estritamente estável
2) $Re[G(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \geq 0$ (digrama polar permanece inteiramente no semi plano lateral direito aberto do plano complexo $\angle G(j\omega) < 90^\circ$
3) $G(s)$ tem grau relativo igual a 0 ou 1
4) $G(s)$ é estritamente de fase mínima

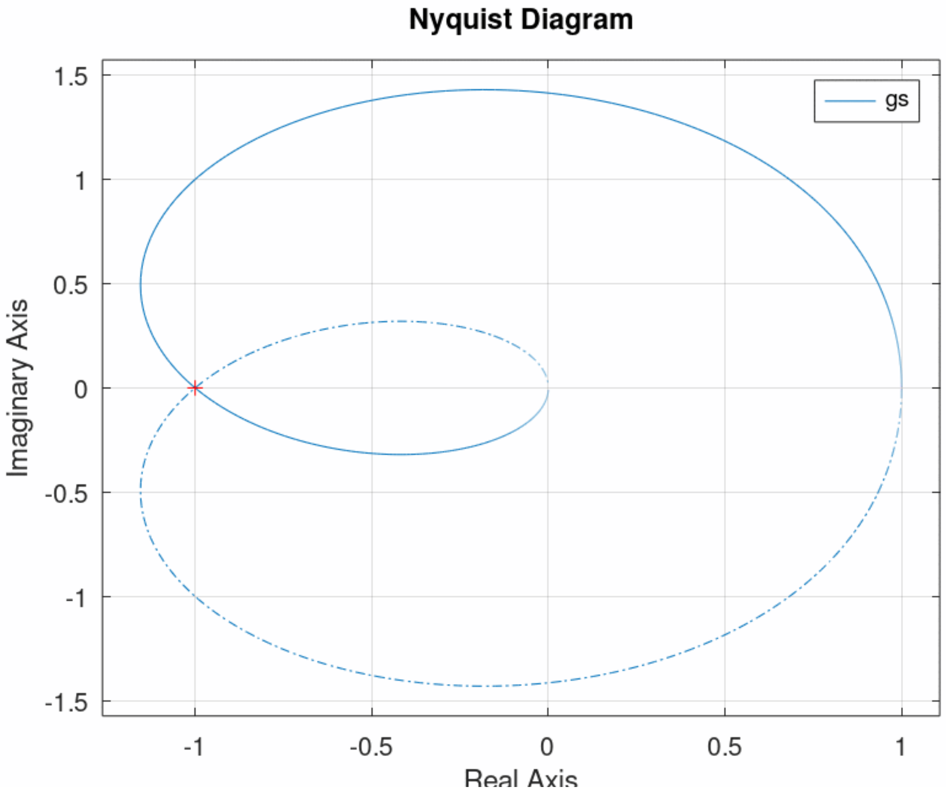


a) não ERP (fase não mínima): $G(s) = \dfrac{s-1}{s^2+2s+1}$
zeros instáveis

Funções de transferência estritamente reais positivas (ERP ou SRP)

b) não ERP (instável): $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2 - s + 1}$

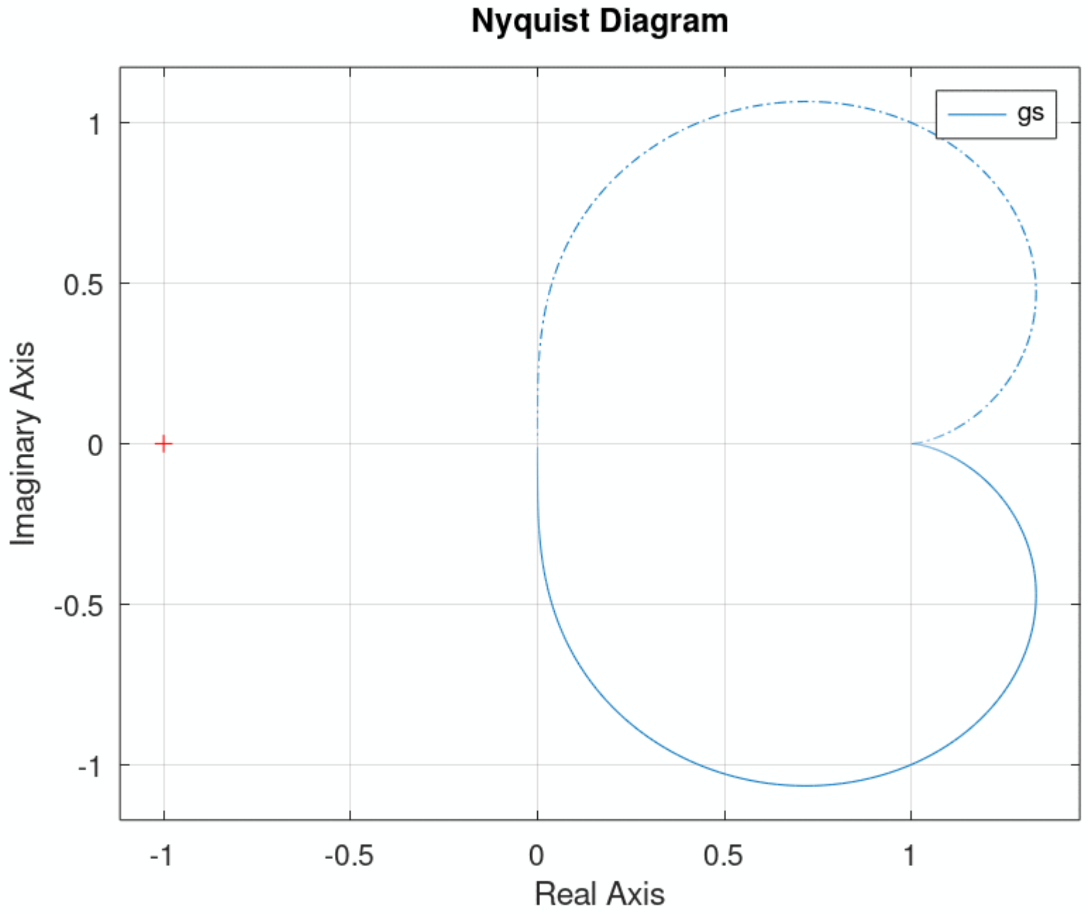




c) não ERP (grau relativo=2): $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + s + 1}$

Funções de transferência estritamente reais positivas (ERP ou SRP)

d) ERP (fase mínima, estável, grau relativo=1): $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2+s+1}$



$$G(j\omega) = \frac{1+j\omega}{1-\omega^2+j\omega}\frac{(1-\omega^2-j\omega)}{(1-\omega^2-j\omega)}$$

$$= \frac{1-\omega^2+\omega^2+j\omega(1-\omega^2-1)}{(1-\omega^2)^2+\omega^2} = \frac{1-j\omega^3}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}$$

$$Re[G(j\omega)] = \frac{1}{(1-\omega^2)^2+\omega^2} > 0, \forall\omega \geq 0$$

$$Im[G(j\omega)] = \frac{-\omega^3}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}$$

Funções de transferência estritamente reais positivas (ERP ou SRP)

e) ERP (com polos e zeros entrelaçados): $G(s) = \dfrac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+5)}$

Lema de Kalman-Yakubovic-Lefschetz:

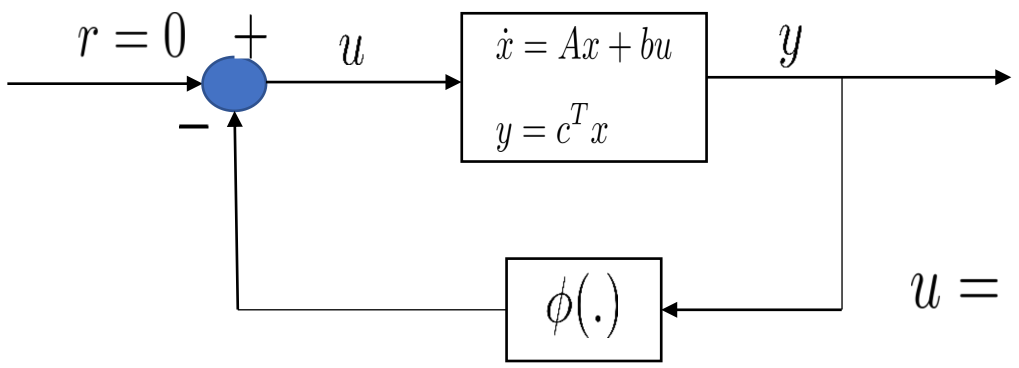
Seja $\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$ controlável e observável com $G(s) = c^T(sI - A)^{-1}b$

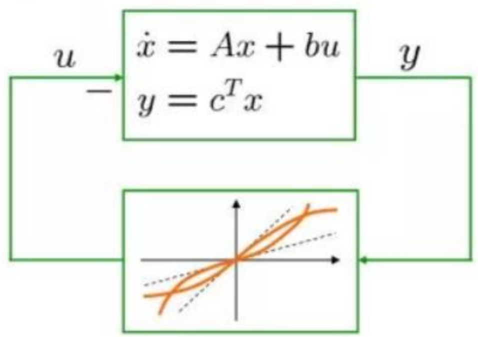
$G(s)$ é ERP se e somente se existem $P = P^T > 0$ e $Q = Q^T > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &A^T P + PA = -Q \quad \text{só vale para grau relativo} = 1\;, n^* = 1 \\ &Pb = c \end{aligned}$$

Estabilidade absoluta e o problema de Lur'e

Sistemas tipo Lur'e-Portnikov





$u = -k\phi(y)$ por exemplo, controlador não linear

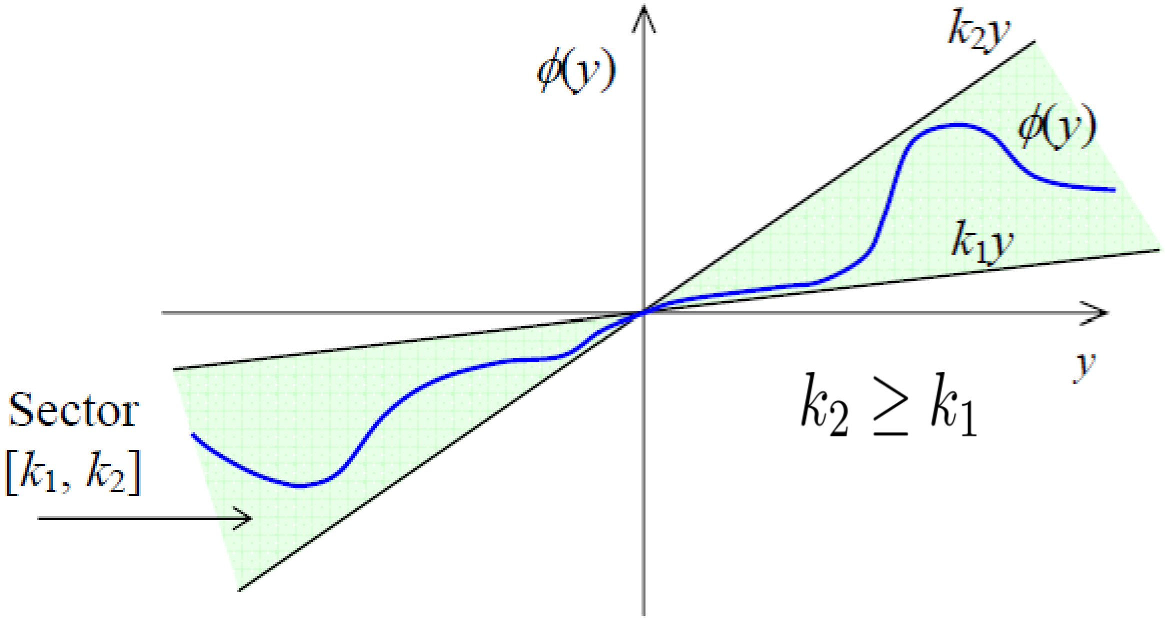
ϕ : setorial , $\phi(y)$ ou $\phi(t, y)$

Hipóteses:

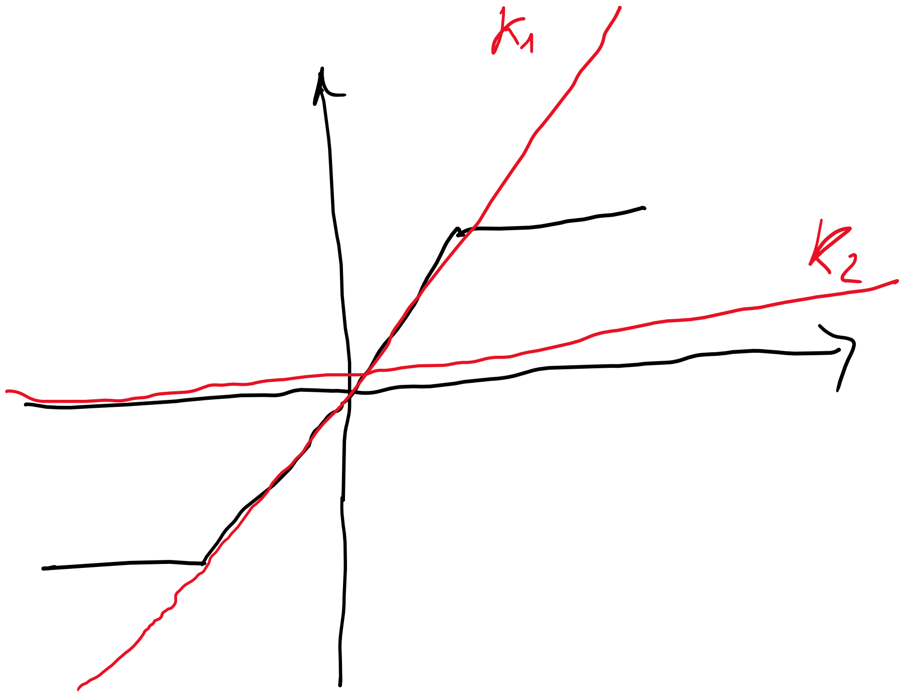
$\phi(\cdot)$ contínua, $\phi(0) = 0, \quad 0 \leq \dfrac{\phi(y)}{y} \leq k$

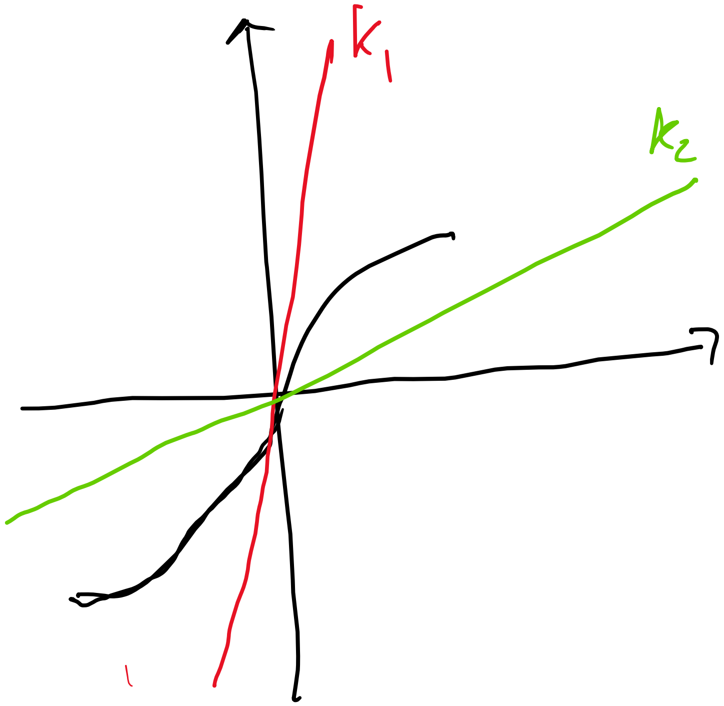
$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b, \quad A$ é Hurwitz
ou tem autovalor com multiplicidade 1 na origem

$$S_k = \{\phi(\cdot) \text{ tal que } 0 \leq \frac{\phi(y)}{y} \leq k, \quad k > 0, y \neq 0\}$$



Estabilidade absoluta e o problema de Lur’e

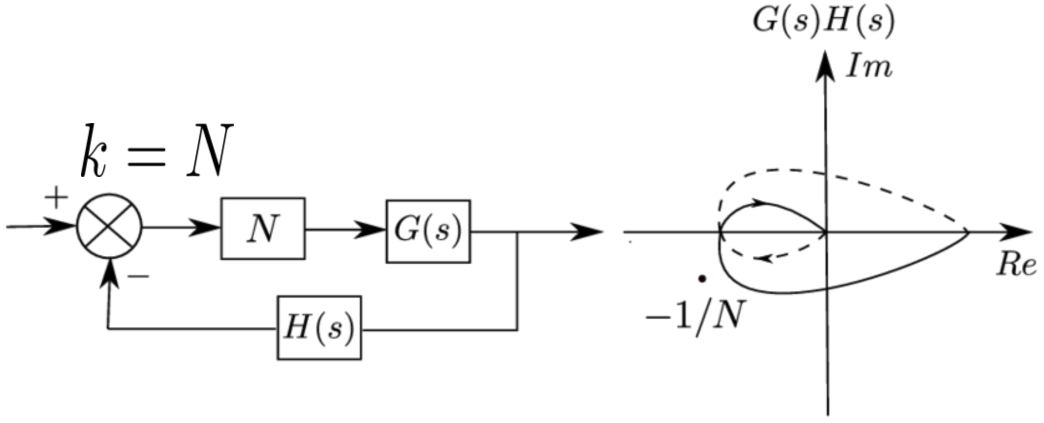




Estabilidade absoluta e o problema de Lur'e

Se $k_1 = k_2$, a "não linearidade" torna-se apenas uma reta com inclinação k e $u = -ky$ (linear!)

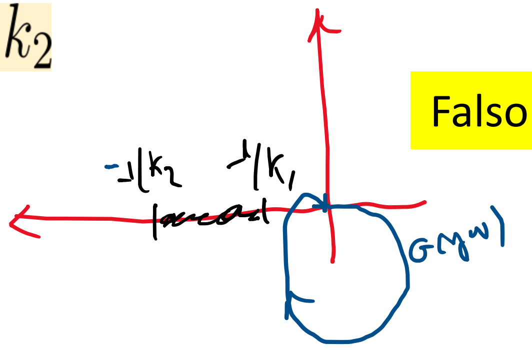
O critério de Nyquist para sistemas lineares diz que o sistema em malha fechada é estável se o número de envolvimentos do ponto $-1/k$ no sentido anti-horário da curva $G(j\omega)$ for igual ao número de polos instáveis em malha fechada



Como resolver se $k1 \neq k2$?

Conjectura de Aizeman: G.A.S se critério de Nyquist é válido para $k_1 \geq k \geq k_2$

Falso



Conjectura de Kalman: G.A.S se critério de Nyquist é válido para $k_3 \geq k \geq k_4, k_3 \geq \dfrac{\partial(y\phi(t,y))}{\partial y} \geq k_4$

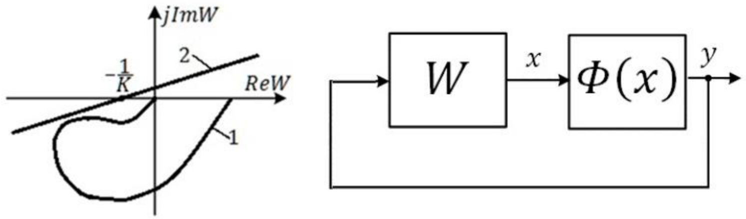
Falso

Critério de Popov: condição suficiente de estabilidade

Definição: se $x^* = 0$ do sub-sistema tipo Lur'e-Portnikov é GAS para toda $\phi(y) \in S_k$, então, dizemos que o sistema tem $x^* = 0$ absolutamente estável no setor $[0, k]$.

Critério de Popov:

Vasile Mihai Popov (Romênia, 1928)

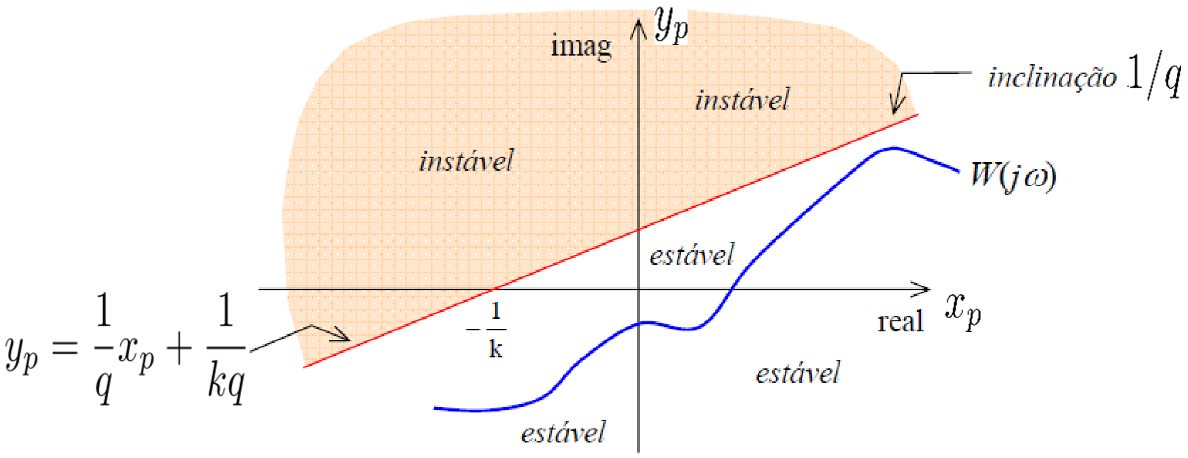


Seja x_p : parte real de $G(j\omega)$

Seja $y_p = \omega Im[G(j\omega)]$

Reta de Popov: $y_p = \frac{1}{q}x_p + \frac{1}{kq}$

Reta com inclinação $1/q$ e que passa por $(-1/k, 0)$

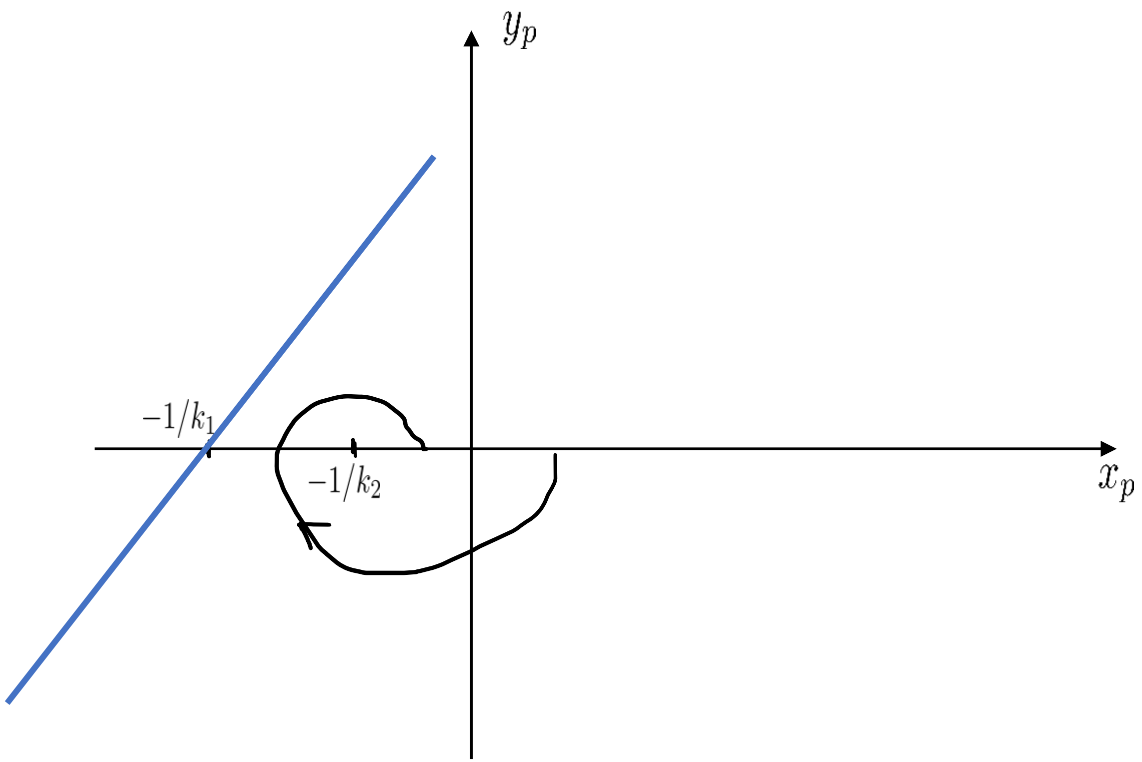


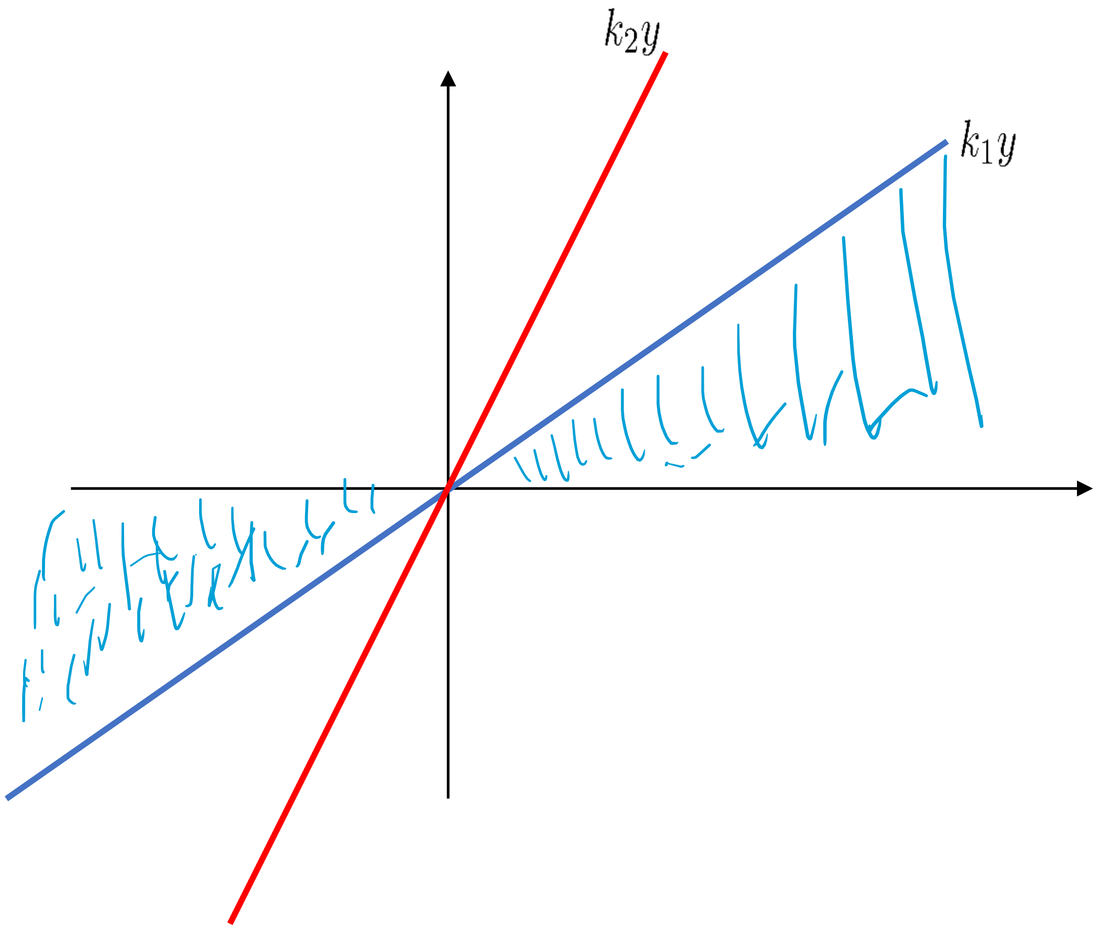
Existe no plano de Popov (x_p, y_p) uma reta que passar por $(-1/k, 0)$ tal que o lugar de Popov (gráfico $y_p \times x_p$) fique estritamente à direita desta reta

$$\boxed{\forall\omega \geq 0, \quad \exists q > 0, Re[(1 + jq\omega)G(j\omega)] + 1/k \geq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \ll 1}$$

$$\boxed{\forall\omega \geq 0, \quad \exists q > 0, Re[(1 + jq\omega)G(j\omega)] \geq -1/k + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \ll 1}$$

Critério de Popov





$\phi \in S_{k_1}$: sistema absolutamente estável

$\phi \in S_{k_2}$: sistema não é absolutamente estável

Popov, V.M. (1960). Criterion of quality for non-linear controlled systems. In: Preprints of the First IFAC World Congress. Butterworths. Moscow. pp. 173–176.

Critério de Popov- interpretação

Desigualdade de Popov:

$$(1): \forall\omega \geq 0, \quad \exists q > 0, Re[(1 + jq\omega)G(j\omega)] + 1/k \geq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \ll 1$$

Seja : $G(j\omega) = G_r(j\omega) + jG_j(j\omega), \quad G_r = Re[G(j\omega)], G_j = Im[G(j\omega)]$. Substituindo em (1)

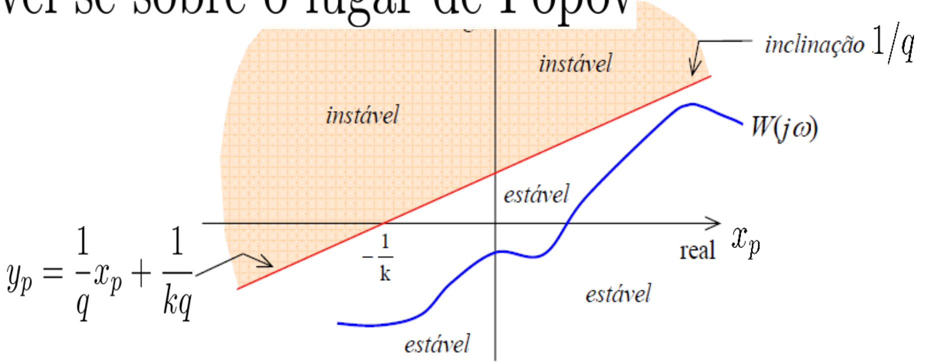
$$Re[(1 + jq\omega)(G_r(j\omega) + jG_j(j\omega)] + 1/k > \varepsilon$$

$$Re[G_r(j\omega) + jG_j(j\omega) + jq\omega G_r(j\omega) - q\omega G_j(j\omega)] + 1/k \boxed{= G_r(j\omega) - q\omega G_j(j\omega) > -1/k + \varepsilon = x_p - qy_p + 1/k = 0}$$

Construindo uma função $W(j\omega)$ com a mesma parte real de $G(j\omega) = G_r(j\omega)$ e parte imaginária $\omega G_j(j\omega)$:

$$W(j\omega) = x_p + jy_p = G_r(j\omega) + j\omega G_j(j\omega)$$

implica que o sistema não linear é globalmente assintoticamente estável se sobre o lugar de Popov a representação de $W(j\omega)$ estiver abaixo da reta $x_p - qy_p + 1/k = 0$



Critério de Popov- exemplo

Desigualdade de Popov:

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+7s+10} \text{ e a não linearidade definida como } 0 \leq \phi(y) \leq ky$$

$G(s)$: polos $-2, -5$, controlável, ERP

$$G(j\omega) = \frac{j\omega+3}{(10-\omega^2)+7j\omega} = \underbrace{\frac{4\omega^2+30}{\omega^4+29\omega^2+100}}_{G_r(j\omega)} + \underbrace{\frac{-\omega(\omega^2+11)}{\omega^4+29\omega^2+100}}_{G_j(j\omega)} j$$

Substituindo na desigualdade: $\boxed{G_r(j\omega) - q\omega G_j(j\omega) + 1/k - \varepsilon > 0}$

$$4\omega^2 + 30 + q\omega^2(\omega^2+11) + (1/k - \varepsilon)(\omega^4 + 29\omega^2 + 100) > 0$$

a qual é satisfeita para $\forall q > 0$ e para qualquer k, tal que $0 < k < \infty$.

Logo origem G.A.S.

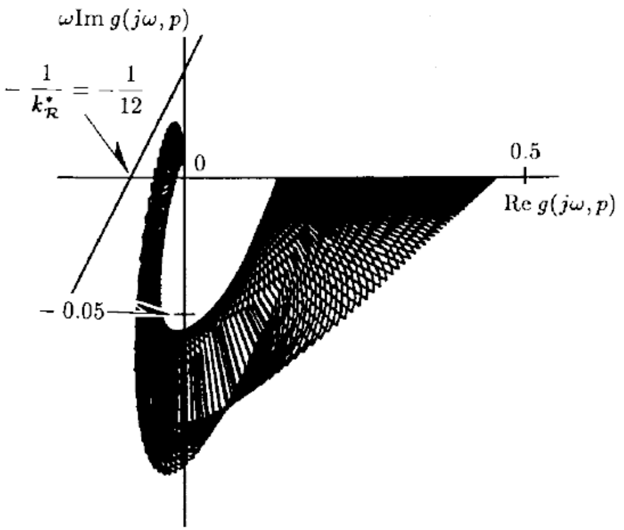
Critério de Popov- exemplo

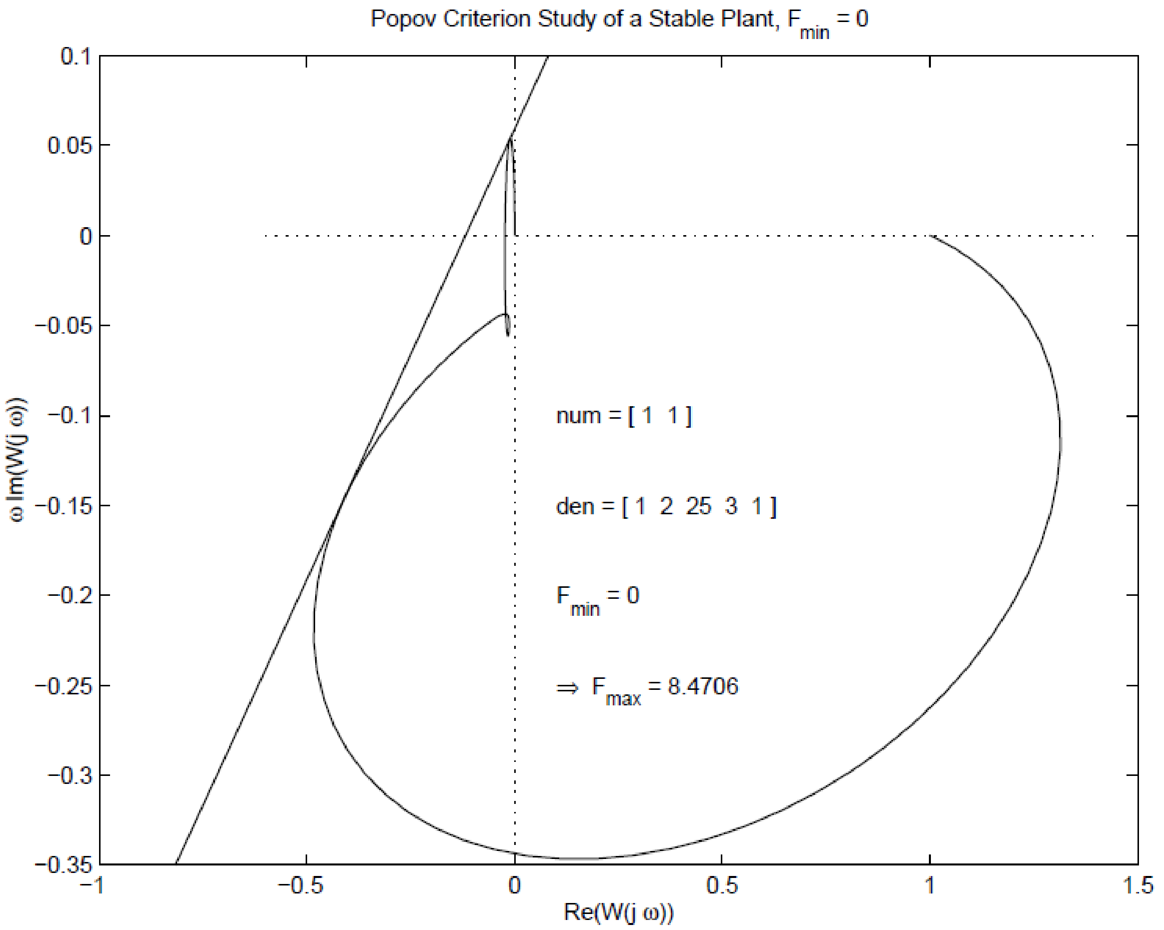
Ferramenta em: https://www.ece.unb.ca/jtaylor/NLS_software.html

Taylor, J. **Tutorial Guide: Enhanced MATLAB Tools for Linear and Nonlinear System Stability Analysis**

$$G(s) = \frac{s+1}{s^4 + 2s^3 + 25s^2 + 3s + 1}$$

>> popov(num,den,0)
popov criterion is satisfied
maximum sector bound F_max = 8.4706





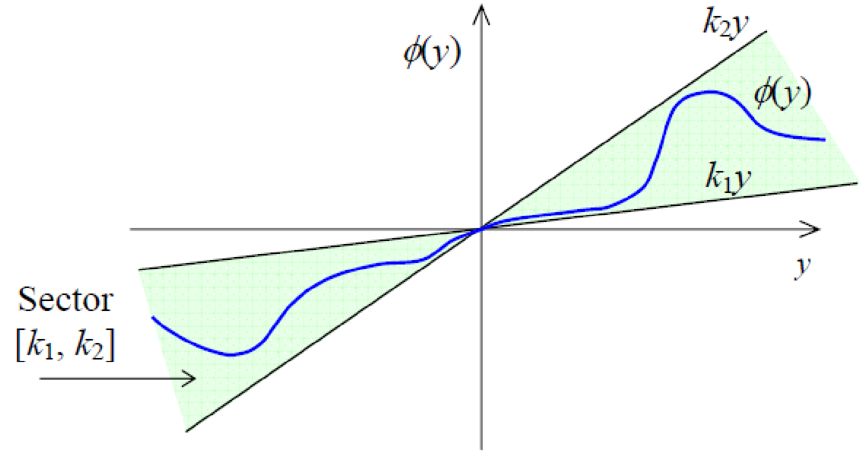
Trabalho mais atual: [kodkin, 2023]()

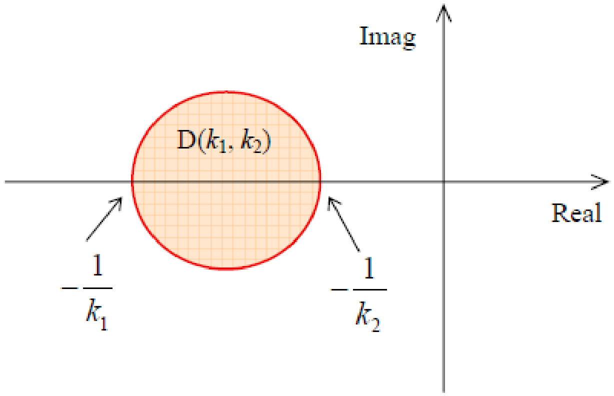
Critério do círculo

Mais restrito por incluir duas inclinações, contudo se aplica também a não autônomos

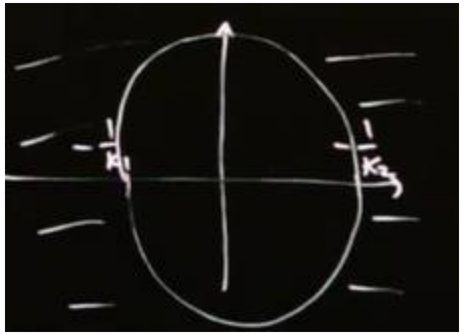
a) A matriz **A** não tem valores próprios sobre o eixo $j\omega$ e tem p valores próprios no semiplano complexo direito,
b) A não linearidade ϕ pertence ao sector $[k_1, k_2]$,
c) Verifica-se uma das condições:
   c₁) $0 < k_1 \leq k_2$ e o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ não entra no disco $D(k_1, k_2)$ (Fig. 3.15) e envolve-o p vezes no sentido contrário aos ponteiros do relógio,
   c₂) $0 = k_1 < k_2$ e o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ permanece no semi-plano $R_e(s) \geq -1/k_2$,
   c₃) $k_1 < 0 < k_2$ e o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ permanece no interior do disco $D(k_1, k_2)$,
   c₄) $k_1 < k_2 < 0$ e o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ não entra no disco $D(-k_1, -k_2)$ e envolve-o p vezes no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio,

então o ponto de equilíbrio **x=0** é global e assimptoticamente estável.





A origem é G.A.S. se o critério de Nyquist é safisfeito para todo ponto $-1/k$ no círculo



Critério do círculo

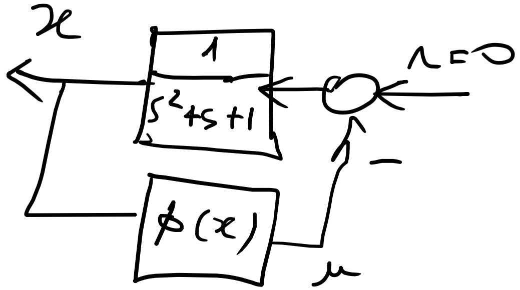
Exemplo:

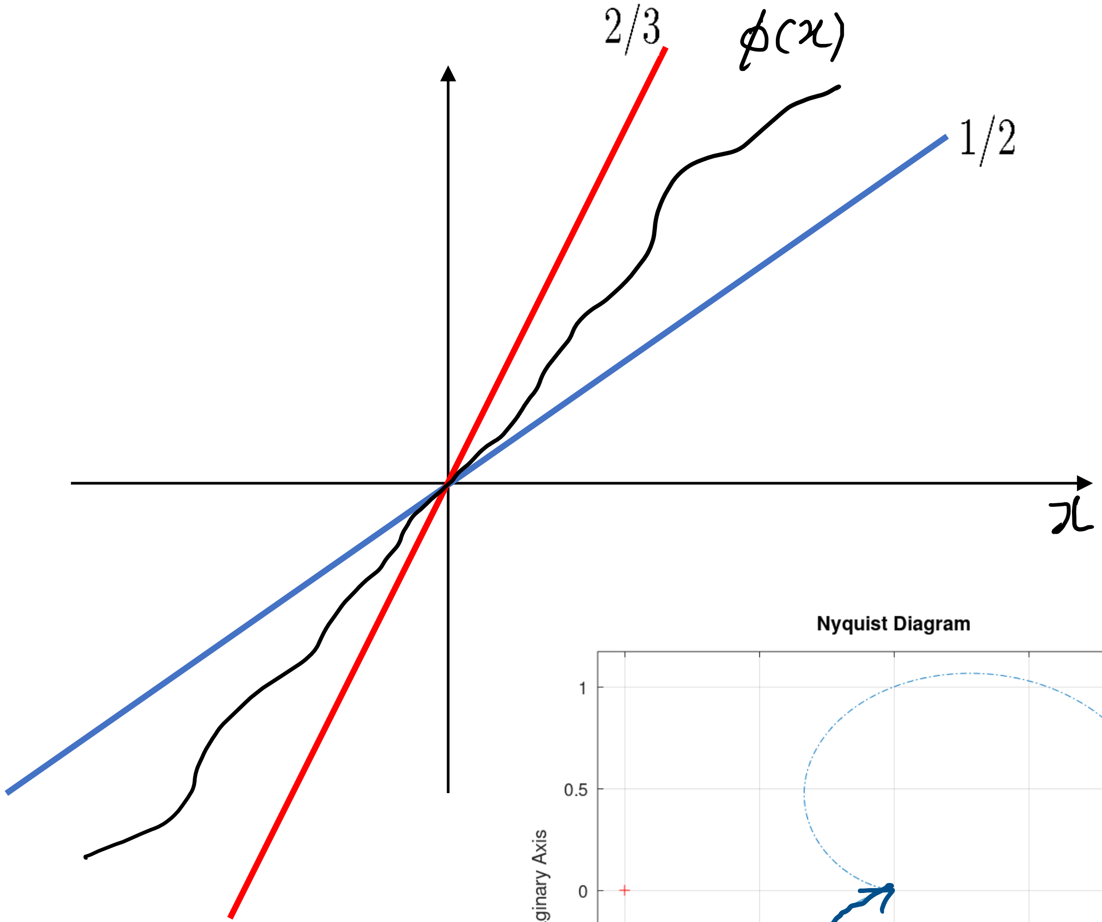
$$\ddot{x} + \dot{x} + x + \phi(x) = 0$$

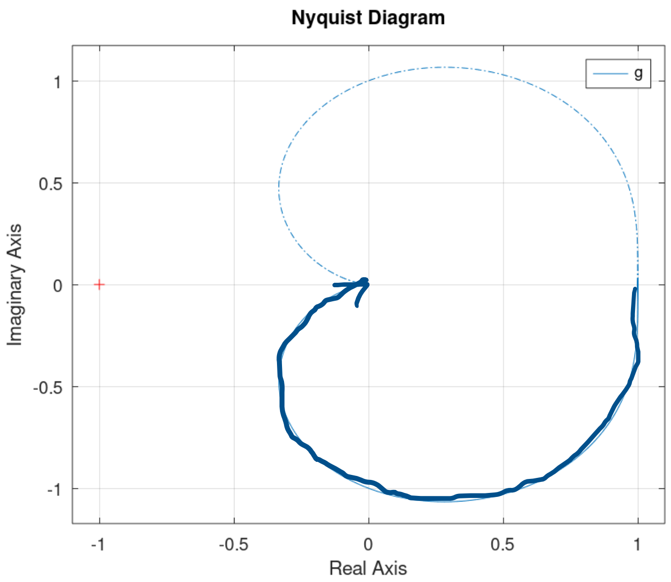
Seja a não linearidade ϕ vista como entrada u

$$s^2 X + sX + X + U = 0$$

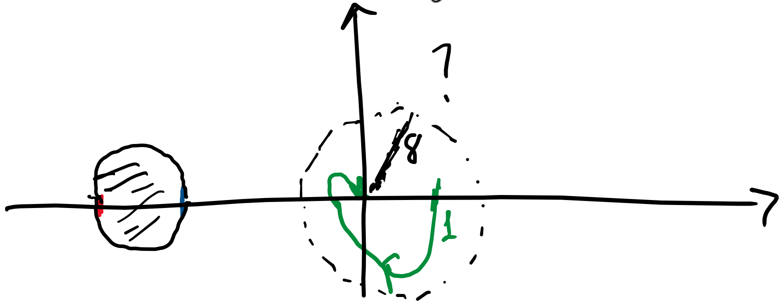
$$X = \frac{-1}{s^2 + s + 1} U$$







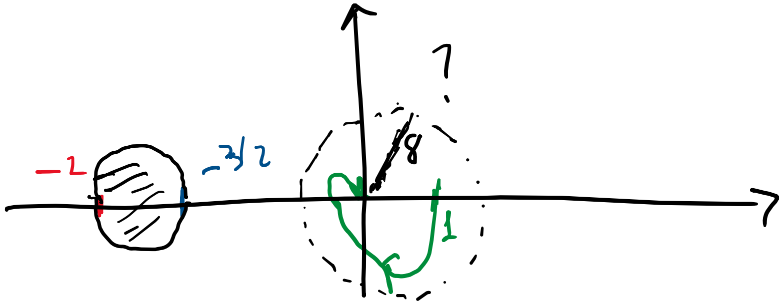
Estável com $s = -0.5 \pm j\sqrt{3}$



Critério do círculo

Exemplo:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x + \phi(x) = 0$$



$$\gamma^2 \leq |G(j\omega)|^2 \qquad G(j\omega) = \frac{1}{1-\omega^2+j\omega}$$

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{1}{(1-\omega^2)^2+\omega^2} = \frac{1}{1-\omega^2+\omega^4} = \frac{1}{\eta(\omega)}$$

$$\eta(\omega) = 1-\omega^2+\omega^4. \quad \frac{d(\eta(\omega))}{d\omega} = -2\omega + 4\omega^3 = 0 \implies \omega = \sqrt{1/2}$$

$$\eta(\sqrt{1/2}) = 3/4$$

$$\gamma^2 \leq \frac{1}{3/4} \implies \gamma \leq 1.15 < 1.5$$

Critério do círculo

Exemplo: Taylor, J. **Tutorial Guide: Enhanced MATLAB Tools for Linear and Nonlinear System Stability Analysis**

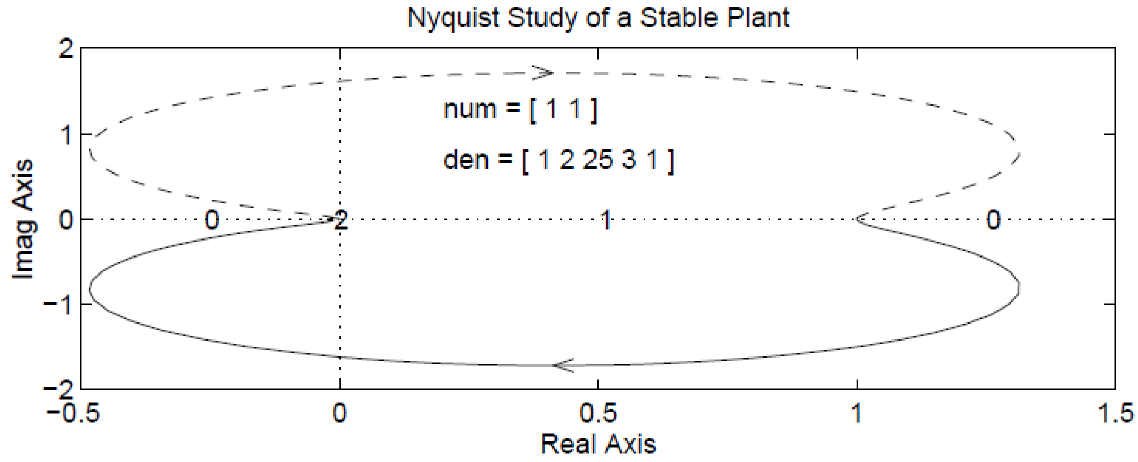
Ferramenta em: https://www.ece.unb.ca/jtaylor/NLS_software.html

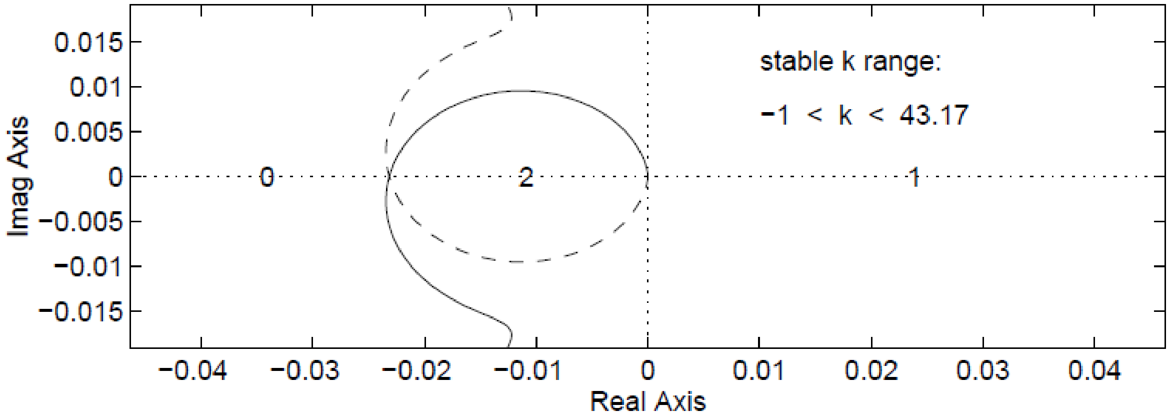
$$G(s) = \frac{s+1}{s^4 + 2s^3 + 25s^2 + 3s + 1}$$

```
>> newnyq(num,den)
stable k range -1 < k < 43.17
```

```
>> circle(num,den,2.5)
circle criterion is satisfied
maximum sector bound F_max = 11.5925
```

Setor $[2.5, 11.5925]$





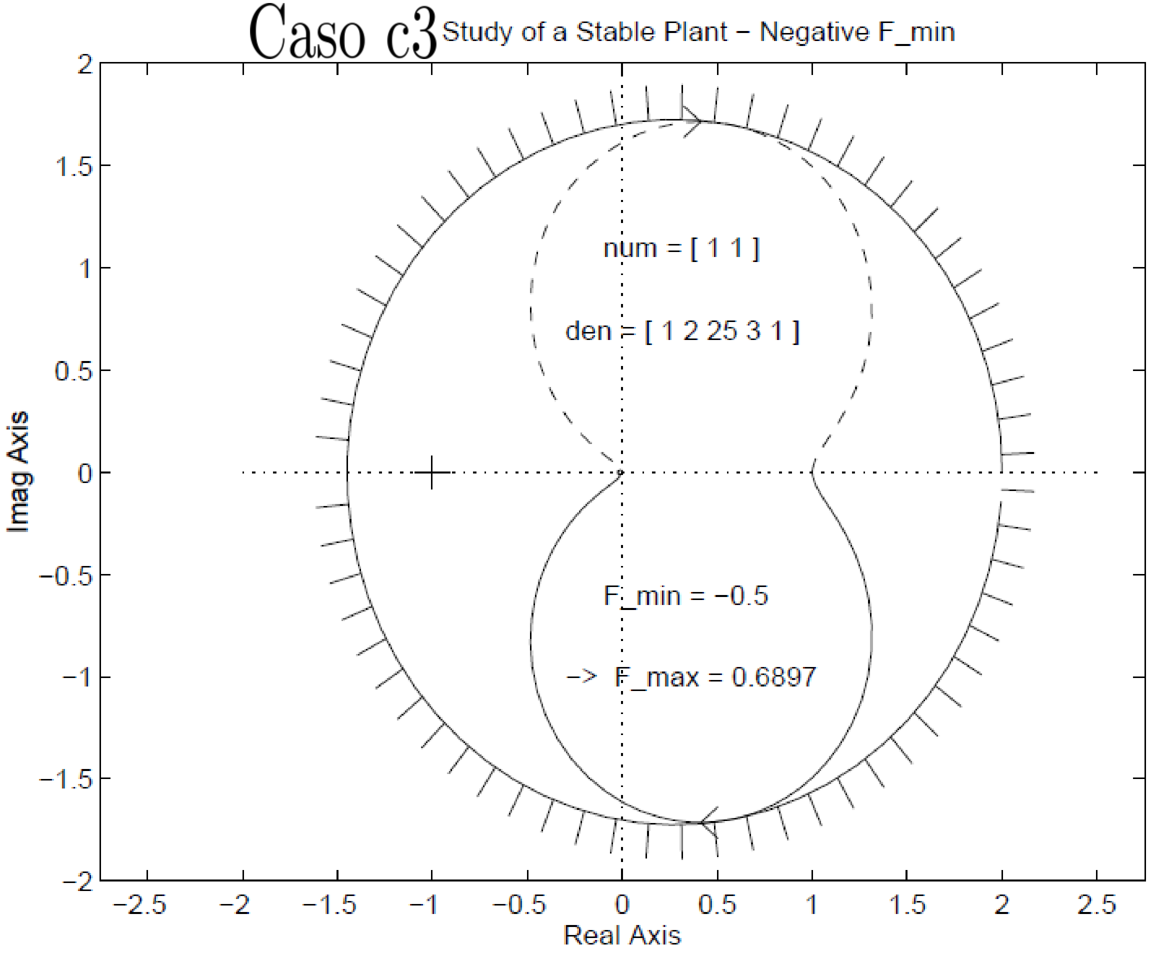
Critério do círculo

Exemplo: Taylor, J. **Tutorial Guide: Enhanced MATLAB Tools for Linear and Nonlinear System Stability Analysis**

Ferramenta em: https://www.ece.unb.ca/jtaylor/NLS_software.html

$$G(s) = \frac{s+1}{s^4 + 2s^3 + 25s^2 + 3s + 1}$$

Caso c3



\>> circle(num,den,-0.5)
circle criterion is satisfied
maximum sector bound F_max = 0.6897

Setor $[-0.5, 0.6897]$

Critério do círculo

Exemplo: Taylor, J. **Tutorial Guide: Enhanced MATLAB Tools for Linear and Nonlinear System Stability Analysis**

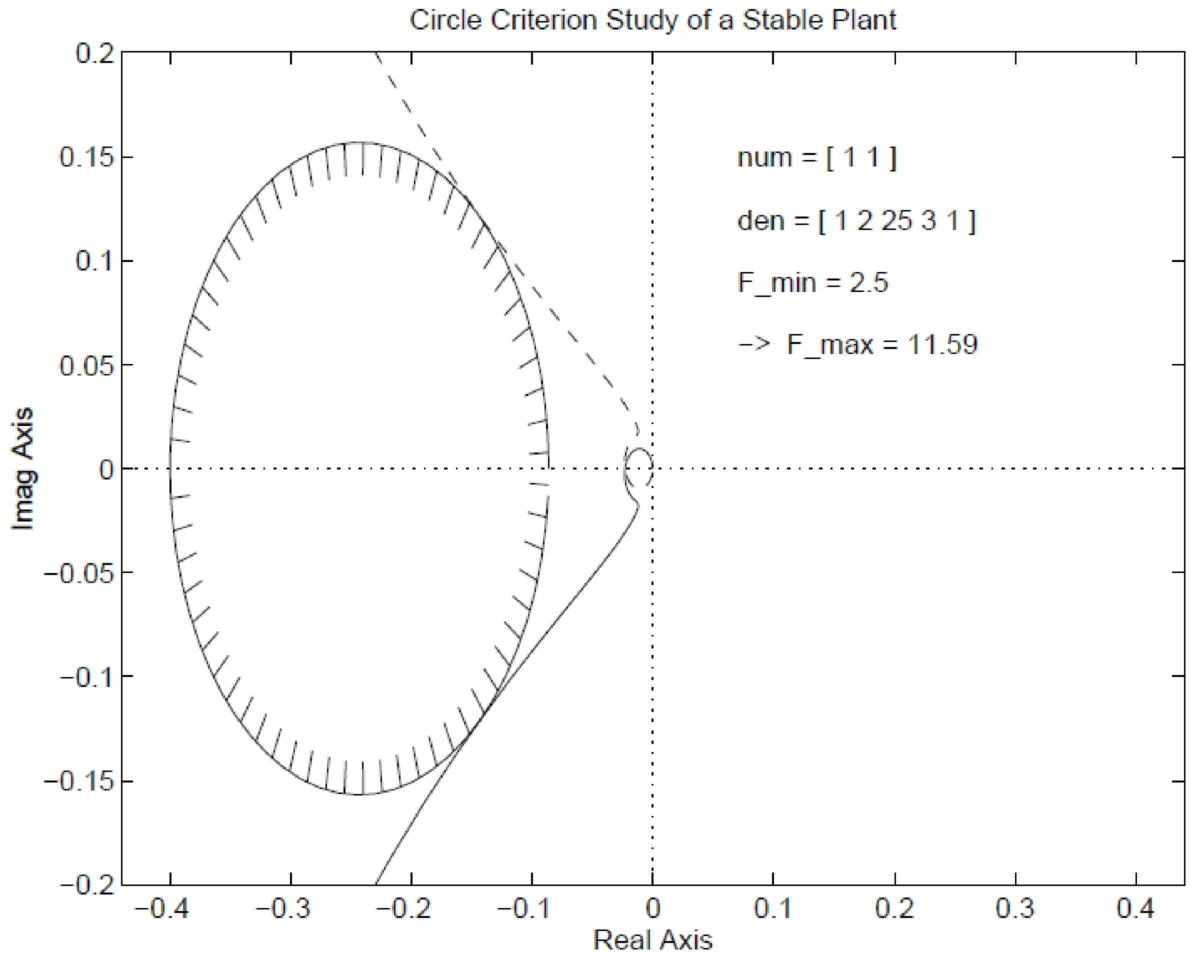
Ferramenta em: https://www.ece.unb.ca/jtaylor/NLS_software.html

$$G(s) = \frac{s+1}{s^4 + 2s^3 + 25s^2 + 3s + 1}$$

```
>> newnyq(num,den)
stable k range -1 < k < 43.17
```

```
>> circle(num,den,2.5)
circle criterion is satisfied
maximum sector bound F_max = 11.5925
```

Setor $[2.5, 11.5925]$



Estabilidade de Sistemas Não Autônomos

a) O tempo aparece explicitamente nas equações do sistema

b) Surge instante $t_0 \neq 0$

Seja o sistema não autônomo, em regime livre:

$\dot{x}(t) = f[x(t), t], \quad f(\cdot, \cdot)$ contínua no tempo e indefinidamente diferenciável em relação a x

Um ponto de equilíbrio é aquele que $\forall t \geq t_0, \quad f[x_e(t), t] = 0$

O ponto de equilíbrio $x = 0$ diz-se estável no sentido de Lyapunov, no instante t_0, se para qualquer $R > 0$ $\exists r(R, t_0)$ tal que $\forall t \geq t_0$

Se $r(R)$ uniformemente estável

$$||x(t_0)|| < r(R, t_0) \implies ||x(t)|| < R.$$ É instável, caso contrário

Definições análogas para assintótica, exponencial, local, global. Por exemplo, exponencial:

$$||x(t)|| \leq \alpha ||x_0|| e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall t \geq t_0$$

Método direto Lyapunov – não autônomo

Uma função escalar de um vetor x e de um escalar t é localmente positiva definida se $V(0,t) = 0$ e $\exists V_0(x)$ positiva definida, independente de t, tal que $V(x,t) \geq V_0(x), \forall t > t_0$

Uma função $V(x,t)$ diz-se decrescente se $V(0,t) = 0$ e $\exists V_1(x) > 0$ tal que $V(x,t) \leq V_1(x), \forall t > t_0$

Exempo: $V(x,t) = (1 + sen^2 t)(x_1^2 + x_2^2)$

Visto que $1 \leq 1 + sen^2 t \leq 2$, seja $V_0(x) = (x_1^2 + x_2^2) > 0$ tal que $V(x,t) \geq V_0(x)$

Também $\exists V_1(x) = 2(x_1^2 + x_2^2), \quad V(x,t) \leq V_1(x)$ qualquer que seja t.

Além disso é $V(0,t) = 0$ e, portanto a função dada é decrescente

Método direto Lyapunov – não autônomo

Derivada de $V(x,t)$

$$\dot{V}(x,t) = \frac{d}{dt}V(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt}$$

Estabilidade uniforme: seja uma bola B_{R_0} de raio R_0 centrada em $x = 0$.

Se $\exists V(x,t)$ com derivadas parciais continuas, tal que $V(x,t) > 0, \dot{V}(x,t) \leq 0$ e $V(x,t)$ é descrescente a origem é uniformemente estável.

Método direto Lyapunov – não autônomo

Exemplo: determine a estabilidade do sistema

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -e^{-2t}x_1(t) - x_2(t)$$

com $V(x,t) = (1+e^{-2t})x_1^2 + x_2^2$

$V(x,t)$ é p.d., pois se $V_0(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad V(x,t) \geq V_0(x), \forall t \geq t_0.$

$$\dot{V}(x,t) = -2e^{-2t}x_1^2 + \begin{bmatrix} 2(1+e^{-2t})x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -e^{-2t}x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}(x,t) \leq -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = -(x_1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 < 0$$

e ainda $V(x,t)$ é radialmente ilimitada. Logo, origem é global, uniforme e assintoticamente estável

Para ir além...

Pinto, Manuel
Perturbations of asymptotically stable differential systems.
Analysis **4(1,2)** (1984), 161–175. (still active)

$h - stability$

Consider the nonlinear non-autonomous differential system described by :

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad t \geq t_0 \geq 0, \tag{1}$$

where $t \in \mathbb{R}_+$ is the time, $x \in \mathbb{R}^n$ is the state and $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ is locally Lipschitz in x, uniformly in t.

Let $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ be denoted by the unique solution of system (1) through $x_0 \in \mathbb{R}^n$, where $t = t_0$.

Definition :

Assume that $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ is positive, continuous and bounded function. The system (1) is said to be :

1. **Uniformly** h**-stable** if there exist constants $c \geq 1$ and $\delta > 0$, independent of t_0, such that for all $t_0 \in \mathbb{R}_+$ and for all $x_0 \in \mathbb{R}^n$ with $\|x_0\| \leq \delta$, the solution $x(t)$ satisfies the estimation :

$$\|x(t)\| \leq c\|x_0\| h(t) h(t_0)^{-1}, \quad \forall\, t \geq t_0. \tag{4}$$

2. **Globally uniformly** h**-stable** if there exists constant $c \geq 1$, such that for all $t_0 \in \mathbb{R}_+$ and all $x_0 \in \mathbb{R}^n$, the solution $x(t)$ satisfies the estimation (4).

Here, $h(t)^{-1} = \dfrac{1}{h(t)}$.

Fonte: KICHA, A. New stability criteria of nonlinear non-autonomous systems

Para ir além...

Pinto, Manuel
Perturbations of asymptotically stable differential systems.
Analysis **4(1,2)** (1984), 161–175.

$h - stability$

Remark :

For some special cases of h, the uniform h-stability coincides with known types of stability :

- If $h(t) = b$, for a positive constant b, then the system (1) is **stable**.
- If $h(t) = e^{-\lambda t}$, for a positive constant λ, then the system (1) is **uniformly exponentially stable**.
- If $h(t) = \dfrac{1}{(1+t)^{\gamma}}$, with γ is a positive constant, then the system (1) is **polynomially stable**.

Theorem 2 :

Suppose that h is a positive, bounded, continuous, decreasing function on $\mathbb{R}_+$ with h' exists and continuous on $\mathbb{R}_+$. Moreover, suppose that there exist constants $a_1,\ a_2 > 0,\ b \geq 1,\ k \geq 0$ and a function $V(t,x)$ satisfying the following properties :

(i) $a_1\|x\|^b \leq V(t,x) \leq a_2\|x\|^b$,

(ii) $\dot{V}(t,x) \leq h'(t)h(t)^{-1}V(t,x) - kh'(t)h(t)^{-1}$,

for all $t \in \mathbb{R}_+$ and all $x \in \mathbb{R}^n$. Then, the system (1) is **globally uniformly bounded.**

Para ir além...

Pinto, Manuel
Perturbations of asymptotically stable differential systems.
Analysis **4(1,2)** (1984), 161–175.

$$h - stability$$

Consider the scalar equation :

$$\dot{x} = -\frac{x}{t + \sin x} + \frac{2}{1+t}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Setting, $V(t,x) = x^2$ and $h(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$, which is positive, bounded, continuous and decreasing on $\mathbb{R}_+$ with h' exists and is continuous on $\mathbb{R}_+$. Then, Theorem 2 holds with $a_1 = a_2 = 1$ and $b = k = 2$. This yields the global uniform boundedness of system (5), that is, the solutions of system (5) approach to a compact set S', when $t \to +\infty$, given by :

$$S' = \left\{x \in \mathbb{R}, \ |x| \leq \sqrt{2}\right\}.$$

Para ir além...

[Pinto, Manuel]
Perturbations of asymptotically stable differential systems.
Analysis **4(1,2)** (1984), 161–175.

$h - stability$

For simulation of system (5) we select the initial state $x(0) = 1$.

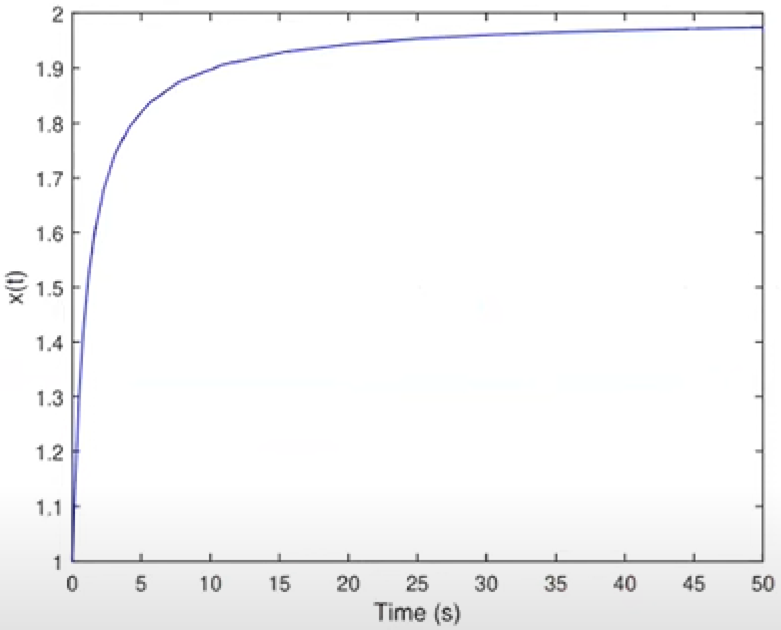


FIGURE : *The trajectory of the state $x(t)$ of system (5).*