

EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira** – UFRN



josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

$$\dot{x} = f(x) \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad \text{Ponto de equilíbrio} \quad x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$$

$$\text{Se } x(0) = x^* \implies x(t) = x^*, t \geq 0, \quad f(x^*) = 0$$

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

Expansão em série de Taylor em torno de x^*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^* &+ \left(\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^* \right) (x_1 - x_1^*) + \\ &+ \left(\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^* \right) (x_2 - x_2^*) + \text{H.O.T} \end{aligned}$$

H.O.T: higher order terms

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^* &+ \left(\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^* \right) (x_1 - x_1^*) + \\ &+ \left(\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^* \right) (x_2 - x_2^*) + \text{H.O.T} \end{aligned}$$

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Mudança no sistema de coordenadas para tratar origem como ponto de equilíbrio

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= x_1 - x_1^* \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_2^* \\ \Delta \dot{x}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_1^* = \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_2^* = \dot{x}_2\end{aligned}\quad \begin{aligned}\left(\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*\right) &= a_{11} & \left(\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*\right) &= a_{12} \\ \left(\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*\right) &= a_{21} & \left(\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*\right) &= a_{22}\end{aligned}$$

Para pontos próximos do ponto de equilíbrio podemos desprezar os termos de ordem superior. Então obtemos a seguinte equação linearizada em torno de x^*

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= a_{11} \Delta x_1 + a_{12} \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= a_{21} \Delta x_1 + a_{22} \Delta x_2 \\ \dot{x}_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2\end{aligned}$$

Apenas por simplicidade representamos o sistema linearizado de modo que cada x_i representa uma variação Delta em torno de x_i^* , ou seja, um $x_i=0$ implica que se está no ponto de equilíbrio, independente de onde esteja (origem ou não)

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Mudança no sistema de coordenadas para tratar origem como ponto de equilíbrio

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \implies \dot{x} = Ax$$

$A \rightarrow$ matriz Jacobiana de $f(x)$ em x^* . Solução de $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0 = [x_1(0) \quad x_2(0)]^T$

$$x(t) = e^{At}x_0, \forall t \geq 0, \quad e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left[(sI - A)^{-1} \right]$$

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} v_1 + c_2 e^{s_2 t} v_2$$

$s_1, s_2 \rightarrow$ autovalores de A

$v_1, v_2 \rightarrow$ autovetores associados a s_1, s_2 respectivamente, de A

$$\text{Para } v_i \neq 0 \implies \det(s_i I - A) = 0 \implies s_i^2 - \sigma s_i + \Delta = 0$$

$$\sigma = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$$

$$\Delta = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

$$\sigma = \text{tr}(A)$$
$$\Delta = \det(A)$$
$$s_i = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}, \quad i = 1, 2$$

Caso 1: $\sigma^2 - 4\Delta > 0 \rightarrow$ 2 autovalores reais e distintos

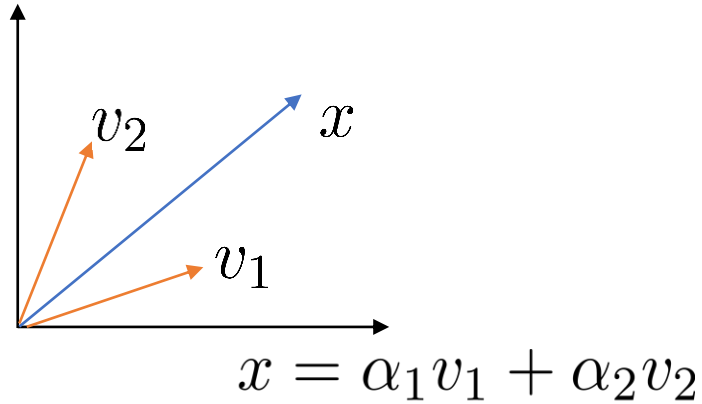
Caso 2: $\sigma^2 - 4\Delta = 0 \rightarrow$ 2 autovalores reais e iguais

Caso 3: $\sigma^2 - 4\Delta < 0 \rightarrow$ 2 autovalores complexos conjugados

Vamos fazer uma análise gráfica, com base nos autovalores e autovetores

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Base de autovetores



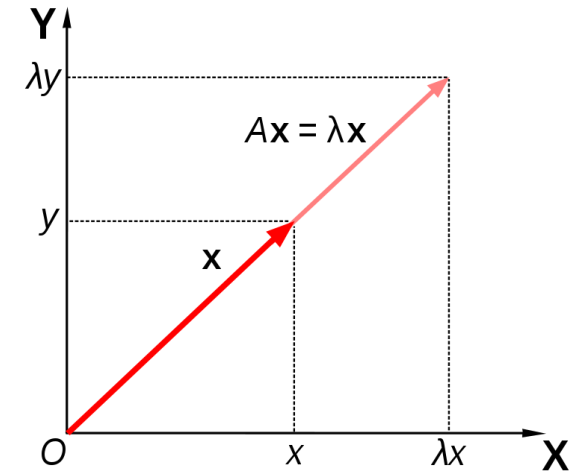
$$y = Ax = A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \implies \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2$$

$$Av_1 = s_1 v_1 \quad A[v_1 \quad v_2] = [v_1 \quad v_2] \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

$$Av_2 = s_2 v_2$$

$$AQ = Q\hat{A}, \quad Q \rightarrow \text{Matriz com autovetores e } \hat{A} \rightarrow \text{Forma canônica de Jordan}$$

$$\det(AQ) = \det(Q\hat{A}) \implies \det(A)\det(Q) = \det(Q)\det(\hat{A}) \implies \det(A) = \det(\hat{A}) \implies \det(\hat{A}) = s_1 s_2$$



Autovalor – escalar que resulta da aplicação da transformação A a um vetor (estica ou encolhe vetor)

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Cálculo dos autovetores

$$Av_1 = s_1 v_1 \implies (A - s_1 I)v_1 = 0 \implies \begin{bmatrix} a_{11} - s_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como o determinante é igual a zero, as linhas são Linearmente Dependentes, pode-se usar qualquer linha:

$$(a_{11} - s_1)v_{11} + a_{12}v_{12} = 0$$

A equação acima tem infinitas soluções, mas arbitrando 1, acha-se o outro:

$$v_{11} = 1 \implies v_{12} = \left(\frac{a_{12}}{s_1 - a_{11}} \right)^{-1} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{a_{12}}{s_1 - a_{11}} \right)^{-1} \end{bmatrix}$$
$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{a_{12}}{s_2 - a_{11}} \right)^{-1} \end{bmatrix}$$

Válido para autovalores distintos

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

CASO 1 $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0$

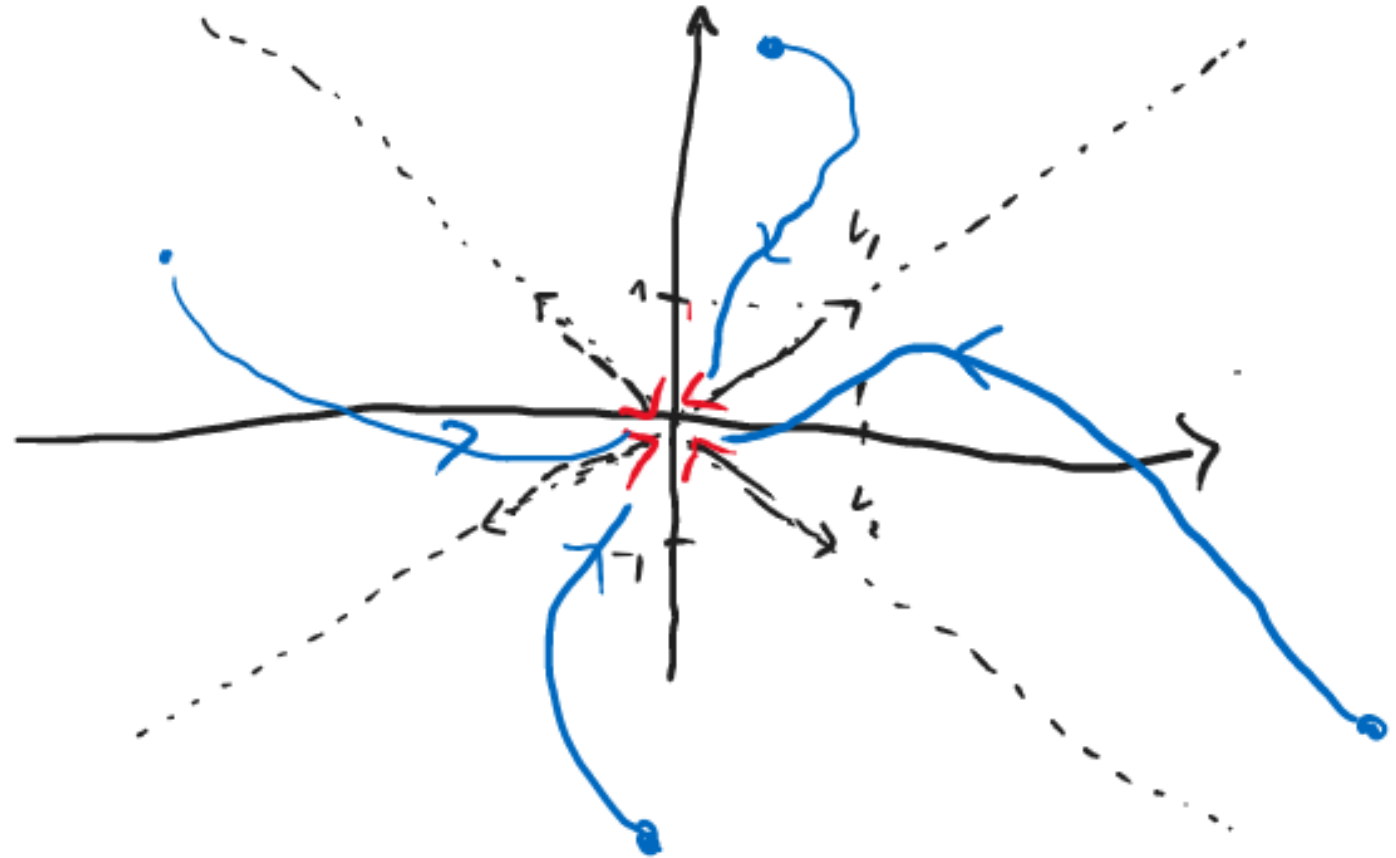
1) s_1, s_2 reais, distintos e negativos

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow s_1 = -1, s_2 = -3$$

$$\sigma(A) = -4, \quad \sigma < 0$$

$$\Delta(A) = 3, \quad \Delta > 0$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

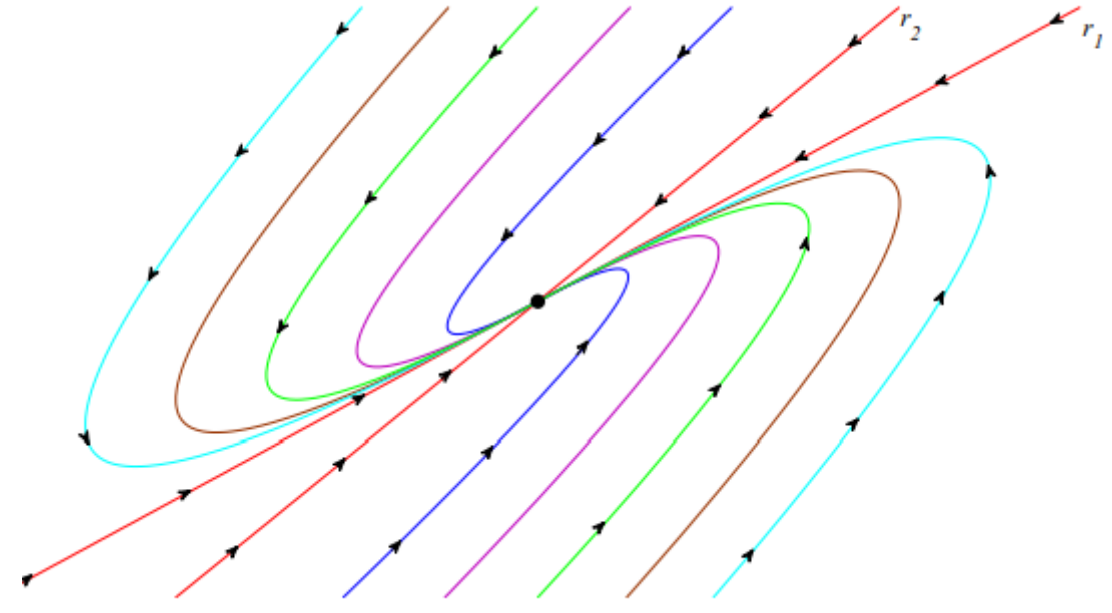
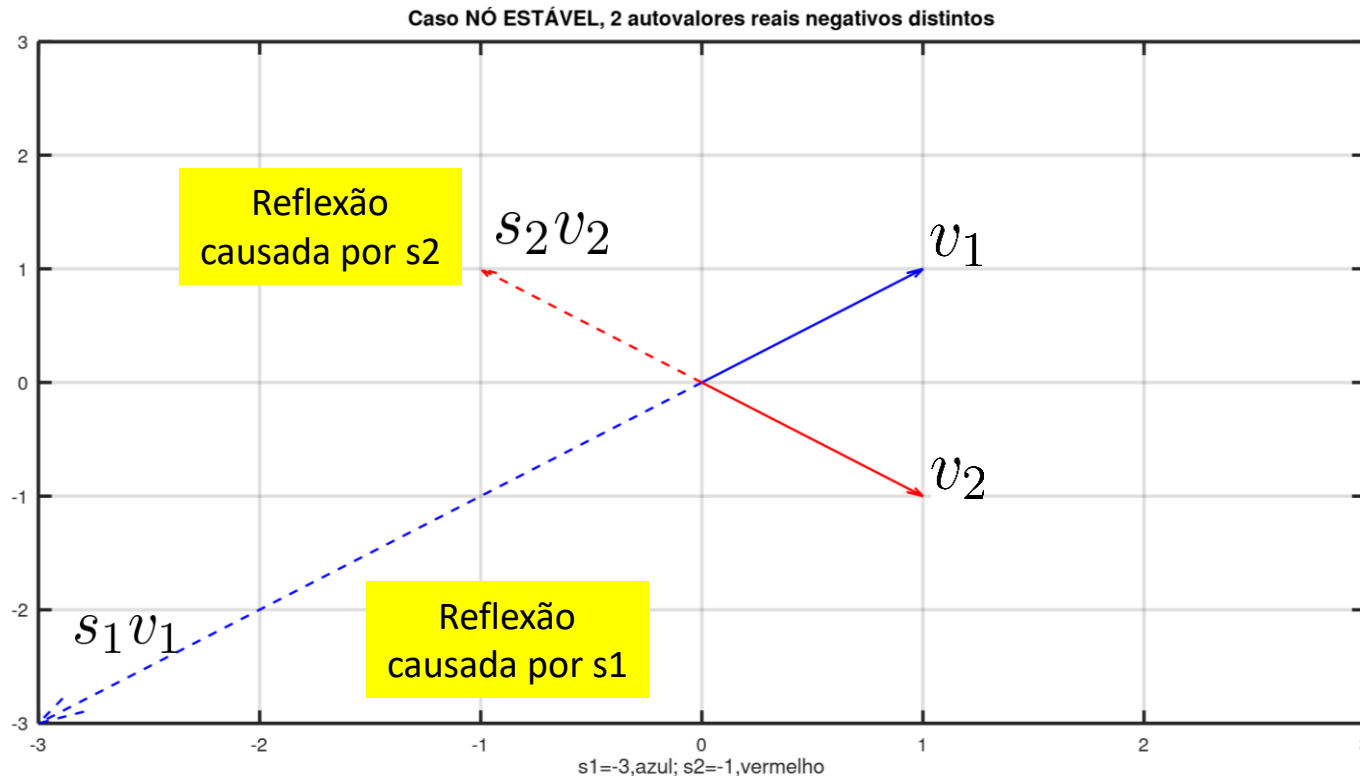


Nó (atrator) ESTÁVEL (assintoticamente)

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

CASO 1 $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0$

1) s_1, s_2 reais, distintos e negativos



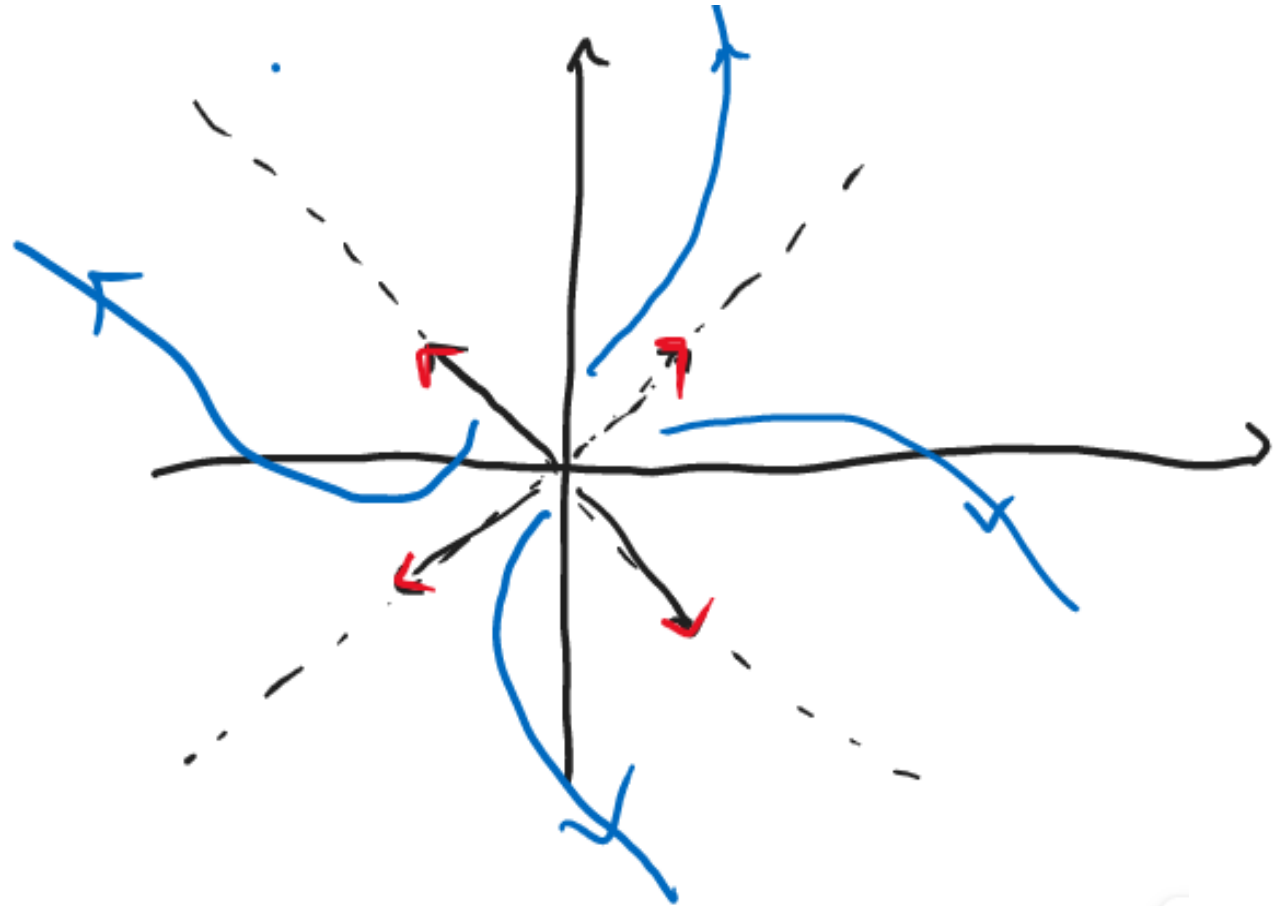
(atrator, sink) ESTÁVEL (assintoticamente)

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

2) s_1, s_2 reais, distintos e positivos

$$s_1 = 1, s_2 = 3$$

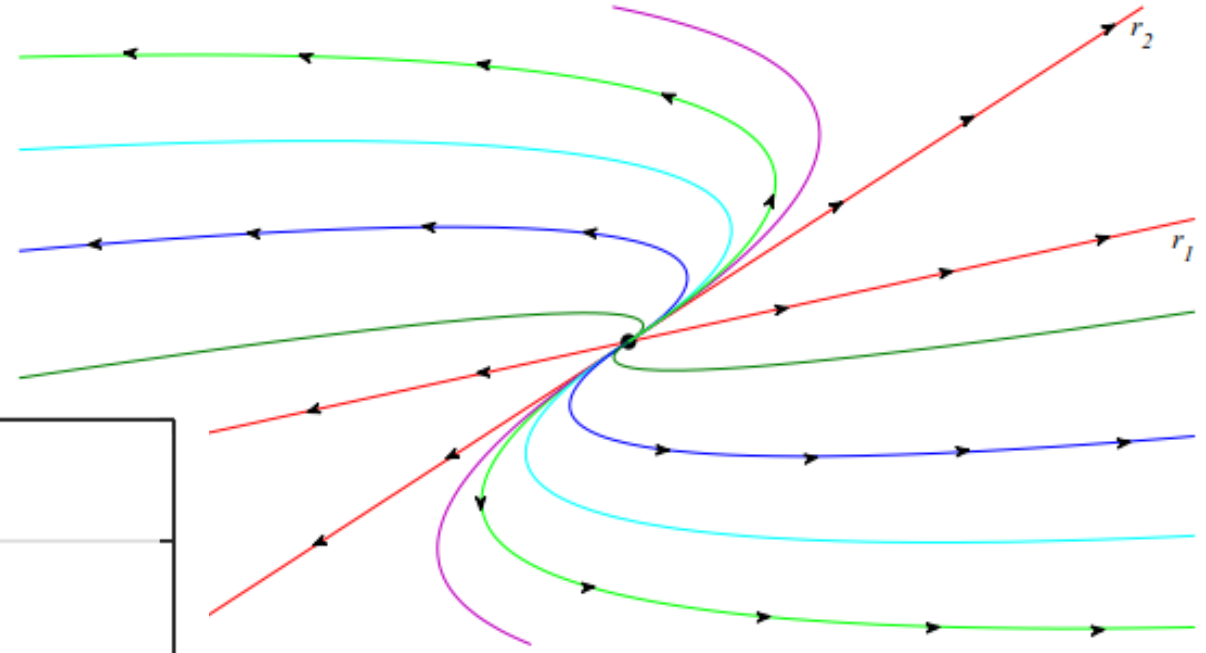
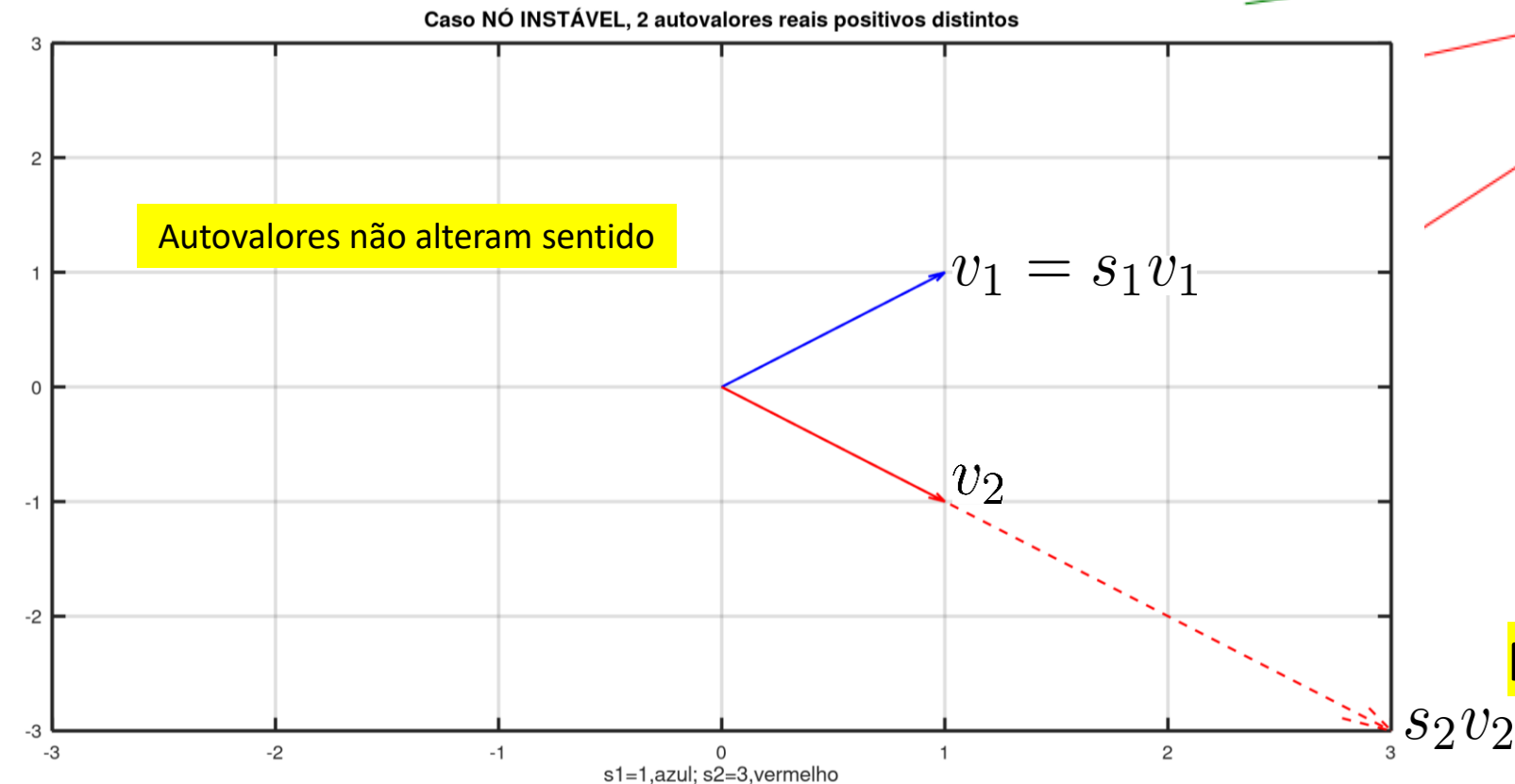
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Nó INSTÁVEL (repulsor, source)

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

2) s_1, s_2 reais, distintos e positivos



Nó INSTÁVEL (repulsor)

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

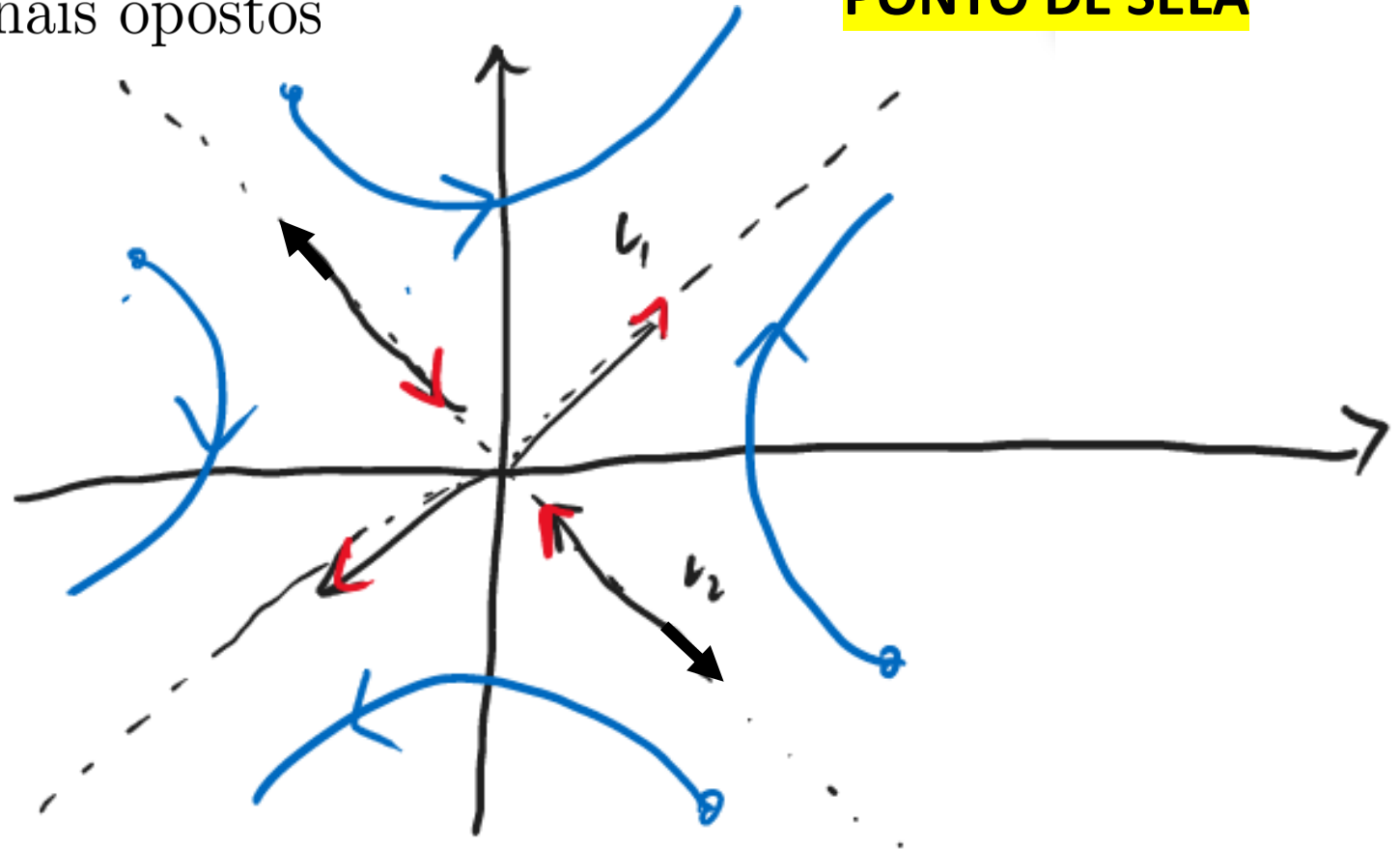
3) s_1, s_2 reais, distintos e com sinais opostos

$$s_1 = 1, s_2 = -3$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$


Transformação

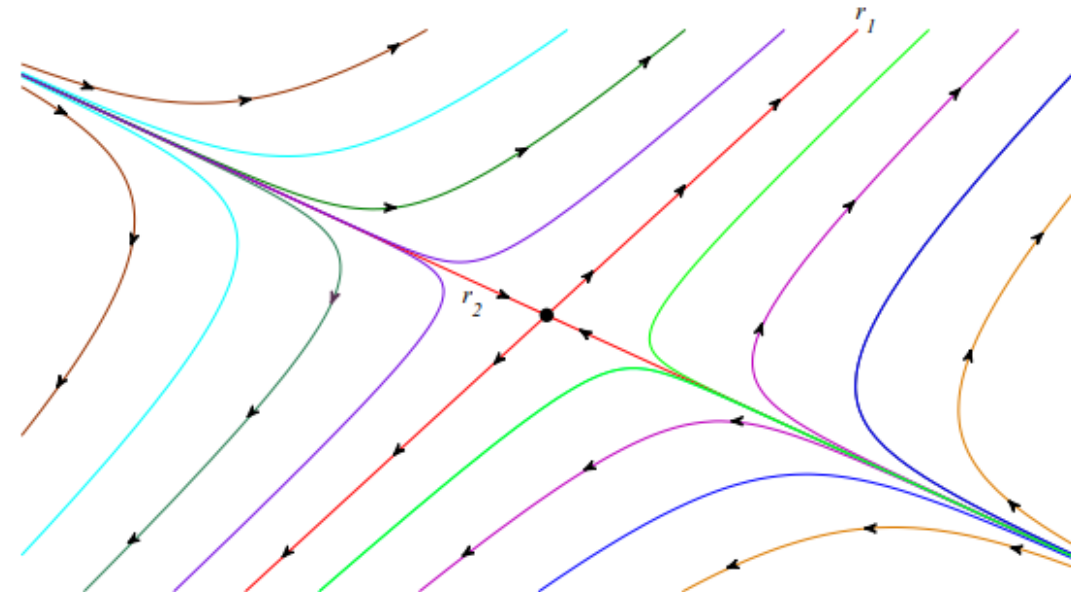
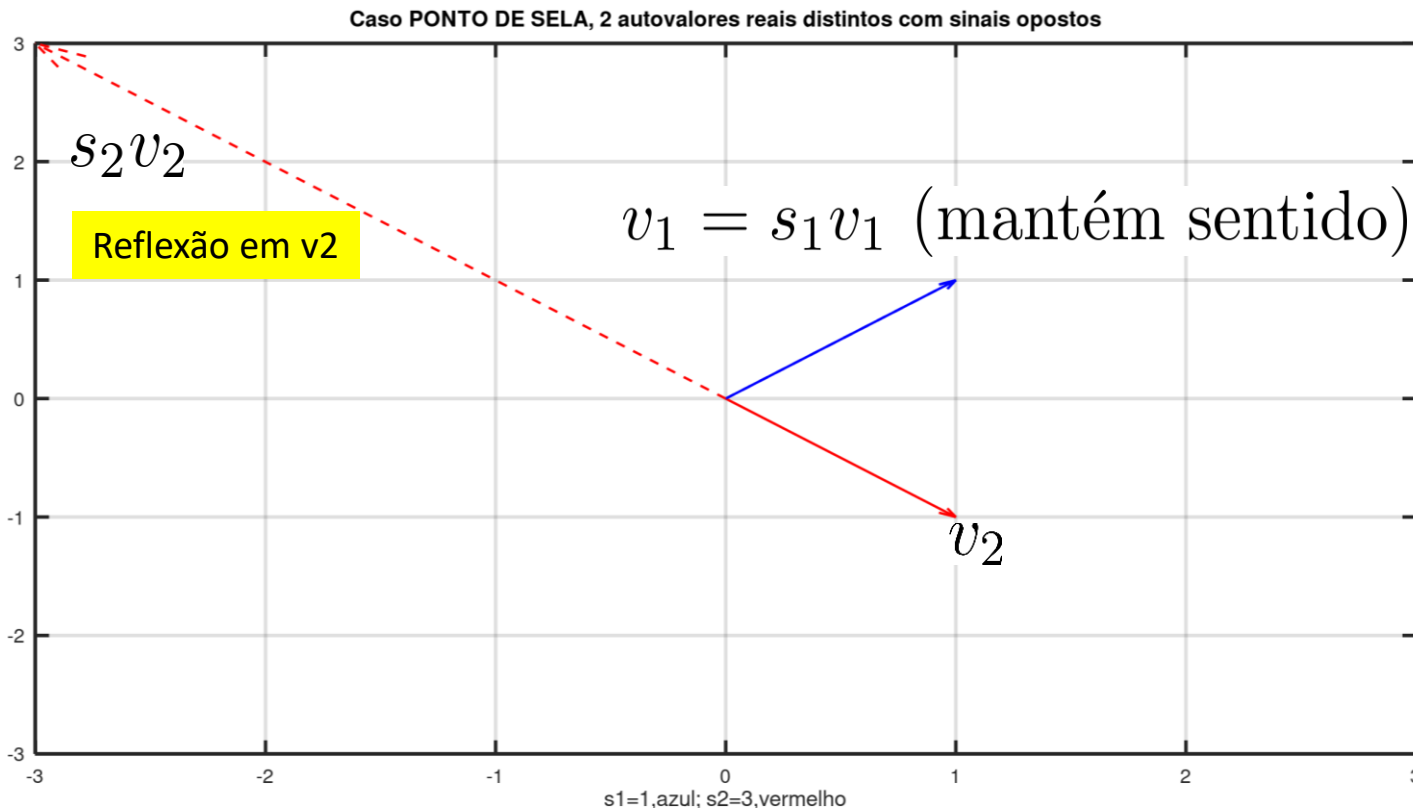
PONTO DE SELA



Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

3) s_1, s_2 reais, distintos e com sinais opostos

PONTO DE SELA



Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

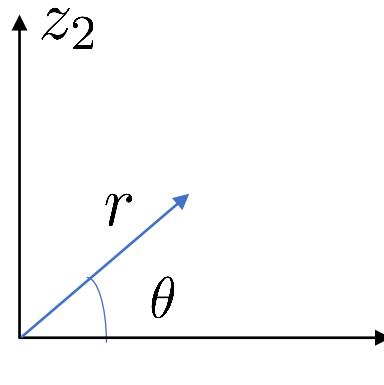
4) s_1, s_2 complexos conjugados

$$s_1 = \alpha + j\beta, s_2 = \alpha - j\beta$$

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-j}{2} \\ \frac{j}{2} \end{bmatrix}$$

Novo sistema transformado:

$$\dot{z} = \bar{\hat{A}}z, \quad z = [z_1 \quad z_2]^T$$



Prof. Josenalde Oliveira

$AQ = Q\hat{A}$ ver página 6 destes slides

$$A[v_1 \quad v_2] = [v_1 \quad v_2] \begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix}$$

$$\text{Nova base } \bar{Q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2]$$

$$\hat{A}\bar{Q} = \bar{Q}\bar{\hat{A}} \implies \bar{\hat{A}} = \bar{Q}^{-1}\hat{A}\bar{Q} \implies \bar{\hat{A}} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Forma canônica real

$$r(t) = e^{\alpha t} r(0)$$

$$\theta(t) = -\beta t + \theta(0)$$

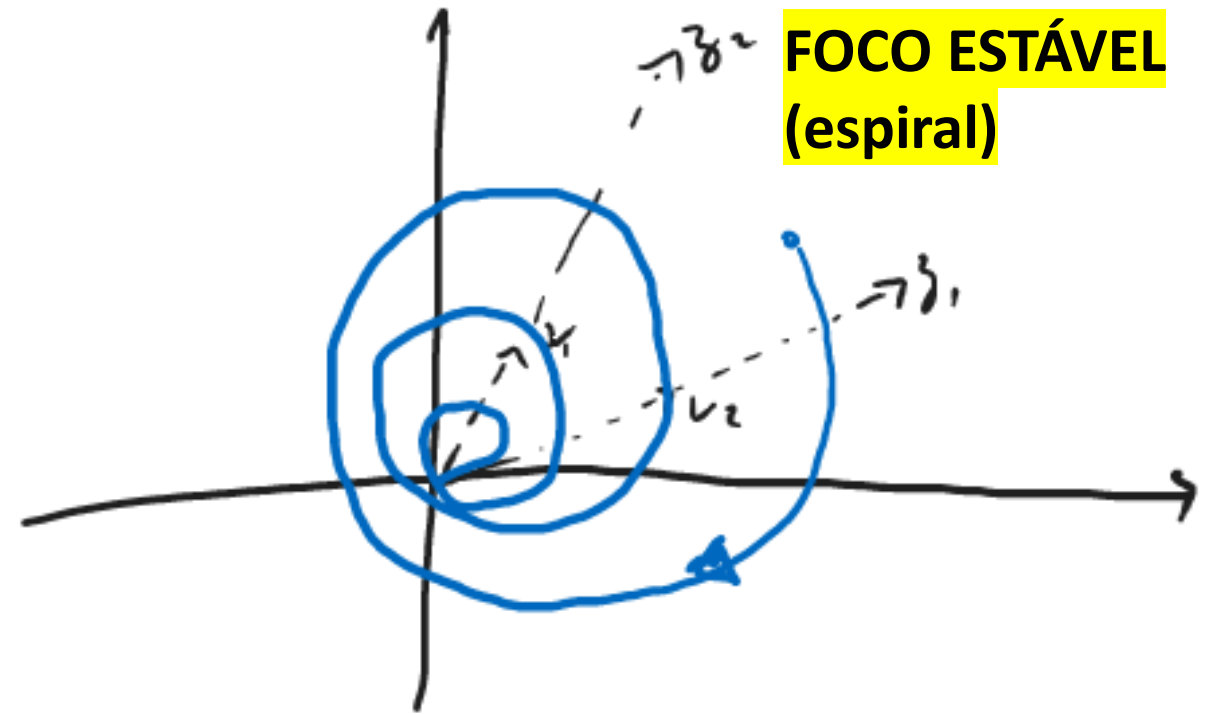
desenvolver $\dot{r}, \dot{\theta}$

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

4) s_1, s_2 complexos conjugados

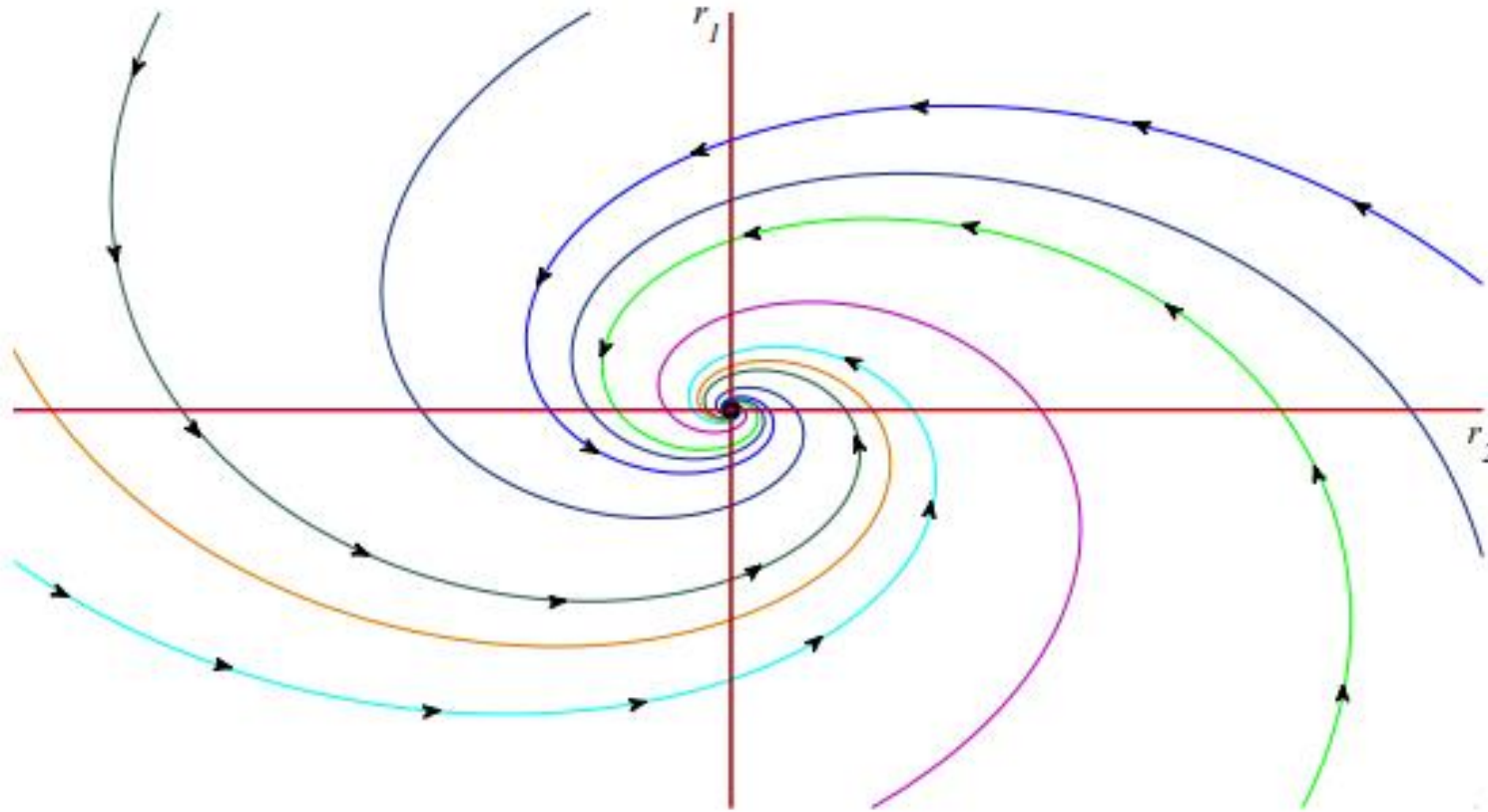
$$s_1 = \alpha + j\beta, s_2 = \alpha - j\beta$$

4.a) $\alpha < 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$



Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

FOCO ESTÁVEL

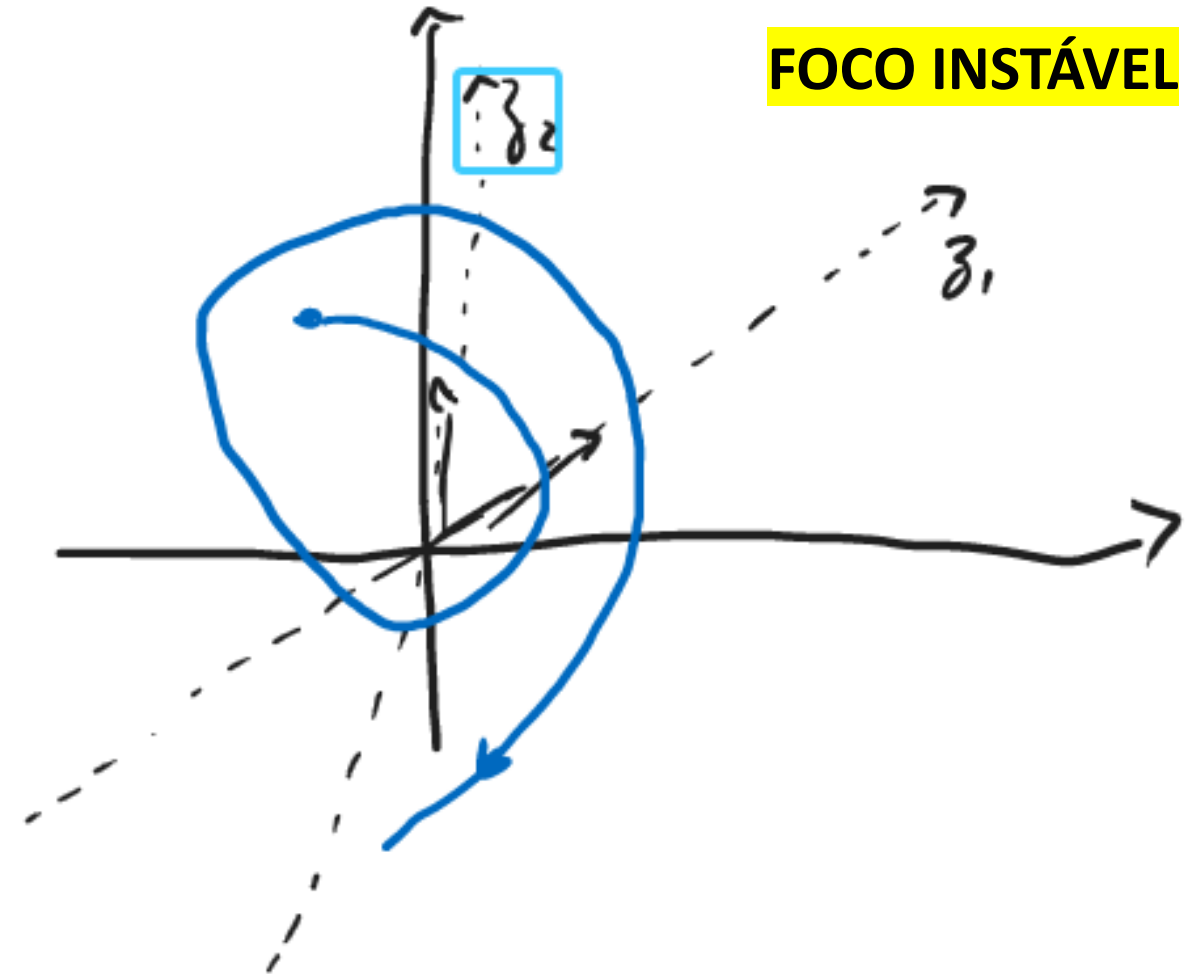


Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

4) s_1, s_2 complexos conjugados

$$s_1 = \alpha + j\beta, s_2 = \alpha - j\beta$$

4.b) $\alpha > 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) \rightarrow \infty$



Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

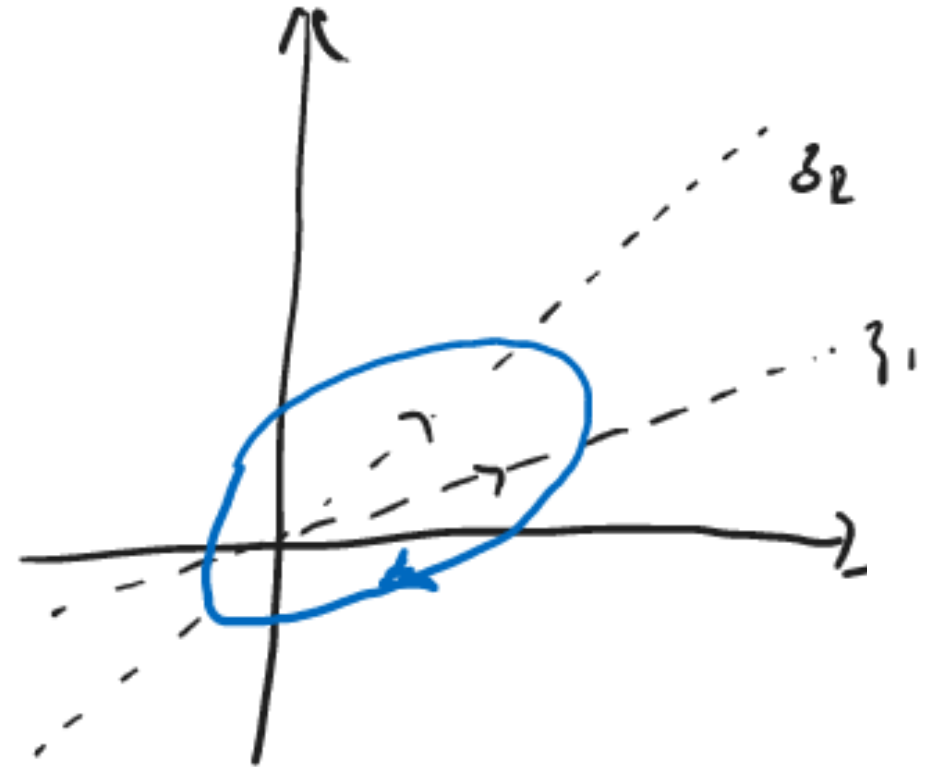
4) s_1, s_2 complexos conjugados

$$s_1 = \alpha + j\beta, s_2 = \alpha - j\beta$$

4.c) $\alpha = 0 \implies r(t) = r_0$

CENTRO

**Caso crítico de Lyapunov
(não hiperbólico)**

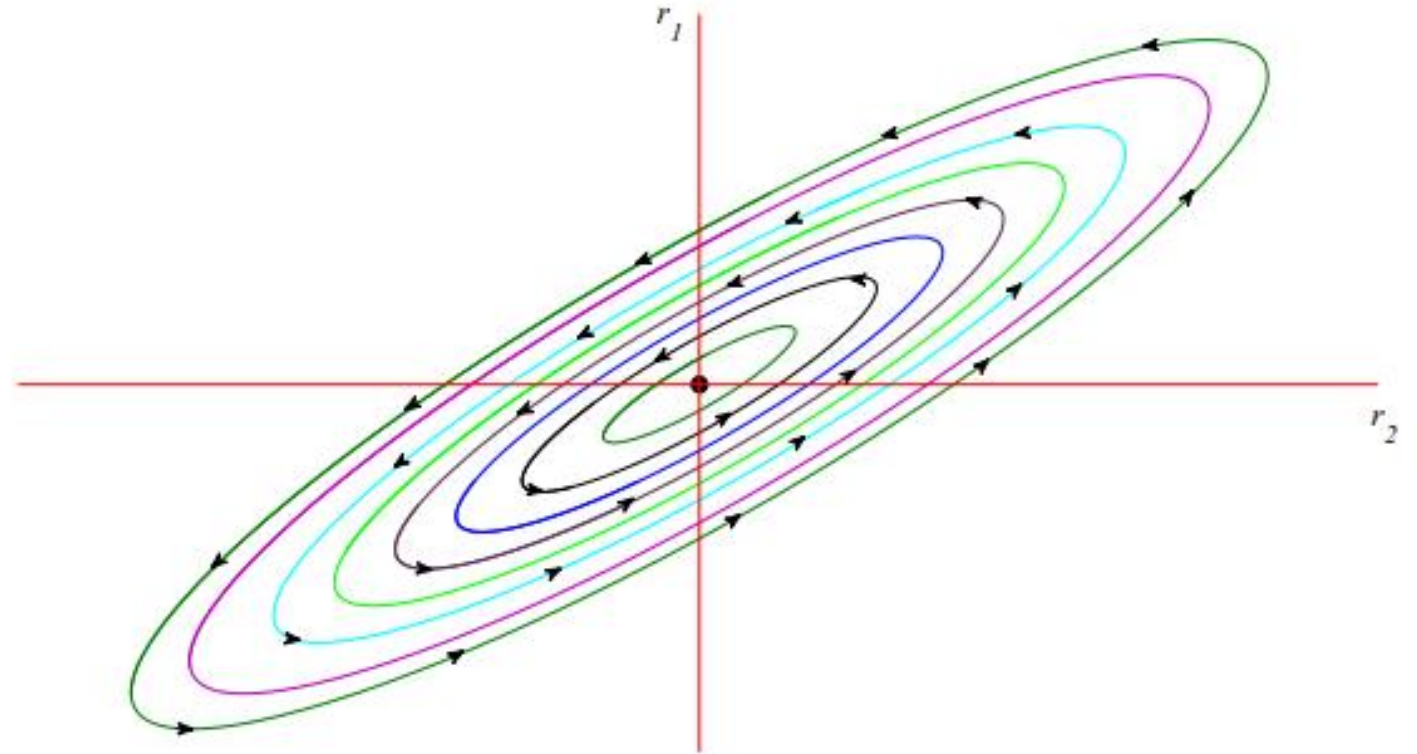


Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

4) s_1, s_2 complexos conjugados

$$s_1 = \alpha + j\beta, s_2 = \alpha - j\beta$$

4.c) $\alpha = 0 \implies r(t) = r_0$



Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

5) $s_1 = s_2$ reais e iguais, multiplicidade algébrica maior que 1

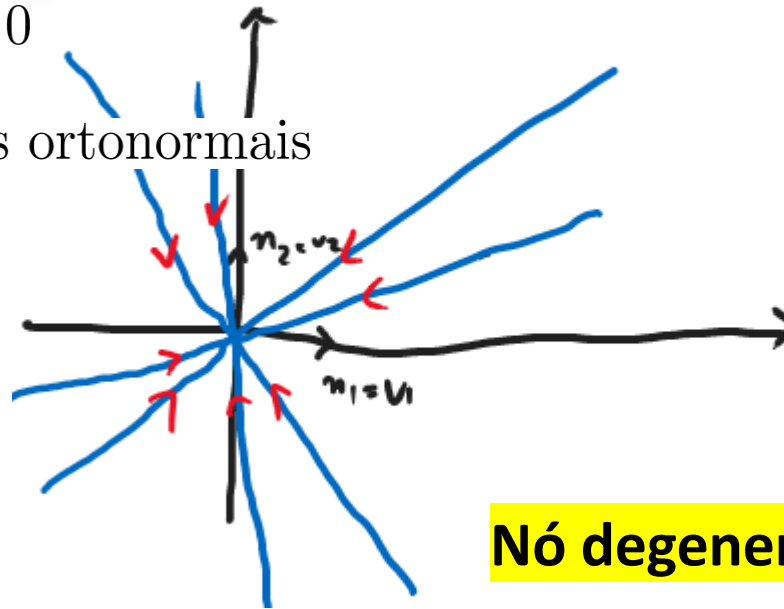
$$s^2 - \sigma s + \Delta = 0 \implies s = \sigma/2$$

2 soluções LI para v em $(A - sI)v = 0$

Pode ser qualquer vetor, escolhe-se os ortonormais

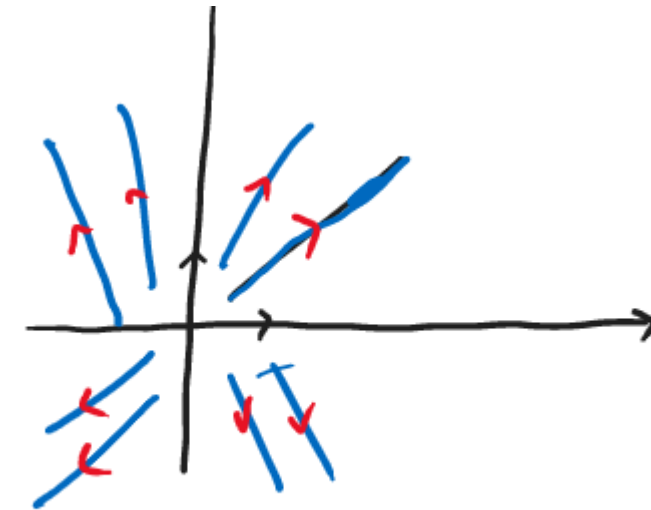
$$A[v_1 \quad v_2] = [v_1 \quad v_2] \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Nó degenerado (estrela) ESTÁVEL



$s < 0$

Nó degenerado (estrela) INSTÁVEL



$s > 0$

Varia igualmente nos dois eixos. Inclinações dependem das condições iniciais

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

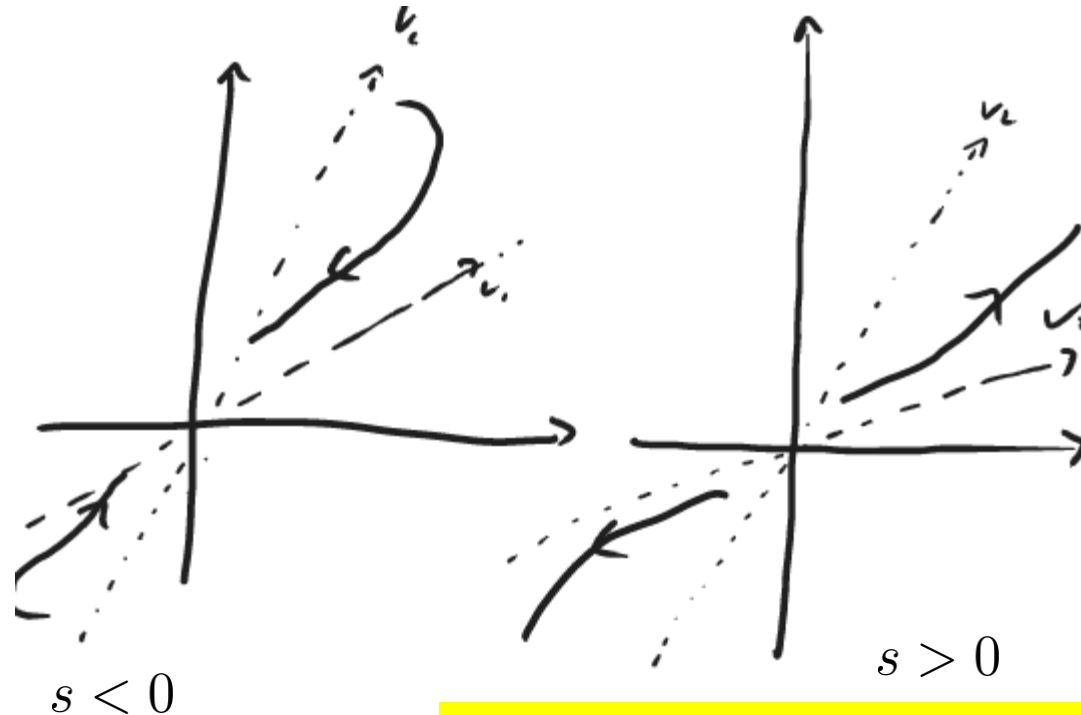
5) $s_1 = s_2$ reais e iguais, multiplicidade algébrica maior que 1

$$s^2 - \sigma s + \Delta = 0 \implies s = \sigma/2$$

Nó degenerado (impróprio) ESTÁVEL

1 solução LI para v em $(A - sI)v = 0$

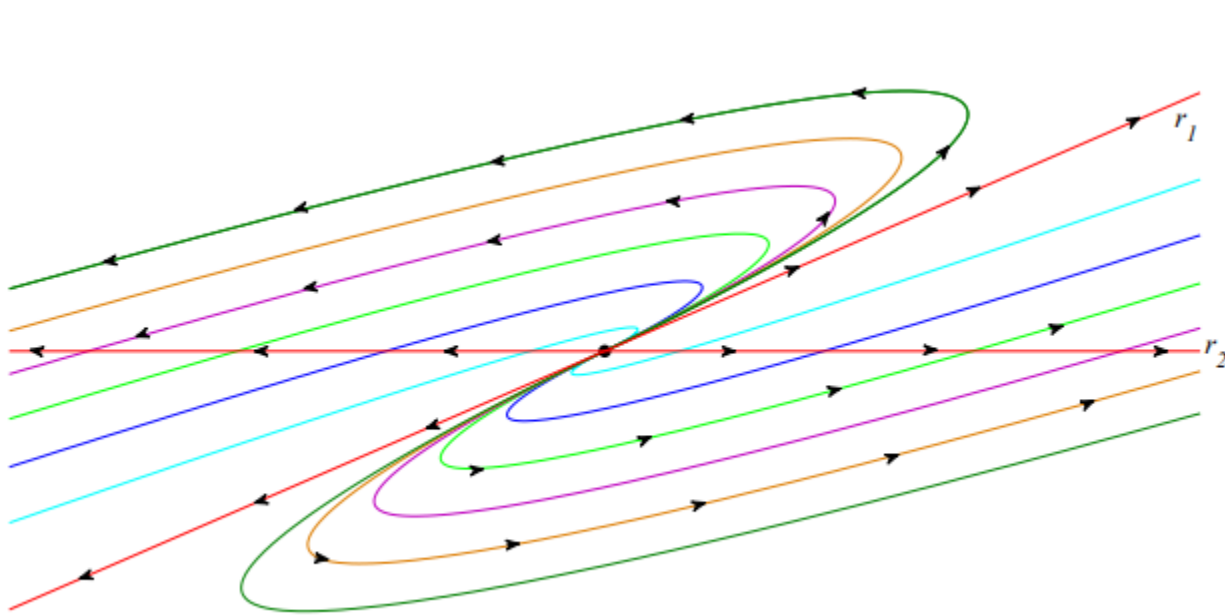
$$A[v_1 \quad v_2] = [v_1 \quad v_2] \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$



Nó degenerado (impróprio) INSTÁVEL

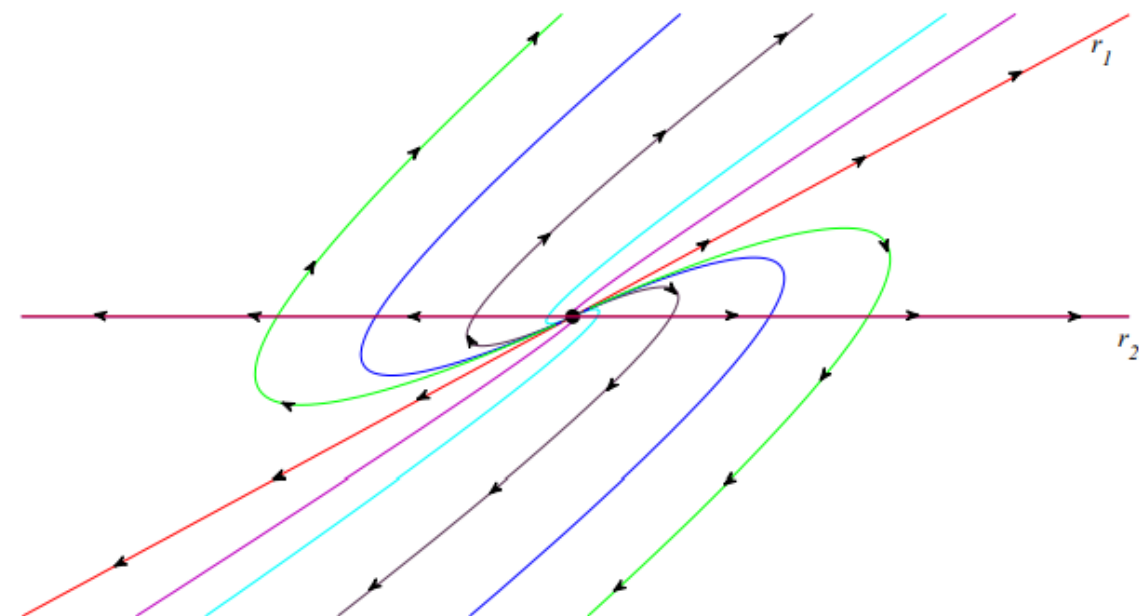
Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

5) $s_1 = s_2$ reais e iguais, multiplicidade algébrica maior que 1



Nó degenerado (impróprio) INSTÁVEL

$s > 0$



Nó degenerado (impróprio) INSTÁVEL

$s > 0$

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

6) $s_1 = 0$ e/ou $s_2 = 0$ infinitos pontos de equilíbrio (sobre a reta do autovetor)

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

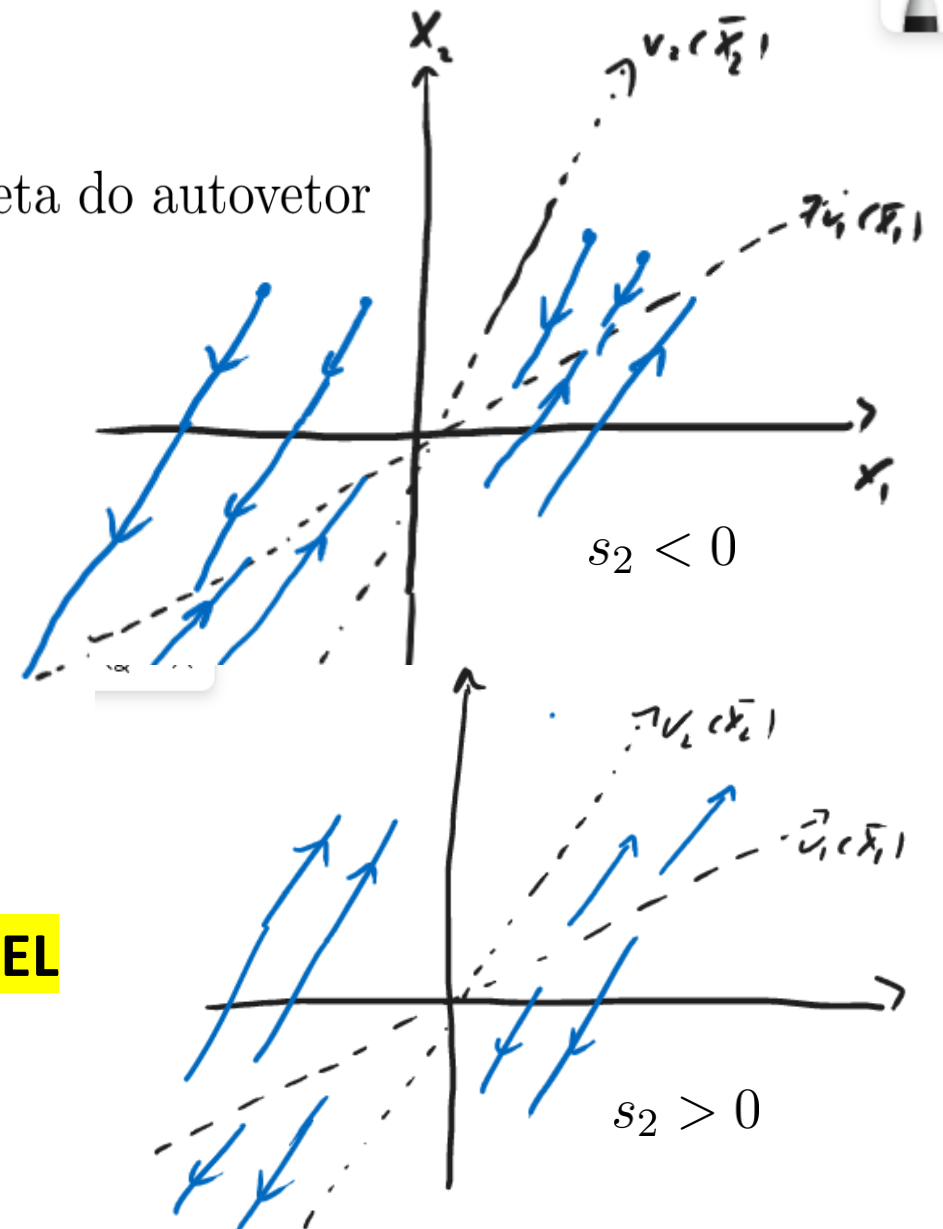
Nó degenerado ESTÁVEL
Caso crítico de Lyapunov
(não hiperbólico)

$\dot{\bar{x}} = \hat{A}\bar{x}$ Estados em relação aos autovetores

$$\dot{\bar{x}}_1 = 0 \implies \bar{x}_1(t) = \bar{x}_1(0)$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = s_2 \bar{x}_2 \implies \bar{x}_2(t) = e^{s_2 t} \bar{x}_2(0)$$

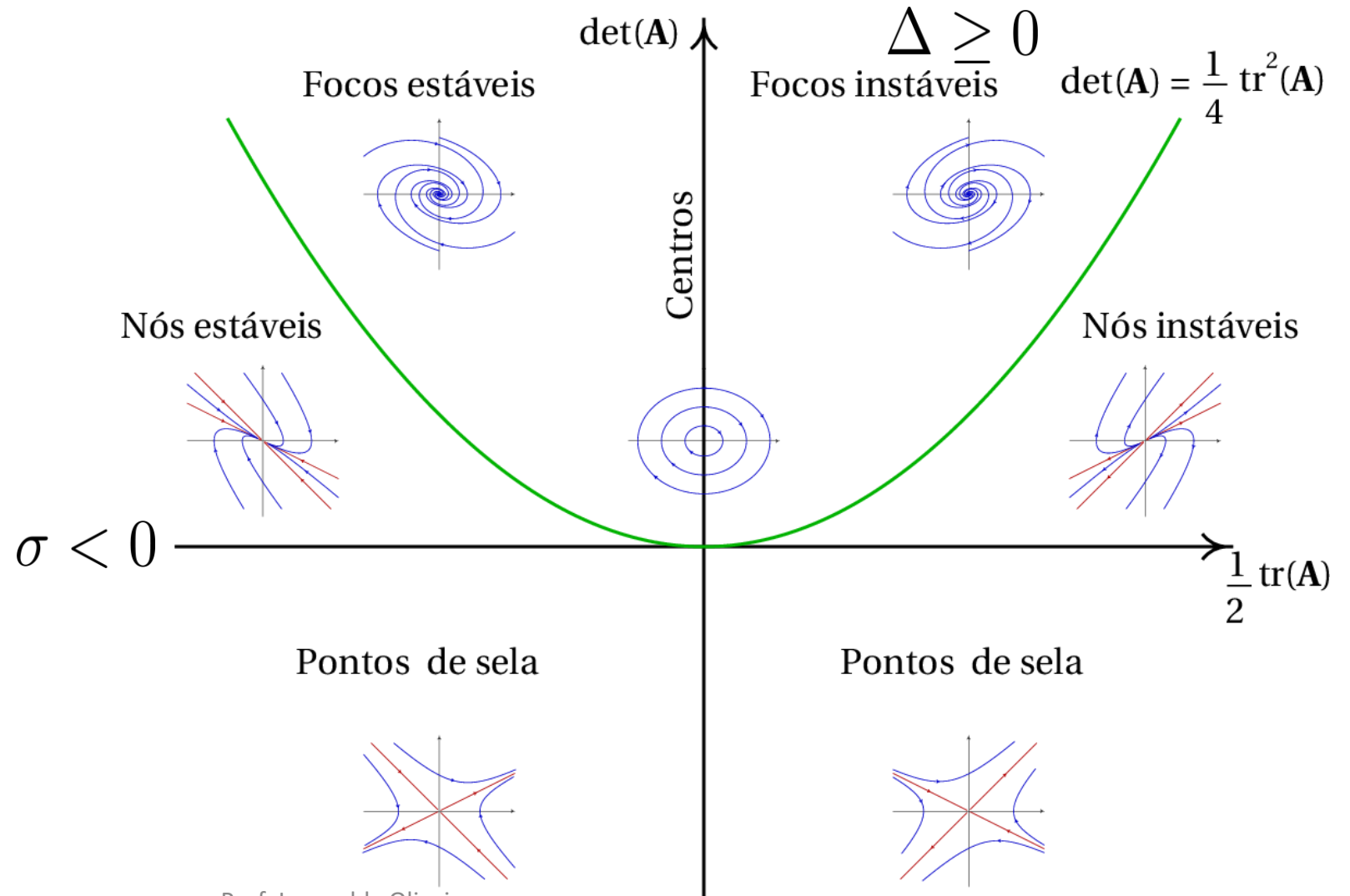
Nó degenerado INSTÁVEL



Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Plano traço-determinante

Região de estabilidade
 $\sigma < 0, \Delta \geq 0$



Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Em resumo algumas definições:

Se todos os autovalores tiverem parte real não nula, então dizemos que o ponto fixo x_e é um ponto fixo hiperbólico, caso contrário, dizemos que x_e é um ponto fixo não hiperbólico. Em linhas gerais, pode-se dizer que a solução do sistema linearizado nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, localmente corresponde à solução do sistema não linear (equivalência topológica), desde que o ponto de equilíbrio seja hiperbólico (**Teorema de Hartman-Grobman, 1959/60**)

1. Se todos os autovalores de A tem parte real negativa, diz-se que x_0 é assintoticamente estável, pois $x \rightarrow x_e$ quando $t \rightarrow \infty$, e então o ponto fixo é chamado de sumidouro (sink).

Há dois tipos de sumidouro: se todos os autovalores tiverem parte imaginária nula um **nó estável**, caso contrário, tem-se um o **foco estável**.

2. Se todos os autovalores de A têm parte real positiva, então x se afasta de x_e quando $t \rightarrow \infty$, então x_e é um ponto fixo instável e é chamado de fonte (source).

Da mesma maneira que no caso do sumidouro, tem-se dois tipos de fontes: o **foco instável**, se algum autovalor tiver parte imaginária não nula; e o **nó instável**, no caso contrário.

3. Se alguns dos autovalores, mas não todos, têm parte real positiva, enquanto o resto tem parte real negativa, x_e é chamado de **ponto de sela**. Como a sela tem alguns autovalores positivos, é também é instável.

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Em resumo algumas definições:

Para os pontos de equilíbrio não hiperbólicos: Se um ou mais autovalores de A tiver parte real negativa enquanto os outros tiverem **parte real nula (nó tipo 6, por exemplo)**, então x_e é um ponto fixo marginalmente estável (degenerado). Se todos os autovalores de A são puramente imaginários, o ponto fixo é então chamado de **centro**.

Para estes pontos, nada se pode concluir em relação ao comportamento próximo a estes pontos de equilíbrio do sistema não linear

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Resumo da classificação dos pontos fixos em 2 dimensões (estabilidade linear).

Autovalores	Sinal da parte real	Representação no plano complexo	Ponto fixo	Exemplo	Estabilidade
$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$		nó (hiperbólico)		assintoticamente estável
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$		nó (hiperbólico)		instável
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$		sela (hiperbólico)		instável
$\lambda_1 = \lambda_2^*$ (complexos conjugados)	positiva		foco (hiperbólico)		instável
	negativa		foco (hiperbólico)		assintoticamente estável
	nula		centro (elíptico) CASO DEGENERADO		estável (não assintoticamente)
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$	nula	CASOS DEGENERADOS (elípticos)			
$\lambda_1 = \lambda_2, \neq 0 \in \mathbb{R}$	positiva		"inflected node" (hiperbólico)		instável
	negativa		"inflected node" (hiperbólico)		assintoticamente estável

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

$$\sigma = 0, \Delta > 0 \quad s_{1,2} = \pm j\sqrt{\Delta}, \quad \sigma^2 - 4\Delta < 0: \quad \text{CENTRO}$$

$$\sigma > 0, \Delta > 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta < 0: \quad \text{FOCO INSTÁVEL}$$

$$\sigma > 0, \Delta > 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta > 0: \quad \text{NÓ INSTÁVEL}$$

$$\sigma < 0, \Delta > 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta < 0: \quad \text{FOCO ESTÁVEL}$$

$$\sigma < 0, \Delta > 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta > 0: \quad \text{NÓ ESTÁVEL}$$

$$(\sigma > 0, \sigma = 0, \sigma < 0) \Delta < 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta > 0: \quad \text{PONTO DE SELA}$$

$$\sigma > 0, \Delta > 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta = 0: \quad \text{NÓ DEGENERADO INSTÁVEL}$$

$$\sigma > 0, \Delta = 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta > 0, s_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sigma}{2}, s_1 = 0, s_2 = \sigma: \quad \text{NÓ DEGENERADO INSTÁVEL}$$

$$\sigma < 0, \Delta > 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta = 0: \quad \text{NÓ DEGENERADO ESTÁVEL}$$

$$\sigma < 0, \Delta = 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta > 0: \quad \text{NÓ DEGENERADO ESTÁVEL}$$

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Exemplo 1:

$$\dot{x}_1 = -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) \text{ , } x^* = [0 \quad 0]^T$$

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Exemplo 2: massa (M), mola (K), amortecedor viscoso (B), com deslocamento vertical x

