EGM0004

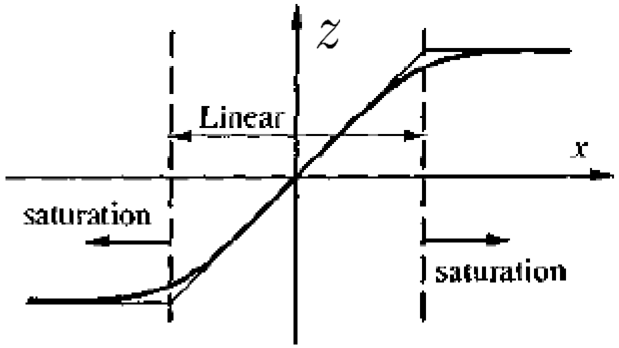
Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

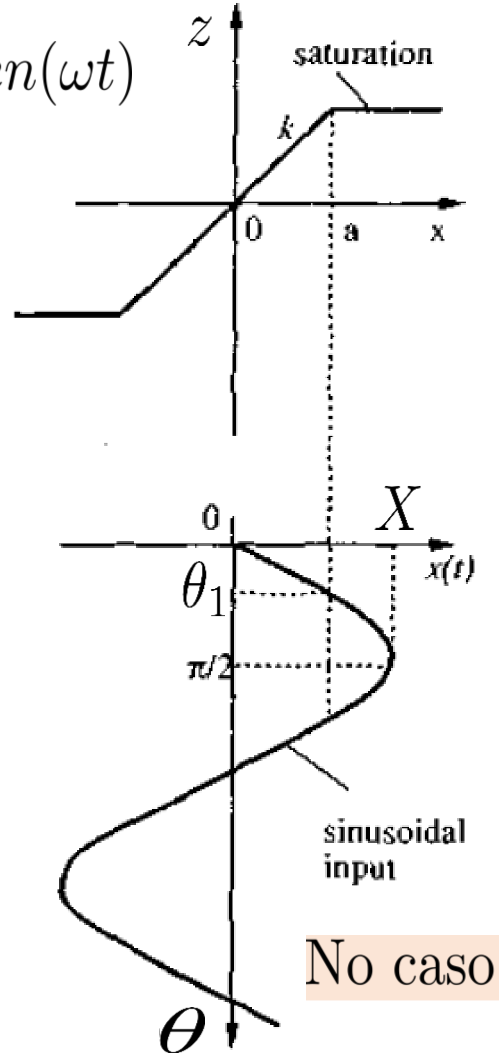
josenalde.oliveira@ufrn.br

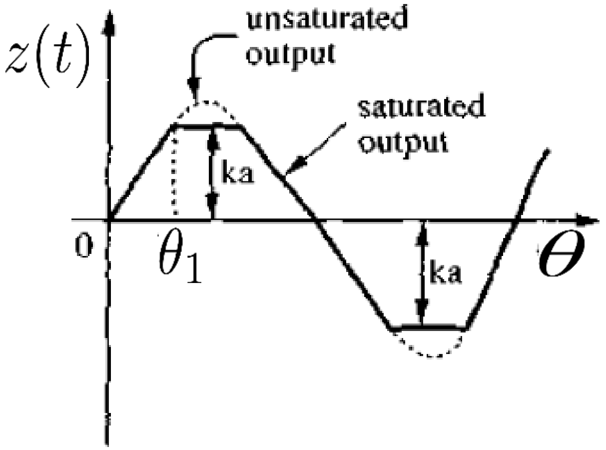
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Exemplo obtenção função descritiva: saturação



$$x(t) = X sen(\omega t)$$
$$\theta = \omega t$$





$$0 \leq \theta \leq \theta_1, \quad X < a, \quad kX sen\theta$$
$$\theta_1 < \theta < \pi/2, \quad X \geq a, \quad ka$$

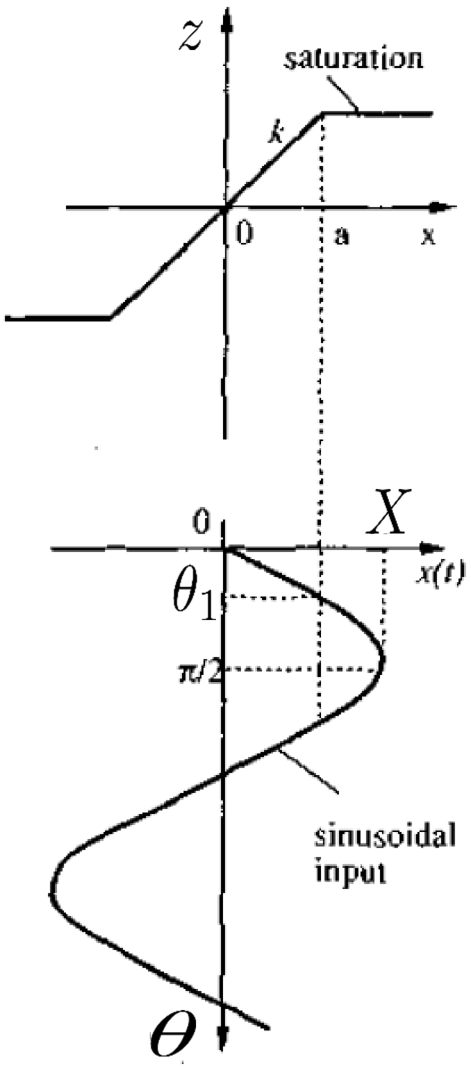
$$\theta_1 \text{ onde } X sen\theta_1 = a \implies \theta_1 = sen^{-1}\left(\frac{a}{X}\right)$$

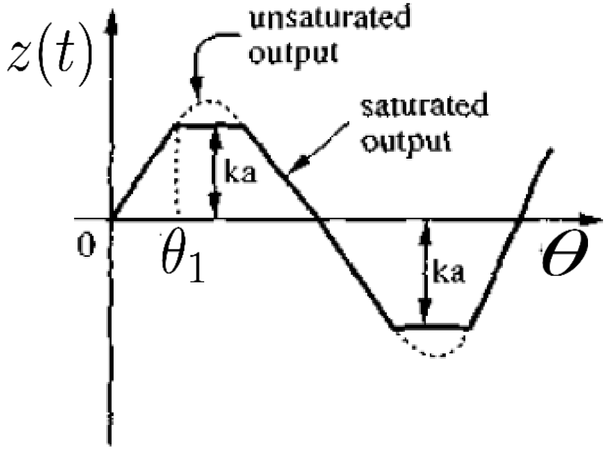
$$N(X) = \frac{b_1 + ja_1}{X}, \text{ mas } z(x) \text{ímpar, logo}$$

$$N(X) = \frac{b_1}{X}$$

No caso $X < a, \quad b_1 = kX \implies N(X) = k$

Exemplo obtenção função descritiva: saturação





$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} z(\theta) sen\theta d\theta$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\int_0^{\theta_1} X sen\theta sen\theta d\theta + \int_{\theta_1}^{\pi/2} a sen\theta d\theta\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(X\int_0^{\theta_1}\frac{1}{2}(1-cos2\theta)d\theta + a\left[-cos\theta\right]_{\theta_1}^{\pi/2}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{X}{2}\left[\theta - \frac{sen2\theta}{2}\right]_0^{\theta_1} + acos\theta_1\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{X}{2}\left[\theta_1 - \frac{1}{2}sen2\theta_1\right]^* + acos\theta_1^{**}\right)$$

Identidades trigonométricas utilizadas

$$sen^2\theta = \frac{(1 - cos2\theta)}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{X}{2}\left[\theta_1 - \frac{1}{2}sen2\theta_1\right]^* + acos\theta_1^{**}\right)$$

$$*sen(2sen^{-1}x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

$$sen\left(2sen^{-1}\frac{a}{X}\right) = 2\left(\frac{a}{X}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{a}{X}\right)^2}$$

$$**cos(sen^{-1}x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\theta_1 \text{ onde } X sen\theta_1 = a \implies \theta_1 = sen^{-1}\left(\frac{a}{X}\right), \quad x = \frac{a}{X}$$

$$acos\theta_1 = acos\left(sen^{-1}\left(\frac{a}{X}\right)\right) = a\sqrt{1 - \left(\frac{a}{X}\right)^2}$$

Continuando...

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{X}{2}\left[\theta_1 - \frac{1}{2}sen2\theta_1\right]^* + acos\theta_1^{**}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{X}{2}\left(sen^{-1}\frac{a}{X} - \frac{a}{X}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X}\right)^2}\right) + a\sqrt{1-\left(\frac{a}{X}\right)^2}\right)$$

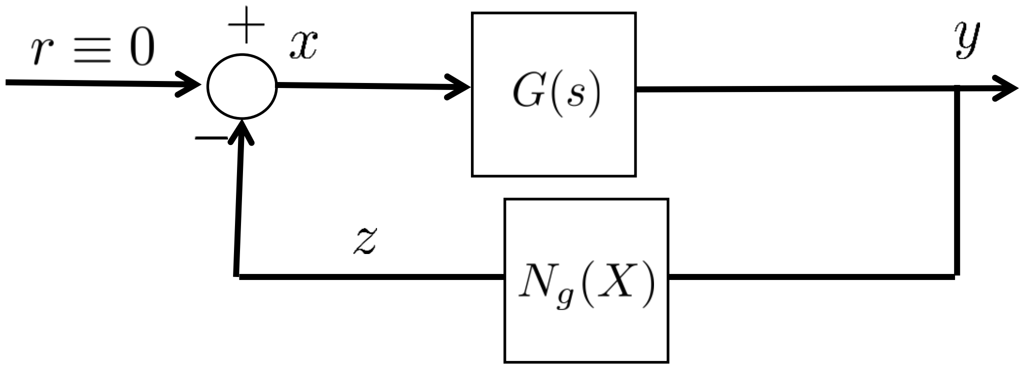
$$= \ldots$$

Alguns passos depois...

$$b_1 = \frac{2X}{\pi}\left[sen^{-1}\left(\frac{a}{X}\right) + \frac{a}{X}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X}\right)^2}\right]$$

$$N(X) = \frac{b_1}{X} = \frac{2}{\pi}\left[sen^{-1}\left(\frac{a}{X}\right) + \frac{a}{X}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X}\right)^2}\right]$$

Problemas resolvidos...



Seja $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3}$

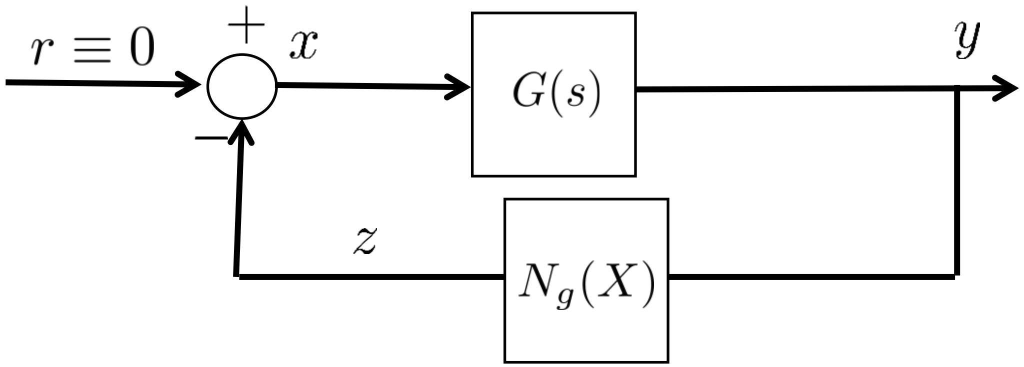
Encontrar ciclo(s) limite(s), se houver, classificando-os (estável, instável)

a) não linearidade relé puro com $a = M = 1$ $\quad N(X) = \dfrac{4}{\pi X}$

b) não linearidade saturação com $a = M = k = 1$

$$N(X) = \frac{2}{\pi}\left[sen^{-1}\left(\frac{a}{X}\right) + \frac{a}{X}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X}\right)^2}\right], \quad \text{para } X \geq a \implies X \geq 1$$

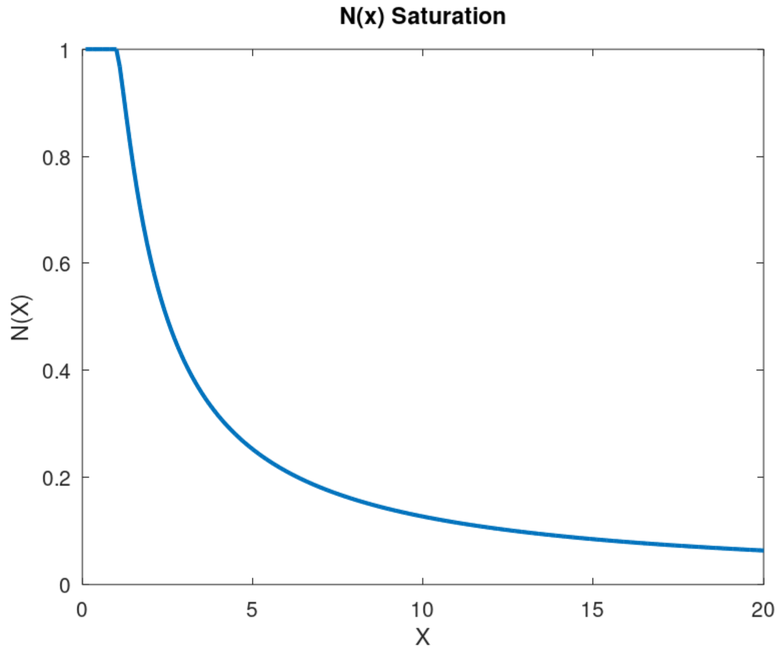
Problemas resolvidos...

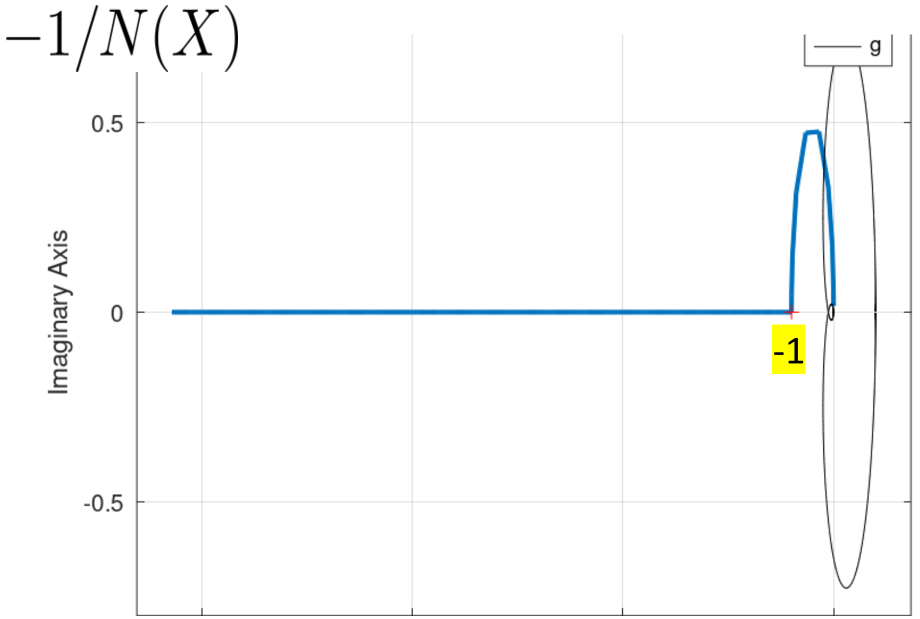


b) não linearidade saturação com $a = M = k = 1$

$$\text{Seja } G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$N(X) = \frac{2}{\pi}\left[sen^{-1}\left(\frac{a}{X}\right) + \frac{a}{X}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X}\right)^2}\right], \quad \text{para } X \geq a \implies X \geq 1$$





Não há intersecção, logo, não há CL

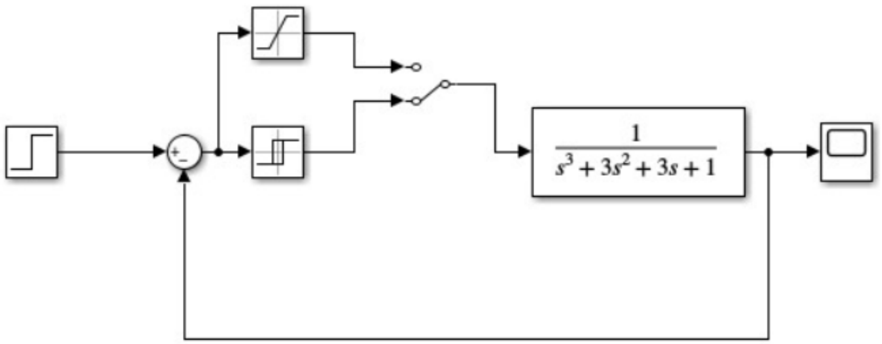
Problemas resolvidos...

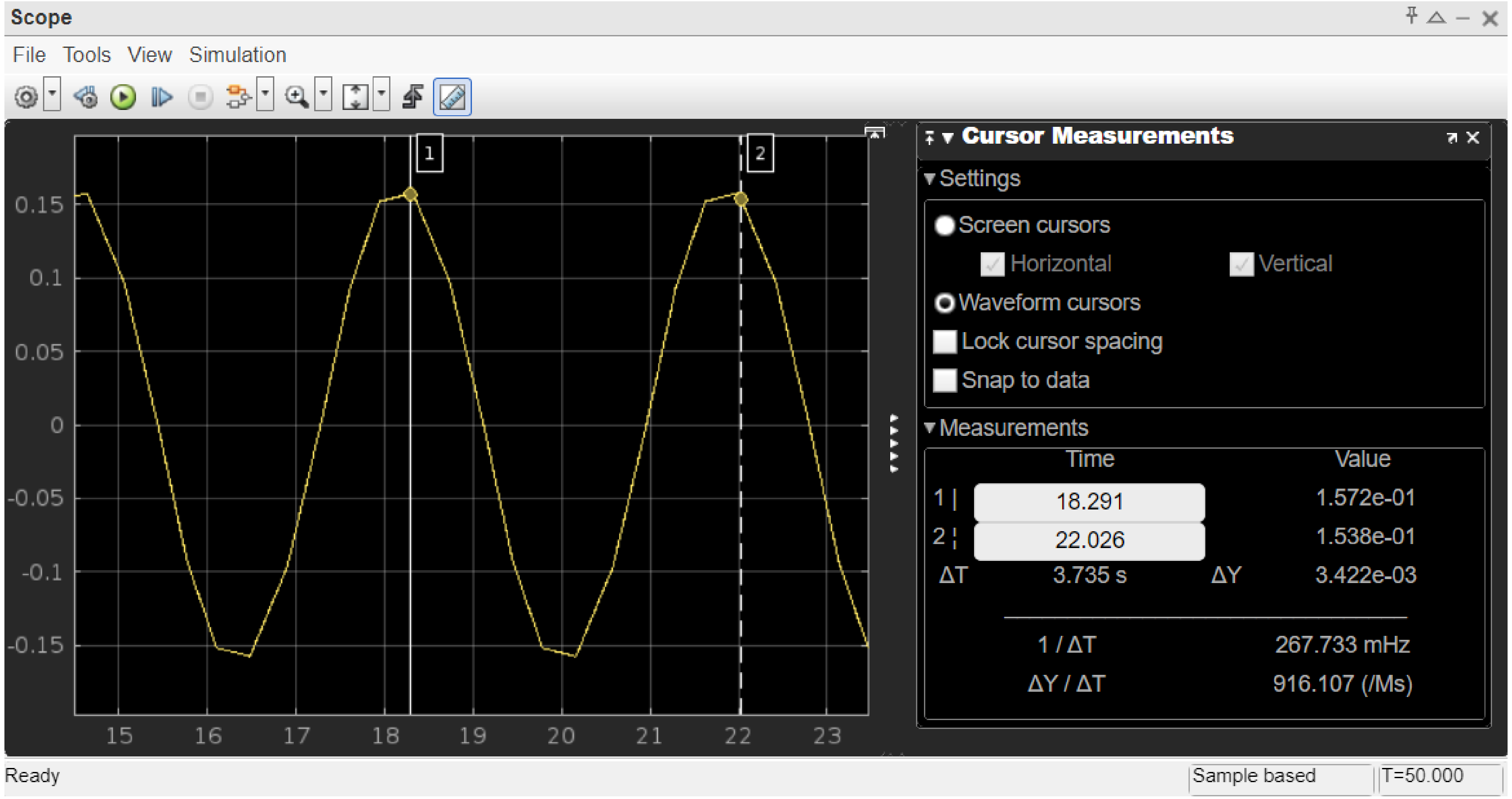
Nesta simulação

$$T = 3.735s, \quad f = 0.286Hz = 1.682rad/s$$

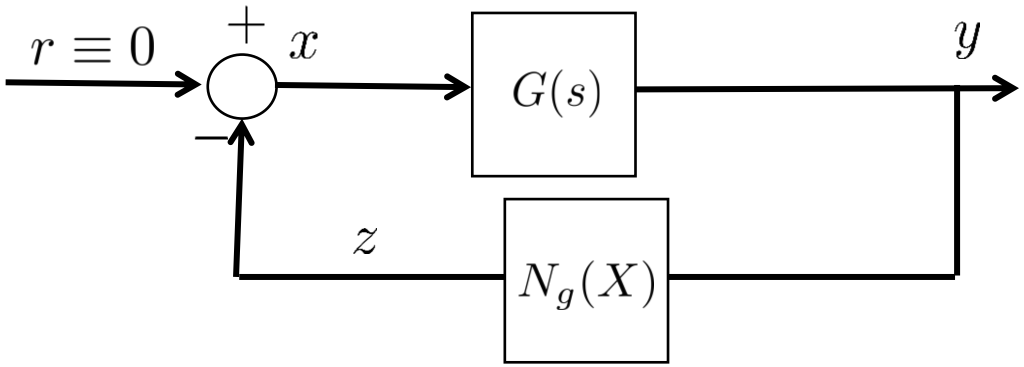
Calculado:

$$X = 0.1592, \quad Hz = 1.7321rad/s$$





Problemas resolvidos...



Seja $G(s) = \dfrac{10\sqrt{2}}{s(1+0.5s)}$

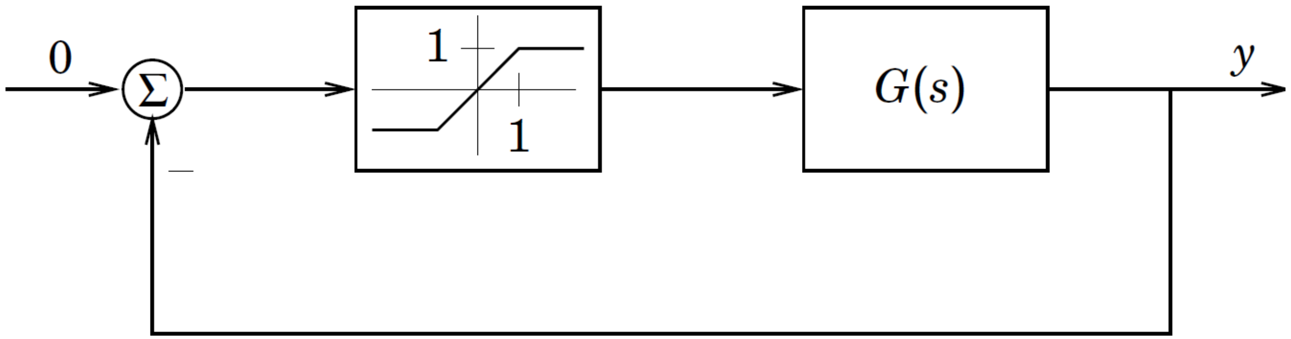
Encontrar ciclo(s) limite(s), se houver, classificando-os (estável, instável)

, e determinando sua amplitude e frequência

a) não linearidade com $N(X) = \dfrac{1}{X}\angle 45^\circ$ Não há Ciclo Limite

a) não linearidade com $N(X) = \dfrac{1}{X}\angle -45^\circ$ Pode haver Ciclo Limite

Problema proposto...



Seja $G(s) = \dfrac{-5s}{s^2 + s + 25}$

Seja o diagrama acima que representa a dinâmica típica de osciladores usados em laboratórios

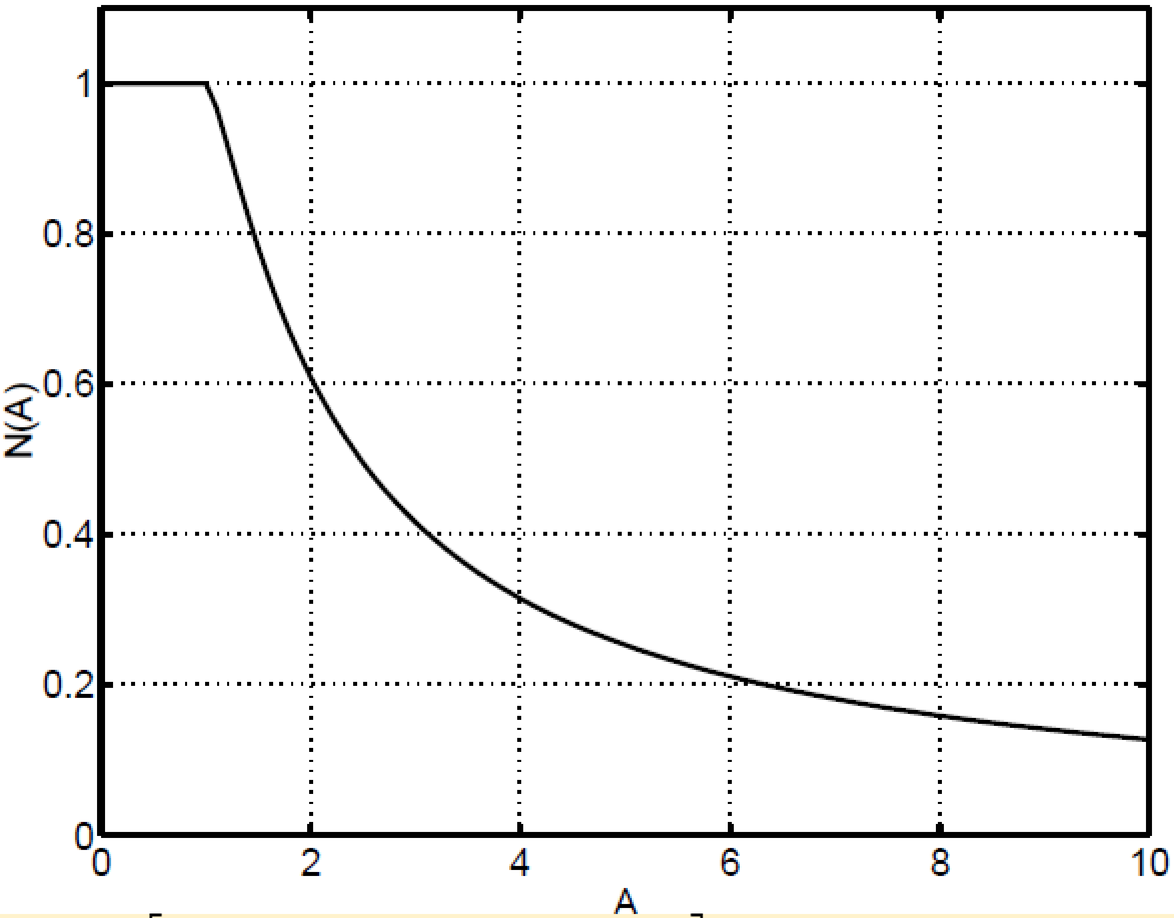
a) Use o método da função descritiva para predizer se o sistema exibe um ciclo limite. Em caso afirmativo, determinar a frequência e amplitude do mesmo. A função descritiva da saturação para $X > 1$, está plotada na figura:

$$N(X) = \frac{2}{\pi}\left[sen^{-1}\left(\frac{a}{X}\right) + \frac{a}{X}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{X}\right)^2}\right], \quad \text{para } X \geq a \implies X \geq 1$$

b) Use o critério estendido de Nyquist para classificar o ciclo limite. Comprove com simulações.

Problema proposto...

Saturação só ocorre a partir de X=1, logo, é a partir daí que pode ocorrer ciclo limite



$$N(X) = \frac{2}{\pi}\left[sen^{-1}\left(\frac{a}{X}\right) + \frac{a}{X}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X}\right)^2}\right], \quad \text{para } X \geq a \implies X \geq 1$$