EGM0004

Sistemas Não Lineares

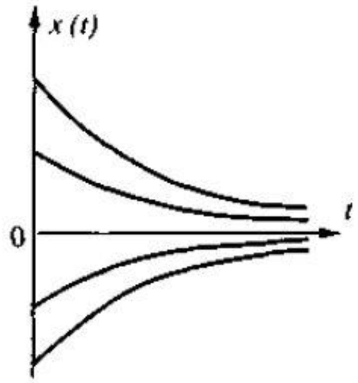
Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

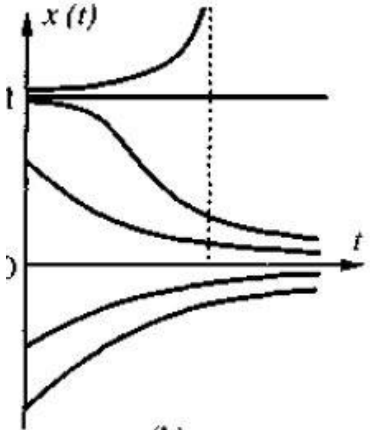
Mais características de sistemas não lineares

- Múltiplos pontos de equilíbrio isolados
  - Exemplo 1: $\dot{x} = -x + x^2, \quad \text{com } x(0) = x_0$
  - Linearizando (removendo o termo não linear), tem-se $\dot{x} = -x, \quad x(t) = x_0 e^{-t}$
  - Ou seja, um único ponto de equilíbrio em x = 0
  - Mas se a equação diferencial não linear for resolvida (sala):



(a)

$$\frac{dx}{-x + x^2} = dt \implies$$



(b)

$$\implies x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$$

são pontos de equilíbrio em x=0 e x=1
Demonstração em sala de aula

Para $x_0 < 1, \quad x(t) \to 0, t \to \infty$

Para $x_0 > 1, \quad x(t) \to \infty, t \to \infty$

Mais precisamente, a trajetória “escapa” após um tempo finito. Ou seja, a estabilidade depende das condições iniciais! (ou da própria entrada de controle)

Mais características de sistemas não lineares

- Escape em tempo finito (demonstrações em sala de aula)
  - Exemplo 2: $\dot{x} = x^2 + 1, \quad \text{com } x(0) = x_0$

Exemplo 2: Modelo representativo de reação química com transformação de substâncias
Lei de ação das massas (cinética química): velocidade da reação proporcional à concentração dos reagentes

Mais características de sistemas não lineares

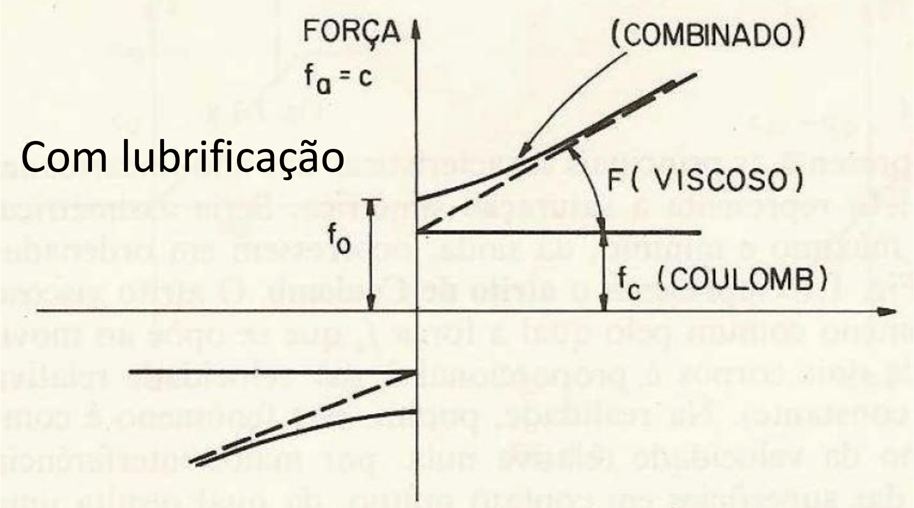
- Dependência do sinal de controle
  - Exemplo: $\dot{x} = xu$
  - Se $u = -1, \quad x(t) = 0, \quad t \to \infty$

$$u = 1, \quad x(t) \to \infty$$

  - Estabilidade de sistema não linear pode depender da entrada

Algumas não linearidades comuns

- Encontradas em sistemas físicos como saturação em amplificadores, atritos secos, ou de Coulomb, as folgas das engrenagens, a zona morta ou zona de insensibilidade dos amplificadores, os amplificadores a tudo ou nada (on-off, relés), multiplicadores etc.

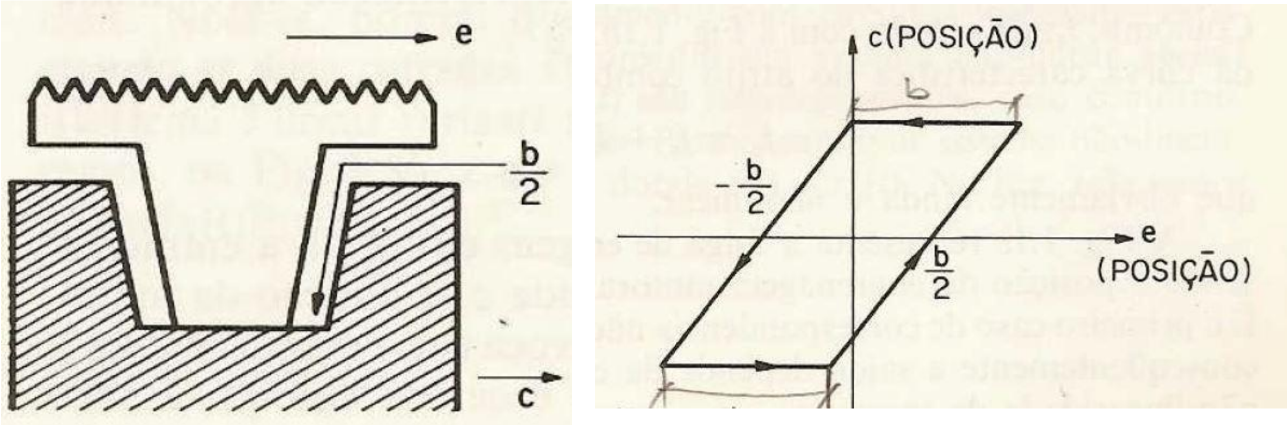


$$f_a = f_c + Fv$$

Força de atrito combinado fa (coulomb + viscoso)

$$f_e = \mu_e N, \quad \mu_c < \mu_e$$

$f_c = \mu_c N$ movimento

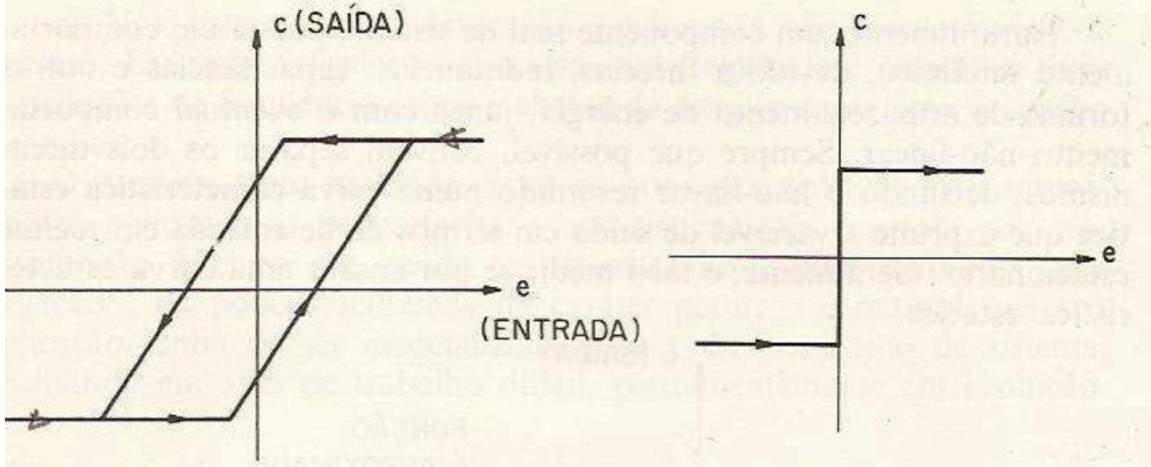


Folga em engrenagens

e: entrada, posição da engrenagem motora (eixo trator)
c: saída, posição da outra engrenagem (eixo tracionado)
Saída depende da entrada e de valores anteriores - memória

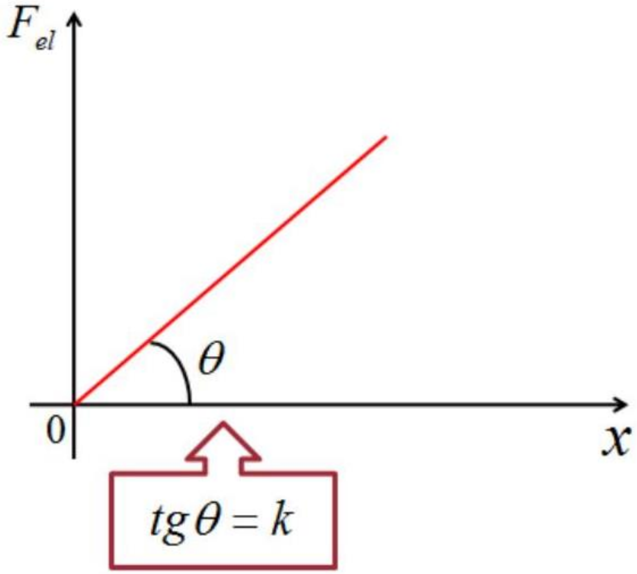
Algumas não linearidades comuns

- Encontradas em sistemas físicos como saturação em amplificadores, atritos secos, ou de Coulomb, as folgas das engrenagens, a zona morta ou zona de insensibilidade dos amplificadores, os amplificadores a tudo ou nada (on-off, relés), multiplicadores etc.



Histerese
Comum em sistemas térmicos, magnéticos etc. causa dissipação de calor

Saturação



Mola ideal obedece a lei de Hook, , sendo uma relação linear, mas na prática, o comportamento é não linear, de acordo com a região de operação e rigidez da mola

Algumas não linearidades comuns

- Intencional (controlador não linear) – relé ideal (saturação assimétrica) provê alta frequência de chaveamento. Um relé com zona morta e histerese. Obtém-se um chaveamento de menor frequência oscilando em torno da referência

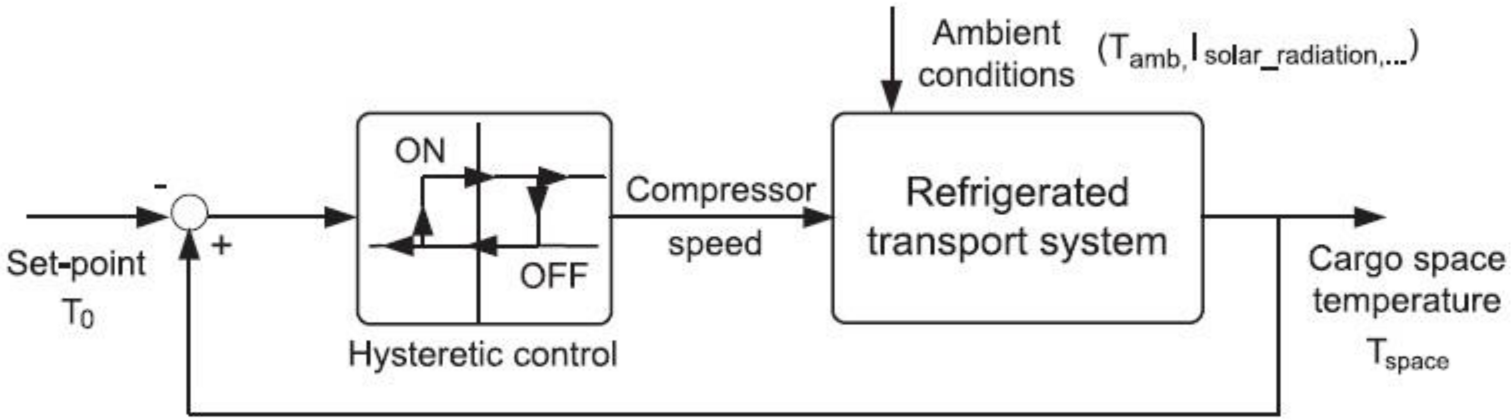
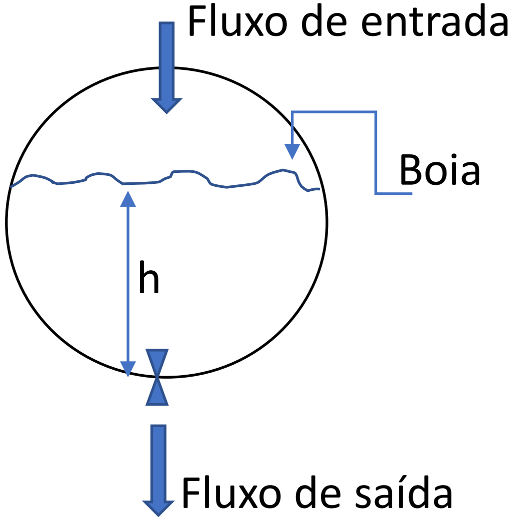


Fig. 6. Basic hysteretic on–off feedback control system.

Algumas não linearidades comuns

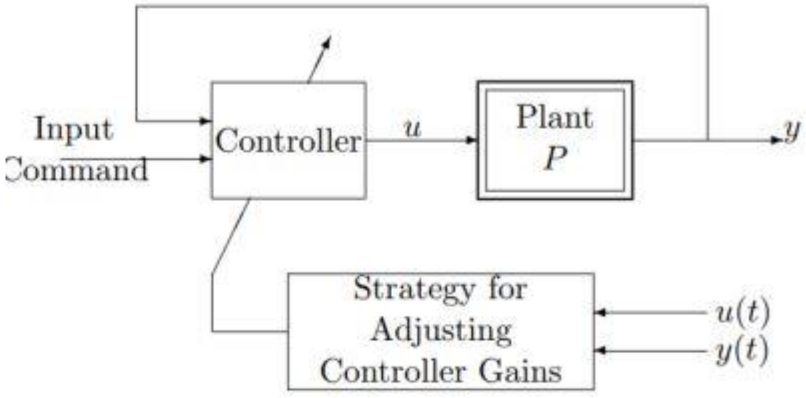
- Controlador adaptativo (exemplo controle de nível numa esfera)



A: área da secção reta do reservatório (variável)
É necessário usar um controlador adaptativo
Área da secção reta depende do nível h

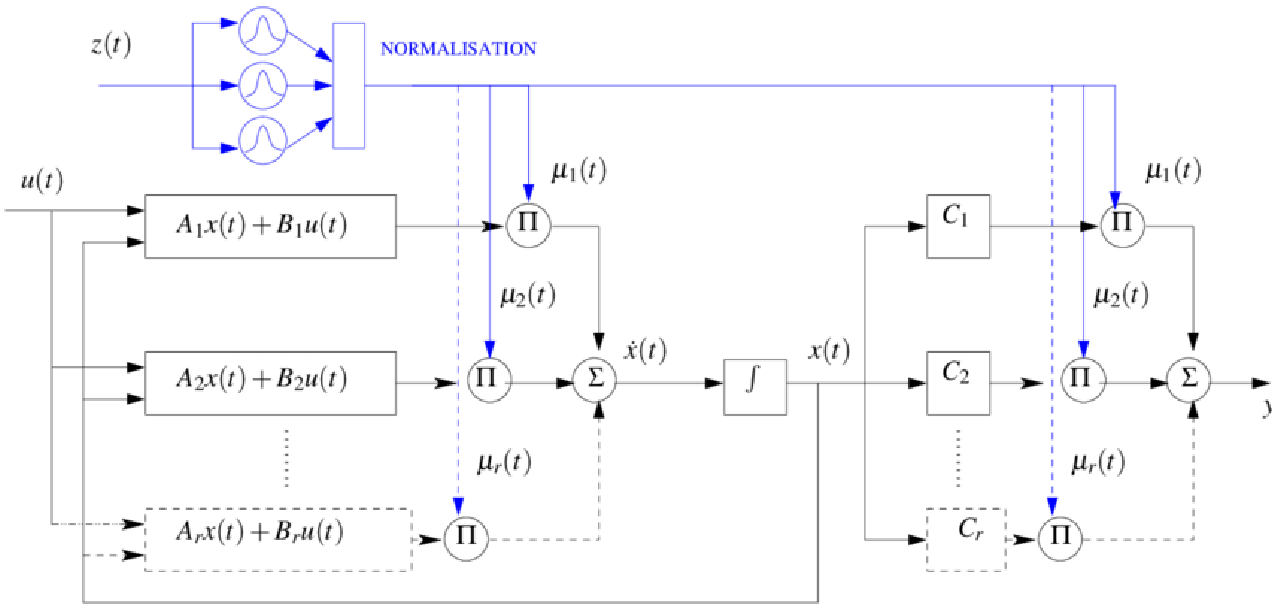
Por exemplo um controlador PI adaptativo

$$u = K_p(t)e + K_i(t)\int_0^t e\,dt, \quad e = h_{ref} - h$$

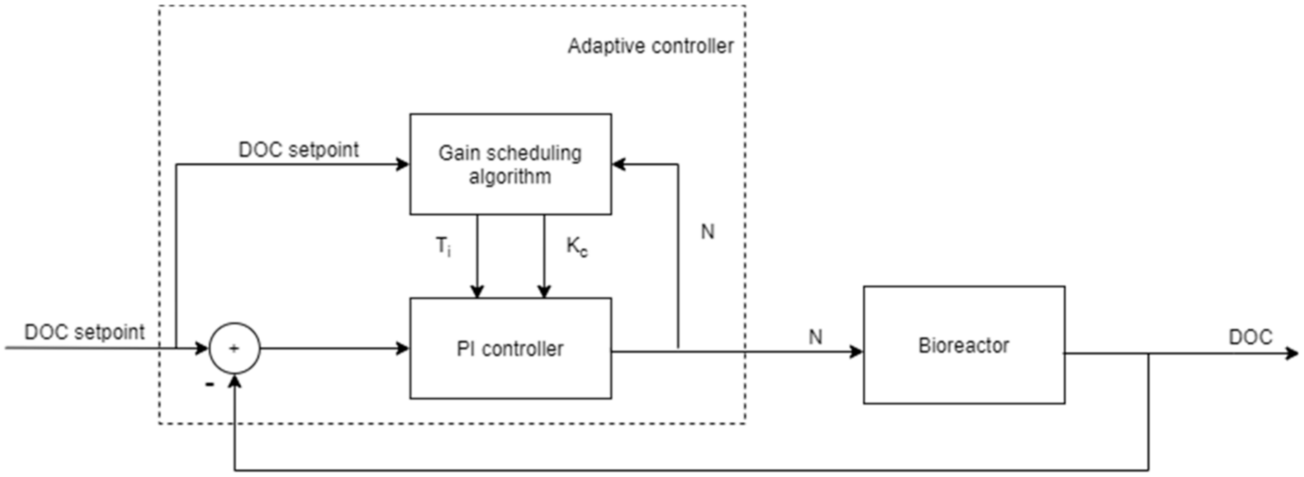


Produto de variáveis, adaptação dos ganhos, logo NÃO LINEAR

- Controlador fuzzy Takagi Sugeno com interpolação de modelos



- Controlador gain-scheduling
  - A depender do ponto de operação



Análise de sistemas não lineares

- Procedimento inicial de LINEARIZAÇÃO: possui larga aplicação em todos os estudos de sistemas físicos, sempre que o interesse esteja restrito ao comportamento em torno de um ponto de operação. Para uma função não-linear $y = f(x)$ o método consiste em desenvolver em série de Taylor no ponto de operação x_0 e substituir aquela função pela função linear:

$$y = y_f + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_f} (x - x_f)$$

- Passo 1: linearizar o sistema não linear em torno de um ponto de operação
- Passo 2: análise do modelo linearizado resultante
- Exemplo: seja $y = f(x),\quad \text{uma relação não linear e} \quad (x_f, y_f) \text{um ponto de operação}$

OBS: uma relação linear é sempre uma reta passando pela origem. Caso não passe pela origem é uma relação afim.

$$y = y_f + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_f} (x - x_f) \implies y - y_f = C(x - x_f) \implies \Delta y = C\Delta x$$

$$\Delta x = x - x_f, \Delta y = y - y_f, C = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_f}$$

As variações "delta" são pequenas perturbações em torno do ponto de equilíbrio

Análise de sistemas não lineares

- O modelo linearizado só é válido numa vizinhança do ponto de operação nominal (comportamento local). Não se pode dizer nada sobre o comportamento do sistema para pontos longe do ponto de operação nominal, nem tampouco sobre o comportamento global do sistema. Existem fenômenos essencialmente não lineares não explicados por modelos lineares

- Exemplo para discussão: pêndulo simples
  - Linearizar em torno de $\theta_f = 0$
  - Em movimento, o pêndulo desenvolve torque $T = mgLsen(\theta)$
  - O que resulta torque $T_f = 0$ no ponto de interesse