EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Solução de equações diferenciais

Tópico particularmente importante em sistemas não lineares quando se fala em comportamentos imprevisíveis

Rudolf Lipschitz

Professor académico alemão

1832-1903

Seja o problema de valor inicial de uma EDO:

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0$$

Existência de uma solução:

Dado o estado inicial $x(t_0) = x_0$ no instante t_0, existe solução $x(t)$ para $t \in [t_0, t_1], t_1 > t_0$?

Unicidade da solução:

Dado o estado inicial $x(t_0) = x_0$ no instante t_0, existe uma única solução $x(t)$ para $t \in [t_0, t_1], t_1 > t_0$?

Uma solução de $\dot{x} = f(t,x), x(t_0) = x_0$, em um intervalo $[t_0, t_1], t_1 > t_0$ é uma função contínua $x : [t_0, t_1] \to \Re^n$ tal que $\dot{x}(t)$ é definida e $\dot{x}(t) = f(x,t)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Se $f(t,x)$ é contínua em $t \quad e \quad x$, então, a solução $x(t)$ será continuamente diferenciável

Assumiremos que $f(t,x)$ é contínua em x mas somente contínua por partes em t.

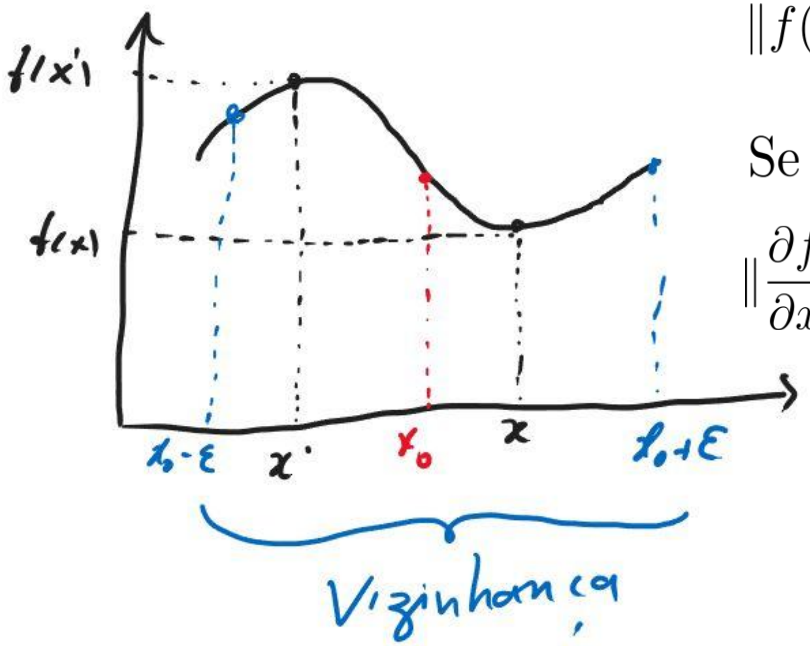
Assim, $x(t)$ será somente continuamente diferenciável por partes (esta hipótese permite incluir o caso em que $f(x,t)$ depende de uma entrada variante no tempo que pode ter variações bruscas

Solução de equações diferenciais

Teorema (existência e unicidade local de uma solução)

Seja $f(x,t)$ contínua em x e contínua por partes em t. Se $f(x,t)$ satisfaz uma condição de Lipschitz, ou seja, $\|f(x,t)-f(x',t)\| \leq L\|x-x'\|$ onde L é uma constante finita e positiva (constante de Lipschitz),

$\forall x, x' \in B = \{x \in \Re^n | \|x - x_0\| \leq \epsilon\}, \forall t \in [t_0, t_1]$, então existe um δ tal que a equação de estado $\dot{x} = f(t,x), x(t_0) = x_0$ tem uma única solução no intervalo $[t_0, t_0+\delta]$



$$\|f(x,t)-f(x',t)\| \leq L\|x-x'\|, \quad \frac{\|f(x,t)-f(x',t)\|}{\|x-x'\|} \leq L$$

Se $f : B \to \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ e é contínua, e existe $K \geq 0$

$$\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\| \leq K, \forall (t,x) \in B, \quad L = K$$

A função é *Lipschitiziana*

A interpretação é de que se a variação de f é limitada, $\dot{x}$ é definida e é possível escrever uma solução para $x(t)$

Naturalmente dependerá da função e do conjunto B

Solução de equações diferenciais

Exemplo 1

Seja $B = \Re^2$ e $f(x,t) := t^2 + 2x$ Para $\forall (t,x),(t,x') \in B$

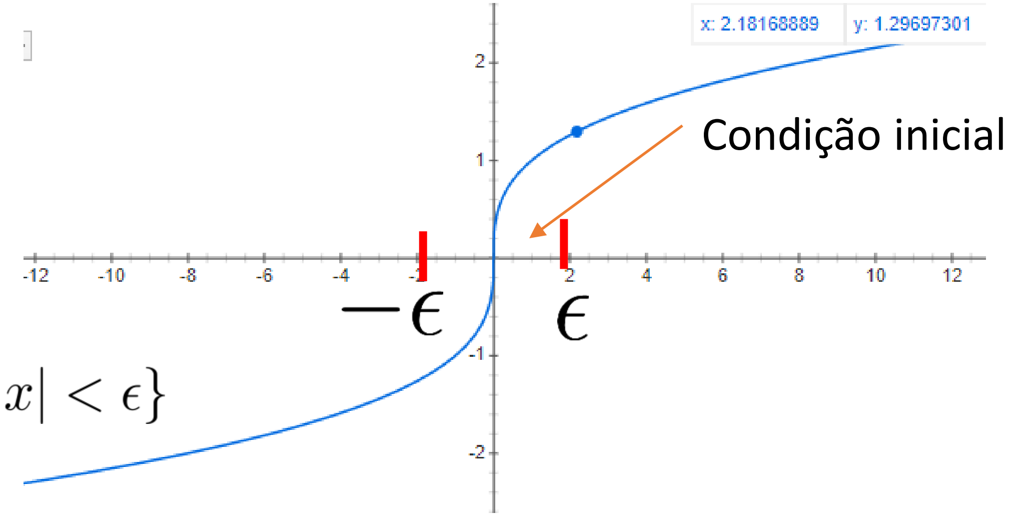
$$|f(x,t) - f(x',t)| = |\cancel{(t^2} + 2x) - \cancel{(t^2} + 2x')| = 2|x - x'|$$

então f satisfaz condição de Lipschitz em B com $L = 2$

Exemplo 2

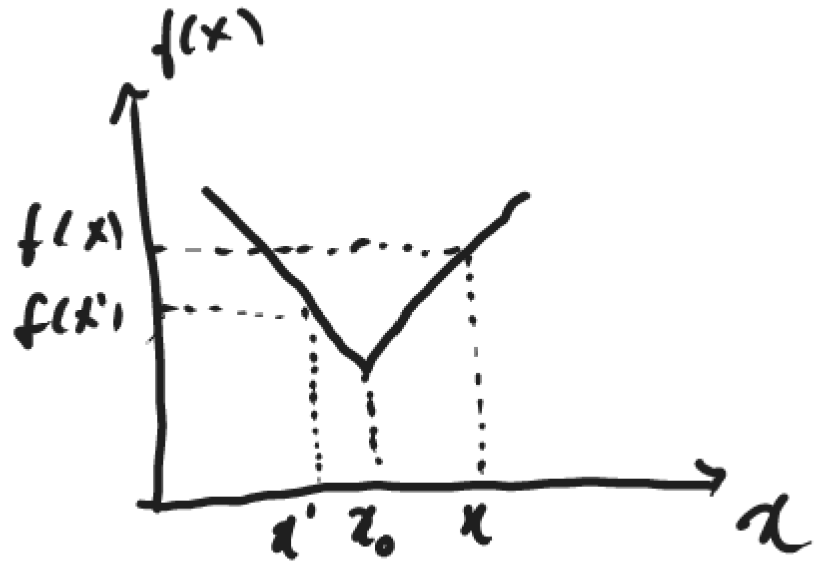
$$f(x) = x^{1/3}, \quad x(0) = 0$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{3}\frac{1}{x^{2/3}}. \text{ Para } x = 0 \implies \frac{df}{dx} \to \infty$$



f(x) não satisfaz uma condição de Lipschitz para $x \in B = \{x \in \mathbb{R} | \quad |x| < \epsilon\}$ ou seja, para x pertencente a uma "bola" que engloba a origem. Isto não garante que a solução é única, e pode ou não ter solução, isto é, se tiver são muitas

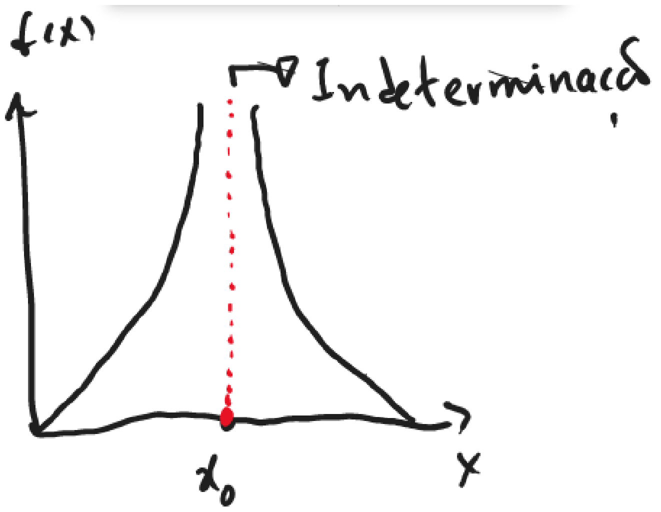
Solução de equações diferenciais



Exemplo 3

f(x) é localmente Lipschitziana mesmo com função não diferenciável.
Se x é limitado, variação de f(x) também é!

Exemplo 4



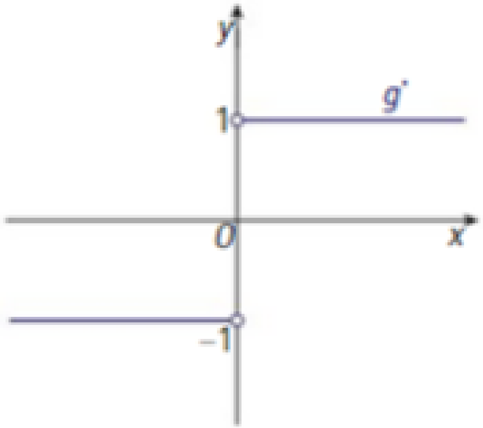
f(x) não é localmente Lipschitziana
para "regiões" que englobem x0

Definindo a função g, sem se utilizar o sinal de módulo, tem-se:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Solução de equações diferenciais

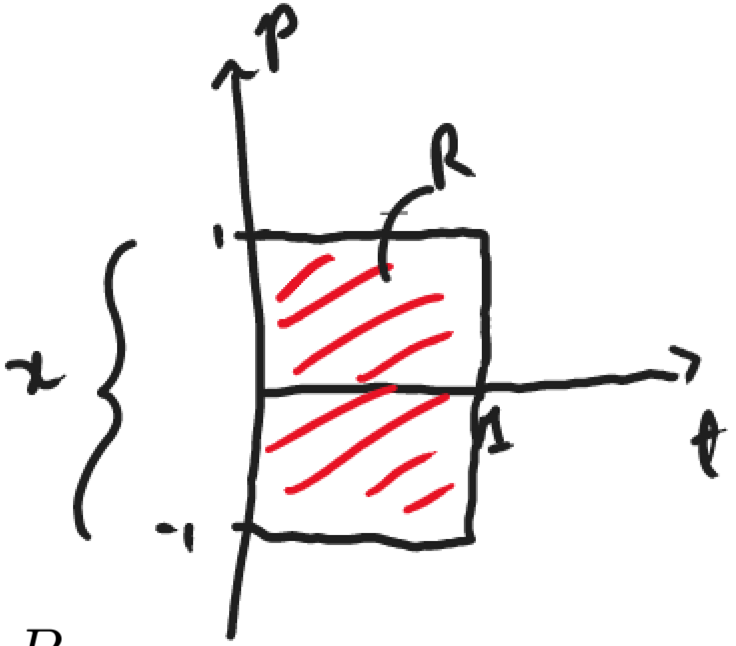
Exemplo 5

$$f(t,x) = cos(t) + x^3, \quad B = R : (t,p) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0,1], \quad |p| \leq 1$$

$$\forall (t,x) \in B, \text{ tem-se } |\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| = |3x^2| \leq 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \text{ é contínua em } B. \text{Assim } K = 3. \text{ Logo,}$$

$$|(cos(t) + x^3) - (cos(t) + x'^3)| \leq 3|x - x'|, \quad \forall (t,x),(t,x') \in B$$



Solução de equações diferenciais

Exemplo 6

$f(t,x) = t + arctan(x)$ é Lipschtiz local ou global?

Solução de equações diferenciais

Lema sobre existência e valor limitado de Jacobiano

Discussão em sala de aula para os sistemas:

$$\dot{x}_1 = 3x_1 + (sen(t))x_2 = f_1$$
$$\dot{x}_2 = sen(x_1) + x_2 = f_2$$

Calcular o Jacobiano do sistema e sua norma infinita $\|J\|_\infty$

Seja $A = [a_{ij}]_{r\times s}$ uma matriz $r \times s$. A norma infinito ou norma do máximo da matriz A, denotada por $\|A\|_\infty$, é o número não negativo

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq r} \sum_{j=1}^{s} |a_{ij}|$$

(a maior soma absoluta das linhas)[2]

Solução de equações diferenciais

Lema sobre existência e valor limitado de Jacobiano

Discussão em sala de aula para os sistemas:

$$\dot{x} = -x^2, \quad x(0) = 1$$

a) Calcular Jacobiano (no caso apenas dx/dt). É limitado para todo t?
b) Calcular x(t). Existe t para o qual x(t) tende a infinito?
c) Calcular dx(t)/dt a partir do item b e fazer t=0 para encontrar x(0)
d) Esboçar gráfico de x(t) considerando este x(0) e o tempo t limite