EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira** – **UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

24T12 (60h) (13:00-14:40h) – 22.08.2022 : 21.12.2022

Teorema de instabilidade de Cetaev

Teorema 8: Teorema de instabilidade de Cetaev

O estado de equilíbrio $x^* = 0$ de $\dot{x} = f(x)$ é INSTÁVEL se as seguintes condições são satisfeitas:

a) $\exists V(x)$ continuamente diferenciável

b) $\exists$ um conjunto fechado (que inclui suas fronteiras) Ω contendo a origem em seu interior

c) $\exists$ um conjunto aberto Ω_1 tal que $\Omega_1 \subset \Omega$ e a origem $\in \varphi\Omega_1$

d) $V(x) > 0, \forall x \in \Omega_1$

$V(x) = 0, \forall x \in \varphi\Omega_1$

$V(x)$ limitada em Ω

e) $\dot{V}(x) > 0, \forall x \in \Omega_1$

Permite-se concluir que a origem é instável

La Salle local e global

Exemplo:

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = x_1$

$\Omega = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < 1, x_1 > 0, x_2 > 0\}$

$\Omega_1 \subset \Omega$

$0 \in \varphi\Omega_1$

$V(x) = x_1 x_2$ continuamente diferenciável

Em Ω_1, $\quad x_1 > 0, x_2 > 0 \implies V(x) > 0$

Em $\varphi\Omega_1 \quad (x_1 = 0 \quad$ e/ou $x_2 = 0) \quad V(x) = 0$

Em $\Omega \implies -1 \leq V(x) \leq 1$ limitada

$\dot{V} = \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2 = x_2^2 + x_1^2 > 0, \forall x \in \Omega_1,$ logo, origem instável

La Salle local e global

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + x_1^2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_1 x_2$$

$$\Omega = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$
$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < 1, x_1 > 0, x_2 > 0\}$$

$$\Omega_1 \subset \Omega$$
$$0 \in \varphi\Omega_1$$
$$V(x) = x_1 x_2 \text{ continuamente diferenciável}$$

Em Ω_1, $\quad x_1 > 0, x_2 > 0 \implies V(x) > 0$

Em $\varphi\Omega_1 \quad (x_1 = 0 \quad \text{e/ou } x_2 = 0) \quad V(x) = 0$

Em $\Omega \implies -1 \leq V(x) \leq 1$ limitada

$$\dot{V} = \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2 + x_1 x_2 > 0, \quad \forall x \in \Omega_1, \text{ logo, origem instável}$$

Resumindo...

$V(x)$	$\dot{V}(x)$	Características de $x^* = 0$
> 0	≤ 0	estável ou assint. estável (La Salle), podendo ser global
> 0	< 0	assint. estável. Se $V \to \infty$ quando $\|\|x\|\| \to \infty$ é global
> 0	> 0	instável
> 0 OR < 0	> 0 XOR < 0	instável
> 0	$= 0$	estável (sistemas conservativos)
> 0	≥ 0	indefinida (não se conclui...)
> 0	> 0 OR < 0	indefinida

Quando se demonstra a estabilidade da origem, V(x) é denominada função de Lyapunov. Antes V(x) é uma candidata à Função de Lyapunov. Os resultados obtidos pela teoria de Lyapunov são SUFICIENTES para a estabilidade de x*=0.