

EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira** – UFRN



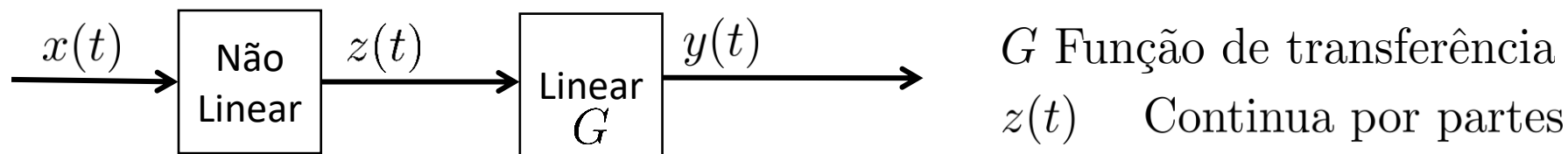
josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Linearização harmônica

- Uso de aproximações para simplificação de análise sem comprometimento qualitativo (Taylor (*ver slide class08*) e **Fourier**)
- Este método permite analisar o fenômeno do ciclo-limite em sistemas não lineares através da representação da não linearidade por uma função *descritiva*

N



- Seja uma função com domínio e contradomínio reais $g(x) : R \rightarrow R$ com

$$z(t) = g(x(t)), \quad x(t) = X \sin(\omega t) = X \sin(\theta), \quad \theta = \omega t$$

- Visto a entrada ser periódica com período: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} z(t) dt = 0$, supondo

z função simétrica $z(-x) = -z(x)$

Sobre métodos de análise em não lineares

- Plano de fase: estabilidade e resposta temporal (só 2. ordem)
- Segundo método de Lyapunov: análise de estabilidade de qualquer sistema não linear (difícil encontrar funções de Lyapunov) – métodos de pesquisa de funções: Krasoviski, Shultz e Gibson (gradiente variável), Zubov, etc.), [IA](#)
- Simulação: condições limitadas às usadas na experimentação (Monte Carlo?)
- Funções descritivas: só análise de estabilidade (sem info sobre resposta temporal), predição de ciclos limite, método aproximado (opções numéricas: [integrais abelianas](#), método averaging (AU) etc.)

Clássicos: ATHERTON, Derek P. (1975, 1981): *Nonlinear control engineering: describing function analysis and design*
[stability of nonlinear systems](#)

Ideia da função descritiva para analisar ciclo limite (van der Pol)

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \alpha > 0$$

$$s^2x + \alpha sxx^2 - \alpha sx + x = 0$$

$$s(\alpha x^2)x + (s^2 - \alpha s + 1)x = 0$$

NL

Linear

Objetivo: determinar se existe ciclo limite e, se existir, calcular amplitude e frequência
 Ideia é assumir que há CL de determinada amplitude e frequência e então verificar se o sistema de fato mantém esta solução

Seja um ciclo limite representado pelo sinal $x(t) = X \sin(\omega t)$

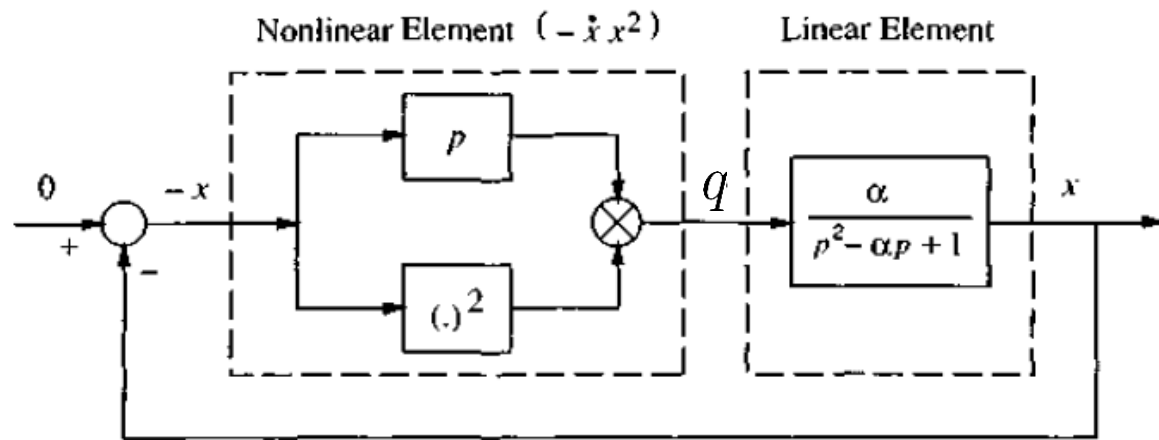
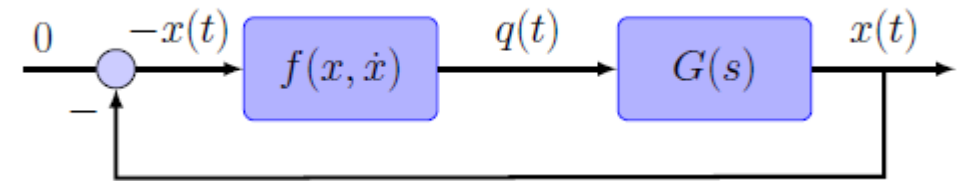


Figure 5.1 : Feedback interpretation of the Van der Pol oscillator

$$G(s) = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha s + 1}$$

$$f(x, \dot{x}) = x^2 \dot{x}$$



Ideia da função descritiva para analisar ciclo limite (van der Pol)

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \alpha > 0$$

$$s^2x + \alpha sxx^2 - \alpha sx + x = 0$$

$$s(\alpha x^2)x + (s^2 - \alpha s + 1)x = 0$$

NL

Linear

Lembrete:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \quad \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x), \quad \sin^2(x) = \cos^2(x) - \cos(2x)$$

$$\sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) - \cos(2x) \implies 2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x) \implies \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

Analisando a entrada... X e ω desconhecidos ou mesmo inexistentes

$$x(t) = X \sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = X\omega \cos(\omega t)$$

$$q = -x^2\dot{x} = -(X \sin(\omega t))^2 X\omega \cos(\omega t)$$

$$q = -X^2 \sin^2(\omega t) X\omega \cos(\omega t)$$

$$= -X^3 \omega [\sin^2(\omega t)] \cos(\omega t)$$

$$= -\frac{X^3}{2} \omega [1 - \cos(2\omega t)] \cos(\omega t)$$

Ideia da função descritiva para analisar ciclo limite (van der Pol)

Neste ponto, se desprezar **segunda harmônica**, dá uma aproximação com

$$= -\frac{X^3}{2}\omega[1 - \cos(2\omega t)]\cos(\omega t) = -\frac{X^3}{2}\omega\cos(\omega t) = \frac{X^2}{2}\frac{d}{dt}(-X\sin(\omega t)) \quad \text{Como } x(t) = X\sin(\omega t)$$
$$q = N(X, \omega)(-x), \quad N(X, \omega) = \frac{X^2}{2}(j\omega)$$

Bloco não linear aproximado (quase-linear dependente de X) por $N(X, \omega)$

$$x = X\sin(\omega t) = G(j\omega)q = G(j\omega)N(X, \omega)(-x)$$

Equação característica em malha fechada:

$$1 + N(X, \omega)G(s) = 0$$
$$1 + \frac{X^2(j\omega)}{2} \frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega) + 1} = 0$$

Ideia da função descritiva para analisar ciclo limite (van der Pol)

$$1 + \frac{X^2(j\omega)}{2} \frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega) + 1} = 0 \quad \boxed{X = 1.415, \quad \omega = 1, \quad s_{1,2} = \pm 0.99..j}$$

$$s_{1,2} = \frac{-1}{4} \alpha (X^2 - 2) \pm \sqrt{\frac{1}{16} \alpha^2 (X^2 - 2)^2 - 1}$$

Para convergência exata, avançar uma harmônica na aproximação...

$$\begin{aligned} &= -\frac{X^3}{2} \omega [1 - \cos(2\omega t)] \cos(\omega t) \\ &= -\frac{X^3}{4} \omega [\cos(\omega t) - \cancel{\cos(3\omega t)}] = \frac{X^2}{4} \frac{d}{dt} (-X \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

$$s_{1,2} = \frac{-1}{8} \alpha (X^2 - 4) \pm \sqrt{\frac{1}{64} \alpha^2 (X^2 - 4)^2 - 1}$$

$$\boxed{X = 2, \quad \omega = 1, \quad s_{1,2} = \pm j}$$

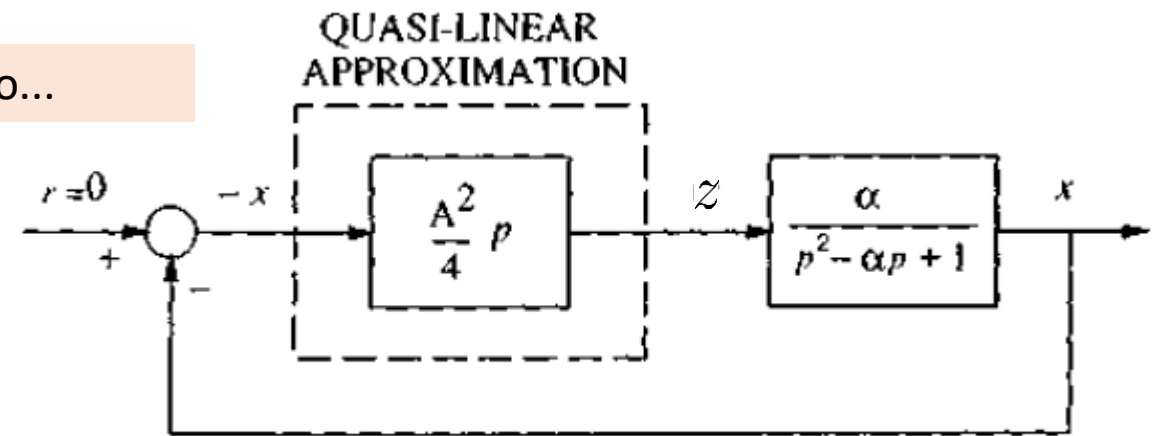


Figure 5.2 : Quasi-linear approximation of the Van der Pol oscillator

$$N(X, \omega) = \frac{X^2}{4} (j\omega)$$

Ideia da função descritiva para analisar ciclo limite (van der Pol)

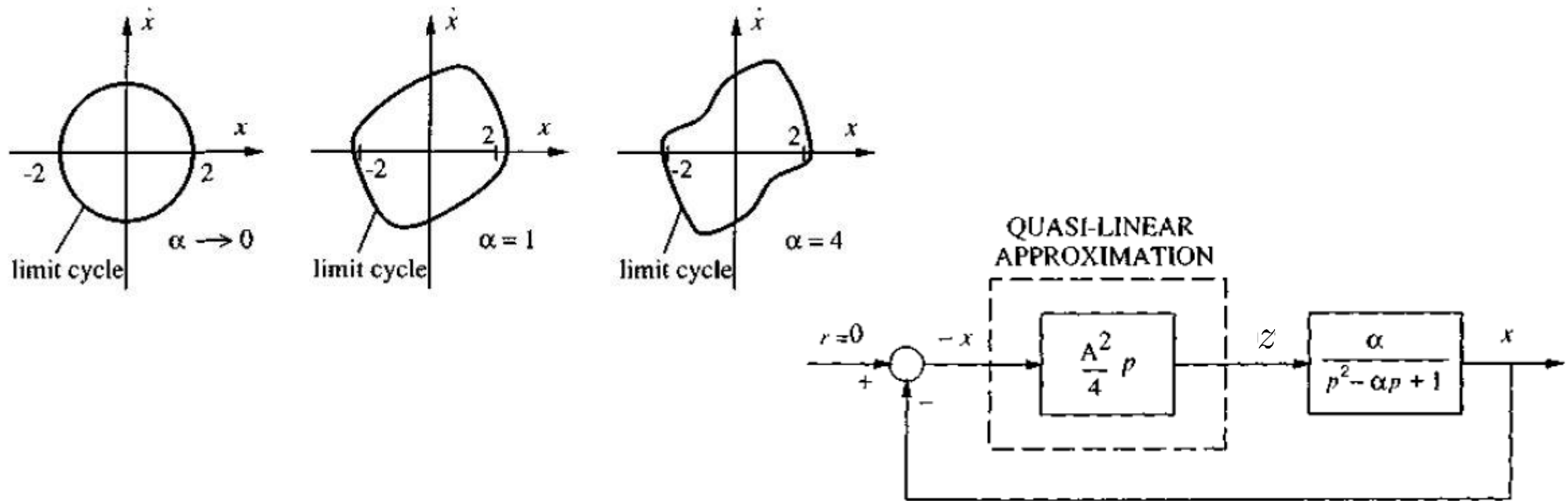


Figure 5.2 : Quasi-linear approximation of the Van der Pol oscillator

Linearização harmônica

- Relembrando a expansão em Série de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t), \quad \omega_n = n\omega, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \implies \omega_n = n \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad \text{Nível DC do sinal}$$

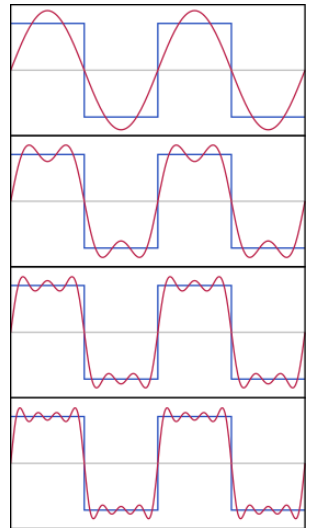
$$a_n = \frac{1}{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega_n t) dt$$

$$b_n = \frac{1}{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega_n t) dt$$



(1768-1830)

Jean-Baptiste Joseph Fourier



Linearização harmônica

- Expandindo o termo não linear em série de Fourier... $\omega = \frac{\theta}{t}$

$$z(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

- Coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

n é o número da harmônica

Exemplo: expandir em série de Fourier...

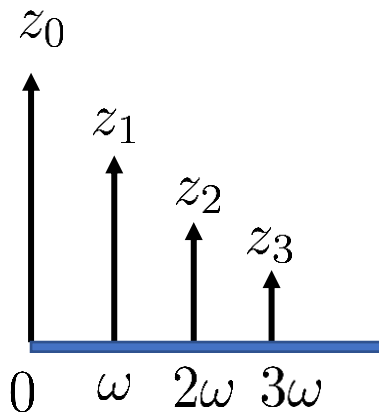
$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & -\pi < t < -1 \\ 1, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 < t < \pi \end{array} \right\} f(t) = f(t + 2\pi)$$

Observação: se g é ímpar (simétrica em relação à origem), $g(-x) = -g(x)$ Seno é ímpar: $\sin(-x) = -\sin(x)$
Cosseno é par: $\cos(-x) = \cos(x)$

Linearização harmônica

- Hipótese do filtro:

- a medida que n cresce, a amplitude das harmônicas ficam menores (dado o resultado da integral).
- Visto que as plantas se comportam como filtros passa baixa, as harmônicas de ordem maior ou igual a 2 são fortemente atenuadas pela parte linear

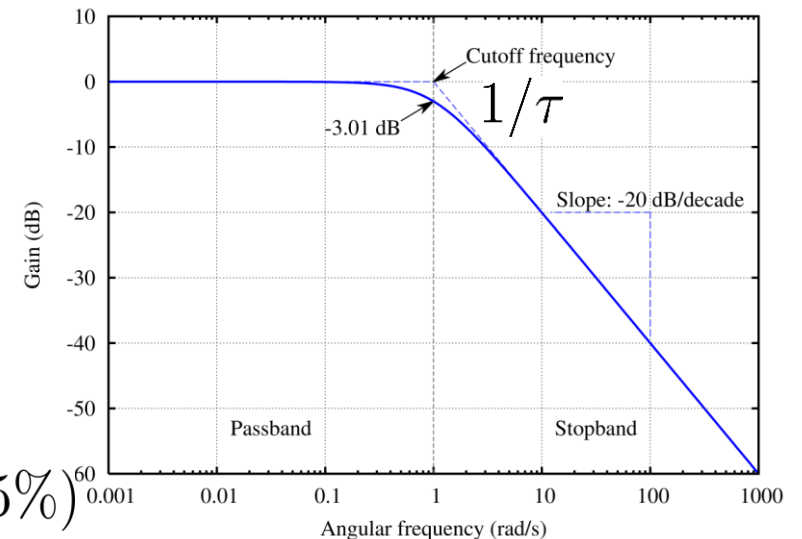


$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \text{ Parte linear de 1. ordem}$$

$$H(\omega)_{dB} = 20 \log_{10} |H(\omega)|_{\omega=2} \quad \text{Oitava}$$

$$H(\omega)_{dB} = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{5}}{5} = -6.9897$$

$$\text{atenuação} = 10^{-6.9897/20} = 0.4472 (45\%)$$



Conclusão: $z(t) = a_0 + a_1 \cos(\theta) + b_1 \sin(\theta)$ Primeira harmônica

Linearização harmônica

- No caso linear, entrada senoidal, saída senoidal de mesma frequência

- Seja uma função de transferência linear invariante no tempo $G(s)$
- $G(j\omega) \in C$, calculados para todo $\omega \in R$, define sua resposta em frequência
- G sendo assintoticamente estável, em regime permanente, excitado por senoide

$$y(t) = X|G(j\omega)|\sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

$$y(t) = X\operatorname{Re}(G(j\omega))\sin(\omega t) + X\operatorname{Im}(G(j\omega))\cos(\omega t)$$

- Definição de função descritiva:

Seja $g(x) : R \rightarrow R$ uma função de variável real.

A função de variável complexa

$$N_g(X) : X > 0 \rightarrow C, \text{ dada por } N_g(X) = \frac{b_1 + ja_1}{X}$$

é a função descritiva associada à função $g(x)$

Lembrete:

$$z = a + jb \equiv |z|\angle\theta$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

$$G(s) = \frac{4}{s+5}, x(t) = 2\cos(\omega t), f = 0.5Hz$$

$$G(j\omega) = G(j\pi) = \frac{4}{j\pi + 5} = \frac{4}{5.9\angle 32^\circ} = 0.677\angle -32^\circ$$

$$y(t) = 2|G(j\pi)|\cos(\pi t + \angle G(j\pi)) = 1.3548\cos(\pi t - 32^\circ)$$

Linearização harmônica

- No caso particular linear, comparando com a definição de função descritiva

$$y(t) = X|G(j\omega)|\text{sen}(\omega t + \angle G(j\omega))$$

$$y(t) = X\text{Re}(G(j\omega))\text{sen}(\omega t) + X\text{Im}(G(j\omega))\cos(\omega t)$$

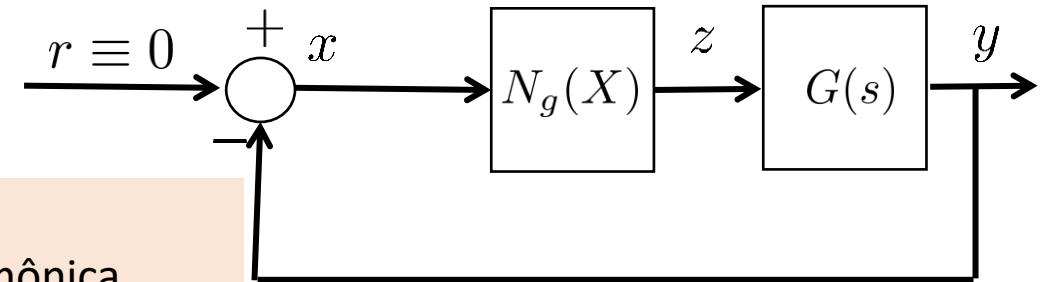
$$N_G(\omega) = \frac{X\text{Re}(G(j\omega)) + jX\text{Im}(G(j\omega))}{X} = G(j\omega)$$

$$N_g(X) : X > 0 \rightarrow C, \text{ dada por } N_g(X) = \frac{b_1 + ja_1}{X}$$

- No caso não linear,

$$z(t) = X|N_g(X)|\text{sen}(\omega t + \angle N_g(X))$$

A função descritiva é interpretada com uma função de transferência que no regime permanente senoidal fornece a aproximação de primeira harmônica da saída (**aproxima efeitos não lineares**). Esta abordagem é importante para análise de estabilidade de soluções periódicas através de extensão ao critério de Nyquist



Linearização harmônica

$$z(t) = X|N_g(X)|\text{sen}(\omega t + \angle N_g(X)) \quad N = \frac{Z_1}{X} \angle \Phi_1$$

$$Z_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \Phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{a_1}{b_1} \right)$$

$X \rightarrow$ amplitude do sinal de entrada

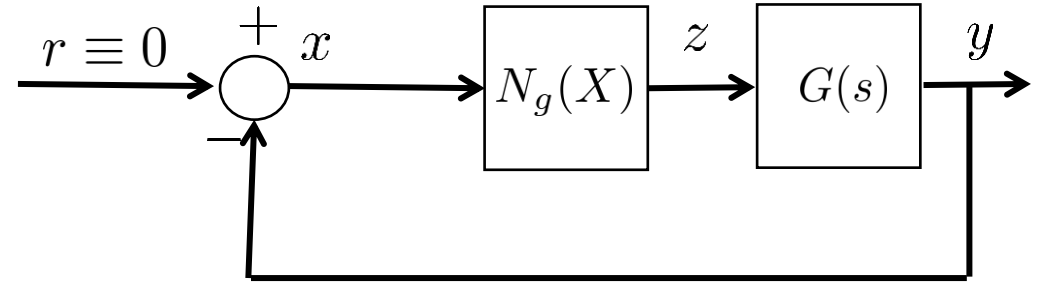
$Z_1 \rightarrow$ amplitude da componente harmônica fundamental da saída

$\Phi_1 \rightarrow$ defasagem da componente harmônica fundamental da saída em relação à entrada

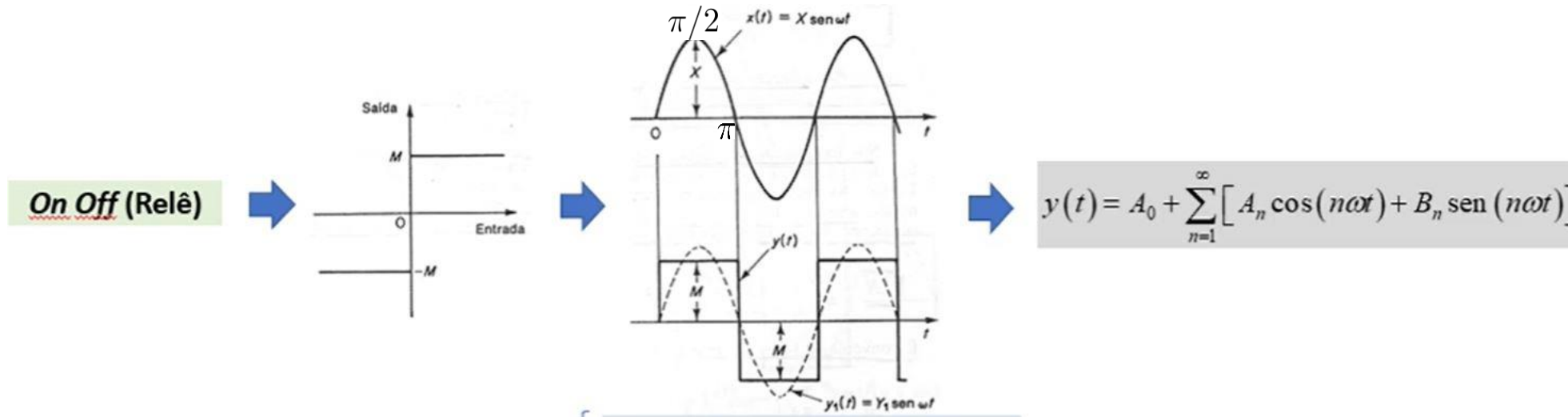
- No caso especial com $g(x)$ ímpar, com simetria em relação à origem,

$$z(t) = b_1 \text{sen}(\theta), \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} z(\theta) \text{sen} \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} z(\theta) \text{sen} \theta d\theta = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} z(\theta) \text{sen} \theta d\theta$$

$$N = \frac{b_1}{X} \angle 0^\circ, \quad \text{pois } a_n = 0 \quad \forall n, \text{ a integral de f. ímpar num período é zero}$$



No caso do relé puro



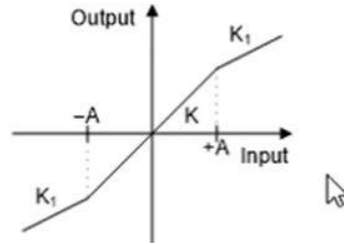
- No caso especial com $g(x)$ ímpar, com simetria em relação à origem,

$$z(t) = b_1 \sin(\theta), b_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} M \sin \theta d\theta = \frac{4M}{\pi} (-\cos \theta)_0^{\pi/2} = \frac{4M}{\pi}$$

$$N = \frac{4M}{\pi X} \angle 0^\circ$$

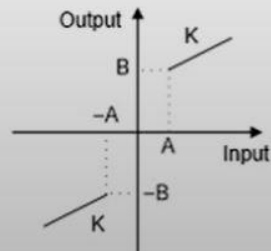
Funções descritivas de não linearidades comuns em controle

Saturação



$$N = K_1 + \frac{2(K - K_1)}{\pi} \left[\arcsen\left(\frac{A}{X}\right) + \frac{A}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{A}{X}\right)^2} \right], X \geq A$$

Relê com
zona morta
e degrau

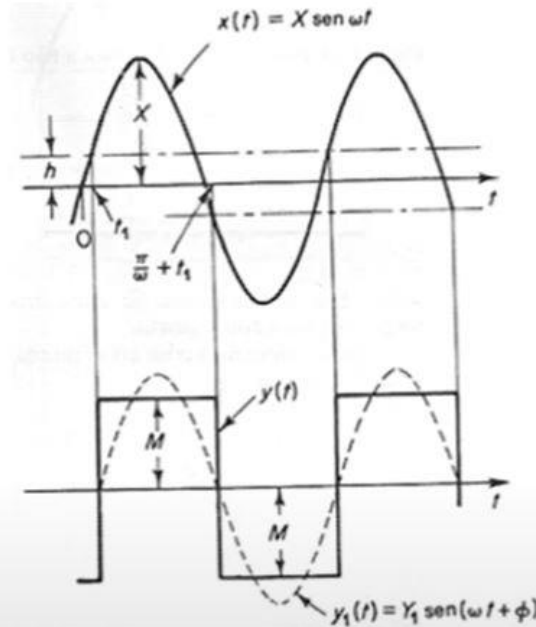
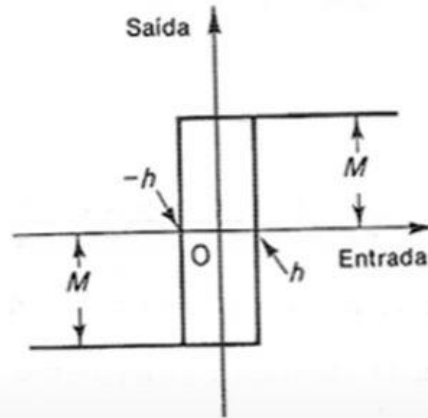


$$N = K - \frac{2K}{\pi} \arcsen\left(\frac{A}{X}\right) + \frac{(4 - 2K)B}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{A}{X}\right)^2}, X \geq A$$

- No caso de inclinações K ou $K_1 = 0$, suprimir das expressões

Funções descritas de não linearidades comuns em controle

Relê com histereses



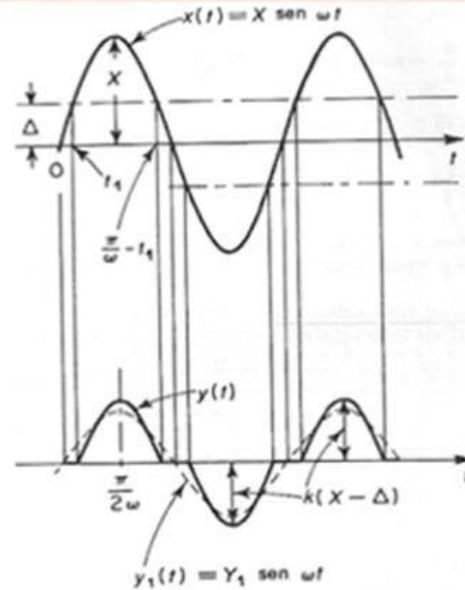
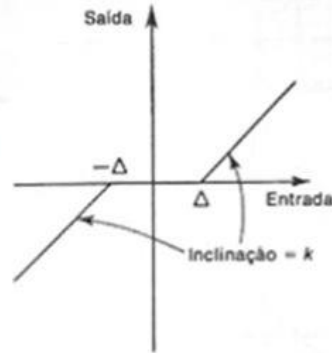
$$\omega t_1 = \arcsen\left(\frac{h}{X}\right)$$



$$N = \frac{4M}{\pi X} \angle -\arcsen\left(\frac{h}{X}\right)$$

Funções descritas de não linearidades comuns em controle

**Zona Morta
(Dead Zone)**



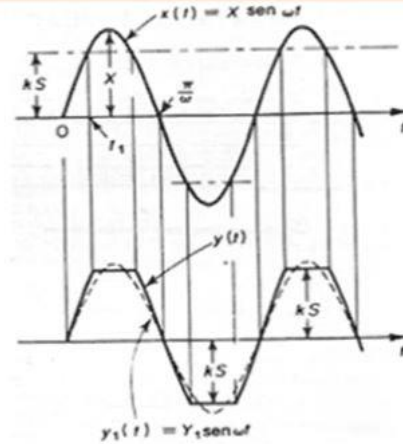
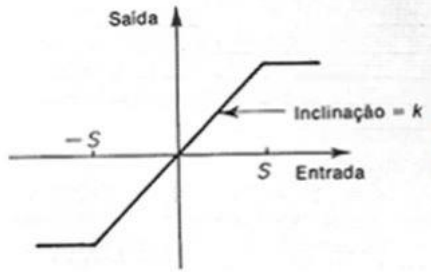
Comportamento da saída

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & , 0 < t < t_1 \\ K(X \operatorname{sen}(\omega t) - \Delta) & , t_1 < t < \frac{\pi}{\omega} - t_1 \\ 0 & , \frac{\pi}{\omega} - t_1 < t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \operatorname{sen}(\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(t) \operatorname{sen}(\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{4K}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} (X \operatorname{sen}(\omega t) - \Delta) \operatorname{sen}(\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{2XK}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsen\left(\frac{\Delta}{X}\right) - \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2} \right] \end{aligned}$$

Funções descritas de não linearidades comuns em controle

Saturação



Função Descritiva

$$N = \frac{2K}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{S}{X}\right) + \frac{S}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{X}\right)^2} \right], X > S$$

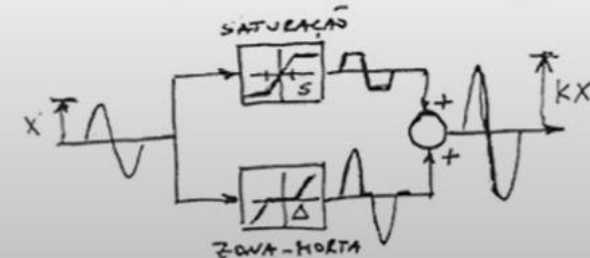
Observação: Semelhante a não linearidade Zona Morta

Zona Morta (Dead Zone)

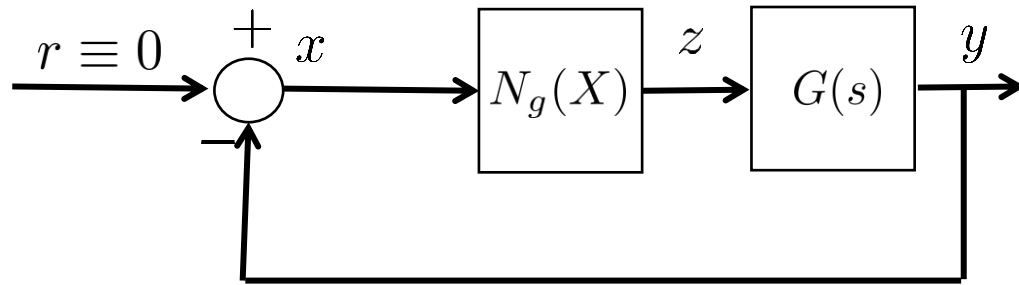
$$N = K - \frac{2K}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{\Delta}{X}\right) + \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2} \right], X > \Delta$$

Comparação as funções descritivas da zona-morta e da saturação

$$N_{\text{Zona Morta}} = K - N_{\text{Saturação}} \quad \text{Se } \Delta = S$$



Existência de ciclo limite



$$x(t) = -y(t)$$

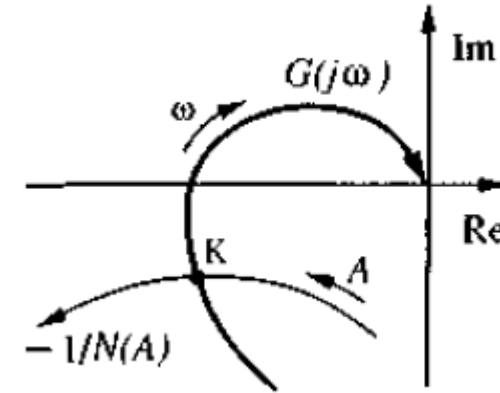
$$y(t) = G(j\omega)z(t) \implies z(t) = N(X)x(t)$$

$$x(t) = -G(j\omega)N(X)x(t) \implies 1 = -G(j\omega)N(X)$$

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(X)}$$

Se há solução (intersecção) das curvas, há ciclo limite

Curva $Re(G(j\omega)) \times Im(G(j\omega))$



$$\left| -\frac{1}{N(X)} \right| = |G(j\omega_c)|$$

$$\angle \phi_1 = \angle G(j\omega)$$

Objetivo: obter (X_c, ω_c) tal que $G(j\omega_c) = -\frac{1}{N(X_c)} \forall X > 0$