

EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira** – UFRN



josenalde.oliveira@ufrn.br

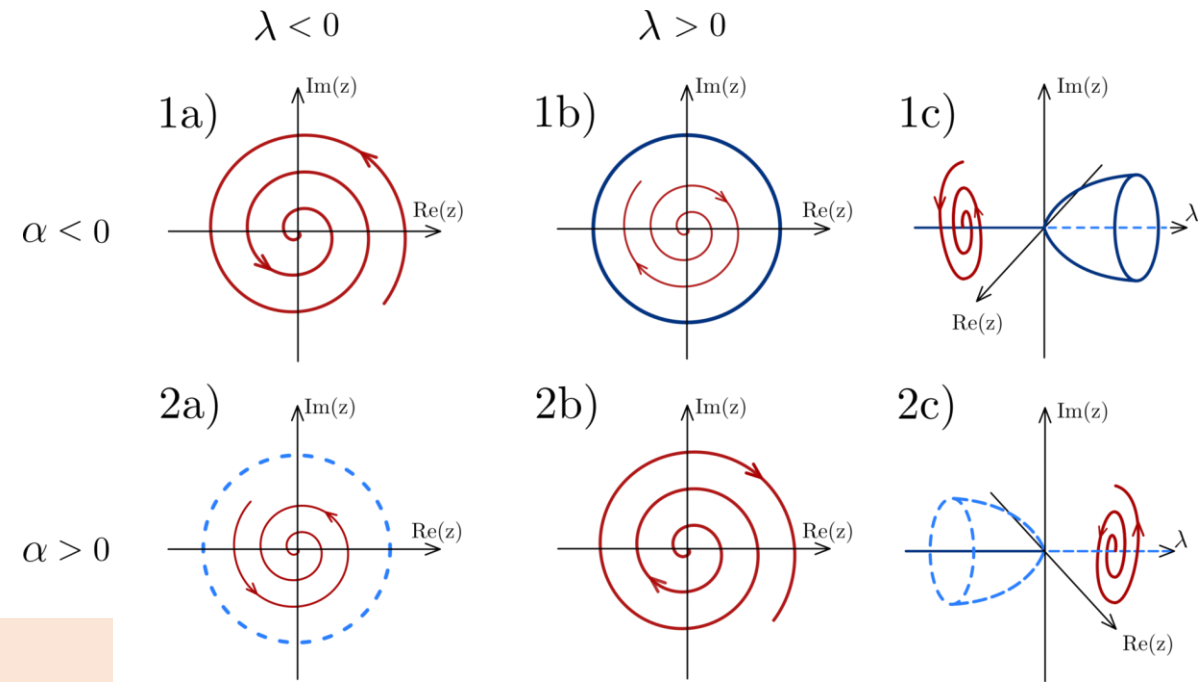
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Ciclo limite – sistemas não conservativos com solução periódica

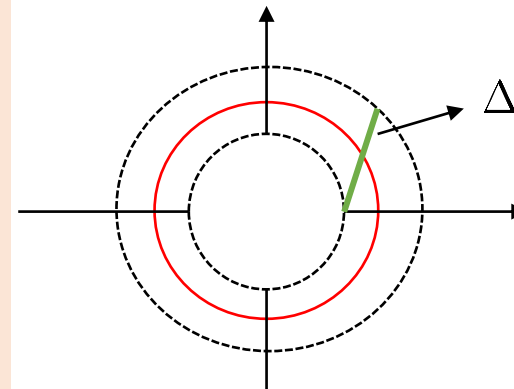
- Existência de ciclo-limite ou auto oscilação
- Um sistema oscila quando tem uma solução periódica não trivial $x(t + T) = x(t), \forall t \geq 0$ para algum $T > 0$
- “não trivial” é usado para excluir soluções constantes correspondentes a pontos de equilíbrio
- Uma solução periódica é uma trajetória fechada no plano de fase

O ciclo-limite é uma solução periódica caracterizada por uma trajetória fechada e **ISOLADA**, ou seja, não existe outra solução periódica numa vizinhança suficientemente pequena do ciclo. As trajetórias numa vizinhança do ciclo ou convergem para o ciclo ou divergem do ciclo

- A oscilação é estruturalmente estável, ou seja, pequenas variações nos parâmetros do sistema não destroem o ciclo limite
- A amplitude da oscilação em regime permanente independe das condições iniciais



Bifurcação Hopf



Em uma vizinhança Δ não há outra solução periódica
 \exists Ciclo limite

Ciclo limite - Exemplos

- Aerodinâmica: Bunton, R.W.; Denegri Jr., C.M. **Limit cycle oscillation characteristics of fighter aircraft**.
Journal of aircraft 37:5, 2000.
- Manipuladores robóticos: Jeon, S.; Tomikuza, M. **Limit cycles due to friction forces in flexible joint mechanisms**
IEEE Int. Conf. on Adv. Intelligent Mechatronics, 723-728, 2005.
H. Olsson and K. J. Astrom, **Friction Generated Limit Cycles**, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 9, No. 4, July 2001, pp. 629-636.
Derek, A. An introduction to nonlinearity in control systems, 2012.
- Biologia: Hodgkin-Huxley (características elétricas de neurônios e células musculares)
Glicólise (Sel'kov)
Brückner, D. B. et al. (2019). "Stochastic nonlinear dynamics of confined cell migration in two-state systems".
Nature Physics. **15** (6): 595–601. [doi:10.1038/s41567-019-0445-4](https://doi.org/10.1038/s41567-019-0445-4)
- Circuitos eletrônicos (van der pol, etc.)
- Garrard, W.; Clark, L. **On the suppression of limit cycle oscillations**. IEEE Trans. On Aut. Control, 1968.
- Schiehlen, W., Guse, N. (2005). **Control of Limit Cycle Oscillations**. IUTAM Symp .
on Chaotic Dynamics and Control of Systems and Processes in Mechanics.
- Canudas-de-Wit et al. The oscillations killer: a mechanism to **eliminate undesired** limit cycles in a class of nonlinear systems
Int. J. of Control, 2012.
- Brito, A. G. Computation of multiple limit cycles in nonlinear control systems – a describing function approach,
Aerosp. Technol. Manag., 3:1, 21-28, 2011.

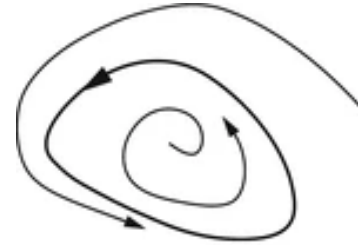
Tipos de ciclo limite - exemplos

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\dot{r} = -r(r^2 - 1)$$

$$r = 1, \dot{r} = 0; r > 1, \dot{r} < 0; r < 1, \dot{r} > 0$$



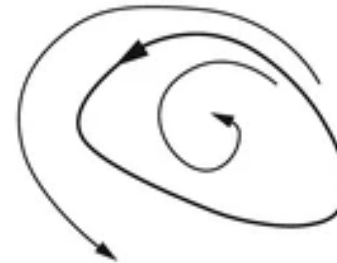
stable limit cycle

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\dot{r} = r^3(r^2 - 1)$$

$$r = 1, \dot{r} = 0; r > 1, \dot{r} > 0; r < 1, \dot{r} < 0$$



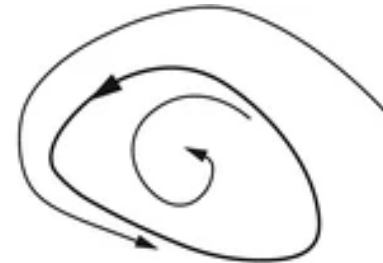
unstable limit cycle

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$$

$$\dot{r} = -r^3(r^2 - 1)^2$$

$$r = 1, \dot{r} = 0; r > 1, \dot{r} < 0; r < 1, \dot{r} < 0$$



half-stable limit cycle

Henri Poincaré



1854-1912

Tipos de ciclo limite – um caso de bifurcação Hopf

Seja o sistema de dimensão 2 dado por

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) = f_\mu(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = +x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) = g_\mu(x_1, x_2).$$

O único ponto de equilíbrio para todo μ é $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Nesse ponto a matriz Jacobiana é

$$J = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

Portanto, os autovalores de J são $\lambda_1 = \mu + i$ e $\lambda_2 = \mu - i$. Então, o equilíbrio é estável para $\mu < 0$ e instável para $\mu > 0$. Conclui-se que no ponto $\mu = 0$ tem-se uma perda de estabilidade. A seguir, estuda-se o que ocorre na região $\mu > 0$. Usando coordenadas polares, definidas por $x_1 = r\cos\theta$ e $x_2 = r\sin\theta$, pode-se reescrever o sistema da seguinte forma

$$\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta = -r\sin\theta + r\cos\theta(\mu - r^2),$$

$$\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = r\cos\theta + r\sin\theta(\mu - r^2).$$

Multiplicando a primeira equação por $\cos\theta$, a segunda por $\sin\theta$, e somando-as tem-se um novo sistema

$$\dot{r} = r(\mu - r^2),$$

$$\dot{r} = r(\mu - r^2),$$

e

$$\dot{\theta} = 1.$$

Verifica-se que existe uma órbita periódica para $\mu > 0$. De fato, em $r = \sqrt{\mu}$ tem-se $\dot{r} = 0$. Além disso, a órbita é estável já que $\dot{r} < 0$ para $r > \sqrt{\mu}$, e $\dot{r} > 0$ para $r < \sqrt{\mu}$. Pode-se ver claramente como isso ocorre na Figura 6.

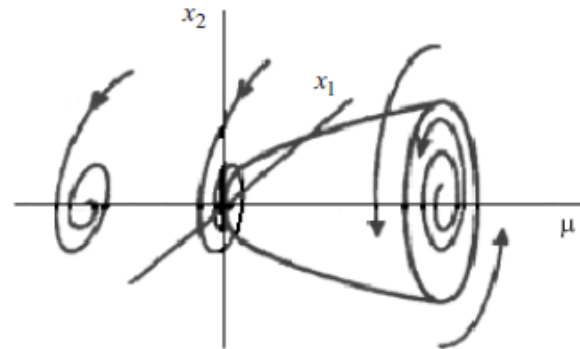


Figura 6: Bifurcação de Hopf.

A bifurcação que ocorre em $\mu = 0$, onde passa-se de um equilíbrio para uma oscilação periódica é chamada de *bifurcação de Hopf*. Esse tipo de bifurcação apresenta a interessante característica de ligar um equilíbrio a movimento periódico via variação de μ .

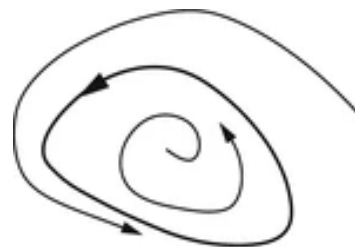
Tipos de ciclo limite – van der Pol

$\ddot{x} + u(x)\dot{x} + v(x) = 0$ Equação de Liénard

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \mu > 0, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$x_1 = x \implies \dot{x}_1 = x_2 = f_1$$

$$x_2 = \dot{x} \implies \dot{x}_2 = -x_1 - \mu(x_1^2 - 1)x_2 = f_2$$



stable limit cycle

Ponto de equilíbrio: $x^* = [0 \ 0]^T$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\mu x_1 x_2 & -\mu(x_1^2 - 1) \end{bmatrix}_{x=x^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \mu > 0, \Delta = 1 > 0, \sigma^2 - 4\Delta = \mu^2 - 4$$

$$1) \mu^2 - 4 > 0 \implies \mu^2 > 4 \implies \mu > 2, \text{ nó instável}$$

$$2) \mu^2 - 4 = 0 \implies \mu = 2, \text{ nó degenerado instável}$$

$$3) \mu^2 - 4 < 0 \implies 0 < \mu < 2, \text{ foco instável}$$

Exercício: plotar isóclinas e inclinações

Supor $\mu = 1$, Esboçar plano de fase com algumas isóclinas

$$\frac{f_2}{f_1} = c \implies x_2 = \frac{x_1}{1 - x_1^2 - c}$$

c	Inclinação °	equação
0	0	$\frac{x_1}{1 - x_1^2}$
1	45	$-1/x_1$
-1	-45	$\frac{x_1}{2 - x_1^2}$
∞	90	$x_2 = 0$

Teorema de Levinson-Smith

Seja um sistema da forma:

$$\ddot{x} + u(x)\dot{x} + v(x) = 0 \text{ Equação de Liénard}$$

E que as seguintes condições são satisfeitas:

a) $u(x)$ é função par e contínua, $u(-x) = u(x)$

b) $v(x)$ é função ímpar, $v(x) > 0$ se $x > 0$, e $v(x)$ é contínua $\forall x$, $v(-x) = -v(x)$

c) $V(x) \rightarrow \infty$ com $t \rightarrow \infty$, onde $V(x) = \int_0^x v(t)dt$,

d) Para algum $k > 0$, onde $U(x) = \int_0^x u(t)dt$
 $U(x) < 0$, $0 < x < k$,
 $U(x) > 0$, $x > k$,
 $U(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$

Então o sistema tem:

- i) Um único ponto crítico na origem
- ii) Uma única trajetória fechada C, que é um Ciclo limite estável em torno da origem
- iii) Todas as outras trajetórias se dirigem a C com t tendendo ao infinito.

Teorema de Poincaré

Para um sistema de segunda ordem, seja N o número de nós (incluindo degenerados), focos ou centros e S o número de pontos de sela englobados por uma trajetória fechada. Então, se a trajetória é um ciclo limite, tem-se

$$N - S = 1$$

Neste caso garante-se que pode ter ciclo limite, pois também pode ser CENTRO. No interior de um ciclo limite existe ao menos um nó ou um foco ou um centro

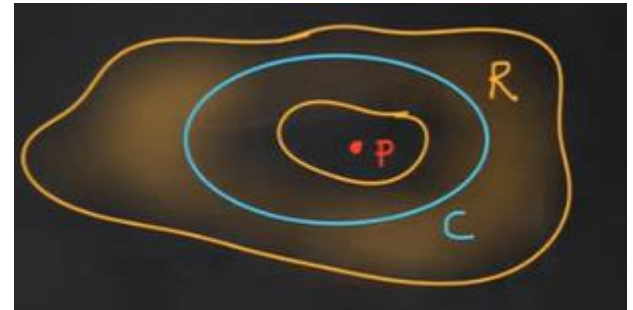
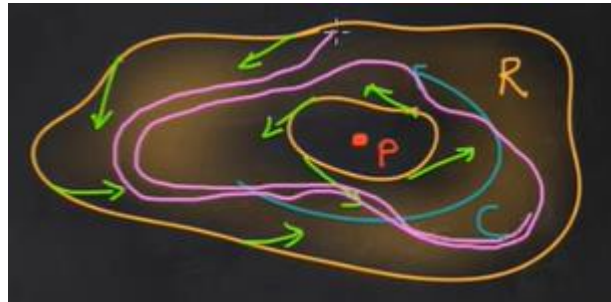
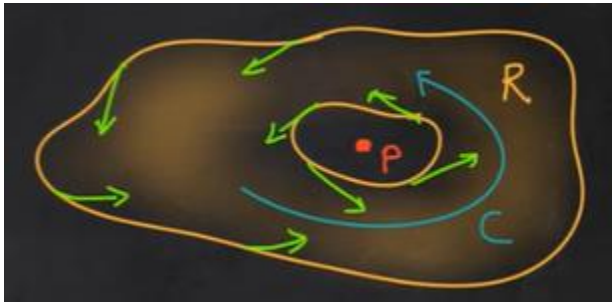
Teorema de Poincaré-Bendixson

Se uma trajetória de um sistema de segunda ordem permanece em uma região finita R , então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- a) A trajetória tende a um ponto de equilíbrio
- b) A trajetória corresponde a um centro
- c) A trajetória tende assintoticamente a um ciclo limite estável ou a um dos tipos de ciclo limite semi-estável
- d) A trajetória é um ciclo limite

Teorema de Poincaré-Bendixson

Seja uma região anelar R , sem pontos de equilíbrio em seu interior, tal que o campo vetorial sempre penetre em R ao longo de sua fronteira, então existe um ciclo limite estável no interior de R



Análise de:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

Teorema (critério) de Bendixson – não existência

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad \sigma = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad \text{Divergente do campo vetorial – traço do Jacobiano}$$

Para um sistema de segunda ordem, nenhum ciclo-limite pode existir em uma região R do plano de fase para a qual

$$\sigma = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \text{ não se anula e não muda de sinal}$$

Prova por contradição usando o **Teorema de Green**

(com componente normal do campo vetorial F)

Para qualquer trajetória, tem-se:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1} \implies f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = 0$$

$$\int_C f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = \int \int_R \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Prova: STEWART, James.
Cálculo: volume 2, 3. ed.,
Cengage, 2013. p. 980-981

George Green (1793-1841)

Teorema

Seja C uma curva fechada, simples e orientada positivamente. Se P e Q são funções reais de duas variáveis com derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre C e na região plana D limitada por C, então

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Se é conservativo, este termo também é zero

Valor da função potencial nos extremos (iguais)=0

Com $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} > 0 (< 0)$ em R não podemos ter

esta integral igual a zero. Assim não podemos ter uma trajetória periódica em R, e, conseqüentemente, um ciclo-limite

Teorema (critério) de Bendixson – não existência

Exemplo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1 x_2^2 = f_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1^2 x_2 = f_2 \end{aligned} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = x_1^2 + x_2^2 > 0, \quad \forall x_1 \neq 0 \text{ e/ou } x_2 \neq 0, \quad R = R^n$$

O sistema não tem ciclo limite no plano de fase

Exemplo: com o critério de Bendixson, analisar condições de existência de ciclo limite

$$\ddot{y} - [b - \frac{10}{3}\dot{y}^2]\dot{y} + y + y^2 = 0$$