EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Método do gradiente variável (VGM)

1) $\dot{x}_1 = -2x_1$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 2x_1x_2^2$$

[1] SCHULTZ, D.G.; GIBSON, J.E. The Variable Gradient Method for Generating Lyapunov Functions. 1962.

Teste de LCF (Lyapunov Candidate Function)

Formas Quadráticas - Teste $V(x) > 0$?

2) $V(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3, \quad V(x) = x^T P x, P > 0$?

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 0.40, \lambda_2 = 3.96, \lambda_3 = 10.63, \text{ logo } P > 0. \text{ Outra forma...}$$

Definição. Seja M uma matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < k \leq m$ e $0 < k \leq n$. Um **menor de ordem** k de M é o determinante de uma matriz quadrada de ordem k obtida pela remoção de $m - k$ linhas e $n - k$ colunas da matriz M.

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 1 \implies |10| > 0; \quad k = 2 \implies det\left(\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) > 0; \quad k = 3 \implies det(P) = 17 > 0$$

Teste de LCF (Lyapunov Candidate Function)

Formas Quadráticas - Teste $V(x) > 0$?

3) $V(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3 + 2x_1x_3, \quad V(x) = x^T Px, P > 0$?

4) $V(x) = ax_1^2 + 2x_1x_2 + ax_2^2 + 4x_2x_3 + ax_3^2, \quad V(x) = x^T Px, P > 0$ para que valores de a?

Teste de LCF (Lyapunov Candidate Function)

5) $$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_2^3$$

com $V(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2$

6) $$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2$$

com $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

Demonstração estabilidade VSS

1. Para o sistema:

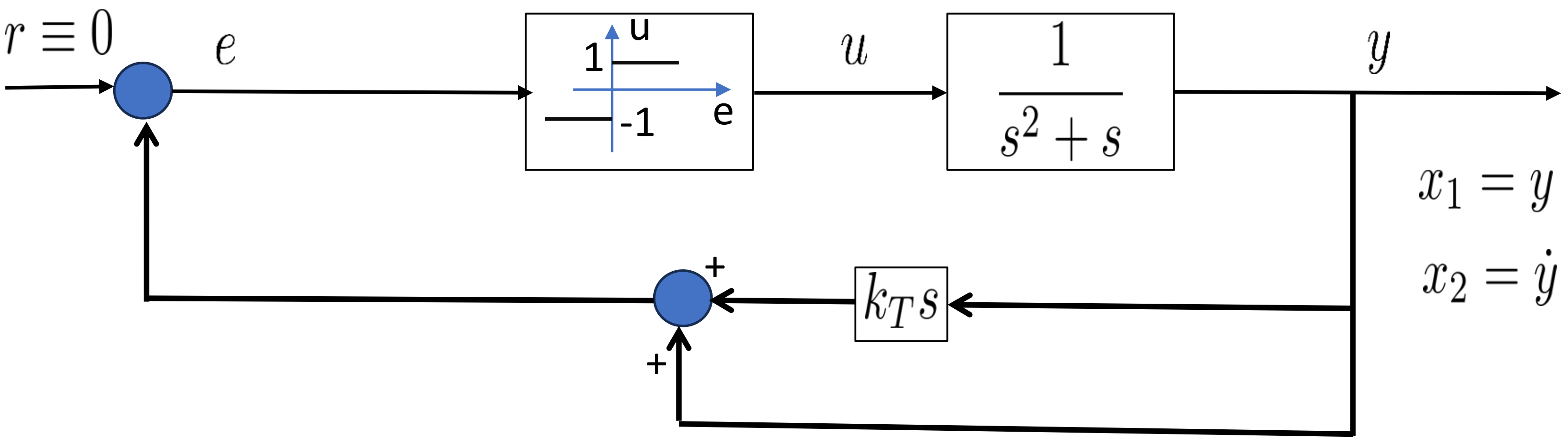
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + u, \quad a_1 = 2, a_2 = -1$$

com $u = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$, $s(x_1, x_2) = cx_1 + x_2$ e $\theta_1 = -\bar{\theta}_1 sign(sx_1)$, $\theta_2 = -\bar{\theta}_2 sign(sx_2)$. Escolha as amplitudes dos relés atendendo as condições suficientes $\bar{\theta}_1 > |a_1|$, $\bar{\theta}_2 > |c + a_2|$, para as inclinações $c = 0.5$ e $c = 2.0$. Simule o sistema para estas condições apresentando e discutindo os gráficos e resultados.

Seja a LCF: $V(s) = \frac{1}{2}s^2 > 0, \quad V(0) = 0$ para $s = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= s\dot{s} \\
&= s[c\dot{x}_1 + \dot{x}_2] \\
&= s[cx_2 + a_1x_1 + a_2x_2 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2] \\
&= csx_2 + a_1 s x_1 + a_2 s x_2 - \bar{\theta}_1 s x_1 sign(sx_1) - \bar{\theta}_2 s x_2 sign(sx_2)] \\
&= -\bar{\theta}_1 |sx_1| + a_1 s x_1 - \bar{\theta}_2 |sx_2| + sx_2(c + a_2)]. \text{ Se } \bar{\theta}_1 > |a_1| \text{ e } \bar{\theta}_2 > |c + a_2| \implies \dot{V} < 0
\end{aligned}$$

Ideia de realimentação tacométrica



$x_1 = y \qquad \dot{x}_1 = x_2$

$x_2 = \dot{y} \qquad \dot{x}_2 = -x_2 + u$

$$e = -(y + k_T\dot{y}) = -(x_1 + k_T x_2)$$

$$\text{Reta de chaveamento: } e = 0 \implies -(x_1 + k_T x_2) = 0 \implies x_2 = -\frac{1}{k_T}x_1$$

$$u = 1, \quad e > 0 \implies -(x_1 + k_T x_2) > 0 \implies x_2 < -\frac{1}{k_T}x_1$$

$$u = 0, \quad e = 0 \implies -(x_1 + k_T x_2) = 0 \implies x_2 = -\frac{1}{k_T}x_1$$

$$u = -1, \quad e < 0 \implies -(x_1 + k_T x_2) < 0 \implies x_2 > -\frac{1}{k_T}x_1$$

Modo deslizante...

9) Considere o sistema:

$$\dot{x}_1 = x_1 + u$$
$$\dot{x}_2 = x_1$$
$$y = x_2$$

a) Mostre que a lei de controle $u = -2x_1 - sign(x_1 + x_2)$ tornará $\sigma(x) = x_1 + x_2 = 0$ em modo deslizante

b) Obtenha a dinâmica na superfície deslizante $\sigma(x) = 0$

Seja a LCF $V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2$

$$\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} = (x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = (x_1 + x_2)(2x_1 + u) = -(x_1 + x_2)sign(x_1 + x_2) = -|x_1 + x_2| < 0$$

Logo, $\sigma(x) \to 0$

Na superfície $\dot{\sigma}(x) = 0 \implies \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_1 + u + x_1 = 0 \implies u = -2x_1$ e $\dot{x}_1 = -x_1$

Mais sobre não linearidades...

Consider the model of a motor with a nonlinear valve in Figure 1.7. Assume

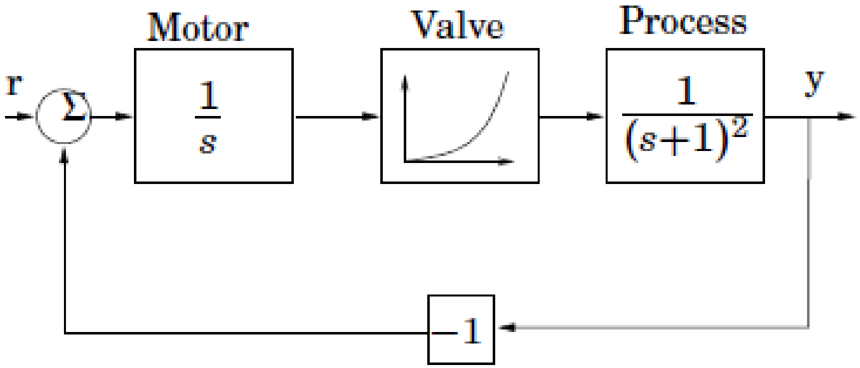


Figure 1.7 Block diagram of system in Exercise 1.8.

that the valve characteristic is given by $f(x) = x^2$ (this is unrealistic for $x < 0$).

(a) Choose appropriate state variables and write down the state equations.

(b) For which constant input amplitudes $r > 0$ does the system have a locally stable equilibrium?

(c) What would be a more realistic valve model for $x < 0$?

$$u = f(x) = x^2$$

Seja $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3$ a entrada da válvula

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_2 - x_1 + f(x_3)$$
$$e = r - x_1 \implies \dot{x}_3 = r - x_1$$

Para r constante, o ponto é dado por $x = (r, 0, \pm\sqrt{r})$

Mais sobre não linearidades...

Linearizando para $x = (r, 0, \sqrt{r})$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2\sqrt{r} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \text{cuja equação característica é } \lambda^2(\lambda+2)+\lambda+2\sqrt{r}=0$$

Para um polinômio genérico ter raízes com parte real negativas $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$

$a, b, c > 0$ e $ab > c$. Como $a = 2, b = 1, c = 2\sqrt{r}, 2 > 2\sqrt{r},$ se $0 < r < 1$

Mais sobre não linearidades...

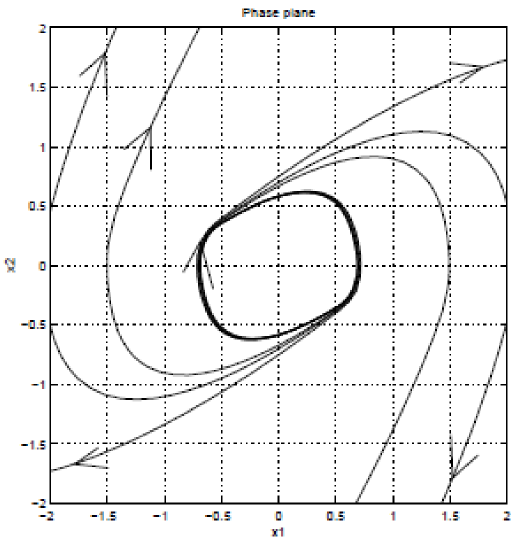
Saturações constituem uma restrição severa à estabilização de sistemas. Sejam os 3 sistemas abaixo:

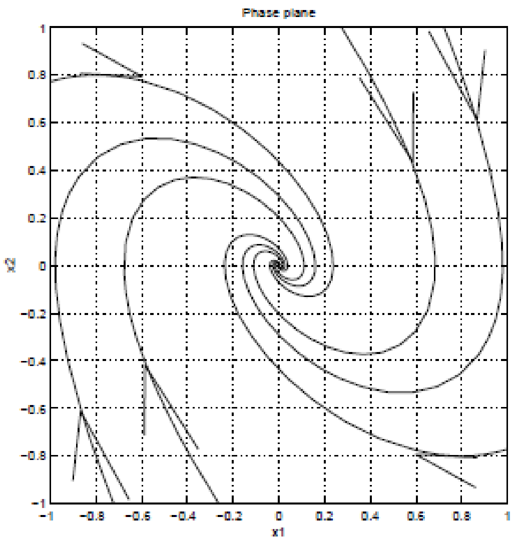
a) $\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 - sat(2x_1 + 2x_2)$

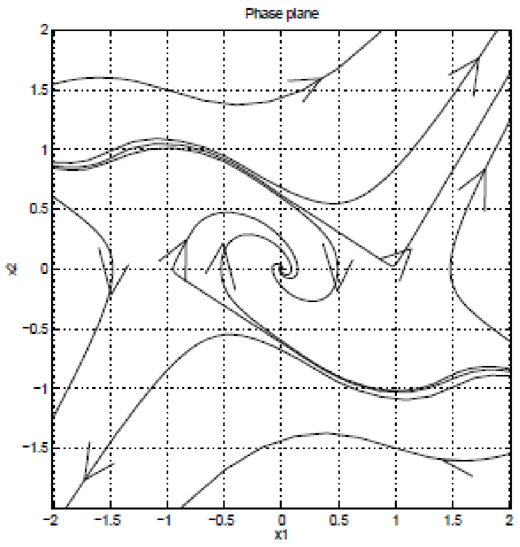
b) $\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 - sat(3x_2)$

c) $\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 - sat(-x_1 - x_2)$

Qual o retrato de fase para cada sistema acima?







OBS:

$$u = sat_k(v), \quad v = v(x_1, x_2)$$
$$sat_k(v) = k, \quad v \geq k$$
$$sat_k(v) = v, \quad -k < v < k$$
$$sat_k(v) = -k, \quad v \leq -k$$

Estimando domínio de atração

8) Considere o sistema não linear:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + g(x)$$

a) Mostre que $V(x) = 0.5x^T x$ é uma função Lyapunov para o sistema quando $g(x) = 0$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= -x_1^2 - x_2^2 < 0\end{aligned}$$

b) Use a Função de Lyapunov para mostrar que o sistema é globalmente assintoticamente estável para todo $g(x)$ que satisfaz

$$g(x) = g(x_2)$$
$$sign(g(x_2)) = -sign(x_2)$$

Estimando domínio de atração

b) Use a Função de Lyapunov para mostrar que o sistema é globalmente assintoticamente estável para todo $g(x)$ que satisfaz

$$g(x) = g(x_2)$$
$$sign(g(x_2)) = -sign(x_2)$$

$$\dot{x} = Ax + g(x) \text{ e } V(x) = x^T P x > 0$$

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2x^T P g(x) = -x^T Q x + 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g(x_2) \end{bmatrix}$$

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 + x_2 g(x_2) < 0$$

$$< 0$$

Estimando domínio de atração

c) Seja $g(x) = x_2^3$. Não satisfaz b), mas pela linearização é localmente assintoticamente estável

Simulações mostram que para valores iniciais grandes, o sistema instabiliza. Pode se encontrar valores "seguros"

i) Mostre que $\dot{V} < 0$ para $|x_2| < 1, \quad \forall t$

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 + x_2 g(x_2)$$

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 + x_2^4 = -x_1^2 - x_2^2(1 - x_2^2)$$

$$(1 - x_2^2) > 0 \implies x_2^2 < 1 \implies |x_2| < 1$$

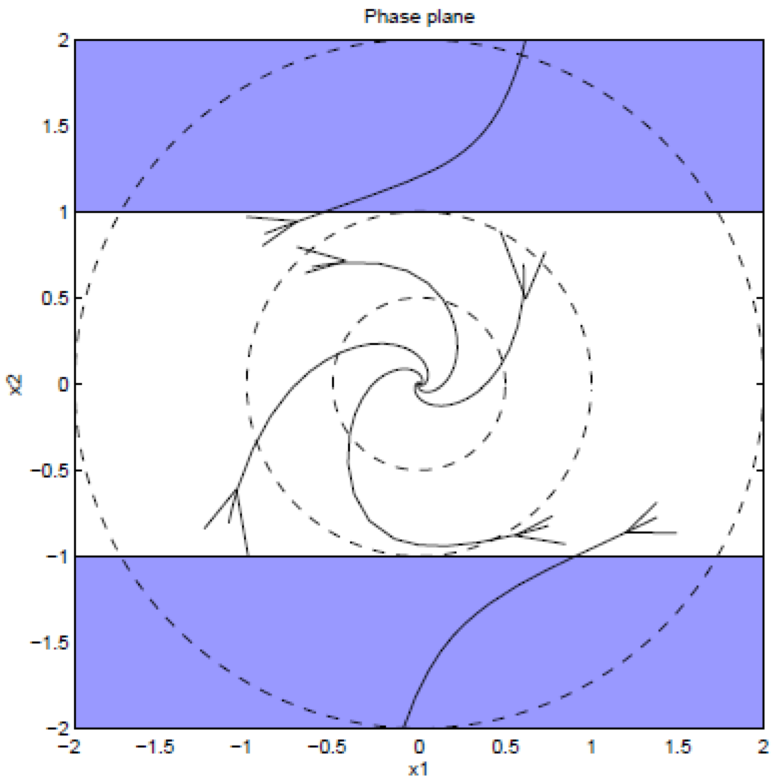
ii) Relembre que curvas de nível de uma função Lyapunov são conjuntos invariantes
Conclua que a região de atração pode ser estimada como o maior conjunto $\Omega = \{x : V(x) \leq \gamma\}$
para a qual $|x_2| < 1$. Calcule o valor máximo de γ

Como $V(x) = 0.5x_1^2 + 0.5x_2^2 = \gamma$ define círculos, para $x_2 = 1 \implies x_1 = 1, \quad V(x) = 1$

Estimando domínio de atração

c) Seja $g(x) = x_2^3$. Não satisfaz b), mas pela linearização é localmente assintoticamente estável

$$\Omega = \{x : V(x) < 1\}$$



Noções de ciclo limite

Seja o sistema não linear:

$$\dot{x} = x - y - x^3 - xy^2$$
$$\dot{y} = x + y - x^2y - y^3$$

a: encontre as equações de evolução em coordenadas polares

$$\dot{r} = r - r^3 = r(1 - r^2), \quad r > 0$$
$$\dot{\theta} = 1$$

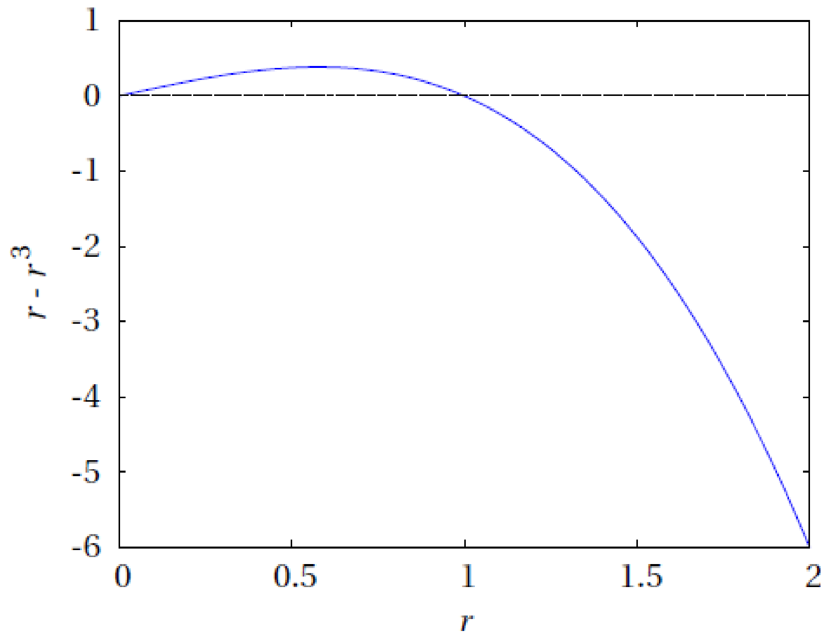
b: plote o gráfico $\dot{r} \times r$ verificando se o ciclo limite é único, e se é atrativo ou repulsivo

Única raiz em $r = 1$, atrativo, com raio 1

c: qual a equação do ciclo limite em função de (x, y)

$$x^2 + y^2 = 1$$

d: corrobore com o traçado do plano de fase em (x, y)



CL ESTÁVEL

Origem é FOCO INSTÁVEL