EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Método do gradiente variável (Variable gradient)

Método formal para encontrar função de Lyapunov [1]
Assume que o gradiente da função desconhecida possui determinada forma padrão
E obtém V por integração deste gradiente
Recorre ao conceito de rotacional do campo vetorial
Aplicável a sistemas não lineares autônomos, para investigação de estabilidade assintótica

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0$$

∇V : Gradiente de V com n componentes a determinar

$V(x)$: Candidata a função de Lyapunov, explicitamente em x, mas não em t

$$\dot{V} = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}$$

$$\dot{V} = \nabla V_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \nabla V_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + \nabla V_n \frac{\partial x_n}{\partial t}, \text{ onde } \nabla V_i \quad (i = 1, 2, ..., n) \text{ é a derivada direcional } \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

Método do gradiente variável (Variable gradient)

$$\dot{V} = \nabla V_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \nabla V_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + \nabla V_n \frac{\partial x_n}{\partial t}, \text{ onde } \nabla V_i \quad (i = 1, 2, ..., n) \text{ é a derivada direcional } \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$\dot{V} = (\nabla V)^T \dot{x}, \quad \nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \\ \vdots \\ \nabla V_n \end{bmatrix}$$

$$\text{logo } V(x) = \int_0^x (\nabla V)^T dx,$$

OBS: x pode ser qualquer ponto no espaço de fase $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$

$$V = \int_0^{x_1,(x_2=x_3...=x_n=0)} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2,(x_1=x_1,x_3=x_4...=x_n=0)} \nabla V_2 dx_2 + \int_0^{x_n,(x_1=x_1,x_2=x_2,...x_{n-1}=x_{n-1})} \nabla V_n dx_n$$

Integrais de linha...

Método do gradiente variável (Variable gradient)

Para que haja apenas uma função escalar V obtida a partir do gradiente, as condições rotacionais precisam ser atendidas, que são $\dfrac{n(n-1)}{2}$ equações

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i}, \quad (i = j = 1, 2, ..., n) \quad \text{que para } n = 2, \quad \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1}$$

Isto pode ser visto pelo fato da matriz Φ ser simétrica

Uma equação

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V_n}{\partial x_2} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_n} & \frac{\partial V_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial V_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

O rotacional do gradiente é identicamente nulo,
visto ser campo conservativo, não gira

Vídeo 1: curl equation basics
https://www.youtube.com/watch?v=eEwZeY51mT0
Vídeo 2: curl equation basics
https://youtu.be/qF9Kz37Ksq0

Prova: desenvolver determinante para i,j,k e Teorema de Clairaut-Schwartz para derivadas parciais cruzadas em funções de várias variáveis

Método do gradiente variável (Variable gradient)

O princípio do método é escolher uma forma para o gradiente, ao invés de uma forma para a função

Passo 1: resolver o sistema para a_{ij} atendendo às condições rotacionais

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Forma linear no estado

$$\nabla V = \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{matrix} \quad , \quad a_{ii} > 0$$

Passo 2: determinar $\dot{V} = (\nabla V)^T \dot{x}$, restringindo-a para que seja definida negativa

Passo 3: determinar V pela integral de linha

Método do gradiente variável (Variable gradient)

Exemplo 1:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3$$

Passo 1: $\nabla V = \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{matrix}$

Passo 2:
$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nabla V_1 \dot{x}_1 + \nabla V_2 \dot{x}_2 \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(-x_2 - x_1^3) \\ &= a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_2^2 - a_{21}x_1^4 - a_{22}x_2x_1^3 - a_{21}x_1x_2 - a_{22}x_2^2 \\ &= (a_{11} - a_{21} - a_{22}x_1^2)x_1x_2 - a_{21}x_1^4 + (a_{12} - a_{22})x_2^2 \end{aligned}$$

Condições para $\dot{V} < 0$:

a) $a_{11} - a_{21} - a_{22}x_1^2 = 0 \implies a_{11} = a_{21} + a_{22}x_1^2$

b) $a_{21} > 0$

c) $a_{12} - a_{22} < 0 \implies a_{12} < a_{22}$

Se fizermos $a_{22} = 3, a_{12} = 2$ $\quad \dot{V} = -a_{21}x_1^4 - x_2^2$

Método do gradiente variável (Variable gradient)

Exemplo 1:

Se fizermos $a_{22} = 3, a_{12} = 2 \quad a_{11} = a_{21} + 3x_1^2$

$$\nabla V = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_{21}x_1 + 3x_1^3 + 2x_2$$

$$a_{21}x_1 + 3x_2$$

Aplicando a equação de rotação para achar a_{21}

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} \implies \frac{\partial \nabla (a_{21}x_1 + 3x_1^3 + 2x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla (a_{21}x_1 + 3x_2)}{\partial x_1}$$

$$2 = a_{21}$$

$$\nabla V = \begin{matrix} 2x_1 + 3x_1^3 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{matrix} \qquad \dot{V} = -2x_1^4 - x_2^2 < 0$$

Método do gradiente variável (Variable gradient)

Passo 3: determinar V pela integral de linha

$$V = \int_0^{x_1,(x_2=0)} (2x_1 + 3x_1^3 + 2x_2)dx_1 + \int_0^{x_2,(x_1=x_1)} (2x_1 + 3x_2)dx_2$$

$$= x_1^2 + \frac{3}{4}x_1^4 + 2x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{3}{4}x_1^4 = (x_1 + x_2)^2 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{3}{4}x_1^4 > 0$$

Método do gradiente variável (Variable gradient)

Exercício de Fixação :

$$\dot{x}_1 = -2x_1$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 2x_1x_2^2$$

[1] SCHULTZ, D.G.; GIBSON, J.E. The Variable Gradient Method for Generating Lyapunov Functions. 1962.