EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Termos não lineares em controladores

- A introdução de termos não lineares pode agregar características desejáveis
  - Exemplo: seja a planta $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{(s+a)(s+b)}, \quad b > a > 0.$ inicialmente

com um controlador proporcional com ganho K_p. Em malha fechada, com uma entrada $r(t) = r, \quad R(s) = \dfrac{r}{s}$ e com realimentação unitária

$$E(s) = \frac{(s+a)(s+b)}{(s+a)(s+b)+K_p}\frac{r}{s}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{abr}{ab+K_p}$$

Ou seja, se K_p for grande, o erro é pequeno, mas saída apresenta grandes oscilações. Então sugere-se um PI para garantir erro nulo em regime.

Lembrete:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{\boxed{(s+a)(s+b)+K_p}}$$

Polos em Malha Fechada

Termos não lineares em controladores

- Vamos analisar um PI

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt \implies$$

$$U(s) = K_p E(s) + K_i \frac{1}{s} E(s) \implies$$

$$U(s) = \frac{K_p s + K_i}{s} E(s)$$

$$E(s) = \frac{\cancel{s}(s+a)(s+b)}{s(s+a)(s+b) + K_p s + K_i} \frac{r}{\cancel{s}}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = 0$$

Visto o PI introduzir um polo na origem e um zero, vamos posicionar o zero sobre o polo da planta em –a, logo:

$$K_p s + K_i = 0 \implies$$

$$s = \frac{-K_i}{K_p} = -a \implies$$

$$K_i = aK_p$$

Logo, um Kp pequeno tem polos complexos conjugados mais próximos do eixo real, com pequenas oscilações mas resposta lenta. Com um Kp grande os polos complexos conjugados se afastam do eixo real, com grandes oscilações, embora com resposta rápida. Uma ideia interessante seria introduzir um termo não linear na componente proporcional, que não altere o sinal do termo com um fator de ponderação, por exemplo:

$$u(t) = K_p(e + \alpha e^3) + K_i \int_0^t e(t)dt, \quad \alpha > 0$$

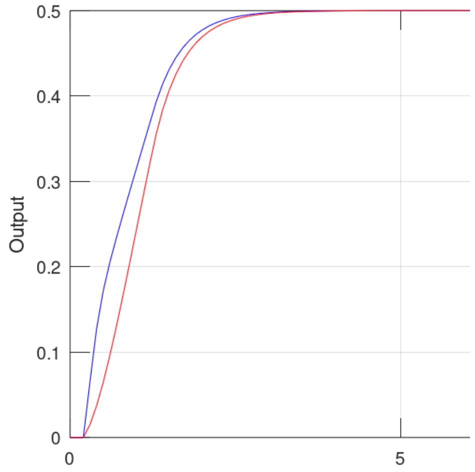
Termos não lineares em controladores

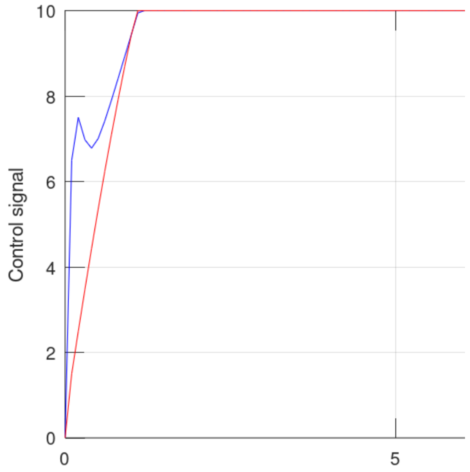
- Logo, para: $$u(t) = K_p(e + \alpha e^3) + K_i \int_0^t e(t)dt, \quad \alpha > 0$$

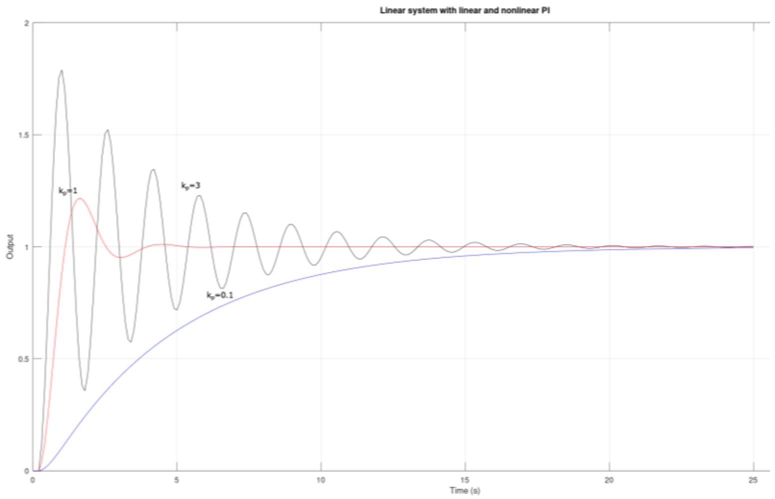
$$e(t) \quad \text{grande} \implies \alpha e^3 \quad \text{muito grande}$$

$$e(t) \quad \text{pequeno} \implies \alpha e^3 \quad \text{muito pequeno}$$

Esta introdução de termo não linear permite uma convergência rápida com poucas oscilações, podendo-se utilizar o ganho proporcional correspondente aos polos mais próximos ao eixo real







https://github.com/josenalde/nonlinear_systems/blob/main/scripts/nl_pi.m

Termos não lineares em controladores

- Neste outro exemplo, um controlador por realimentação linear aplicado ao sistema não linear só controla o sistema linearizado em torno da origem (ponto de equilíbrio estável), mas se aplicado ao sistema não linear não se tem estabilidade global assintótica.

$$\dot{x} = \theta x^3 + u$$

$$y = x, \quad \text{com } x_f = 0$$

Seja um controlador por realimentação linear $u = -Kx$. Se aplicado ao sistema linearizado...

$$\dot{x} = u$$

$$y = x$$

Contudo em malha fechada com o sistema completo:

$$\dot{x} = \theta x^3 - Kx = x(x^2 - \frac{K}{\theta})$$

$$x(x^2 - \frac{K}{\theta}) = 0, \quad x = 0; x = \pm\sqrt{\frac{K}{\theta}}$$

Para $\theta = 1, \quad f'(x) = 3x^2 - K,$ x=0 estável

$$\Longrightarrow f'(x) = -K, f'(x) < 0, K > 0$$

$$f'(x) = 3\left(\sqrt{\frac{K}{\theta}}\right)^2 - K$$

$$f'(x) = 3K - K = 2K, f'(x) > 0, K > 0$$

Ou seja, não importa K, não se obtém estabilidade global assintótica

Termos não lineares em controladores

- Mas se o controlador incluir termo não linear

$$\dot{x} = \theta x^3 + u$$

$$y = x, \quad \text{com } x_f = 0$$

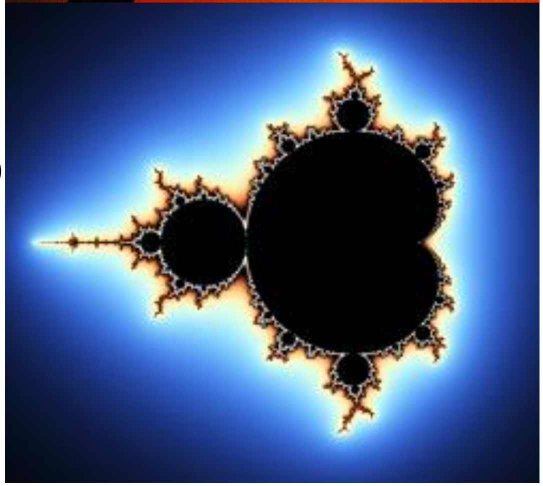
Seja um controlador por realimentação não linear $u = -\theta x^3 - Kx$

A não linearidade é agora compensada

Termos não lineares em controladores

- Estudo do fenômeno Caos
    - Uma não linearidade pode ser compreendida a partir da ideia de que pequenas causas podem estar associadas a grandes efeitos
    - “usar o termo sistema não-linear na ciência é o mesmo que usar o termo “animal não-elefante” para se referir a zoologia em geral” (Ilya Prigogine, 1917-2003)
    - Comportamento caótico representa a irregularidade de um sistema dinâmico. Destaca-se a sensibilidade às condições iniciais, o que implica que a evolução do sistema pode ser alterada por pequenas perturbações
    - Tem-se um sistema determinístico, contudo seu futuro pode ser incerto
    - A estrutura de uma resposta caótica é muito rica, possui grande flexibilidade e pode ser explorada e analisada...

> *“o caos revela que, em vez de resistir às incertezas da vida devemos aproveitá-las” Briggs & Peat (2000).*



Conjunto de Mandelbrot

Termos não lineares em controladores

- Estudo do fenômeno Caos
  - Não confundir com um sistema aleatório, onde o próprio modelo ou entrada podem ser estatisticamente imprecisos e a variação temporal da saída não pode ser predita exatamente, apenas com medidas estatísticas
  - Exemplos: sistema massa-mola-amortecedor levemente amortecida com excitação senoidal de grande amplitude

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^5 = 6sen(t)$$
$$x(0) = 2, \dot{x}(0) = 3$$
$$x(0) = 2.01, \dot{x}(0) = 3.01$$

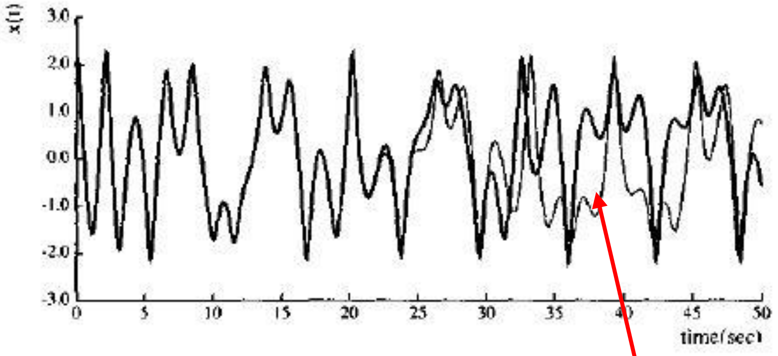


Figure 1.6 : Chaotic behavior of a nonlinear system

$$\ddot{x} + 0.05\dot{x} + x^3 = 7.5cos(t)$$
$$x(0) = 3, \dot{x}(0) = 4$$
$$x(0) = 3.01, \dot{x}(0) = 4.01$$

  - Comum em mecânica de fluidos,

dinâmica atmosférica (Lorenz)-marco do estudo do caos

  - Poincaré, Chua, Rössler, Lotka-Volterra, Duffing, Watson&Lovelock(1983)

Termos não lineares em controladores

Brocolis - zoom

- Estudo do fenômeno Caos
  - Conjunto de Mandelbrot (geometria da natureza/fractais – objetos sólidos/atratores estranhos)

$$x_{n+1} = x_n^2 + C, \quad x_0 = 0$$

A descrição quadro a quadro da realidade proporcionada por um modelo matemático de um sistema dinâmico tem duas possibilidades:
a) Equações diferenciais (fluxos contínuos no tempo e no espaço)
b) Mapas (evolução no tempo expressando o estado em função do instante anterior – sistema discreto

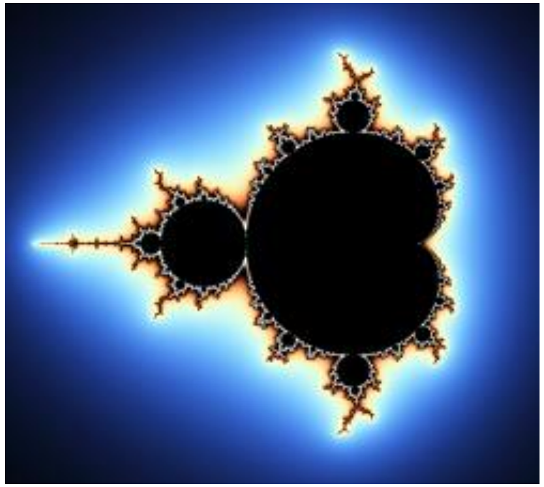
$$x_1 = x_0^2 + C = C$$
$$x_2 = x_1^2 + C = C^2 + C$$
$$x_3 = x_2^2 + C = (C^2 + C)^2 + C...$$

- Dependendo de C, a série converge (estabiliza ou alterna-se) ou diverge
  - Se diverge, ponto não é incluído (pintado)

$C = 1 \longrightarrow$ diverge

$C = -2 \longrightarrow$ Converge Z=2

$C = \sqrt{-1} = j \longrightarrow$ Alterna entre $-j, -1 + j$



Conjunto de Mandelbrot (1982)

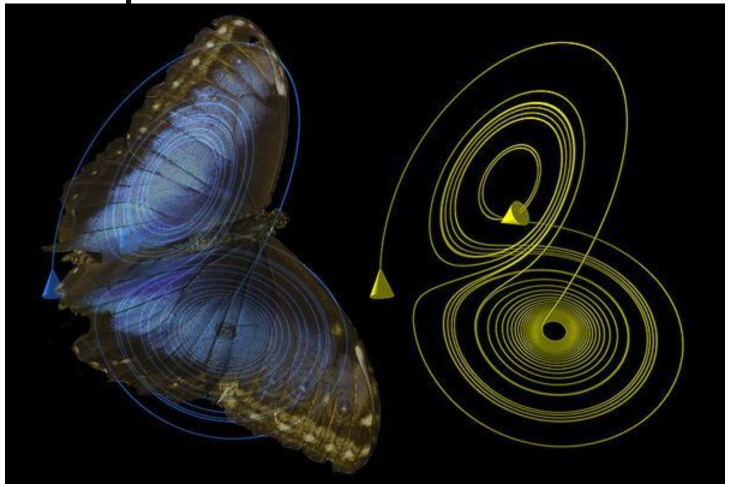
Termos não lineares em controladores

- Estudo do fenômeno Caos
  - Modelo matemático para previsão do tempo (Lorenz)
  - Baseado em temperatura, umidade, pressão e direção do vento
  - Ao replicar experimento, com aparentemente mesmas condições, previsões completamente diferentes (causa: arredondamentos do computador)
  - Mas, embora o caos faça parecer que tudo se move de forma aleatória, desordenada ou imprevisível, na verdade o próprio caos cria padrões ao longo do tempo.
  - Mapas caóticos: sistema populacional logístico (May, 1976)

$$x_{i+1} = \alpha x_i(1 - x_i), \quad \alpha > 0$$

  - A medida que a população se torna muito grande, os insetos irão exaurir seus alimentos o que provocaria a morte de alguns deles antes de atingir a maturidade necessária para colocar ovos

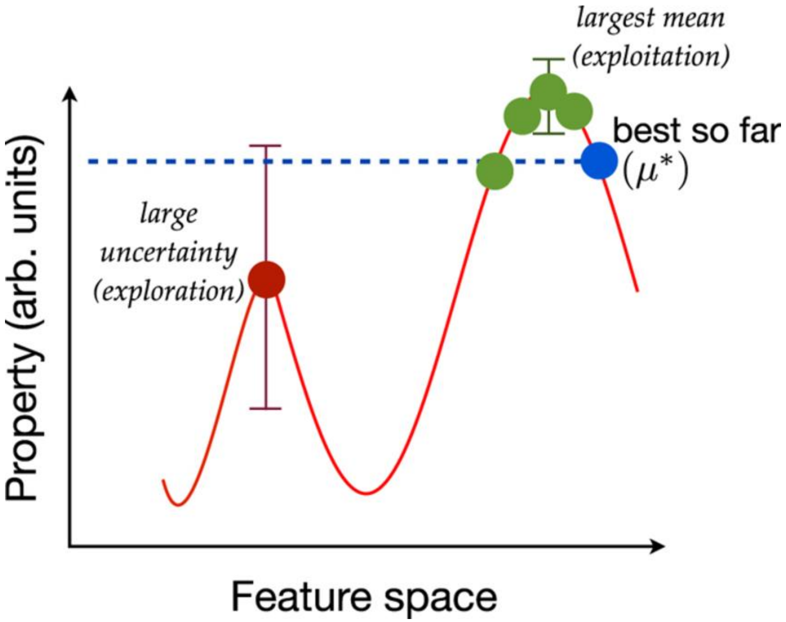
Simule para diferentes valores de $\alpha = 2.9, 3.2, 3.5, 4...$



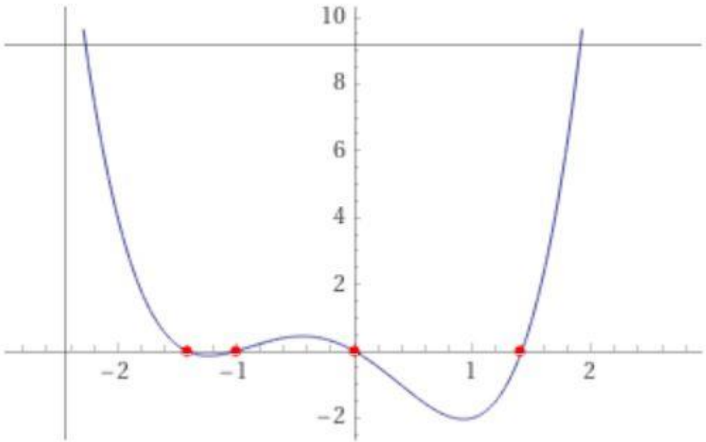
Efeito borboleta
(Lorenz, 1961)

Termos não lineares em controladores

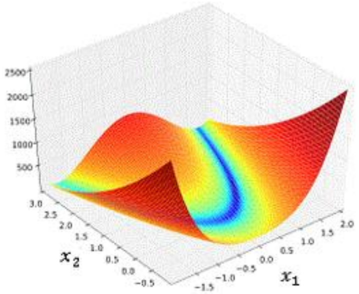
- Estudo do fenômeno Caos: analisar artigo oliveira2017
  - Aplicações em otimização de funções/métodos de busca heurísticos, com etapas de *exploration* (busca global, learning) e *exploitation* (local, decisões, reduz espaço de busca)



$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x = 0$$

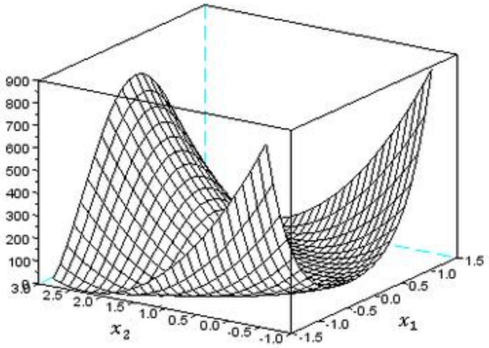


$$f(x,y) = 100(x_1 - x_2^2)^2 + (1 - x_1)^2$$



(a)

Rosenbrock



(b)