

EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN



josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

24T12 (60h) (13:00-14:40h) – 22.08.2022 : 21.12.2022

Teorema de Krasoviskii

Escolha de Função de Lyapunov

Determina Função que garanta a máxima região de estabilidade quando o ponto de equilíbrio não tem estabilidade global

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0$$

$$F(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow \text{Jacobiano do sistema dinâmico}$$

$$F^T(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T$$

$$\text{Função de Lyapunov: } V(x) = f^T(x)f(x)$$

$$\hat{F}(x) = F^T(x) + F(x)$$

$$\text{Se } \hat{F}(x) < 0 \implies \dot{V} < 0 \text{ assintoticamente estável}$$

Teorema de Krasoviskii

Prova:

$$\hat{F}(x) = F^T(x) + F(x)$$

$$|\hat{F}(x)| = 0 \text{ se } x = 0 \text{ e } \neq 0 \text{ para } x \neq 0, \quad \text{pois } f(0) = 0, f(x) \neq 0, x \neq 0$$

Seja uma Candidata à Função de Lyapunov: $V(x) = f^T(x)f(x) > 0$

$$\dot{V}(x) = \dot{f}^T(x)f(x) + f^T(x)\dot{f}(x)$$

$$\dot{f}(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = F(x)\dot{x} = F(x)f(x)$$

$$\text{Se } \hat{F}(x) < 0 \implies \dot{V}(x) < 0$$

$$\dot{V}(x) = [F(x)f(x)]^T f(x) + f^T(x)F(x)f(x)$$

$$\dot{V}(x) = f^T(x)F^T(x)f(x) + f^T(x)F(x)f(x)$$

$$\dot{V}(x) = f^T(x)[F^T(x) + F(x)]f(x) = f^T(x)\hat{F}(x)f(x)$$

Teorema de Krasoviskii

Exemplo 1:

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3$$

1. Obter Jacobiano $F(x)$
2. Obter transposta
3. Somar Jacobiano com transposta do Jacobiano
4. Verificar se é definida negativa a resultante (produto dos menores principais < 0)

$$V(x) = f^T(x)f(x) = x_1^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 > 0$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow \infty \quad (GAS)$$

Teorema de Krasoviskii

Exemplo 2:

$$\dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3$$

$$V(x) = f^T(x)f(x) = (-6x_1^2 + x_2)^2 + (2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3)^2 > 0$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow \infty \quad (GAS)$$

1. Obter Jacobiano $F(x)$
2. Obter transposta
3. Somar Jacobiano com transposta do Jacobiano
4. Verificar se esta soma é definida negativa a resultante (produto do menores principais < 0)

Teorema de Krasoviskii

Exemplo 3:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

$$V(x) = f^T(x)f(x) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 > 0$$

$$\hat{F} < 0 \text{ para } |x_2| < 1 \implies \dot{V} < 0 \text{ para } |x_2| < 1$$

1. Obter Jacobiano $F(x)$
2. Obter transposta
3. Somar Jacobiano com transposta do Jacobiano
4. Verificar se esta soma é definida negativa a resultante (produto do menores principais < 0), ou qual a condição para ser negativa

Teorema generalizado de Krasoviskii

Condição suficiente para estabilidade assintótica:

Existem matrizes simétricas $P > 0$ e $Q > 0$, tal que

$$\hat{F}(x) = F^T P + P F + Q$$

é negativa semi-definida em alguma vizinhança Ω da origem. A função

$V(x) = f^T(x) P f(x)$ é função de Lyapunov para o sistema

Se $\Omega = R^n$ e, ainda, $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$, o sistema é GAS

$$\dot{V}(x) = f^T(x)[F^T(x)P + PF]f(x) \quad , Q = -[F^T(x)P + PF(x)] \\ -Q < 0$$

Teorema generalizado de Krasoviskii

Exemplo 4:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$V(x) = f^T(x)P f(x)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} . \text{ Mas } P = P^T \implies p_{21} = p_{12}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad p_{11} > 0 \text{ e } p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$$
$$p_{22} > 0$$

$$\hat{F}(x) = F^T P + P F + Q$$

$$Q = -[F^T P + P F]$$

$$Q = -\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -3x_1^2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 6x_1^2 p_{12} & 3x_1^2 p_{22} - p_{11} + p_{12} \\ 3x_1^2 p_{22} - p_{11} + p_{12} & -2p_{12} + 2p_{22} \end{bmatrix}$$

Teorema generalizado de Krasoviskii

Exemplo 4: $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} > 0$, $p_{11} > 0$ e $p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$

Condições para positiva definida

$$Q = \begin{bmatrix} 6x_1^2 p_{12} & 3x_1^2 p_{22} - p_{11} + p_{12} \\ 3x_1^2 p_{22} - p_{11} + p_{12} & -2p_{12} + 2p_{22} \end{bmatrix}$$

$p_{22} > 0$

Condições para positiva definida

- 1) $6x_1^2 p_{12} > 0$, $p_{12} > 0$, $x_1 \neq 0$
- 2) $6x_1^2 p_{12}(-2p_{12} + 2p_{22}) - (3x_1^2 p_{22} - p_{11} + p_{12})^2 > 0$

Se $p_{12} = p_{22}$, Q se torna indefinida

Se $p_{11} = p_{12}$, P se mantém definida positiva para $p_{22} > \beta p_{12}$, $\beta > 1$

$$12x_1^2 p_{12}^2(-1 + \beta) - 9x_1^4 \beta^2 p_{12}^2 > 0$$

$$4(-1 + \beta) - 3x_1^2 \beta^2 > 0 \implies x_1^2 < \frac{4}{3} \left(\frac{\beta - 1}{\beta^2} \right)$$

Maior valor de x_1 para $\beta = 2$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x_1 < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Teorema generalizado de Krasovskii

Maior valor de x_1 para $\beta = 2$

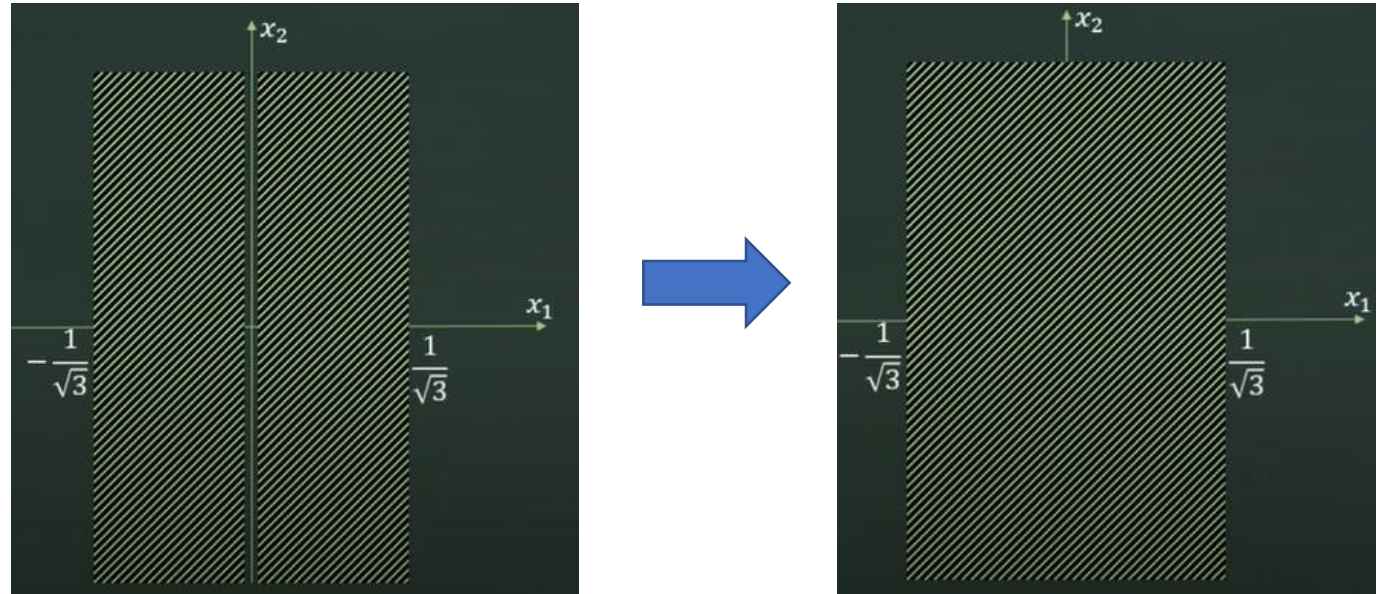
$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x_1 < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

1) $6x_1^2 p_{12} > 0, \quad p_{12} > 0, x_1 \neq 0$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2$$

mas...se $x_1 = 0, \quad \dot{x}_1 \neq 0$, se $x_2 \neq 0$



Então pode-se relaxar a condição $x_1 \neq 0$