EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

$$\dot{x} = f(x) \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Ponto de equilíbrio

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$$

Se $x(0) = x^* \implies x(t) = x^*, t \geq 0, \quad f(x^*) = 0$

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

Expansão em série de Taylor em torno de x*

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^* + \left(\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^* \right) (x_1 - x_1^*) +$$
$$+ \left(\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^* \right) (x_2 - x_2^*) + \text{ H.O.T}$$

H.O.T: higher order terms

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^* + \left(\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^* \right) (x_2 - x_2^*) +$$
$$+ \left(\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^* \right) (x_2 - x_2^*) + \text{ H.O.T}$$

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Mudança no sistema de coordenadas para tratar origem como ponto de equilíbrio

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^*$$
$$\Delta x_2 = x_2 - x_2^*$$
$$\Delta \dot{x}_1 = \dot{x}_1 - \cancel{\dot{x}_1^*} = \dot{x}_1$$
$$\Delta \dot{x}_2 = \dot{x}_2 - \cancel{\dot{x}_2^*} = \dot{x}_2$$

$$\left(\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*\right) = a_{11} \qquad \left(\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*\right) = a_{12}$$

$$\left(\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*\right) = a_{21} \qquad \left(\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*\right) = a_{22}$$

Para pontos próximos do ponto de equilíbrio podemos desprezar os termos de ordem superior. Então obtemos a seguinte equação linearizada em torno de x*

$$\Delta \dot{x}_1 = a_{11}\Delta x_1 + a_{12}\Delta x_2$$
$$\Delta \dot{x}_2 = a_{21}\Delta x_1 + a_{22}\Delta x_2$$
$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Apenas por simplicidade representamos o sistema linearizado de modo que cada x_i representa uma variação Delta em torno de x_i*, ou seja, um x_i=0 implica que se está no ponto de equilíbrio, independente de onde esteja (origem ou não)

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Mudança no sistema de coordenadas para tratar origem como ponto de equilíbrio

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \implies \dot{x} = Ax$$

$A \rightarrow$ matriz Jacobiana de $f(x)$ em x^*. Solução de $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0 = [x_1(0) \quad x_2(0)]^T$

$$x(t) = e^{At}x_0, \forall t \geq 0, \quad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} v_1 + c_2 e^{s_2 t} v_2$$

$s_1, s_2 \rightarrow$ autovalores de A

$v_1, v_2 \rightarrow$ autovetores associados a s_1, s_2 respectivamente, de A

Para $v_i \neq 0 \implies det(s_i I - A) = 0 \implies s_i^2 - \sigma s_i + \Delta = 0$

$$\sigma = tr(A) = a_{11} + a_{22}$$
$$\Delta = det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

$$\sigma = tr(A)$$
$$\Delta = det(A)$$

$$s_i = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}, \quad i = 1, 2$$

Caso 1: $\sigma^2 - 4\Delta > 0 \rightarrow$ 2 autovalores reais e distintos

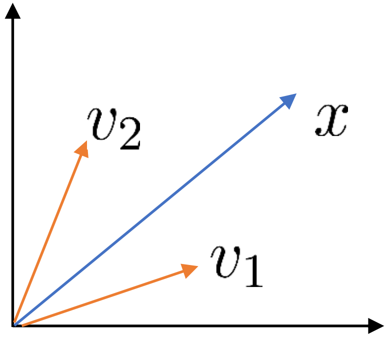
Caso 2: $\sigma^2 - 4\Delta = 0 \rightarrow$ 2 autovalores reais e iguais

Caso 3: $\sigma^2 - 4\Delta < 0 \rightarrow$ 2 autovalores complexos conjugados

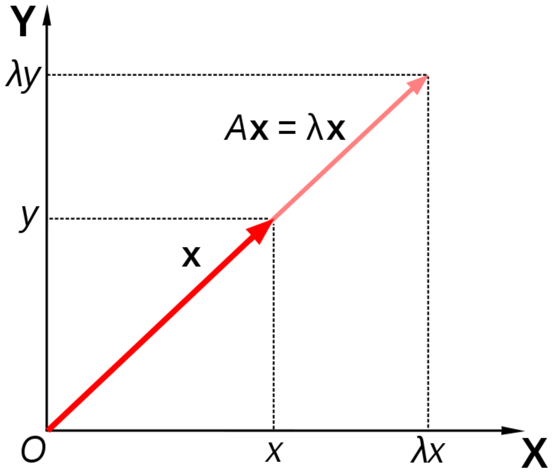
Vamos fazer uma análise gráfica, com base nos autovalores e autovetores

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Base de autovetores



$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$



$$y = Ax = A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \implies \alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2$$

$$Av_1 = s_1 v_1 \quad A[v_1 \quad v_2] = [v_1 \quad v_2]\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

$$Av_2 = s_2 v_2$$

Autovalor – escalar que resulta da aplicação da transformação A a um vetor (estica ou encolhe vetor)

$$AQ = Q\hat{A}, \quad Q \rightarrow \text{Matriz com autovetores e } \hat{A} \rightarrow \text{ Forma canônica de Jordan}$$

$$det(AQ) = det(Q\hat{A}) \implies det(A)det(Q) = det(Q)det(\hat{A}) \implies det(A) = det(\hat{A}) \implies det(\hat{A}) = s_1 s_2$$

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Cálculo dos autovetores

$$Av_1 = s_1 v_1 \implies (A - s_1 I)v_1 = 0 \implies \begin{bmatrix} a_{11} - s_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como o determinante é igual a zero, as linhas são Linearmente Dependentes, pode-se usar qualquer linha:

$$(a_{11} - s_1)v_{11} + a_{12}v_{12} = 0$$

A equação acima tem infinitas soluções, mas arbitrando 1, acha-se o outro:

$$v_{11} = 1 \implies v_{12} = \left(\frac{a_{12}}{s_1 - a_{11}}\right)^{-1}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{a_{12}}{s_1 - a_{11}}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{a_{12}}{s_2 - a_{11}}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

Válido para autovalores distintos

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

CASO 1 $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0$

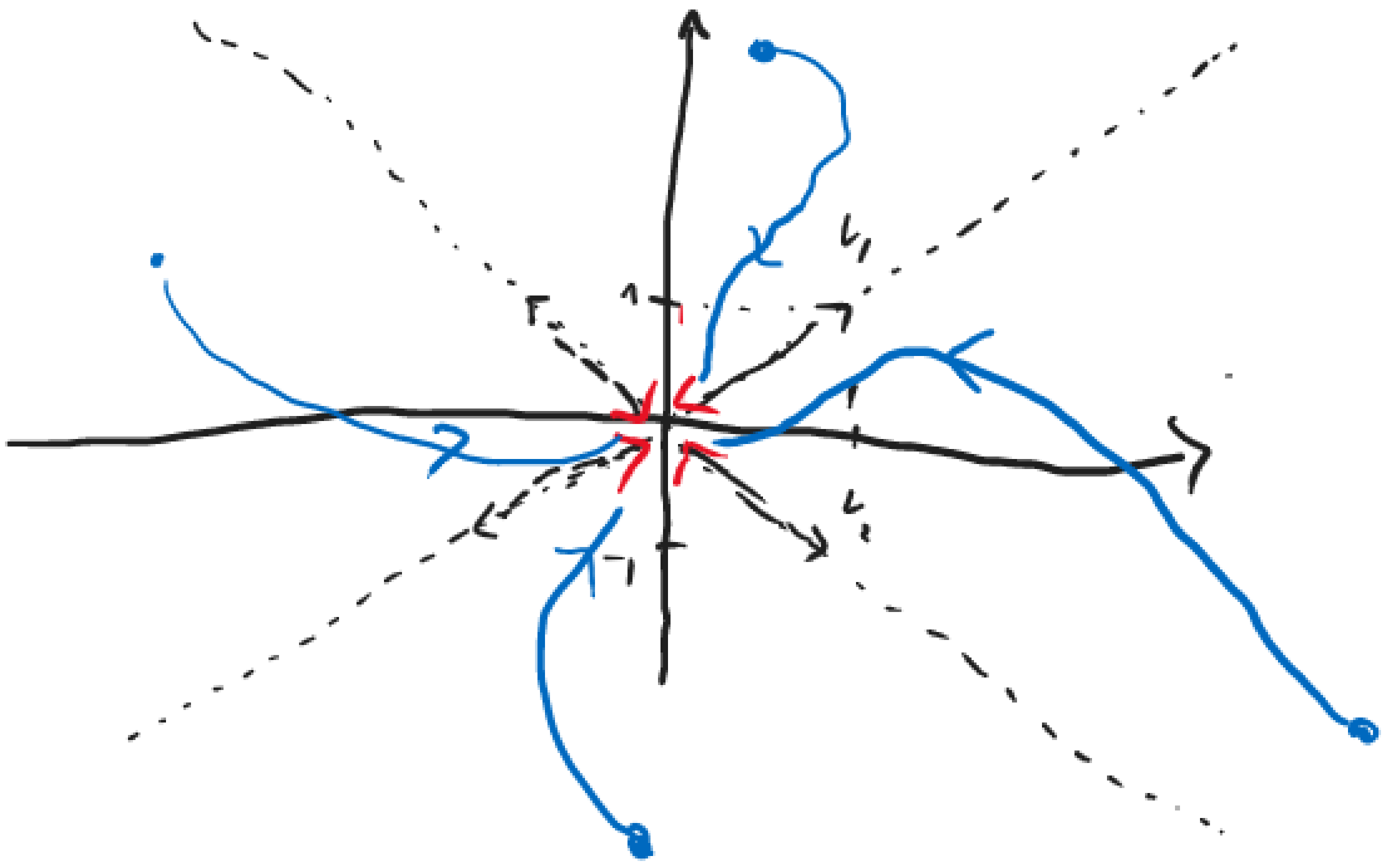
1) s_1, s_2 reais, distintos e negativos

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow s_1 = -1, s_2 = -3$$

$$\sigma(A) = -4, \quad \sigma < 0$$

$$\Delta(A) = 3, \quad \Delta > 0$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

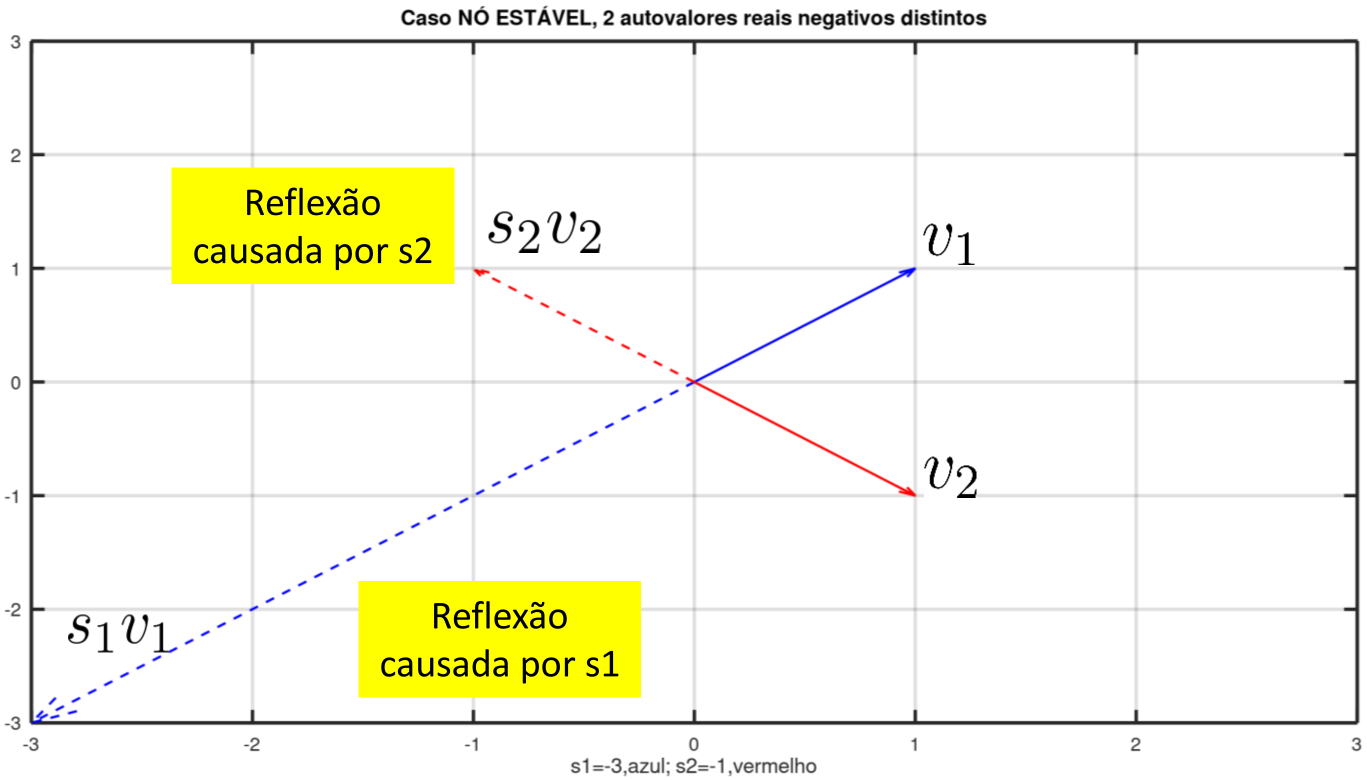


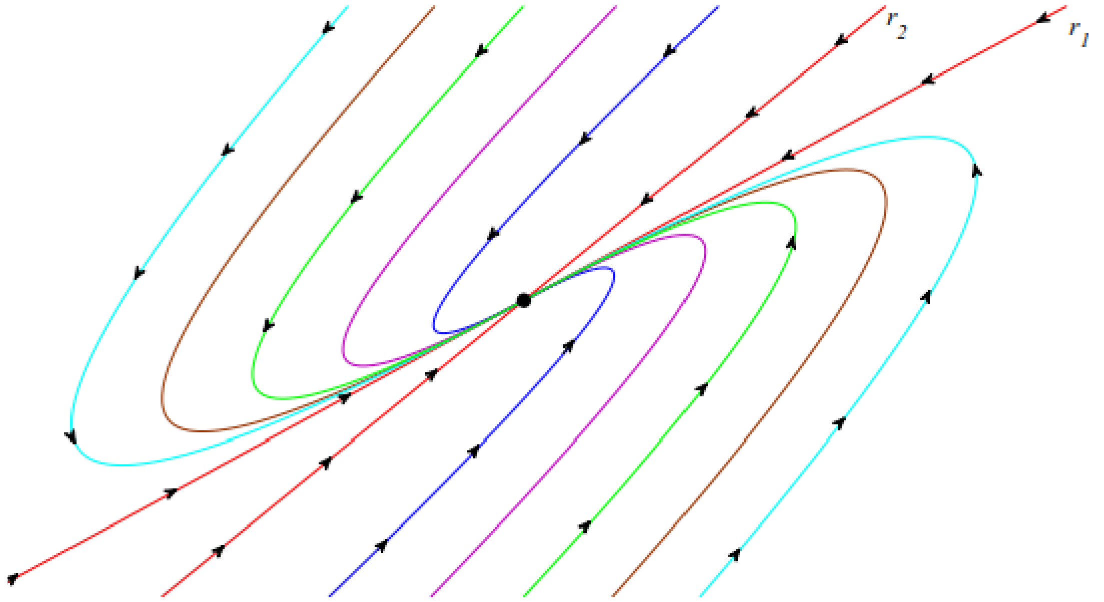
Nó (atrator) ESTÁVEL (assintoticamente)

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

CASO 1 $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0$

1) s_1, s_2 reais, distintos e negativos





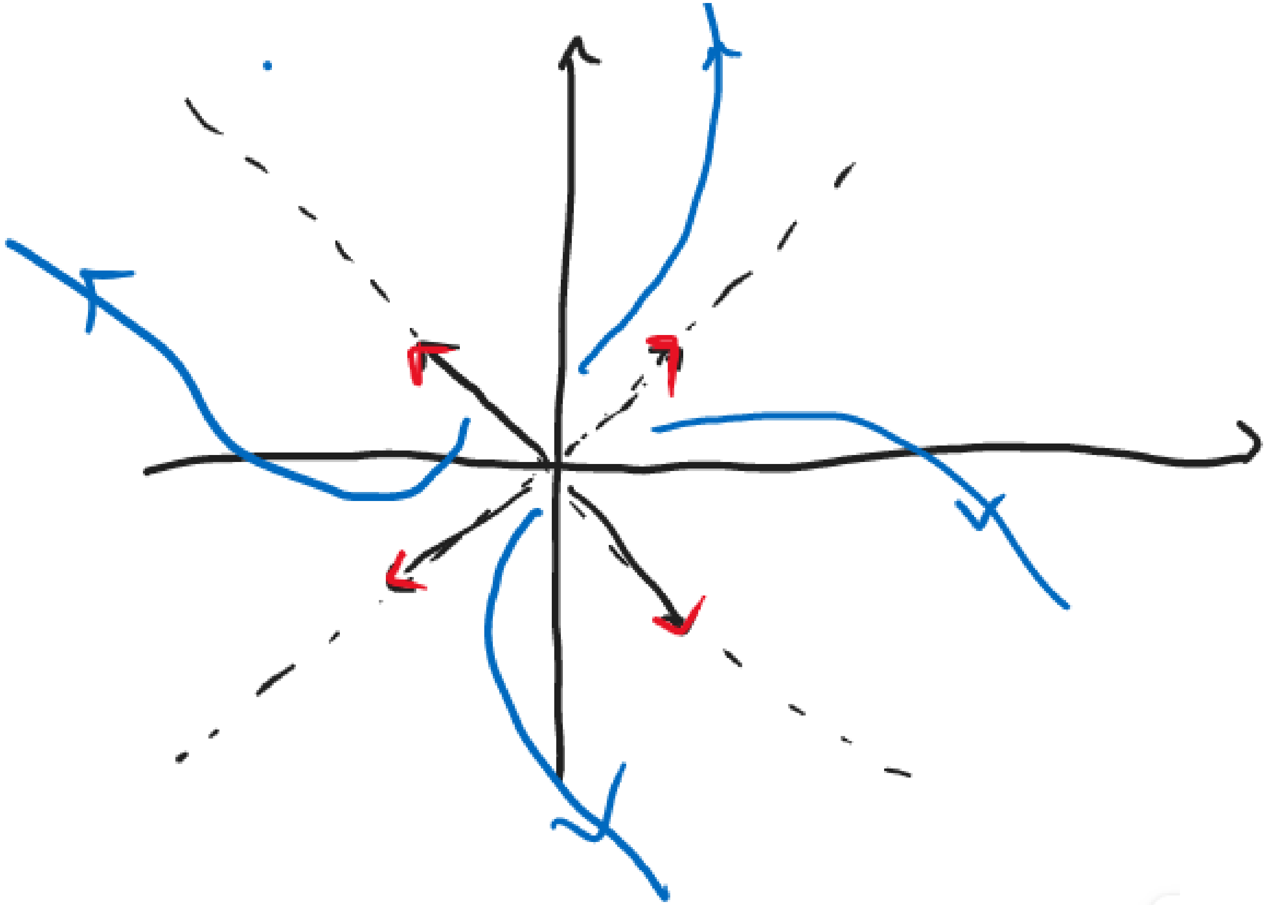
(atrator, sink) ESTÁVEL (assintoticamente)

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

2) s_1, s_2 reais, distintos e positivos

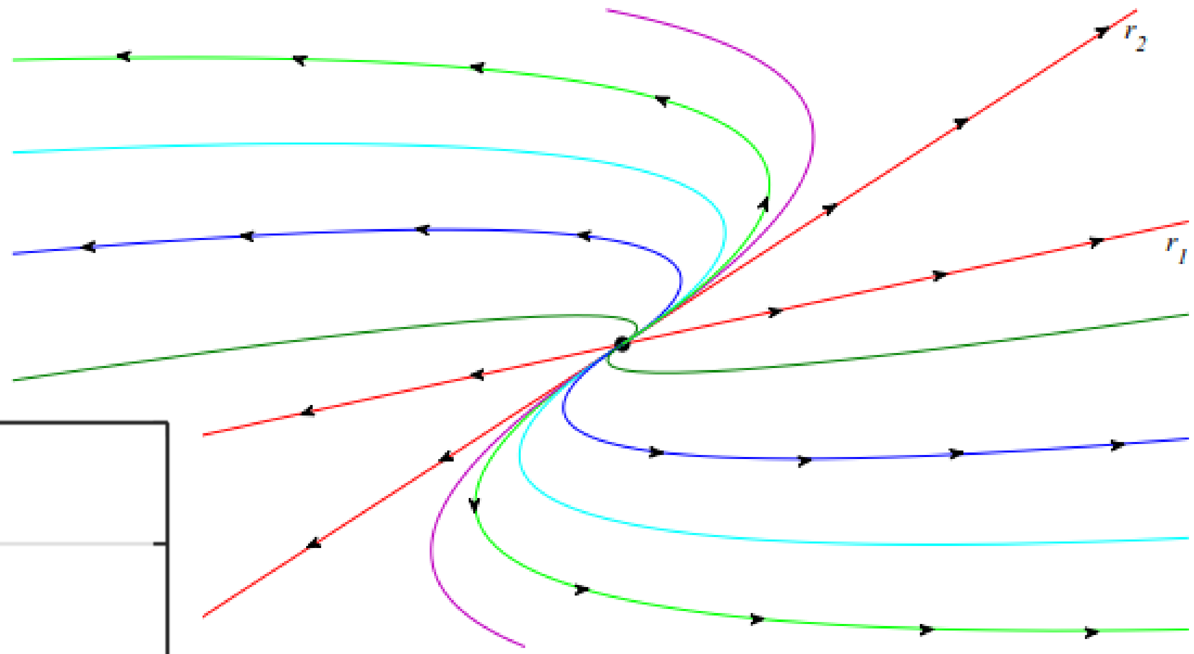
$s_1 = 1, s_2 = 3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

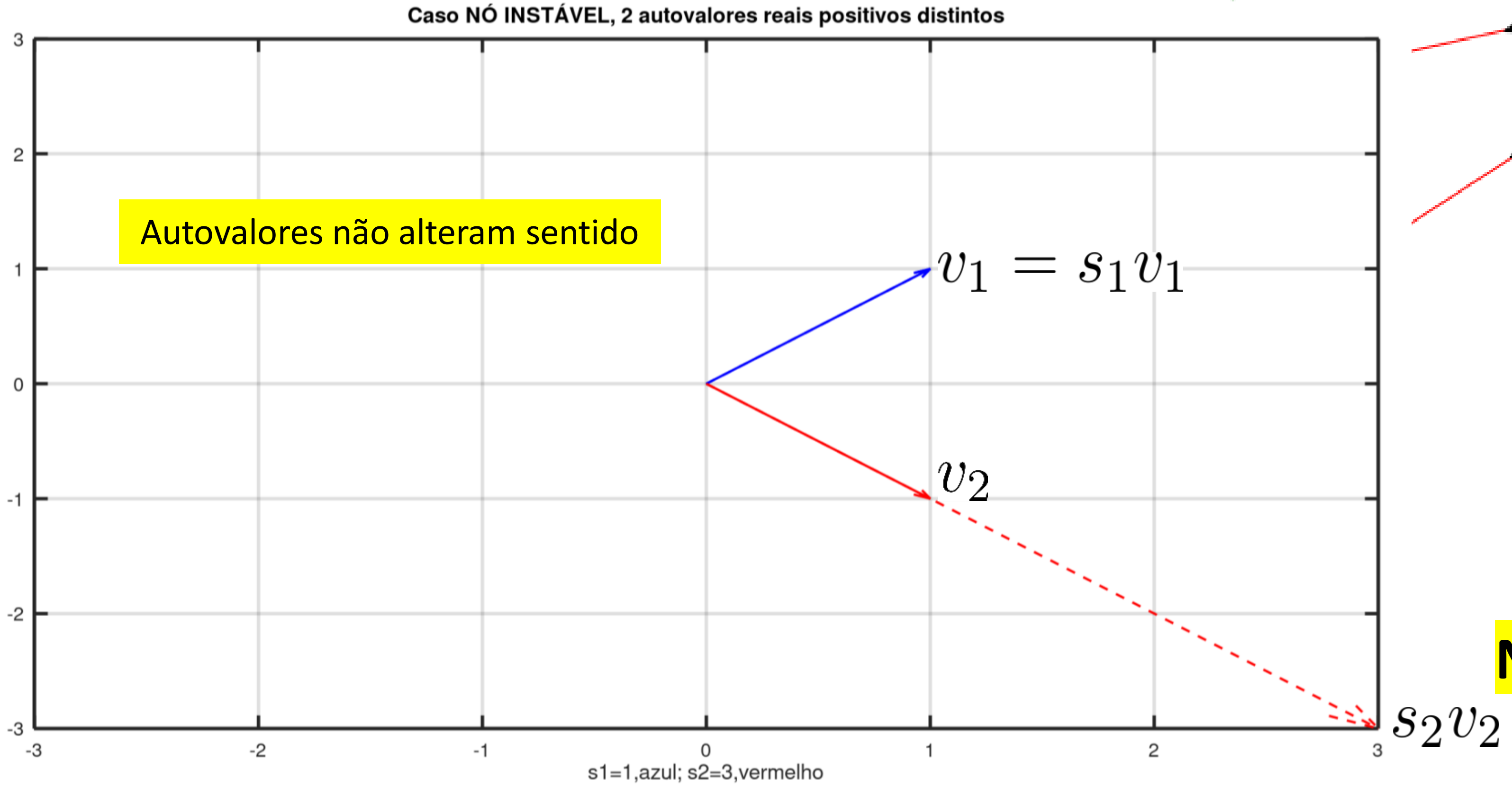


Nó INSTÁVEL (repulsor, source)

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio



2) s_1, s_2 reais, distintos e positivos



Nó INSTÁVEL (repulsor)

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

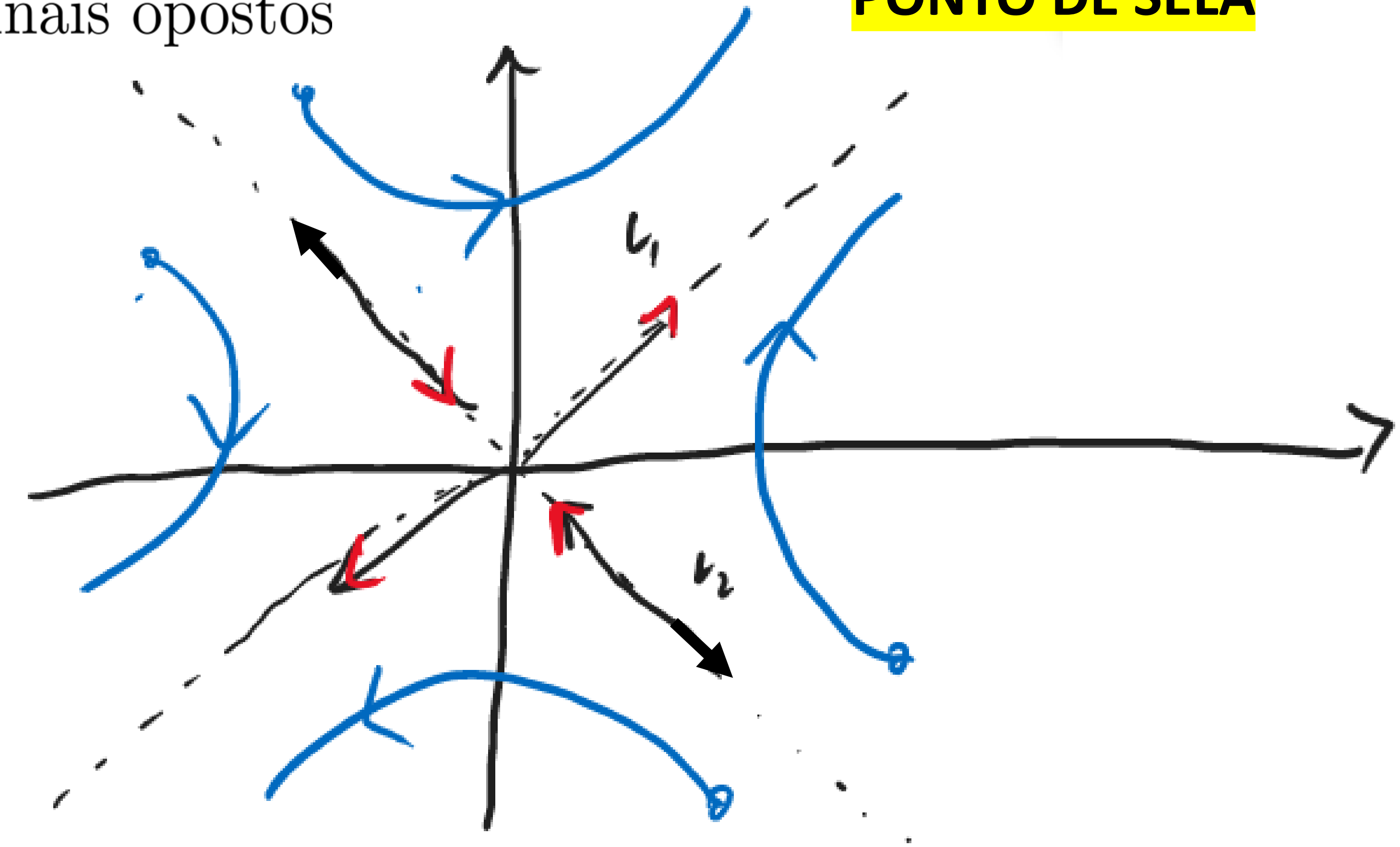
3) s_1, s_2 reais, distintos e com sinais opostos

PONTO DE SELA

$s_1 = 1, s_2 = -3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

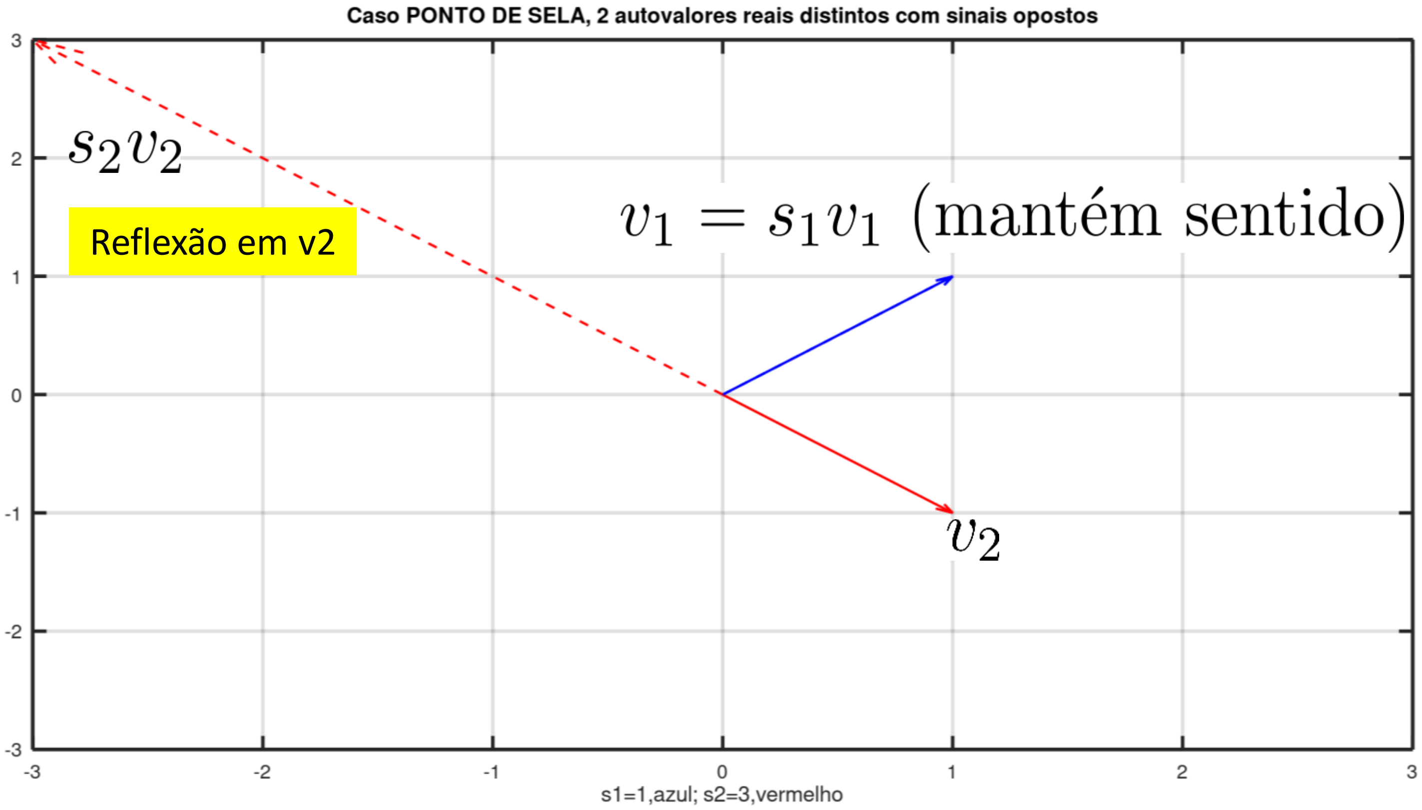
Transformação

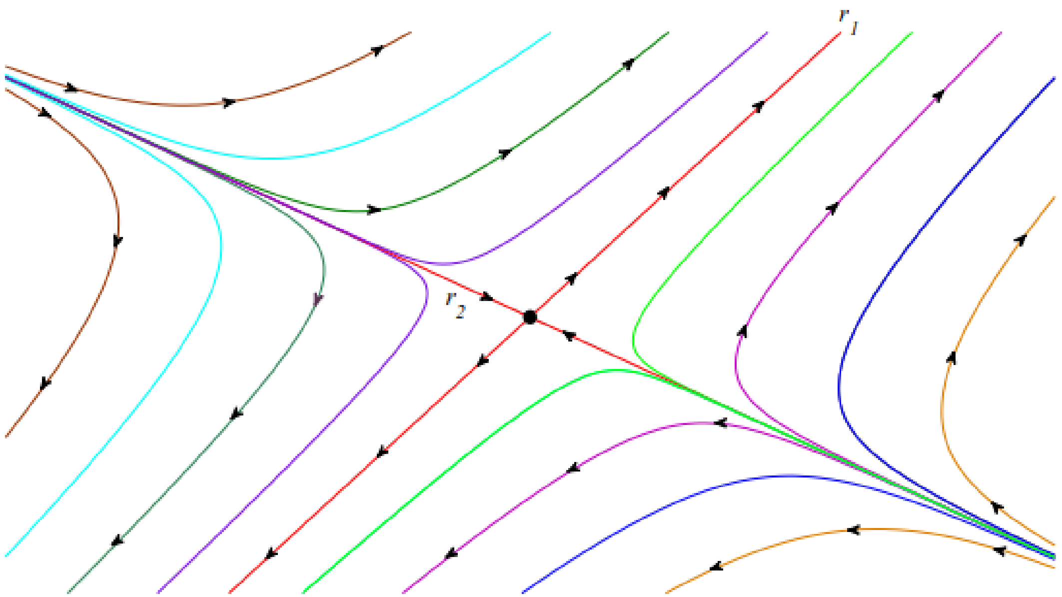


Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

3) s_1, s_2 reais, distintos e com sinais opostos

PONTO DE SELA





Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

$$AQ = Q\hat{A} \text{ ver página 6 destes slides}$$

4) s_1, s_2 complexos conjugados

$$s_1 = \alpha + j\beta, s_2 = \alpha - j\beta$$

$$\overline{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \overline{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-j}{2} \\ \\ \frac{j}{2} \end{bmatrix}$$

$$A[v_1 \quad v_2] = [v_1 \quad v_2]\begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix}$$

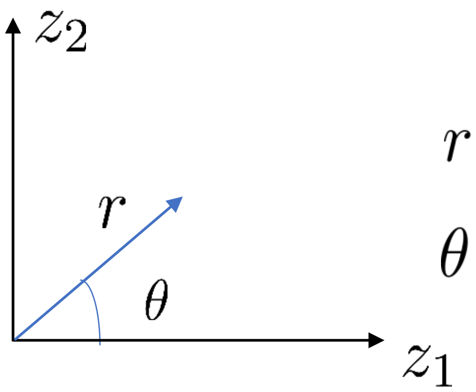
$$\text{Nova base } \overline{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} = [\overline{v}_1 \quad \overline{v}_2]$$

$$\hat{A}\overline{Q} = \overline{Q}\overline{\hat{A}} \implies \overline{\hat{A}} = \overline{Q}^{-1}\hat{A}\overline{Q} \implies \overline{\hat{A}} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Forma canônica real

Novo sistema transformado:

$$\dot{z} = \overline{\hat{A}}z, \quad z = [z_1 \quad z_2]^T$$



$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

$$\theta = atan(\frac{z_2}{z_1})$$

$$r(t) = e^{\alpha t}r(0)$$

$$\theta(t) = -\beta t + \theta(0)$$

desenvolver $\dot{r}, \dot{\theta}$

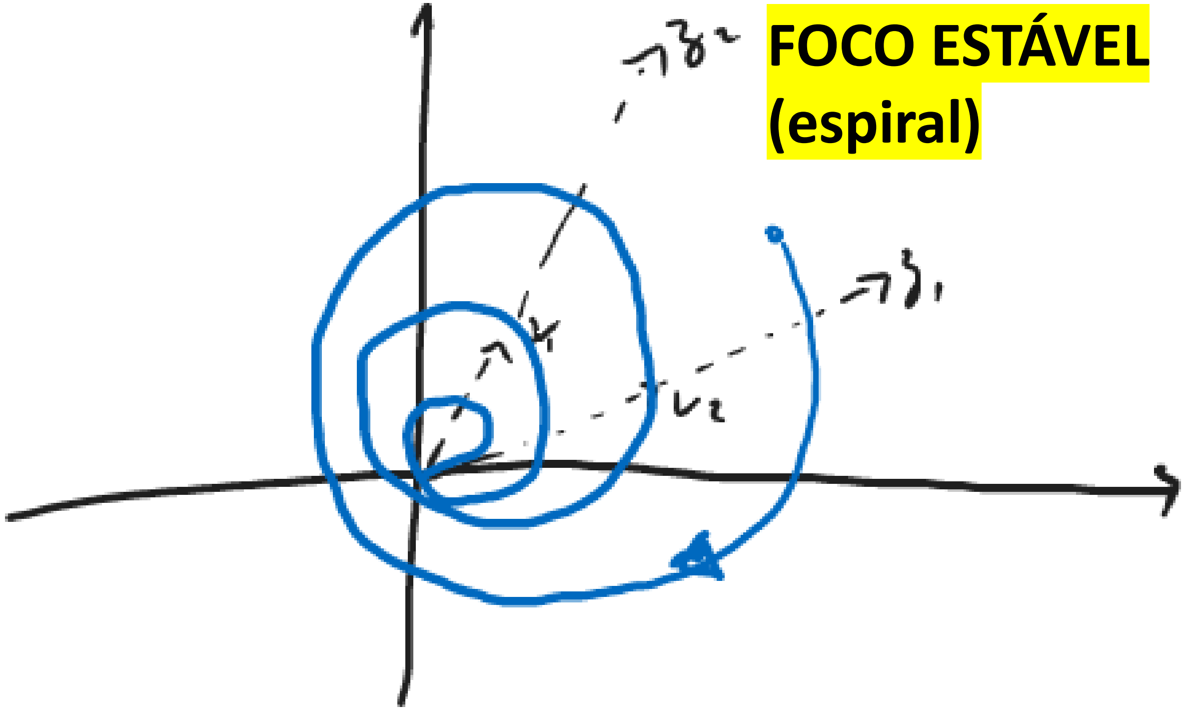
Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

4) s_1, s_2 complexos conjugados

$s_1 = \alpha + j\beta, s_2 = \alpha - j\beta$

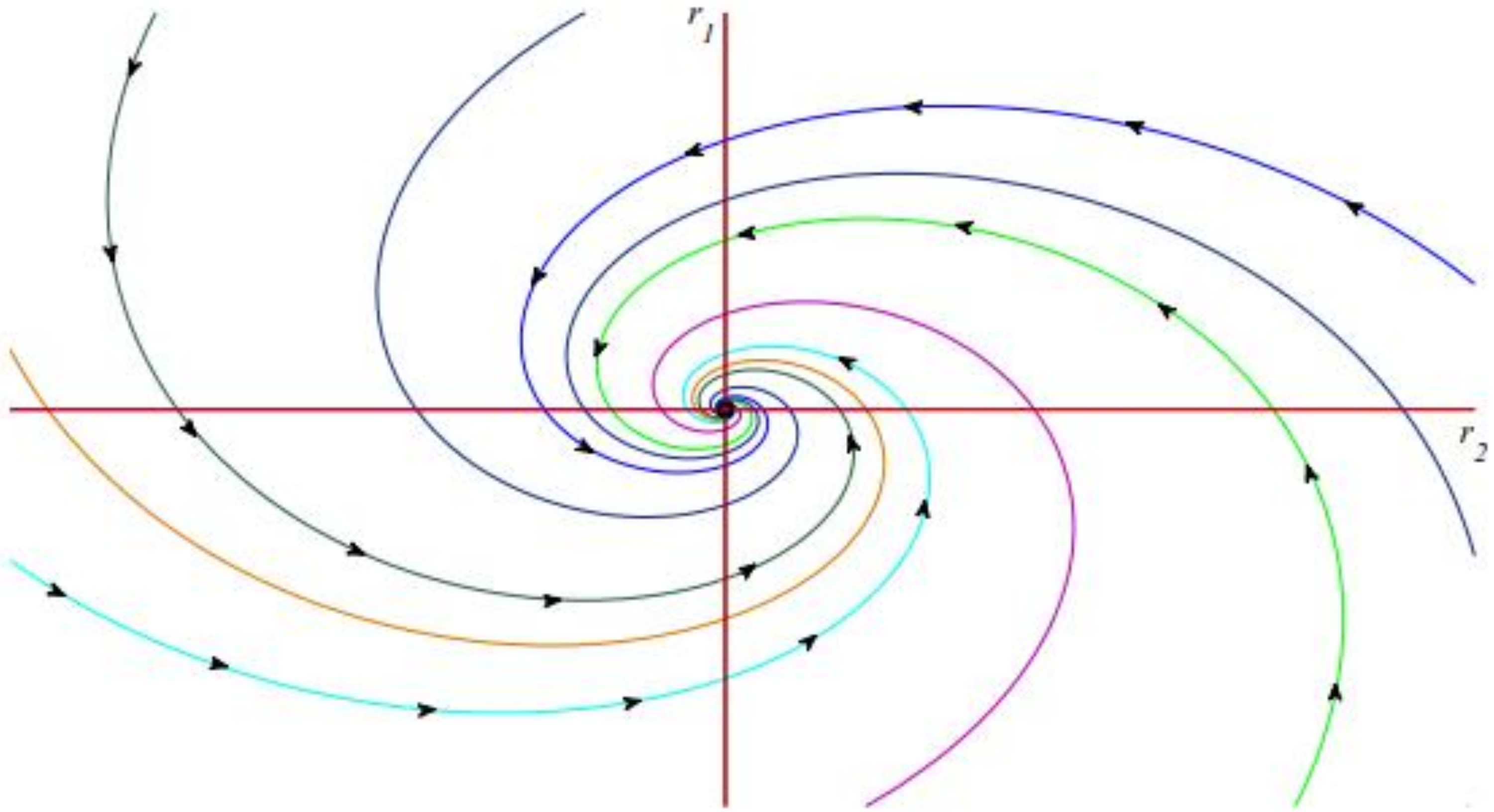
4.a) $\alpha < 0 \implies lim_{t\to\infty} r(t) = 0$

FOCO ESTÁVEL (espiral)



Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

FOCO ESTÁVEL



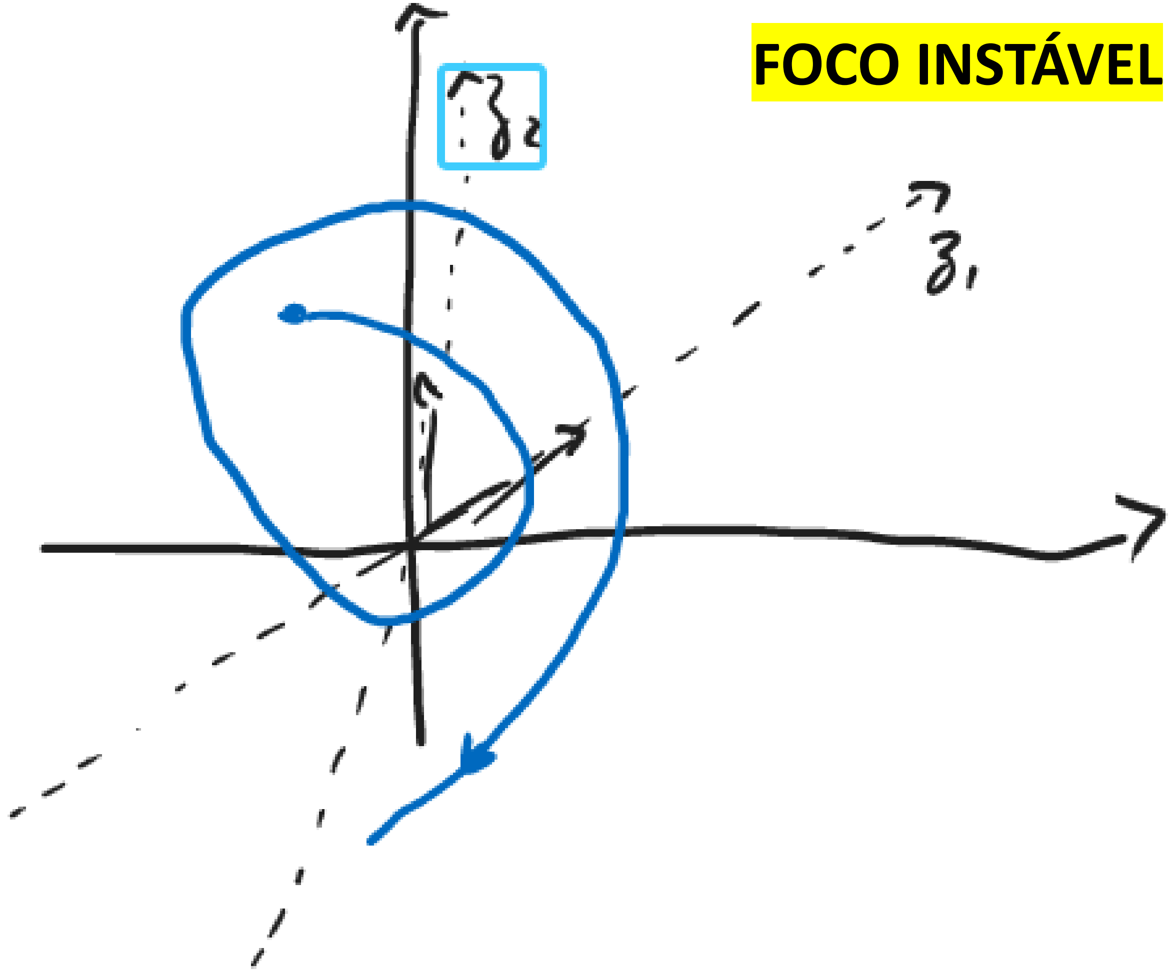
Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

4) $\quad s_1, s_2$ complexos conjugados

$s_1 = \alpha + j\beta, s_2 = \alpha - j\beta$

$$4.b) \quad \alpha > 0 \implies lim_{t \to \infty} r(t) \to \infty$$

FOCO INSTÁVEL



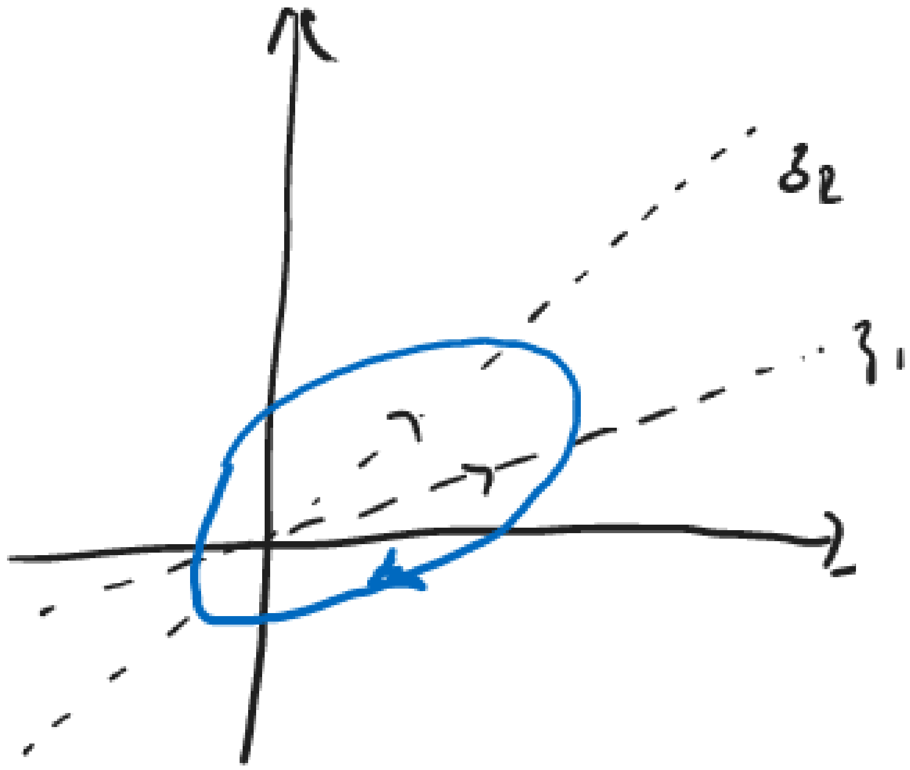
Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

CENTRO
Caso crítico de Lyapunov
(não hiperbólico)

4) s_1, s_2 complexos conjugados

$s_1 = \alpha + j\beta, s_2 = \alpha - j\beta$

4.c) $\alpha = 0 \implies r(t) = r_0$

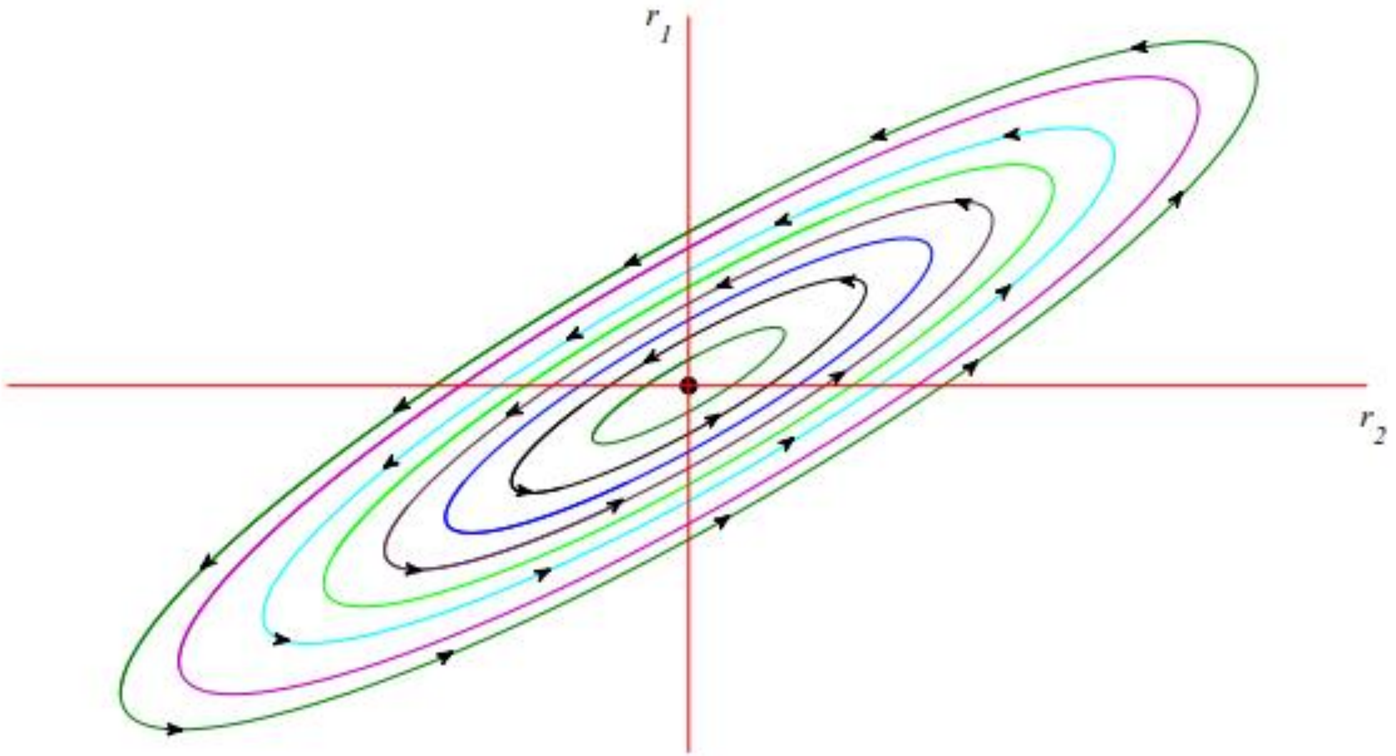


Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

$4) \quad s_1, s_2$ complexos conjugados

$s_1 = \alpha + j\beta, s_2 = \alpha - j\beta$

$4.c) \quad \alpha = 0 \implies r(t) = r_0$



Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

5) $s_1 = s_2$ reais e iguais, multiplicidade algébrica maior que 1

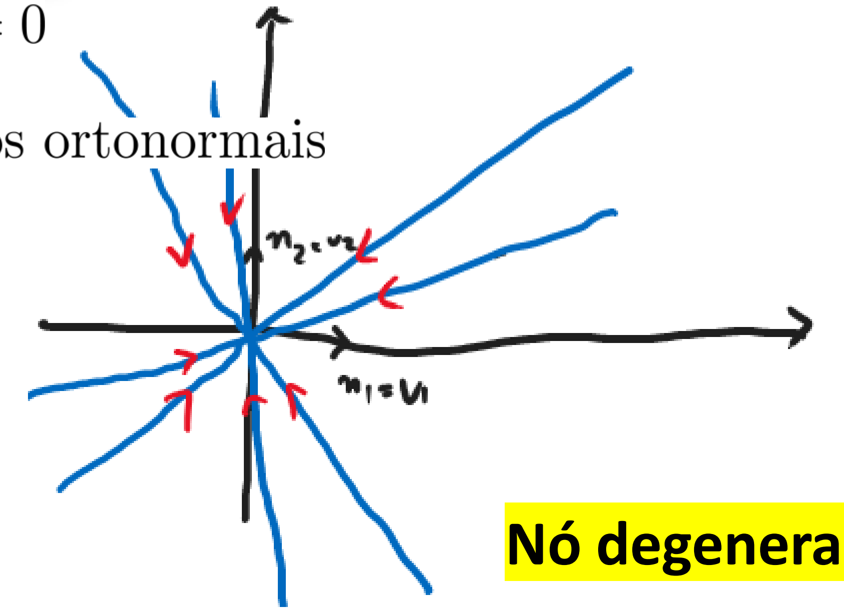
$$s^2 - \sigma s + \Delta = 0 \implies s = \sigma/2$$

2 soluções LI para v em $(A - sI)v = 0$

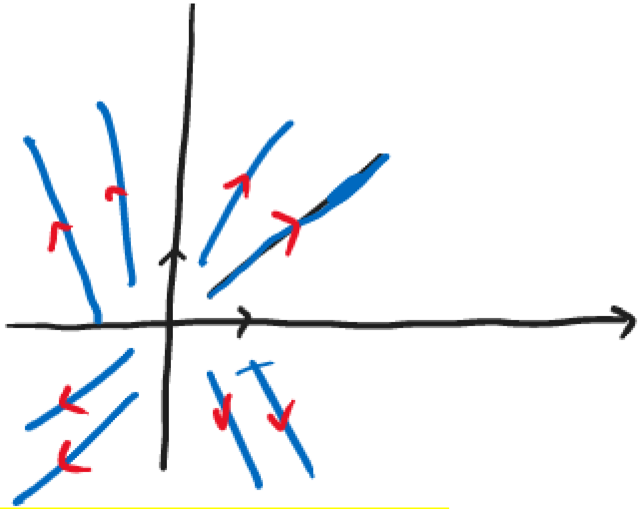
Pode ser qualquer vetor, escolhe-se os ortonormais

$$A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Nó degenerado (estrela) ESTÁVEL



$s < 0$



Nó degenerado (estrela) INSTÁVEL

$s > 0$

Varia igualmente nos dois eixos. Inclinações dependem das condições iniciais

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

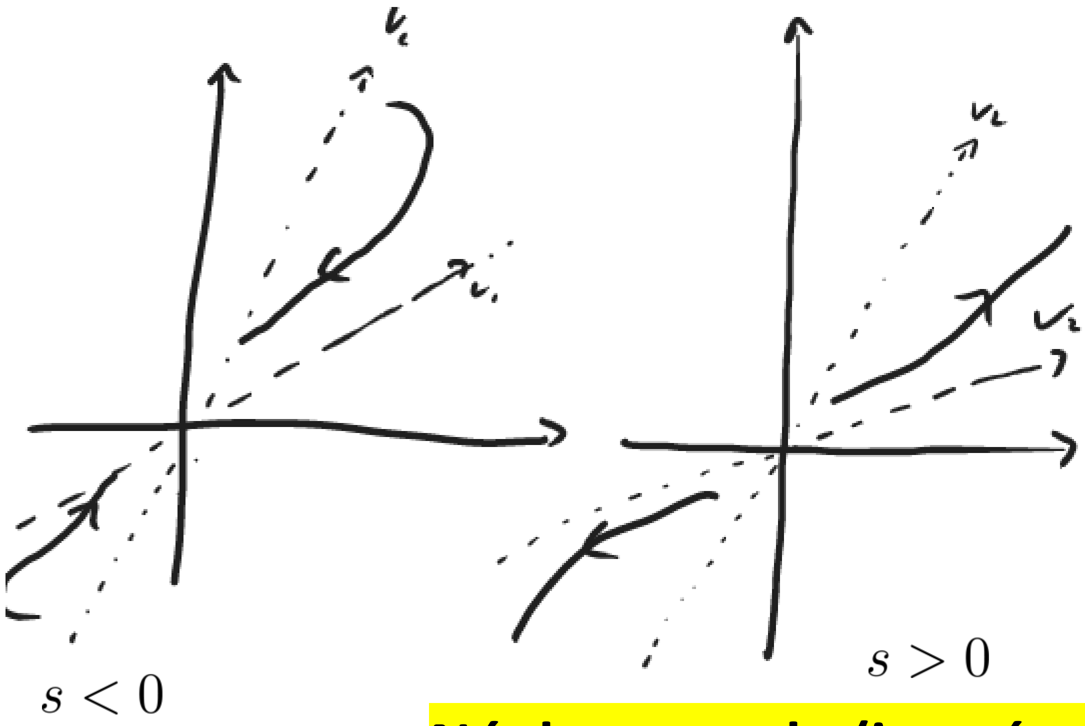
5) $s_1 = s_2$ reais e iguais, multiplicidade algébrica maior que 1

$s^2 - \sigma s + \Delta = 0 \implies s = \sigma/2$

Nó degenerado (impróprio) ESTÁVEL

1 solução LI para v em $(A - sI)v = 0$

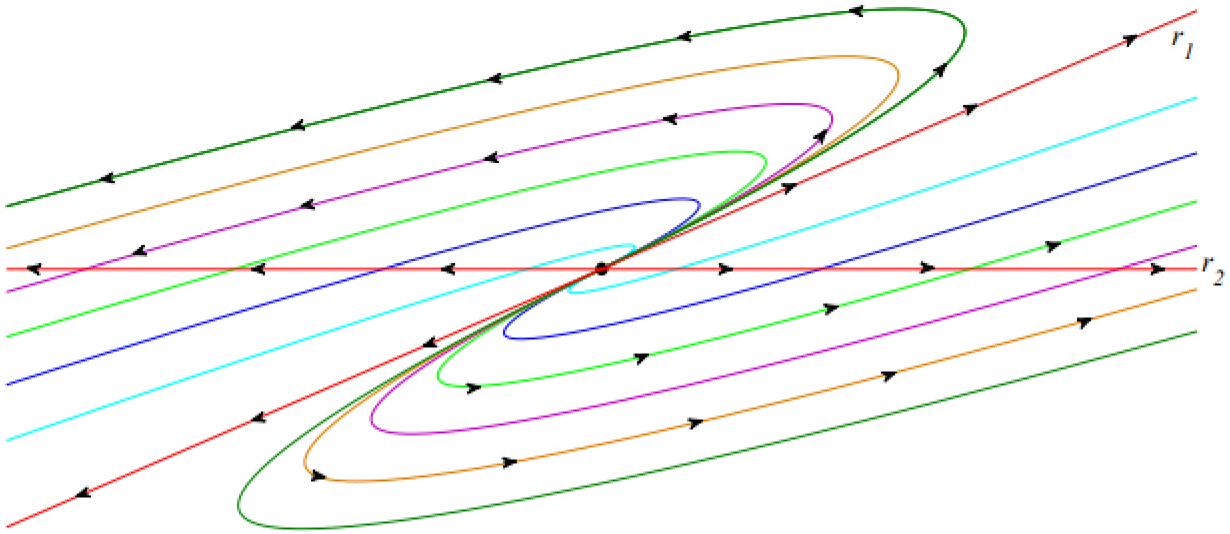
$$A[v_1 \quad v_2] = [v_1 \quad v_2]\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$



Nó degenerado (impróprio) INSTÁVEL

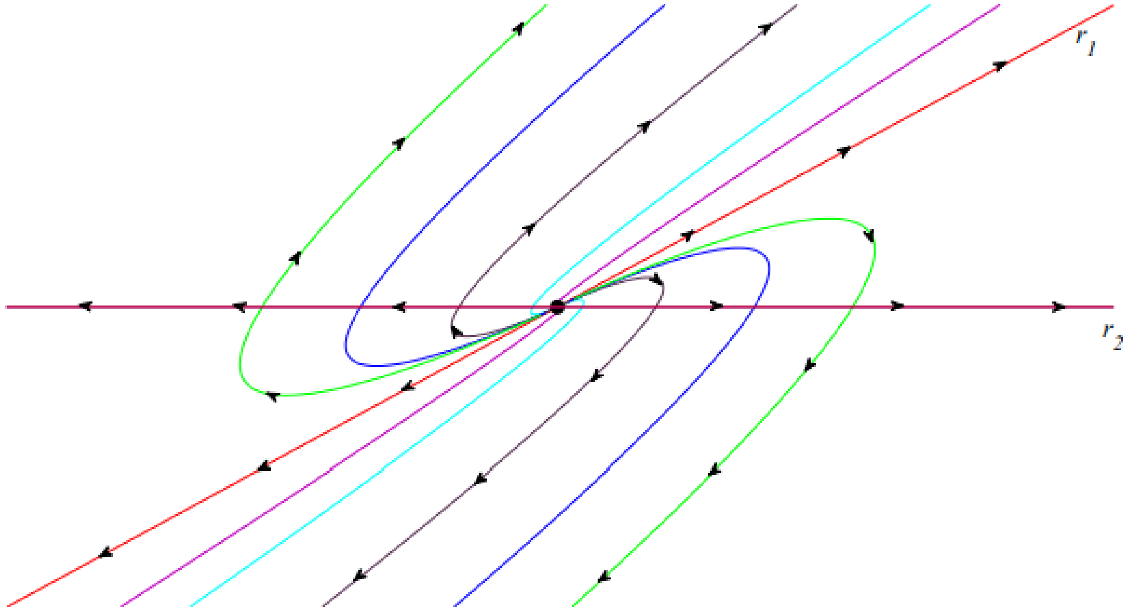
Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

5) $s_1 = s_2$ reais e iguais, multiplicidade algébrica maior que 1



Nó degenerado (impróprio) INSTÁVEL

$s > 0$



Nó degenerado (impróprio) INSTÁVEL

$s > 0$

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

6) $s_1 = 0$ e/ou $s_2 = 0$ infinitos pontos de equilíbrio (sobre a reta do autovetor

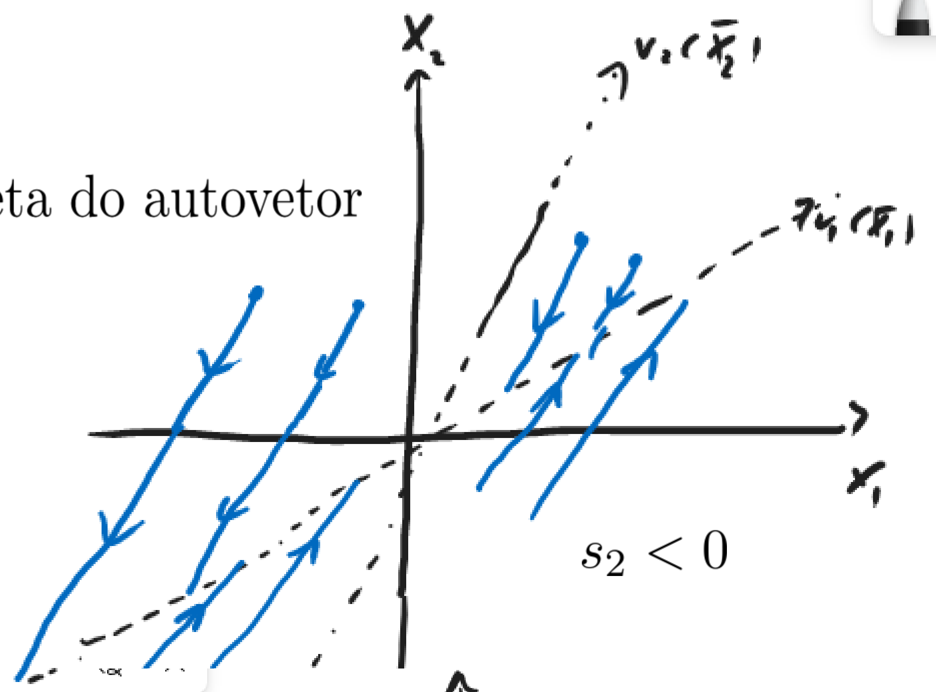
$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

Nó degenerado ESTÁVEL
Caso crítico de Lyapunov
(não hiperbólico)

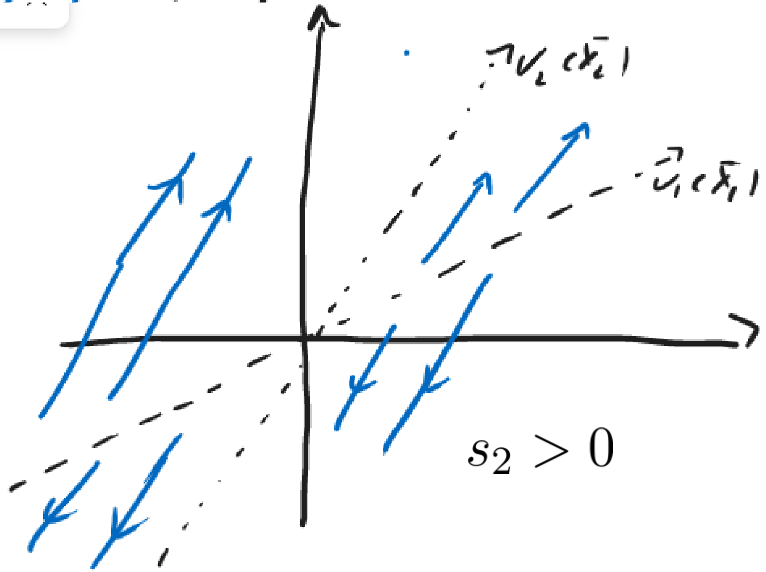
$\dot{\overline{x}} = \hat{A}\overline{x}$ **Estados em relação aos autovetores**

$$\dot{\overline{x}}_1 = 0 \implies \overline{x}_1(t) = \overline{x}_1(0)$$

$$\dot{\overline{x}}_2 = s_2\overline{x}_2 \implies \overline{x}_2(t) = e^{s_2 t}\overline{x}_2(0)$$



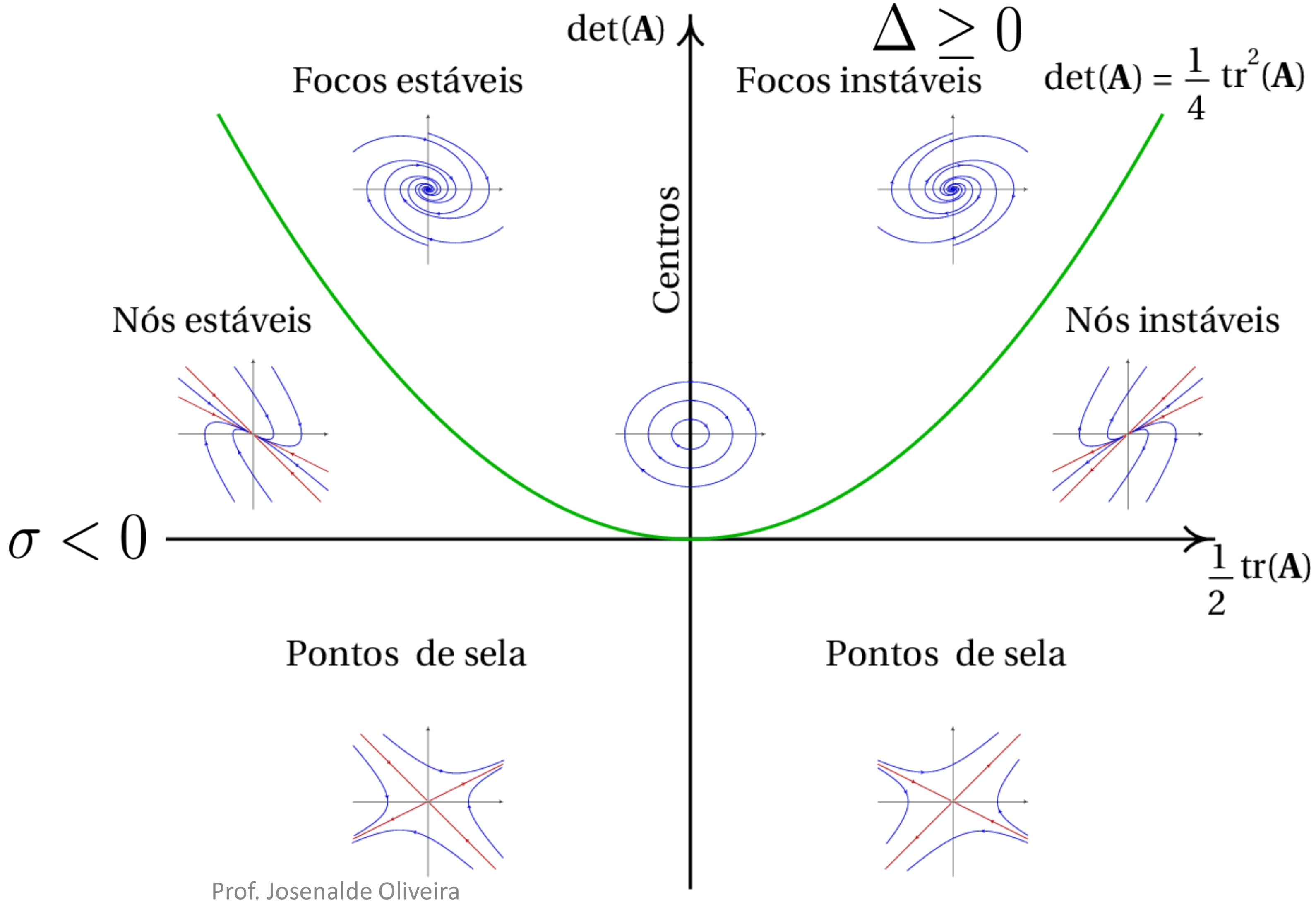
Nó degenerado INSTÁVEL



Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Plano traço-determinante

Região de estabilidade
$\sigma < 0, \Delta \geq 0$



Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Em resumo algumas definições:

Se todos os autovalores tiverem parte real não nula, então dizemos que o ponto fixo x_e é um ponto fixo hiperbólico, caso contrário, dizemos que x_e é um ponto fixo não hiperbólico. Em linhas gerais, pode-se dizer que a solução do sistema linearizado nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, localmente corresponde à solução do sistema não linear (equivalência topológica), desde que o ponto de equilíbrio seja hiperbólico (**Teorema de Hartman-Grobman, 1959/60**)

1. Se todos os autovalores de A tem parte real negativa, diz-se que x_0 é assintoticamente estável, pois $x \to x_e$ quando $t \to \infty$, e então o ponto fixo é chamado de sumidouro (sink).

   Há dois tipos de sumidouro: se todos os autovalores tiverem parte imaginária nula um **nó estável**, caso contrário, tem-se um o **foco estável**.

2. Se todos os autovalores de A têm parte real positiva, então x se afasta de x_e quando $t \to \infty$, então x_e é um ponto fixo instável e é chamado de fonte (source).

   Da mesma maneira que no caso do sumidouro, tem-se dois tipos de fontes: o **foco instável**, se algum autovalor tiver parte imaginária não nula; e o **nó instável**, no caso contrário.

3. Se alguns dos autovalores, mas não todos, têm parte real positiva, enquanto o resto tem parte real negativa, x_e é chamado de **ponto de sela**. Como a sela tem alguns autovalores positivos, é também é instável.

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

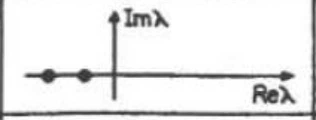
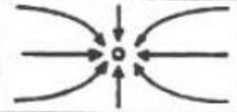
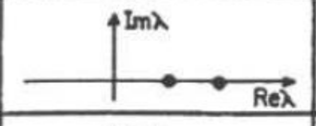
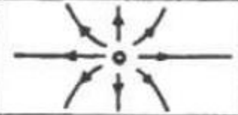
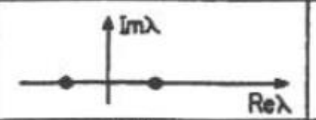
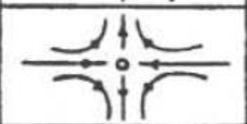
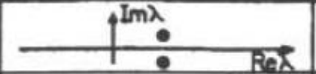
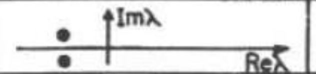
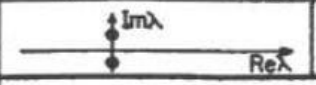
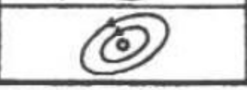
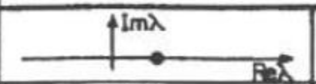
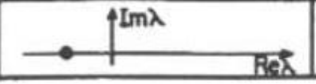
Em resumo algumas definições:

Para os pontos de equilíbrio não hiperbólicos: Se um ou mais autovalores de A tiver parte real negativa enquanto os outros tiverem **parte real nula (nó tipo 6, por exemplo)**, então xe é um ponto fixo marginalmente estável (degenerado). Se todos os autovalores de A são puramente imaginários, o ponto fixo é então chamado de **centro**.

Para estes pontos, nada se pode concluir em relação ao comportamento próximo a estes pontos de equilíbrio do sistema não linear

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Resumo da classificação dos pontos fixos em 2 dimensões (estabilidade linear).

Autovalores	Sinal da parte real	Representação no plano complexo	Ponto fixo	Exemplo	Estabilidade
$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$		nó (hiperbólico)		assintoticamente estável
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$		nó (hiperbólico)		instável
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$		sela (hiperbólico)		instável
$\lambda_1 = \lambda_2^*$ (complexos conjugados)	positiva		foco (hiperbólico)		instável
	negativa		foco (hiperbólico)		assintoticamente estável
	nula		centro (elíptico) CASO DEGENERADO		estável (não assintoticamente)
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$	nula	CASOS DEGENERADOS (elípticos)			
$\lambda_1 = \lambda_2, \neq 0 \in \mathbb{R}$	positiva		"inflected node" (hiperbólico)		instável
	negativa		"inflected node" (hiperbólico)		assintoticamente estável

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

$$\sigma = 0, \Delta > 0 \quad s_{1,2} = \pm j\sqrt{\Delta}, \quad \sigma^2 - 4\Delta < 0: \quad \text{CENTRO}$$

$$\sigma > 0, \Delta > 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta < 0: \quad \text{FOCO INSTÁVEL}$$

$$\sigma < 0, \Delta > 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta < 0: \quad \text{FOCO ESTÁVEL}$$

$$\sigma > 0, \Delta > 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta > 0: \quad \text{NÓ INSTÁVEL}$$

$$\sigma < 0, \Delta > 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta > 0: \quad \text{NÓ ESTÁVEL}$$

$$(\sigma > 0, \sigma = 0, \sigma < 0)\Delta < 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta > 0: \quad \text{PONTO DE SELA}$$

$$\sigma > 0, \Delta > 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta = 0: \quad \text{NÓ DEGENERADO INSTÁVEL}$$

$$\sigma > 0, \Delta = 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta > 0, s_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sigma}{2}, s_1 = 0, s_2 = \sigma: \quad \text{NÓ DEGENERADO INSTÁVEL}$$

$$\sigma < 0, \Delta > 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta = 0: \quad \text{NÓ DEGENERADO ESTÁVEL}$$

$$\sigma < 0, \Delta = 0 \quad \sigma^2 - 4\Delta > 0: \quad \text{NÓ DEGENERADO ESTÁVEL}$$

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Exemplo 1:

$$\dot{x}_1 = -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) \ , x^* = [0 \quad 0]^T$$

Se um ponto de equilíbrio do sistema linearizado (em torno deste ponto de equilíbrio) é um nó estável, nó instável (incluindo casos degenerados), foco estável, foco instável, ou ponto de sela, as trajetórias do sistema não linear comportam-se, respectivamente, como nó estável, nó instável, foco estável, foco instável ou ponto de sela. Entretanto, se no sistema linearizado um ponto de equilíbrio é um CENTRO, nada podemos concluir em relação ao comportamento próximo a este ponto de equilíbrio do sistema não linear.

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Exemplo 1:

$$\dot{x}_1 = -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) = f_1 \qquad \dot{x}_1 = -x_2 - \mu x_1^3 - \mu x_1 x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) = f_2 \qquad \dot{x}_2 = x_1 - \mu x_2^3 - \mu x_2 x_1^2 \qquad , x^* = [0 \quad 0]^T$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = a_{11} = -3\mu x_1^2 - \mu x_2^2 = -\mu(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1^2) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = a_{12} = -1 - \mu x_1(2x_2) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = a_{21} = 1 - \mu x_2(2x_1) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = a_{22} = -3\mu x_2^2 - \mu x_1^2 = -\mu(x_1^2 + x_2^2 + 2x_2^2) \end{array}}$$

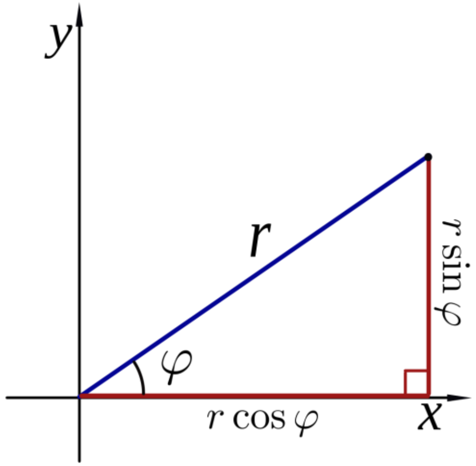
$$@x^* = [0 \quad 0]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma = 0, \quad \Delta = 1 > 0, \quad x^* \to \text{ centro}$$

Não pode-se concluir NADA, pois qualquer não linearidade leva o traço a positivo ou negativo

Análise do SISTEMA NÃO LINEAR com coordenadas polares!

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio



Exemplo 1:

$$\dot{x}_1 = -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) = f_1$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) = f_2$$

Seja $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad r^2 = (x_1^2 + x_2^2)$

$$\dot{r} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}(2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2) = \frac{-\cancel{x_1 x_2} - \mu x_1^2(x_1^2 + x_2^2) + \cancel{x_1 x_2} - \mu x_2^2(x_1^2 + x_2^2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

$$\dot{r} = \frac{-\mu(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{-\mu(x_1^2 + x_2^2)^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = -\mu\frac{(r^2)^2}{r} = -\mu r^3$$

Se $\mu > 0 \implies \dot{r} < 0$ foco estável

Se $\mu < 0 \implies \dot{r} > 0$ foco instável

Seja $\theta = tg^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \implies \dot{\theta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}\frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{x_1^2} = \frac{x_1^2 - \mu x_1 x_2(x_1^2 \cancel{+} x_2^2) + x_2^2 + \mu x_1 x_2(x_1^2 \cancel{+} x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} = 1 \implies \theta(t) = \theta(0) + t$

Sistemas de 2. ordem: comportamento próximo a um ponto de equilíbrio

Exemplo 2: massa (M), mola (K), amortecedor viscoso (B), com deslocamento vertical x