EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Descrição de um sistema dinâmico não linear

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, ..., u_1, ..., u_p)$$

p entradas com n equações diferenciais de primeira ordem

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, ..., u_1, ..., u_p)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix} \quad \dot{x} = f(t, x, u)$$

Equação de estado (eq. Diferencial vetorial de 1. ordem n-dimensional

$$y_1 = h_1(t, x, u)$$

$$\vdots$$

$$y_q = h_q(t, x, u)$$

q saídas

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} \quad h(t, x, u) = \begin{bmatrix} h_1(t, x, u) \\ \vdots \\ h_q(t, x, u) \end{bmatrix} \quad y = h(t, x, u)$$

Equação de saída

Equação dinâmica

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$
$$y = h(t, x, u)$$

Descrição de um sistema dinâmico não linear

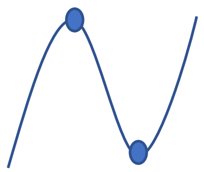
Equação dinâmica

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$
$$y = h(t, x, u)$$

a) Se $u \equiv 0, \dot{x} = f(t, x)$ tem-se entrada identicamente nula, por exemplo, uma auto-oscilação
b) Se $u = \gamma(t)$ a entrada é uma função do tempo
c) Se $u = \gamma(x)$ a entrada é uma função do estado (realimentação)
d) Se $u = \gamma(x, t)$ a entrada é função do tempo e do estado. No caso mais geral tem-se

$\dot{x} = f(t, x)$ Equação de estado não forçada (não tem a entrada explícita) variante no tempo (não autônomo)

$\dot{x} = f(x)$ Caso mais simples, sendo não forçada e invariante no tempo (autônoma)



Um ponto $x = x^*$ no espaço de estado é denominado um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$ se $f(x^*) = 0$, ou seja, se $x(0) = x^*$ implica $x(t) = x^*, \forall t \geq 0$

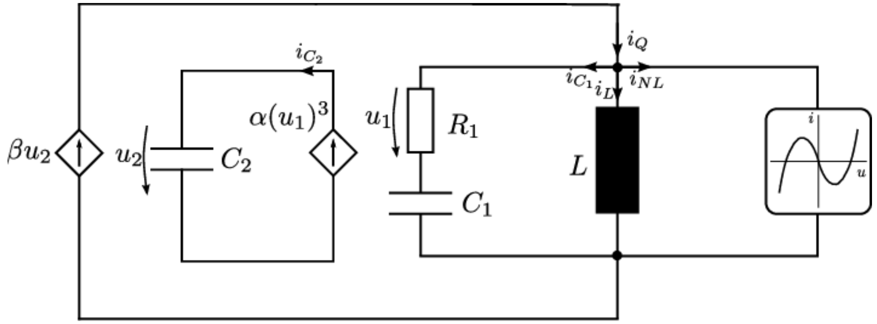
Mais algumas características de S. não lineares

- Ciclo limite (auto-oscilação) https://www.youtube.com/watch?v=By1g7Edoj0Y
  - Existem sistemas não lineares que podem produzir oscilações com frequência e amplitude fixas, independentes do estado inicial, oscilações da propriedade estrutural do sistema. São trajetórias fechadas no plano de fase
  - No caso linear e invariante no tempo é necessário que ocorra um par de autovalores no eixo imaginário, o que é quase impossível de manter em presença de variações paramétricas e, mesmo assim, a amplitude da oscilação depende do estado inicial
  - Considere a equação do oscilador harmônico de Van der Pol, com m,c,k>0, que

descreve um sistema massa-mola-amortecedor com um

coeficiente de amortecimento dependente da posição

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0 \qquad m\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



Rayleigh-van der Pol circuito RLC não linear

Mais algumas características de S. não lineares

- Ciclo limite (auto-oscilação)

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0$$

$$x_1 = x \implies \dot{x}_1 = x_2$$

$$x_2 = \dot{x} \implies \dot{x}_2 = \frac{-k}{m}x_1 - \frac{2c}{m}(x_1^2 - 1)x_2$$

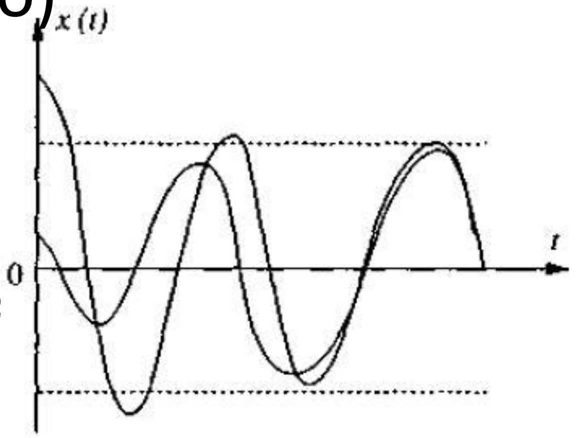


Figure 1.4 : Responses of the Van der Pol oscillator

$$\dot{x}_1 = 0 \implies x_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \implies \frac{-k}{m}x_1 - \boxed{\frac{2c}{m}(x_1^2 - 1)x_2} = 0 \implies \frac{-k}{m}x_1 = 0 \implies x_1 = 0$$

Ponto de equilíbrio isolado $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Independente da condição inicial, resposta em regime tende à mesma oscilação. Existem teoremas para verificar condições suficientes para existência de ciclos limite (Poincaré, Bendixson)

Análises

$$2c(x_1^2 - 1) > 0, |x_1| > 1$$

Neste caso, o sistema tem uma tendência convergente em relação ao PE, ocorrendo perda de energia, pois caminha em relação ao ponto com energia nula

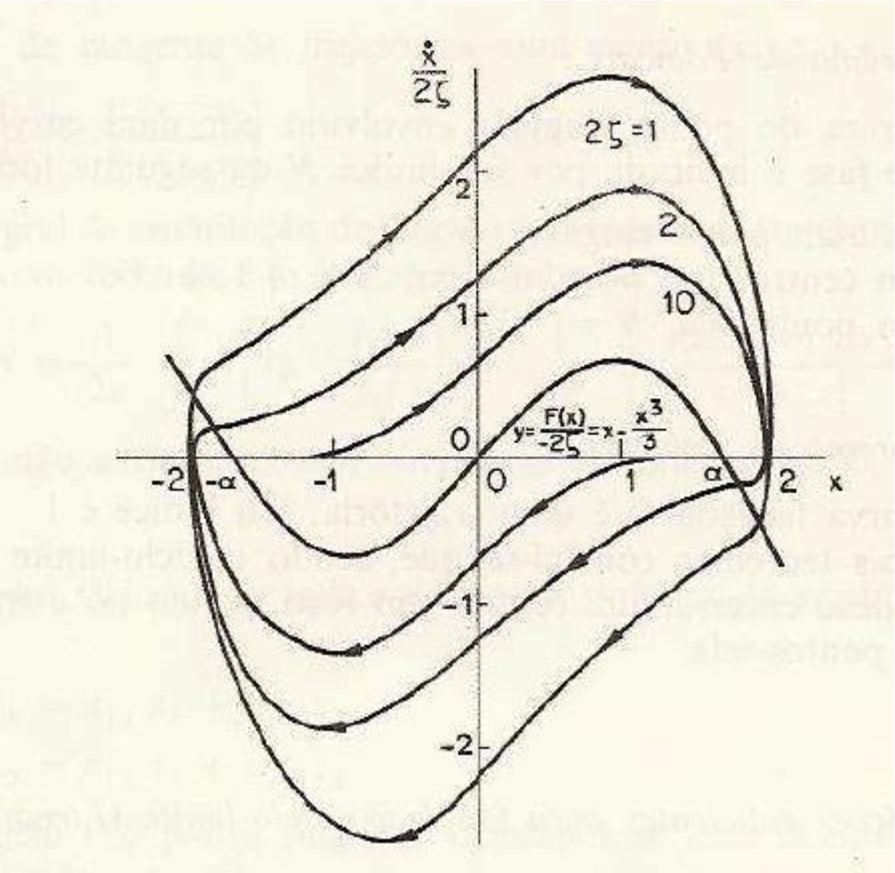
$$2c(x_1^2 - 1) < 0, |x_1| < 1$$

Neste caso, o sistema absorve energia
Tendência divergente (instável)
Portanto o movimento do sistema nem cresce
Indefinidamente nem decai a zero. Apresenta
uma oscilação independente das condições iniciais

Mais algumas características de S. não lineares

- Ciclo limite (auto-oscilação)

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0$$



Ciclo limite em van der Pol

Mais algumas características de S. não lineares

- Bifurcação
  - Mudança qualitativa das propriedades de um sistema devido a uma mudança quantitativa dos parâmetros. Os valores dos parâmetros para os quais dá uma mudança qualitativa no comportamento do sistema são conhecidos como valores críticos ou de bifurcação.

forquilha

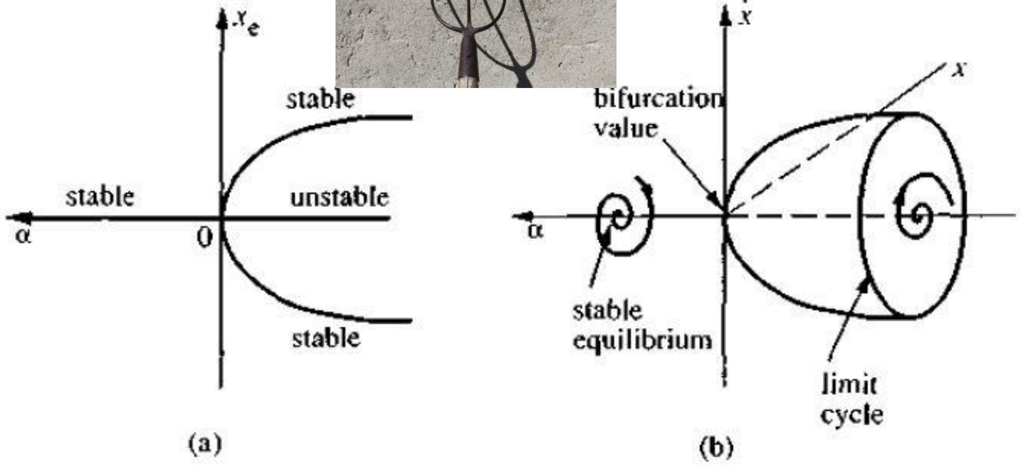


Figure 1.5 : (a) a pitchfork bifurcation; (b) a Hopf bifurcation

$\dot{x} = \alpha x - x^3$ Caso super crítico

$$\dot{x} = 0 \implies \alpha x_e - x_e^3 = 0 \implies x_e(\alpha - x_e^2) = 0$$

$x_{e1} = 0$ é ponto de equilibrio

Logo, o ponto de equilíbrio depende de α

a) Se $\alpha > 0$, $\quad x_e(\sqrt{\alpha} - x_e)(\sqrt{\alpha} + x_e) = 0$

$x_{e2} = \sqrt{\alpha}, x_{e3} = -\sqrt{\alpha}$

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x^* = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} x^* = \begin{bmatrix} -\sqrt{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Se $\alpha = 0$, $\quad x_e(\alpha - x_e^2) = 0 \implies -x_e^3 = 0, \quad x_{e1}$ é ponto de equilíbrio

c) Se $\alpha < 0$, $\quad x_e(\alpha - x_e^2) = 0 \implies x_e = 0 \quad$ é única solução, pois não é possível fatorar nos reais

Mais algumas características de S. não lineares

- Bifurcação
  - Vamos agora analisar o sistema em todos os pontos de equilíbrio

$$\dot{x} = f(x) = \alpha x - x^3$$

$$\frac{df}{dx} = \alpha - 3x^2. \quad \text{Em } x_e = 0, \frac{df}{dx} = \alpha$$

a) Se $\alpha > 0, x_e$ instável

b) Se $\alpha < 0, x_e$ estável

c) Se $\alpha = 0, x_e$ estável (fracamente)

a) Se $\alpha > 0, x_e = \sqrt{\alpha}$ estável

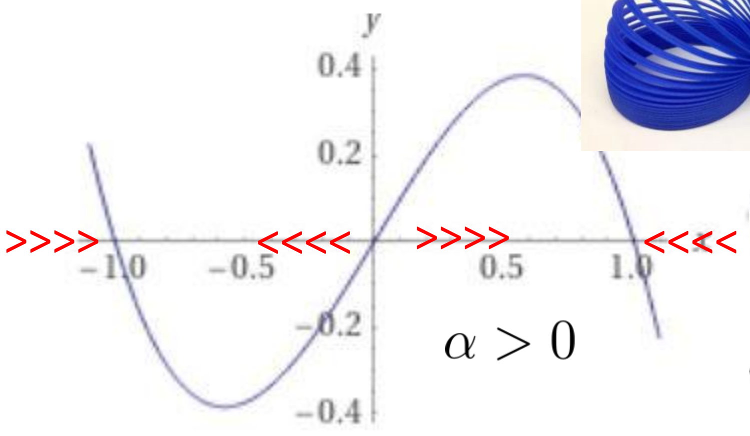
$$\dot{x} = f(x) = \alpha x - x^3$$

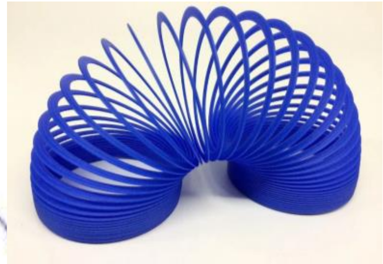
$$\frac{df}{dx} = \alpha - 3x^2. \quad \text{Em } x_e = \sqrt{\alpha}, \frac{df}{dx} = \alpha - 3(\sqrt{\alpha})^2 = -2\alpha$$

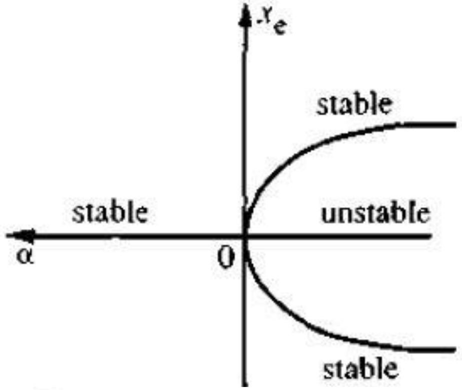
b) Se $\alpha < 0, x_e$ estável

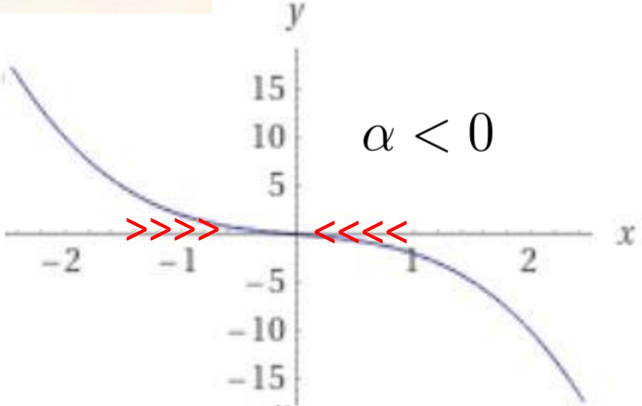
$$\dot{x} = f(x) = \alpha x - x^3$$

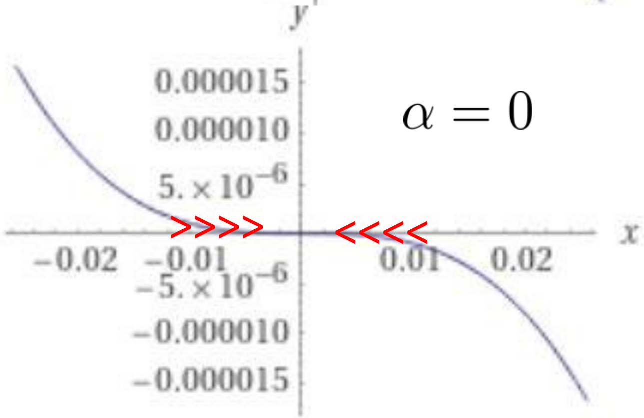
$$\frac{df}{dx} = \alpha - 3x^2. \quad \text{Em } x_e = -\sqrt{\alpha}, \frac{df}{dx} = \alpha - 3(-\sqrt{\alpha})^2 = -2\alpha$$











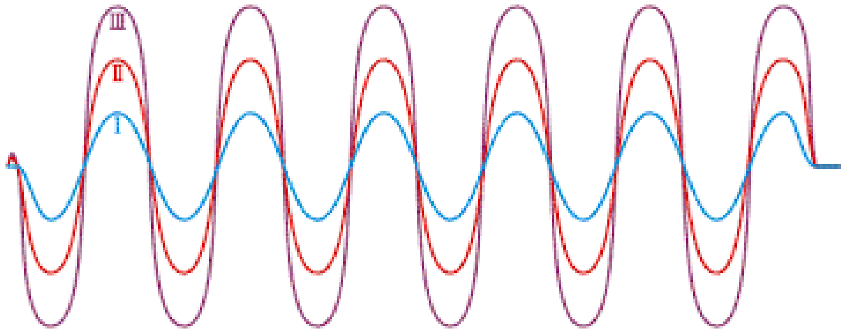
Exercício proposto 1

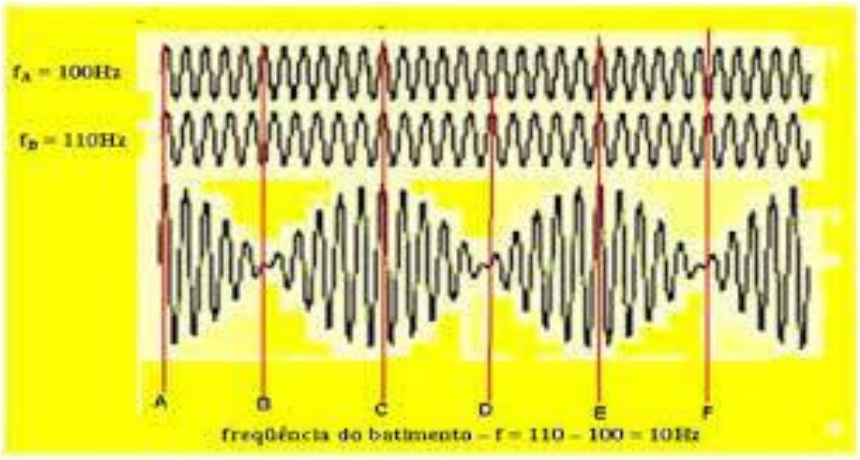
- Fazer análise e demonstração para o caso subcrítico, cuja forma normal da eq. Diferencial é:

$$\dot{x} = \alpha x + x^3$$

Mais algumas características de S. não lineares

- Oscilações sub-harmônicas, harmônicas e quase-periódicas
  - Sistema linear
    - Sistema linear estável submetido a uma entrada periódica produz em regime permanente uma saída com mesma frequência da entrada, embora possa atenuar/atrasar...
  - Sistema não linear
    - Pode oscilar em regime permanente com frequências que são submúltiplas (sub-harmônicas), ou múltiplas (harmônicas) da frequência de entrada. Pode mesmo gerar uma oscilação quase-periódica (soma de oscilações com frequências que não múltiplas uma das outras). Ex. fenômeno do batimento

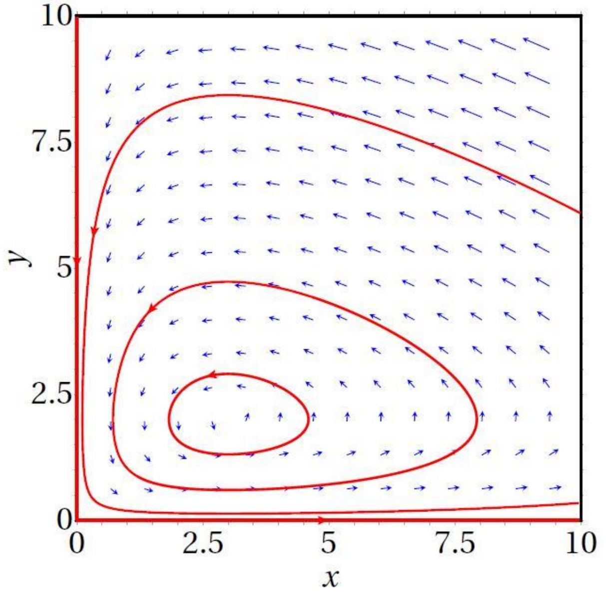




Exercício proposto 2

- Uma população de dragões, *y*, e uma população de águias, *x*, evoluem de acordo com um modelo de Lotka-Volterra:

$$\dot{x} = x(2 - y)$$
$$\dot{y} = \frac{y}{2}(x - 3)$$



Analise a estabilidade e desenhe o retrato de fase do sistema. Qual será o estado limite? alguma das duas espécies será extinta?

Exercício 2

- Uma população de dragões, *y*, e uma população de águias, *x*, evoluem de acordo com um modelo de Lotka-Volterra:

$$\dot{x} = x(2 - y)$$
$$\dot{y} = \frac{y}{2}(x - 3)$$

Analise a estabilidade e desenhe o retrato de fase do sistema. Qual será o estado limite? alguma das duas espécies será extinta?

R: os pontos de equilíbrio em (0,0) e (3,2) são classificados respectivamente em Ponto de Sela e Centro. As trajetórias são repelidas ao se aproximar de (0,0) convergindo para oscilar em torno de (3,2). Ou seja, nenhuma espécie é extinta mas ficam oscilando suas populações em equilíbrio.