EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**
josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

24T12 (60h) (13:00-14:40h) – 22.08.2022 : 21.12.2022

Apresentação

- Conteúdo planejado (ementa):
  - Introdução à dinâmica de sistemas não-lineares;
  - Conceitos fundamentais de equações diferenciais ordinárias (ODE);
  - Análise de estabilidade de sistemas não-lineares através do plano de fase;
  - Estabilidade de sistemas autônomos:
    - teoremas de Lyapunov, princípio de invariância, teoremas em instabilidade;
  - Estabilidade de sistemas não autônomos;
  - Aplicações em controle não linear: linearização por realimentação, controle por modos deslizantes, controle adaptativo.

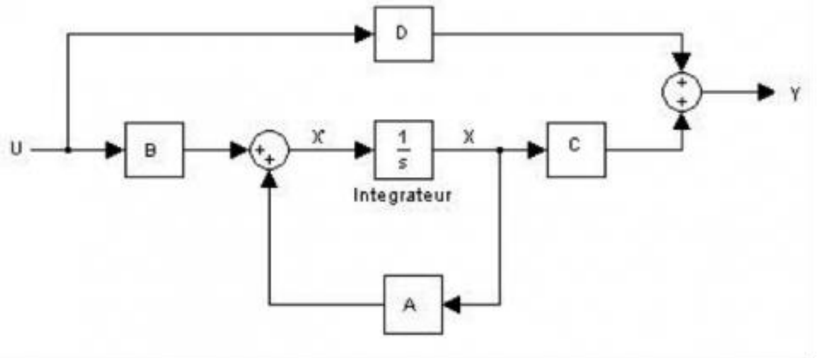
Apresentação

- Datas chave propostas para *deadline* de instrumentos avaliativos
  - 28.09, 14.11, 19.12, 21.12
- Ferramentas simulação: Matlab/Simulink, Scilab, Octave (.m), Python, R etc.
  - https://github.com/josenalde/nonlinear_systems
  - https://octave.org/ (https://octave.sourceforge.io/control/)
    - pkg install –forge control; pkg load control
    - https://octave-online.net/

```
T=0.4
G=tf([1], [T  1])
step(P,1)
hold on
plot([0 T], [0 1], “g”)
plot([T T], [0 1], “k”)
hold off
```

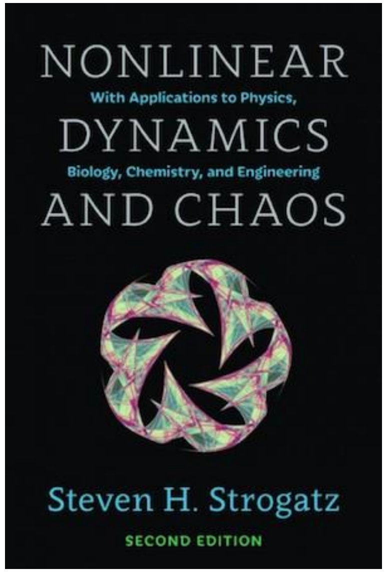
$$G(s) = \frac{K}{T^2s^2+2dTs+1} \equiv T^2\ddot{y}(t) + 2dT\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

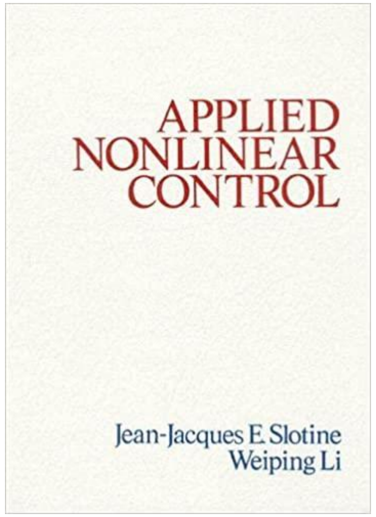


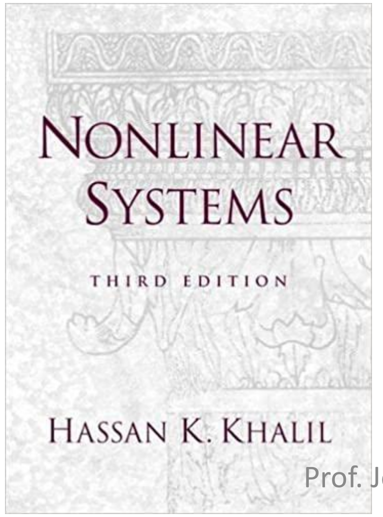

```
syslin(dom,A,B,C,D,x0)
```

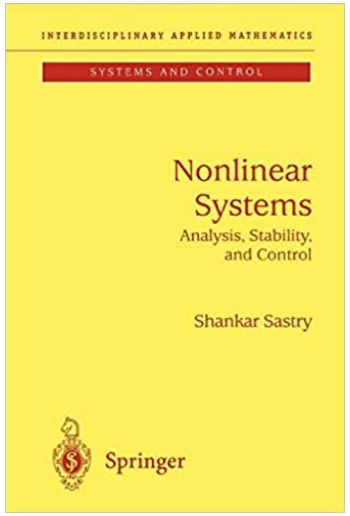
Apresentação

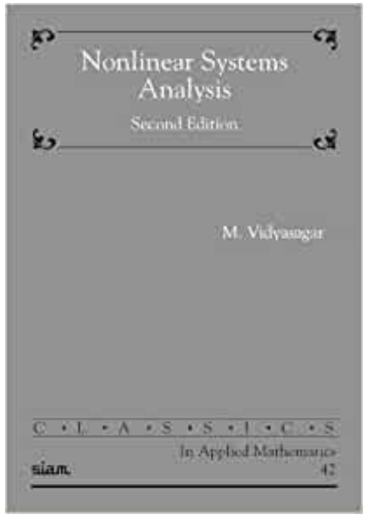


- Referências
  - Notas de aula
  - J.-J. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, 1991.
    - Aulas disponíveis: https://web.mit.edu/nsl/www/videos/lectures.html
  - H. K. Khalil, Nonlinear Systems, 3rd edition, Prentice Hall, 2001;
  - S. Sastry, Nonlinear Systems, Springer, 1999;
  - Strogatz, S.H. Nonlinear dynamics and chaos, 2nd ed, Taylor&Francis, 2015.

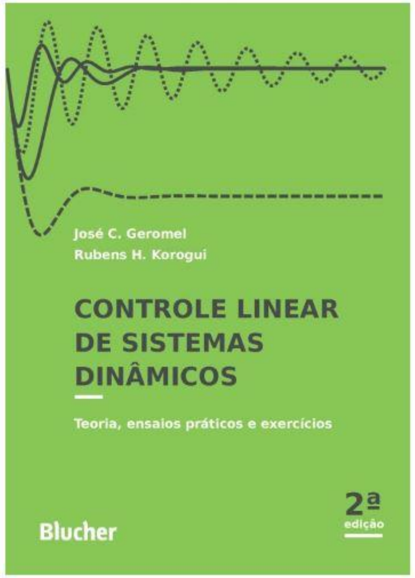




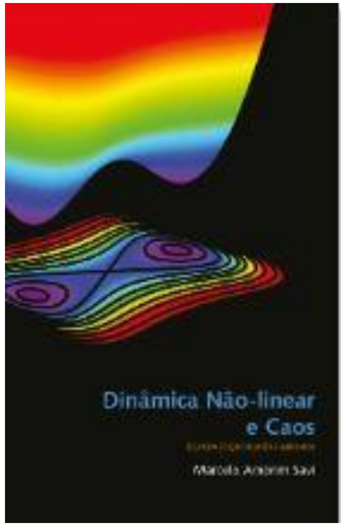


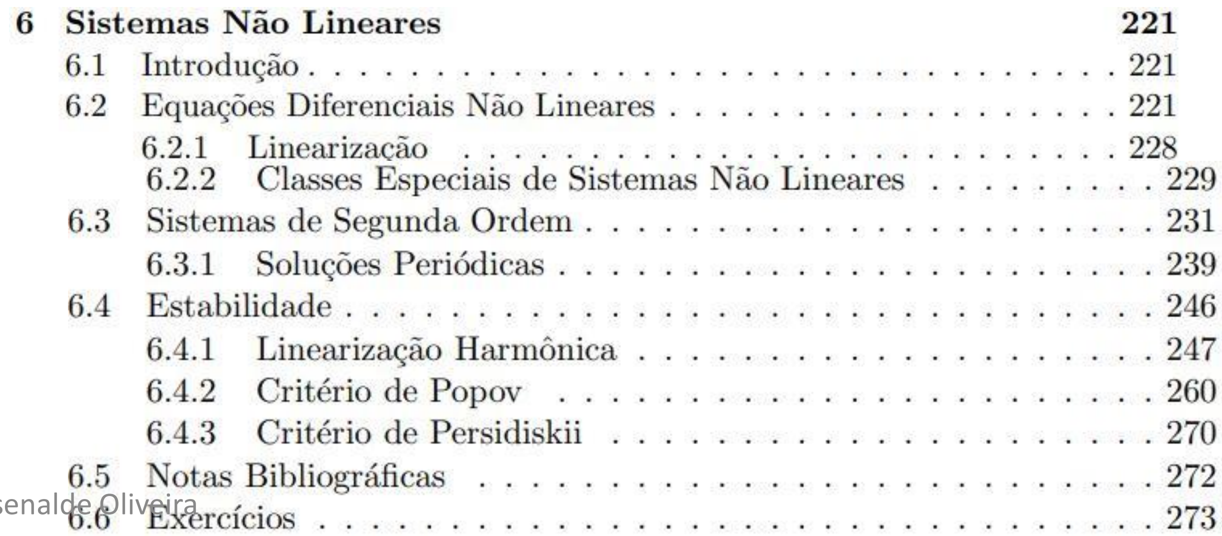


Apresentação



- Referências
  - Geromel, J.C.; Korogui, R.H. Controle linear de sistemas dinâmicos 2. ed., Blucher, 2019.
  - Oliveira, J.B. Estabilidade e Robustez de um Controlador Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável. Tese de Doutorado, UFRN. 2007. Apêndice A https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/15112/1/JosenaldeBO.pdf
  - Castrucci, Plinio. Sistemas Não Lineares, 1981. (4 na BCZM!)





  - Savi, M.A. Dinâmica não linear e caos, 2017.

Motivação

- Sistemas lineares X Sistemas não lineares
  - Teoria de análise linear sólida (sistemas dinâmicos com comportamento linear)
    - Exemplo:

$$\dot{x} = f(x), f(x) = ax, \quad \text{com } x(0) = x_0$$
$$\implies x(t) = x_0 e^{at}$$

LINEAR

$$a_0 y + a_1 \dot{y} + a_2 \ddot{y} + a_3 \dddot{y} + \cdots + a_n y^{(n)} = u(x), \quad \text{com } a_i, i = 0, 1, \ldots, n \text{ constantes}$$

Exemplos lineares:

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad 3y' + 2y = 1$$

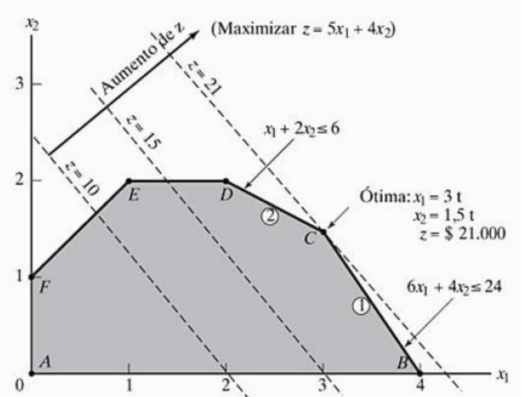
Exemplos não lineares:

$$y' + y^2 = 0 \qquad yy'' + y' = 0$$

  - Aplicações em áreas variadas, por exemplo, otimização (programação linear), controle preditivo com restrições etc.

$$\begin{aligned} &\max x_1 + x_2 \\ &\text{s.r.} \\ &2x_1 + 4x_2 \le 20 \\ &180x_1 + 20x_2 \le 600 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

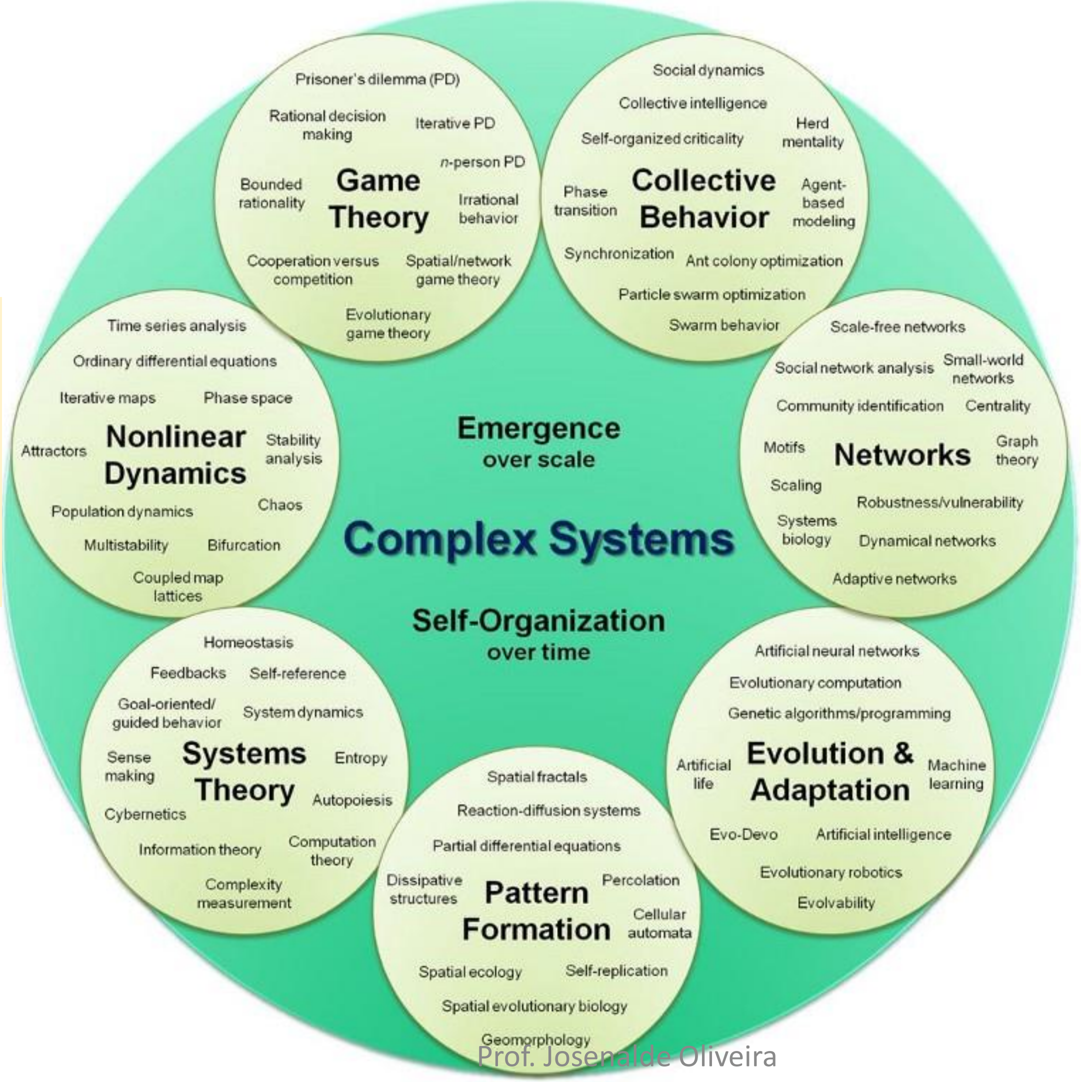
$$\begin{aligned} &\min x_1 + 2x_2 \\ &\text{s.r.} \\ &2x_1 + 3x_2 \ge 20 \\ &180x_1 + 20x_2 = 600 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

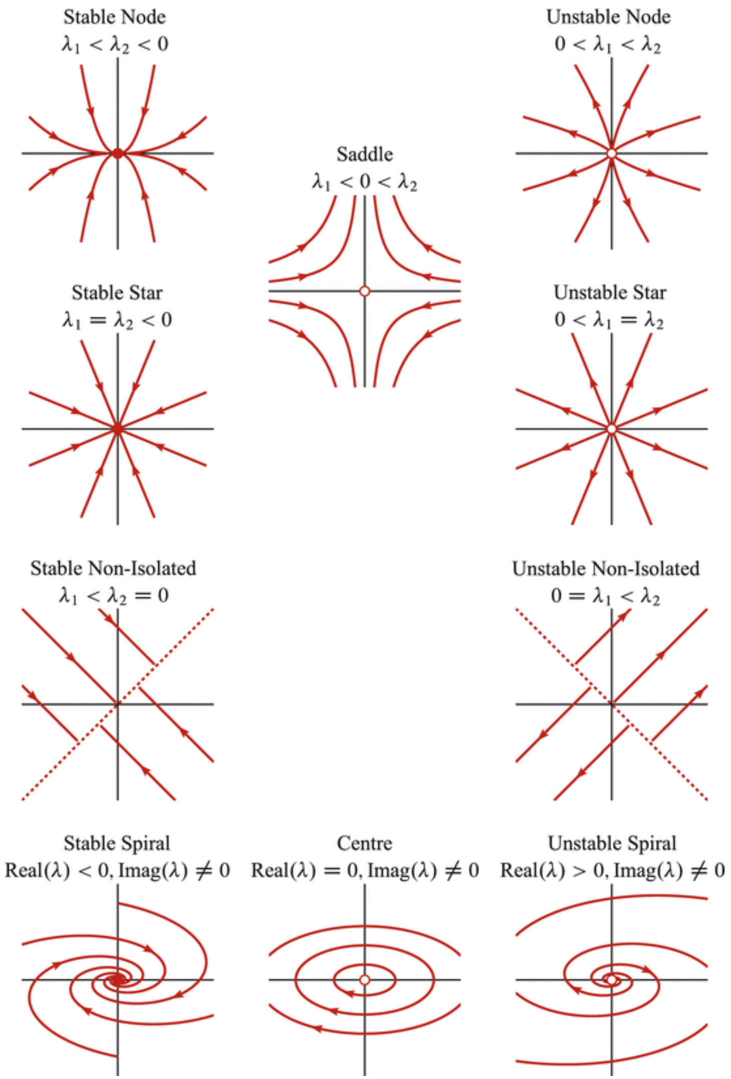


Motivação

- Sistemas lineares X Sistemas não lineares

Matemática computacional
Física
Bioinformática
Engenharia
...





Exemplos de comportamento de trajetórias em relação a pontos fixos

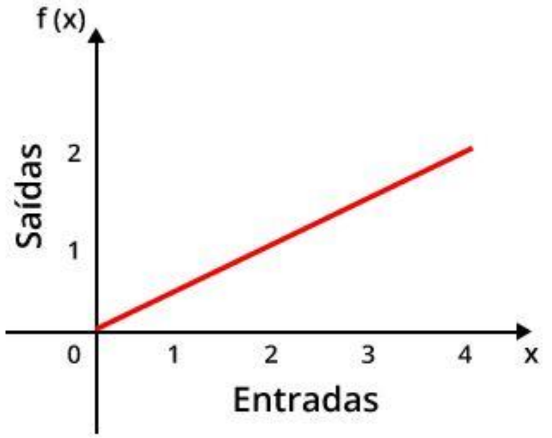
Motivação

- Sistemas lineares X Sistemas não lineares
  - Os sistemas físicos são intrinsicamente não lineares.
  - Sistemas **lineares** obedecem ao princípio da superposição e da homogeneidade

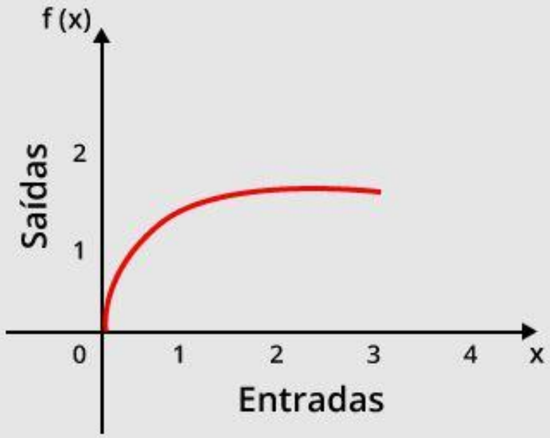
$$u_1(t) \rightarrow y_1(t) = Hu_1(t)$$
$$u_2(t) \rightarrow y_2(t) = Hu_2(t)$$
$$\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \rightarrow y(t) = H[\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)]$$
$$\alpha_1 H u_1(t) + \alpha_2 H u_2(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t), \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Re$$

Fonte: [1]

Entrada	Saída
r_1 (t)	c_1 (t)
r_2 (t)	c_2 (t)
r_1 (t) + r_2 (t)	c_1 (t) + c_2 (t)
Ar_1 (t)	Ac_1 (t)



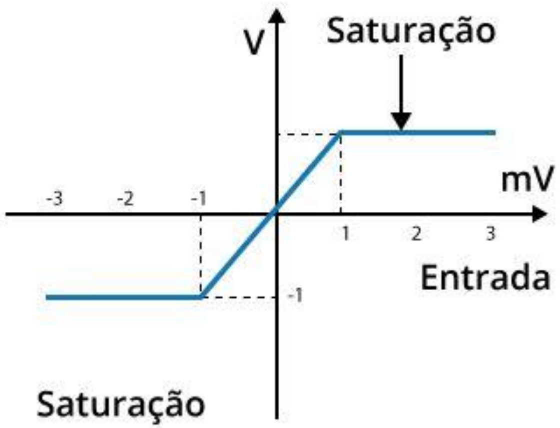
Linear

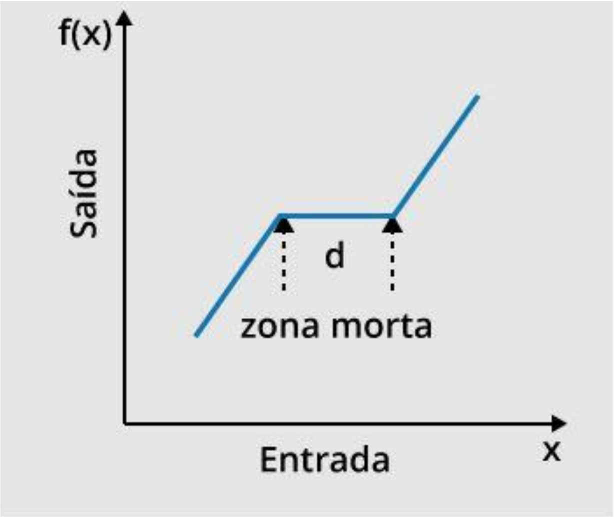


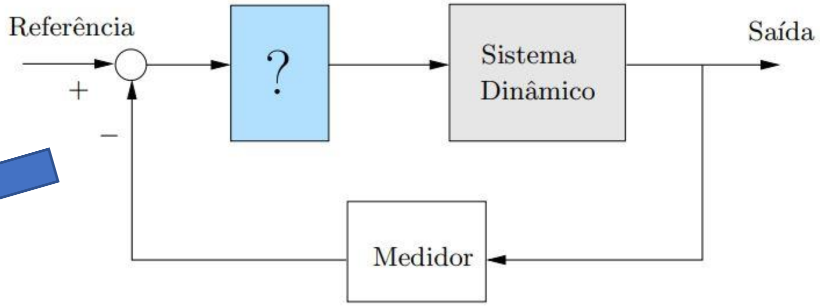
Não Linear

Motivação

- Sistemas lineares X Sistemas não lineares
  - A introdução de elementos não lineares pode melhorar e até mesmo otimizar sob alguns aspectos o desempenho de sistemas de controle







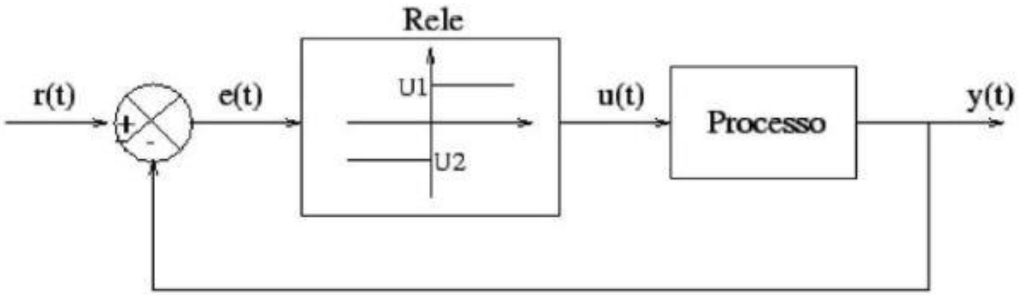
Malha fechada
pode ser não linear!

Controlador linear ou não linear

Modelo linear ou não linear

Motivação

- Análise de equações diferenciais não lineares
- Análise de fenômenos que não podem ser explicados por modelos lineares
- Introdução de controladores não lineares (adaptativo, a relé etc.)
  - Estas não linearidades podem ser
    - INERENTES ou NATURAIS (presentes no sistema)
    - INTENCIONAIS ou ARTIFICIAIS (introduzidas por um controlador)



INTENCIONAIS

$$\dot{H}_1 = \frac{1}{A_1}[Q_{i1} - \alpha_3\sqrt{H_1 - H_2}sign(H_1 - H_2) - \alpha_1\sqrt{H_1}]$$

$$\dot{H}_2 = \frac{1}{A_2}[Q_{i2} + \alpha_3\sqrt{H_1 - H_2}sign(H_1 - H_2) - \alpha_2\sqrt{H_2}]$$

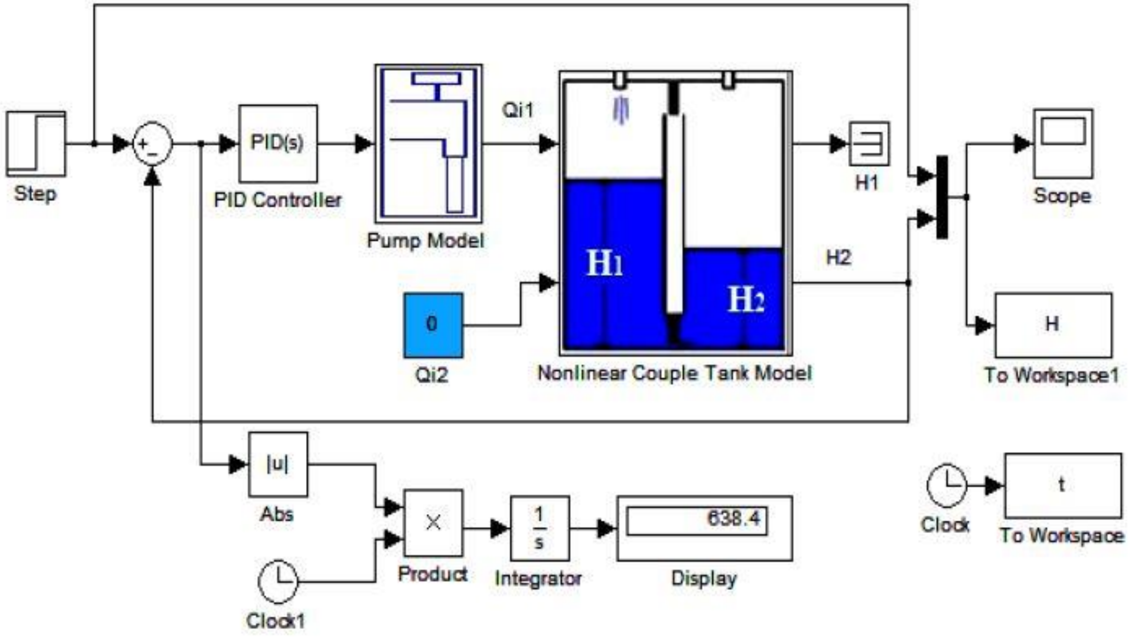
NATURAL

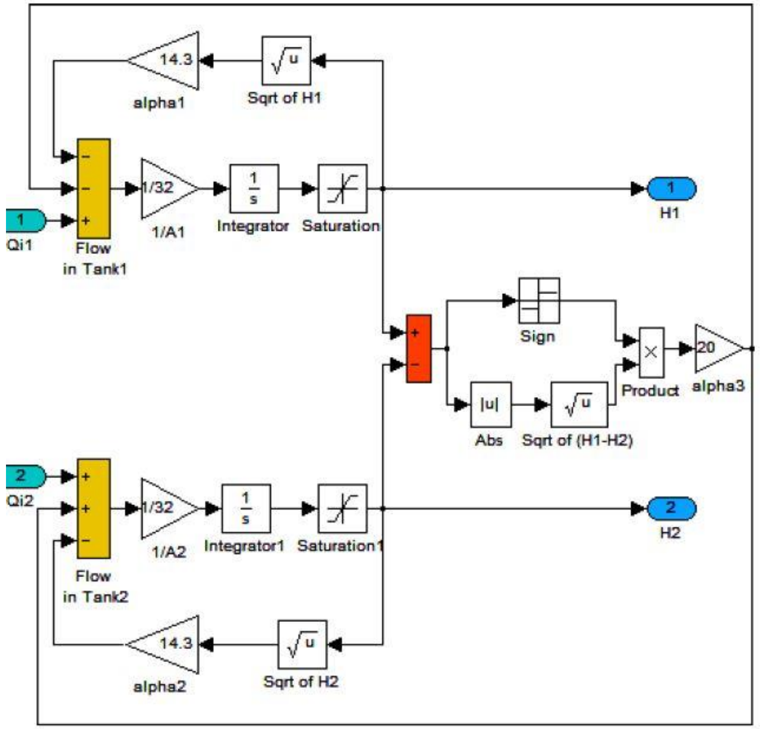
SAAD, M. Performance analysis of a **nonlinear** coupled tank system using PI controller. *Univ. J. of Control and Automation*, 5(4), p. 55-62, 2017.

Motivação

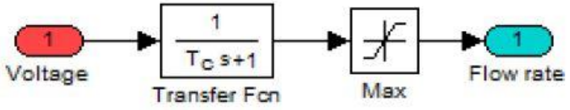
$$\dot{H}_1 = \frac{1}{A_1}\left[Q_{i1} - \alpha_3\sqrt{H_1 - H_2}\,sign(H_1 - H_2) - \alpha_1\sqrt{H_1}\right]$$

$$\dot{H}_2 = \frac{1}{A_2}\left[Q_{i2} + \alpha_3\sqrt{H_1 - H_2}\,sign(H_1 - H_2) - \alpha_2\sqrt{H_2}\right]$$





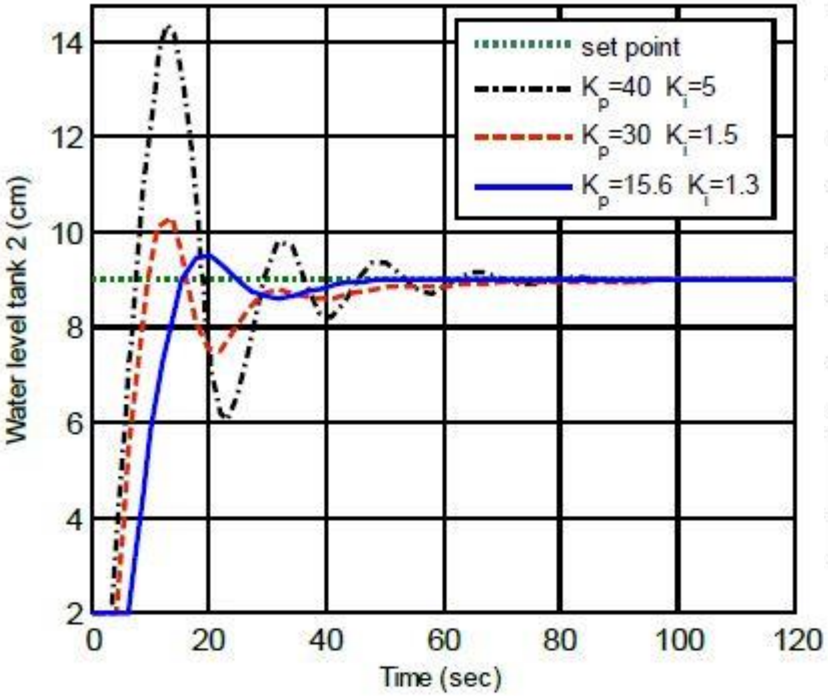
Detalhe Modelo não linear dos tanques



Detalhe Modelo linear bomba d'água

Motivação

Resultados (gráfico + tabela de indicadores (KPI))



Performance Specifications	$K_p = 40$ $K_i = 5$	$K_p = 30$ $K_i = 1.5$	$K_p = 15.6$ $K_i = 1.3$
Overshoot %	59.55%	15.5%	5.77%
Peak Time (sec.)	9.57	9.1	13.86
Raise Time (sec.)	3.46	4.14	7.06
Settling Time (sec.)	56.47	43.90	32.88
Steady State Error	0	0	0
Dead Time (sec.)	3.53	4.6	6.52

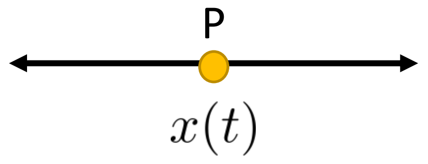
Performance Specifications	$K_p = 40$ $K_i = 5$	$K_p = 30$ $K_i = 1.5$	$K_p = 15.6$ $K_i = 1.3$
ITAE	1782	1031	638.4

Parâmetros nominais para simulação do modelo

Name	Expression	Value		
Cross section area of the couple tank reservoir	A_1& A_2	$32\ cm^2$		
Proportionality constant that depends on discharge coefficient, orifice cross Sectional area and gravitational constant	Subscript i denotes Which tank it refers	α_1	α_2	α_3
		14.3 $cm^{2/3}/sec$	14.3 $cm^{2/3}/sec$	20 $cm^{2/3}/sec$
Pump motor time constant	T_c	$1\ sec$		
Maximum allowable volumetric flow rate pumped by motor	Qi_{max}	$300\ cm^3/sec$		

Análise de uma equação diferencial não linear

Exemplo 1: predizer posição futura da partícula P



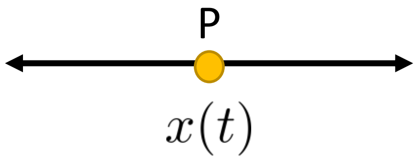
$\frac{dx}{dt} = cos(x), \quad \text{Encontrar } x \text{ para } t \to \infty \text{ para } x(0) = x_0$

Passos para analisar $\frac{dx}{dt} = f(x)$

1) Esboçar gráfico de f(x)
2) Achar pontos de equilíbrio graficamente ou resolver $\frac{dx}{dt} = 0$
3) Determinar os fluxos (setas)
4) Determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio
5) Se aplicável determinar trajetória de qualquer condição inicial

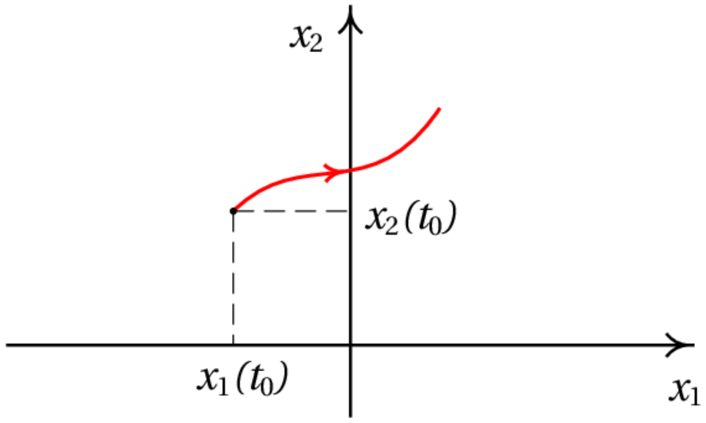
Análise de uma equação diferencial não linear

Exemplo 2: predizer posição futura da partícula P



$$\frac{dx}{dt} = x^3 - sen(x), \quad \text{Encontrar } x \text{ para } t \to \infty \text{ para } x(0) = \frac{\pi}{2}$$

Análise de uma equação diferencial não linear



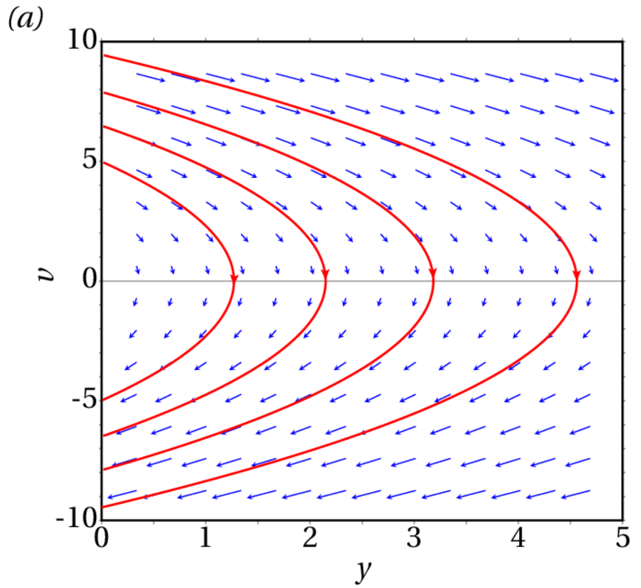
Definições:

a) ESPAÇO DE FASE: conjunto de pontos que contém todos possíveis estados do sistema dinâmico. No caso 1-D em estudo até agora, o espaço de fase é o eixo x. No caso 2-D um plano...

b) TRAJETÓRIA: caminho de uma solução no espaço de fase a partir de condição inicial

c) RETRATO DE FASE (phase Portrait): gráfico que mostra trajetórias que um sistema/equação diferencial tende a seguir

d) PONTO DE EQUILÍBRIO (Fixo, Estacionário): é um ponto x_f onde $\frac{dx}{dt} = 0$, com classificação geral:



ESTÁVEL: trajetórias na vizinhança convergem
INSTÁVEL: trajetórias na vizinhança divergem

Referências

[1] Almeida, Tiago A.; Cavalcanti, A.L.O. Notas de aula. Curso Automação Industrial, Controle de Processos 1. ed. IMD, 2016. Disponível em: https://materialpublic.imd.ufrn.br/curso/disciplina/1/63/2/5