EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Ferramentas e resultados matemáticos

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados em:

- Não linear, variante no tempo, com parâmetro desconhecido θ $\dot{x} = f(x, u, t, \theta), \quad y = h(x, u, \theta, t)$
- Linear, variante no tempo, com parâmetro desconhecido θ $\dot{x} = A(\theta, t)x + B(\theta, t)u, \quad y = C(\theta, t)x + D(\theta, t)u$
- Linear, invariante no tempo (LTI, autônomo) com parâmetro desconhecido θ $\dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u, \quad y = C(\theta)x + D(\theta)u$
    - Sendo Linear, obedece ao princípio da superposição

      $$u_1 \to y_1, u_2 \to y_2 \implies \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \to \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

    - Supondo D=0, ou seja, sem transferência direta de energia da entrada para a saída do sistema, caso SISO

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad y(t) = h^T x(t)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ferramentas e resultados matemáticos

Sistema controlável: se existe sinal de controle que leva um sistema de um estado para qualquer outro estado. Está associada à capacidade de influenciar todos os estados através das entradas do sistema.

$P_c = [b|Ab|\cdots|A^{n-1}b] \rightarrow$ matriz de controlabilidade. Se $det(P_c) \neq 0 \quad (\rho(P_c) = n) \rightarrow$ sistema controlável

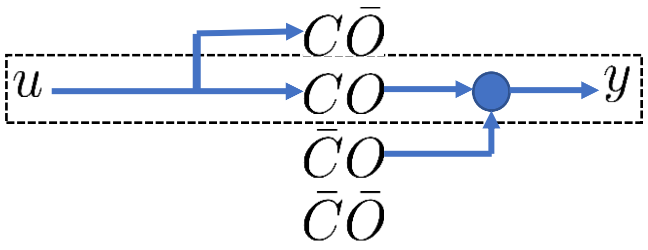
O posto da matriz P_c, dado por ρ, é o número de colunas ou linhas linearmente independentes

Sistema observável: quando é possível a partir da entrada e saída, encontrar a condição inicial. É a capacidade de "ver" todos os estados por meio das saídas do sistema.

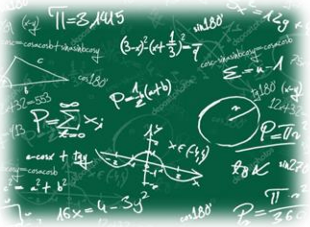
Se qualquer condição inicial $x(0)$ pode ser obtida conhecendo-se $u(t)$ e $y(t)$ para todo instante t entre 0 e $T > 0$, finito.

$$P_o = \begin{bmatrix} h^T \\ h^T A \\ \vdots \\ h^T A^{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow \text{ matriz de observabilidade. Se } det(P_o) \neq 0 \quad (\rho(P_o) = n) \rightarrow \text{ sistema observável}$$

ou seja, é apenas a solução homogênea $y(t) = h^T e^{At} x(0)$



Decomposição de Kalman. O que não é controlável, sendo estável, é estabilizável. O que não é observável, sendo estável, é detetável. Ou seja, existem dinâmicas não conhecidas e que não se pode influenciar via controle, mas se sabe ao menos que são estáveis, ou seja, decaem para zero com t -> Inf



Exemplo 1: testar control/observer

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Exemplo 2:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Aplicação de Laplace $\mathcal{L}$

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0 \implies \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s\hat{x}(s)$

$s\hat{x}(s) = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \implies (sI - A)\hat{x}(s) = B\hat{u}(s) \implies \hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s)$

Como $y(t) = h^T x(t) \implies \hat{y}(s) = h^T\hat{x}(s) \implies \hat{y}(s) = h^T(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s)$

$\hat{g}(s) = \dfrac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = h^T(sI - A)^{-1}B \rightarrow$ função de transferência

Seja $u(t) = \delta(t) \rightarrow$ impulso unitário, logo $\hat{u}(s) = 1$. $\quad \hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s) = \hat{g}(s) \implies y(t) = g(t) \rightarrow$ resposta ao impulso

$\hat{g}(s) \rightarrow$ transformada de Laplace da resposta ao impulso. Obs: $\hat{g}(s) = h^T(sI - A)^{-1}b = h^T\dfrac{Adj(sI - A)}{det(sI - A)}b$

Grau de cada elemento da Adjunta é no máximo $n - 1$ elimina um s. $\quad \hat{g}(s)$ é uma função racional denominada estritamente própria, $deg(n) < deg(d)$

Funções de transferência

$$\hat{g}(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1}s^{m-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{r}(s)}, \quad m < n$$

Grau relativo de $\hat{g}(s) \rightarrow n^* = n - m$ (excesso de polos)

As raízes de $det(sI - A) = 0 \rightarrow$ autovalores de A

As raízes de $\hat{r}(s) = 0 \rightarrow$ polos de $\hat{g}(s) \rightarrow$ levam a função para infinito. $\{$polos de $\hat{g}(s)\} \subset \{$autovalores de $A\}$

Se o sistema é controlável e observável não há cancelamentos na obtenção de $\hat{g}(s)$, logo,

$\{$polos de $\hat{g}(s)\} = \{$autovalores de $A\}$

Quando há cancelamento, o sistema tem subsistema não controlável ou não observável

As raízes de $\hat{z}(s) = 0 \rightarrow$ zeros de $\hat{g}(s) \rightarrow$ deixam a função nula.

Realização de uma função de transferência: obtenção do modelo por variáveis de estado para o subsistema controlável e observável

Forma canônica do controlador

$$\hat{g}(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{r}(s)}, \quad m < n \quad \text{função racional: divisão de polinômios}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Para esta forma,

$$Adj(sI - A)b = \begin{bmatrix} s^{n-1} \\ s^{n-2} \\ \vdots \\ s \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_{n-1}(s)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_m & \beta_{m-1} & \cdots & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} x$$

$\alpha_{n-1}(s)$ independe dos coeficientes de $\hat{g}(s) \rightarrow$ sem preocupação com desconhecimento dos coeficientes

Forma canônica do observador (dual à forma do controlador)

$$\hat{g}(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{r}(s)}, \quad m < n \quad \text{função racional: divisão de polinômios}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_m \\ \beta_{m-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u$$

Para esta forma,

$$h^T Adj(sI - A) = \begin{bmatrix} s^{n-1} & s^{n-2} & \cdots & s & 1 \end{bmatrix} = \alpha_{n-1}^T(s)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

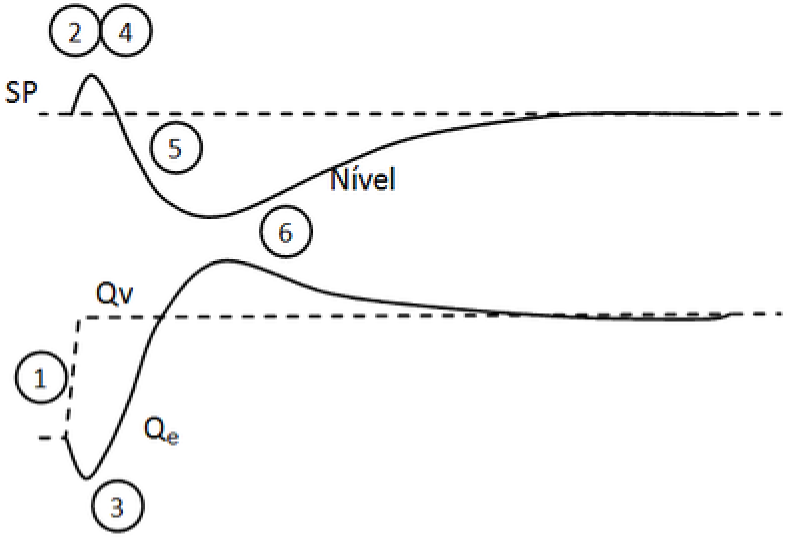
Polinômios

mônico $\rightarrow$ o coeficiente do termo de maior grau é 1. $\hat{r}(s)$ é mônico

Hurwitz $\rightarrow$ raízes da equação polinomial (polinomio=0) tem parte real negativa

Se $\hat{z}(s)$ é Hurwitz $\rightarrow$ sistema de fase mínima. Zeros com parte real negativa

Se $\hat{r}(s)$ é Hurwitz $\rightarrow$ sistema estável. Polos com parte real negativa



1 - Aumento na demanda de vapor (Qv)

$\Downarrow$

2 – Aumento no nível (inchamento)

$\Downarrow$

3 – Diminuição da vazão de água Qe (ação PI)

$\Downarrow$

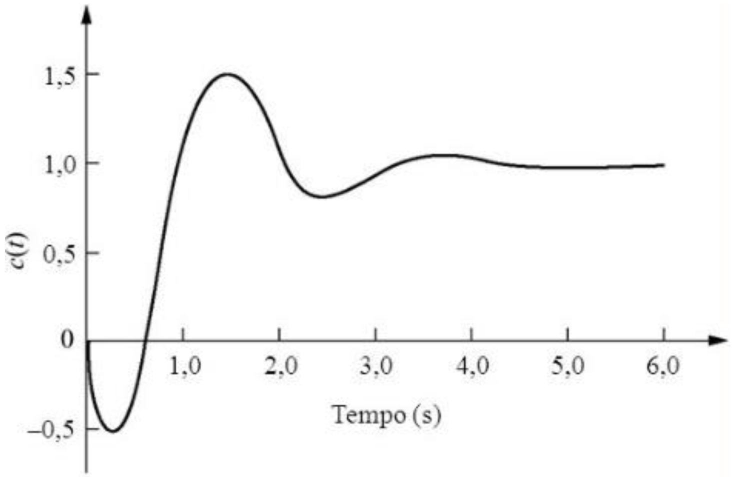
4 –Outro aumento no nível (têmpera)

$\Downarrow$

5 – Fim do efeito inchamento/têmpera, queda brusca no nível

$\Downarrow$

6 – Aumento da vazão Qe e estabilização do nível (ação PI)



OBS:
MRAC: fase mínima
APPC: fase mínima e não mínima

Polinômios coprimos

Dois polinômios $a(s)$ e $b(s)$ são coprimos se eles não tem fator comum (exceto uma constante)

Exemplo: $a(s) = 2(s+1)$ e $b(s) = 4(s+2)$

Identidade de Bezout:

Dois polinômios $a(s), b(s)$ são coprimos se e somente se existem polinômios $c(s), d(s)$ tal que

$$c(s)a(s) + d(s)b(s) = 1$$

Exemplo: $a(s) = (s+1)$ e $b(s) = (s+2) \implies c(s) = s^n + 2s^{n-1} - 1, \quad$ para $n \geq 1$

$$d(s) = -s^n - s^{n-1} + 1$$

Teorema 1 *Se $a(s)$ e $b(s)$ são coprimos e de graus n_a e n_b, respectivamente, onde $n_a > n_b$, então, para qualquer polinômio arbitrário $a^*(s)$ com grau $n_a^* \geq n_a$ a equação polinomial (Diofantina)*

$$a(s)l(s) + b(s)p(s) = a^*(s)$$

tem uma única solução $l(s)$ e $p(s)$ cujos graus n_l e n_p, respectivamente, satisfazem as restrições

$$n_p < n_a$$

$$n_l \leq max(n_a^* - n_a, n_b - 1)$$

Projeto de alocação de polos

Seja $\hat{g}(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)} = \dfrac{s-1}{s^3}$. Projetar controlador por alocação de polos para $a^*(s) = (s+1)^5$

O controlador é dado pela razão $\dfrac{p(s)}{l(s)}$. Em malha aberta: $\dfrac{p(s)b(s)}{a(s)l(s)}$.

Em malha fechada: $\dfrac{p(s)b(s)}{a(s)l(s)+p(s)b(s)} = \dfrac{p(s)b(s)}{a^*(s)}$

$a(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = a_3 s^3, \quad a_3 = 1$

$b(s) = b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 = b_1 s^1 + b_0, \quad b_1 = 1, b_0 = -1$

$n_p < n_a \implies n_p < 3 \implies p(s) = p_2 s^2 + p_1 s + p_0$

$n_l \leq max(n_a^* - n_a, n_b - 1) \implies n_l \leq max(2,0) \implies n_l <= 2 \implies l(s) = l_2 s^2 + l_1 s + l_0$

Resolver: $(s^3)(l_2 s^2 + l_1 s + l_0) + (s-1)(p_2 s^2 + p_1 s + p_0) = (s+1)^5$

https://pt.symbolab.com/solver/binomial-expansion-calculator

Resposta: $\dfrac{-(16s^2+6s+1)}{s^2+5s+26}$

Projeto de alocação de polos

Resolver: $(s^3)(l_2 s^2 + l_1 s + l_0) + (s-1)(p_2 s^2 + p_1 s + p_0) = (s+1)^5$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} l_2 \\ l_1 \\ l_0 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{f} \Longrightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 26 \\ -16 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow x = S^{-1} f$$

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = a_3 s^3, \quad a_3 = 1$$

$$b(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 = b_1 s^1 + b_0, \quad b_1 = 1, b_0 = -1$$

linha 0 : $\binom{0}{0}$

linha 1 : $\binom{1}{0}\binom{1}{1}$

linha 2 : $\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$

linha 3 : $\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$

linha 4 : $\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$

linha 5 : $\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$

$$C_{n,p} = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

linha 0 : 1

linha 1 : 1 1

linha 2 : 1 2 1

linha 3 : 1 3 3 1

linha 4 : 1 4 6 4 1

linha 5 : 1 5 10 10 5 1

Forma geral Sylvester

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = a_3 s^3, \quad a_3 = 1$$

$$b(s) = b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 = b_1 s^1 + b_0, \quad b_1 = 1, b_0 = -1$$

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & & \vdots & b_1 & b_2 & b_3 & & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & & \vdots & b_0 & b_1 & b_2 & & \vdots \\ 0 & a_0 & a_1 & & \vdots & 0 & b_0 & b_1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_0 & & a_1 & \vdots & \vdots & b_0 & \cdots & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \quad a(s), b(s) \text{ coprimos, para } det(S) \neq 0 \implies \exists S^{-1}$$

Normas e outras métricas

Para analisar a estabilidade de sistemas adaptativos, faz-se necessário ferramentas e métricas que permitam avaliar se os sinais envolvidos são limitados, ou seja, possuem cota superior, ou mesmo se convergem para zero (ou para seus pontos de equilíbrio)

a) Norma de um vetor $x = [x_1 \cdots x_n]^T, \quad x_i \in R, ||x||$ é uma função com as propriedades:

i) $||x|| \in R, \quad ||x|| \geq 0$ com $||x|| = 0$ se e somente se $x = 0$ vetor nulo

ii) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||, \quad \forall \alpha \in R$

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \rightarrow$ desigualdade triangular

$$\text{Norma } p \text{ de } x = ||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| > \underbrace{||x||_2 = ||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}}_{\text{Norma Euclidiana}} > ||x||_\infty = \max_{i \leq i \leq n} |x_i|$$

Normas e outras métricas

Uma matriz $A \in R^{n\times m}$ uma aplicação linear (operador) do espaço R^n no espaço R^m

Definição: Seja $|\cdot|$ uma norma dada. Então, para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, a quantidade $||A||$ definida por

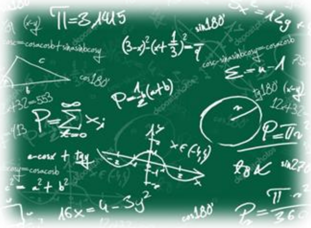
$$\|A\| := \sup_{x\neq 0,\, x\in\mathbb{R}^m} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax|.$$

é denominada norma matricial induzida correspondente a norma de vetores $|\cdot|$.

e a correspondente norma induzida

$$\|A\|_p = \sup_{x\neq 0,\, x\in\mathbb{R}^m} \frac{|Ax|_p}{|x|_p} = \sup_{|x|_p=1} |Ax|_p.$$

Normas e outras métricas



Normas induzidas

$$||A||_1 = \max_{j \in \{1,\cdots,m\}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$ Valor máximo da soma do módulo de cada coluna

$$||A||_2 = (\lambda_{max} A^T A)^{1/2}$$

Valor singular de um sistema, particular interesse na análise em frequência

$$||A||_\infty = \max_{i \in \{1,\cdots,n\}} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right)$$ Valor máximo da soma do módulo de cada linha

Exemplos:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Comparação assintótica de sinais

Seja $g(x) > 0$ e suponha que $\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} \le c$ então, dizemos que f é da mesma forma de grandeza de g e representamos por $f = \mathcal{O}(g)$

Exemplo: $f(x) = xsenx, \quad g(x) = x, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{|xsenx|}{x} = \frac{x|senx|}{x} = |senx| \le 1$

Seja $g(x) > 0$ e suponha que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ então, dizemos que f é desprezível em relação a g e representamos por $f = o(g)$

Exemplo: $f(x) = x, \quad g(x) = x^2, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$