

EGM0004

# Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira** – UFRN



josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

# Estabilidade em sistemas não lineares



A. Lyapunov  
(1857-1918)

1) Equações diferenciais lineares, a estabilidade assintótica é sempre um atributo global. Ou seja, com um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, que necessariamente é único, as soluções se aproximam dele não importam as condições iniciais

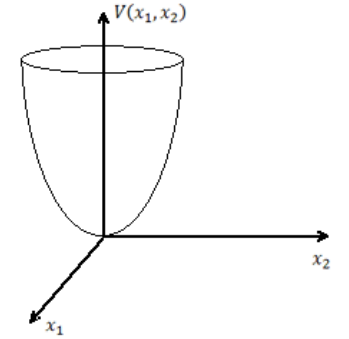
2) Numa equação diferencial não linear, um ponto de equilíbrio é **assintoticamente estável** se existir uma vizinhança na qual toda condição inicial a ela pertencente gera uma solução para todo  $t$  e que tende para o ponto de equilíbrio no decorrer do tempo. Esta vizinhança é denominada *domínio de estabilidade*.

3) Método direto de Lyapunov: não é restrito ao comportamento local de um sistema não linear. Utiliza “funções de energia” para a verificação de estabilidade. Vamos analisar sistemas autônomos (invariantes no tempo)

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{com } x^* \text{ um estado de equilíbrio de } \dot{x} = f(x), f(x^*) = 0$$

4) Para analisar o comportamento em uma vizinhança de  $x^*$ , faremos uma translação do estado de equilíbrio para a origem

# Estabilidade em sistemas não lineares



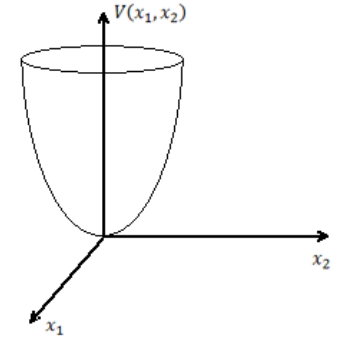
$$\begin{aligned}\bar{x} &= x - x^*, & x &= \bar{x} + x^* \\ \dot{\bar{x}} &= \dot{x} - \dot{x}^*, & \dot{x} &= f(x) = f(\bar{x} + x^*) \implies \dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)\end{aligned}$$

Com  $\bar{x} = 0 \implies \dot{\bar{x}} = f(x^*) = 0$ , ponto de equilíbrio no novo sistema de coordenadas

Existe uma relação biunívoca entre as soluções de  $\dot{x} = f(x)$  e  $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$

- 1) A origem de  $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$  é **ESTÁVEL** se para qualquer estado inicial  $\bar{x}(0)$  suficientemente próximo da origem, a solução  $\bar{x}(t)$  se mantém suficientemente próxima da origem,  $\forall t \geq 0$
- 2) A origem de  $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$  é **ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL** se para qualquer estado inicial  $\bar{x}(0)$  suficientemente próximo da origem, a origem é estável e a solução  $\bar{x}(t)$  se aproxima da origem quando  $t \rightarrow \infty$
- 3) A origem de  $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$  é **EXPONENCIALMENTE ESTÁVEL** se,  $\forall \bar{x}(0)$ , suficientemente próximo da origem, a origem é estável e a solução  $\bar{x}(t)$  se aproxima da origem exponencialmente quando  $t \rightarrow \infty$

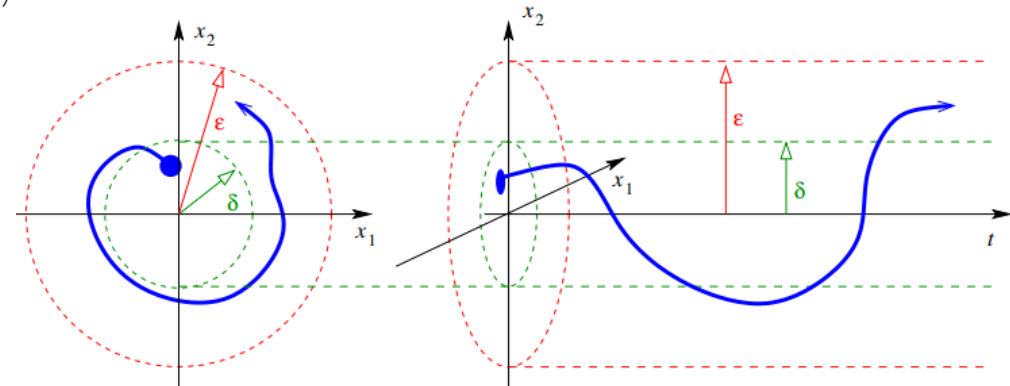
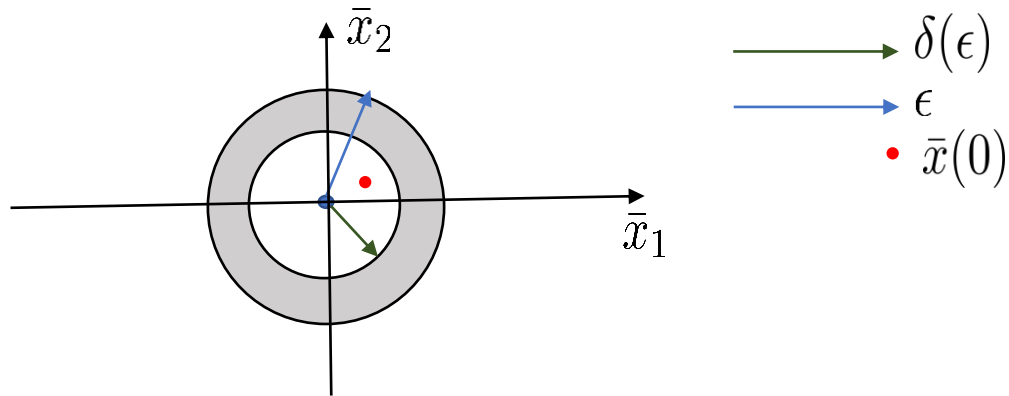
# Estabilidade em sistemas não lineares



- 4) A origem de  $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$  é GLOBALMENTE ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL se para qualquer estado inicial  $\bar{x}(0) \in R^n$ , a origem é estável e a solução  $\bar{x}(t)$  se aproxima da origem, quando  $t \rightarrow \infty$  (a origem é o único ponto de equilíbrio)
- 5) A origem de  $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$  é GLOBALMENTE EXPONENCIALMENTE ESTÁVEL se para  $\forall \bar{x}(0) \in R^n$ , a origem é estável e a solução  $\bar{x}(t)$  se aproxima da origem exponencialmente, quando  $t \rightarrow \infty$  (a origem é o único ponto de equilíbrio)
- 6) A origem de  $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$  é GLOBALMENTE ESTÁVEL se,  $\forall \bar{x}(0) \in R^n$ , a origem é estável ou seja, não tende a infinito quando  $t \rightarrow \infty$

# Formalização...

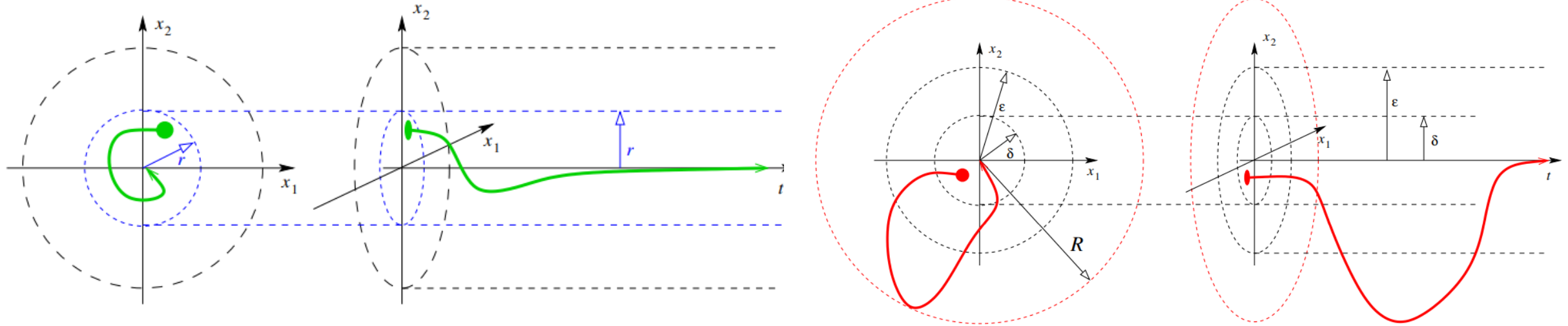
1) A origem de  $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$  é ESTÁVEL se  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$  tal que se  $\|\bar{x}(0)\| \leq \delta(\epsilon)$ , então,  $\|\bar{x}(t)\| \leq \epsilon, \forall t \geq 0$ . Em caso contrário, a origem é instável



Fonte: Torres, L.A.B. UFMG

2) A origem de  $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$  é ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL se a origem é estável e  $\exists \delta > 0$  tal que  $\|\bar{x}(0)\| \leq \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t)\| = 0$

# Formalização...



Fonte: Torres, L.A.B. UFMG

Se ocorre  $\bar{x}(t) \rightarrow 0$  mesmo indo além da região delimitada por  $\epsilon$ , a origem é atrativa, embora instável no sentido de Lyapunov

Assintoticidade  $\rightarrow$  atratividade, Atratividade não implica assintoticidade

# Formalização...

3) A origem de  $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x} + x^*)$  é EXPONENCIALMENTE ESTÁVEL se  $\exists \lambda > 0, \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$  tal que se  $\|\bar{x}(0)\| \leq \delta(\epsilon)$  então  $\|\bar{x}(t)\| \leq \epsilon e^{-\lambda t}$

Exemplos: van der Pol

Único ponto de equilíbrio (0,0), mas possui ciclo limite estável. Não é possível definir  $\epsilon$  suficiente pequeno, tal que exista  $\delta(\epsilon)$  de tal forma que atenda à qualquer condição de estabilidade. Portanto, origem é instável.

Exemplos: Vinograd (origem instável, mas atrativa)

$$\dot{x} = \frac{x^2(y - x) + y^5}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)}, \quad \dot{y} = \frac{y^2(y - 2x)}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)}.$$

Vinograd, R.E.: The inadequacy of the method of characteristic exponents when applied to non-linear equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **114**, 239–240 (1957)

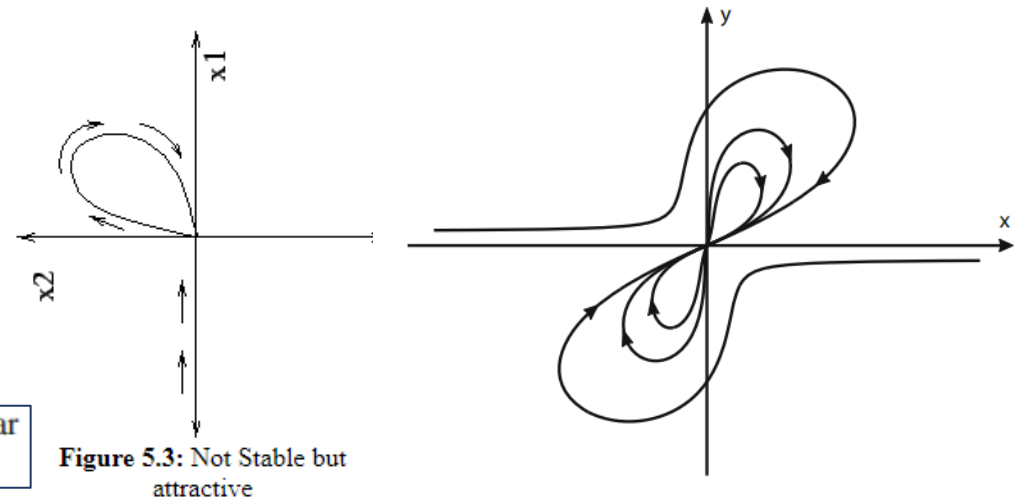


Figure 5.3: Not Stable but attractive

# Formalização...

## 4) Estabilidade assintótica e Estabilidade exponencial

Seja o sistema  $\dot{x} = -x^2$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $x^* = 0 \rightarrow$  único ponto de equilíbrio, logo para ter dinâmica  $x_0 \neq 0$

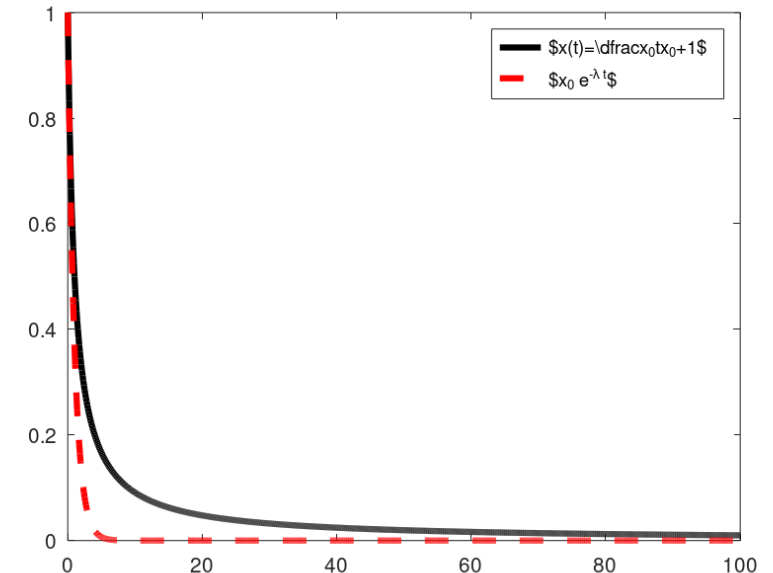
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = -x^2 &\implies -\frac{dx}{x^2} = dt \implies -\int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2} = \int_0^t dt \implies -\int_{x_0}^x x^{-2} = t_0^t \implies \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = t \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = t &\implies \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} + t \implies x(t) = \frac{x_0}{tx_0 + 1} \end{aligned}$$

Esta função é mais lenta que qualquer função exponencial  $x_0 e^{-\lambda t}$ ,  $\lambda > 0$

Estabilidade assintótica não implica estabilidade exponencial

Estabilidade exponencial implica estabilidade assintótica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad \|x(t)\| \leq \|x(0)\|, \quad \forall t \geq 0$$





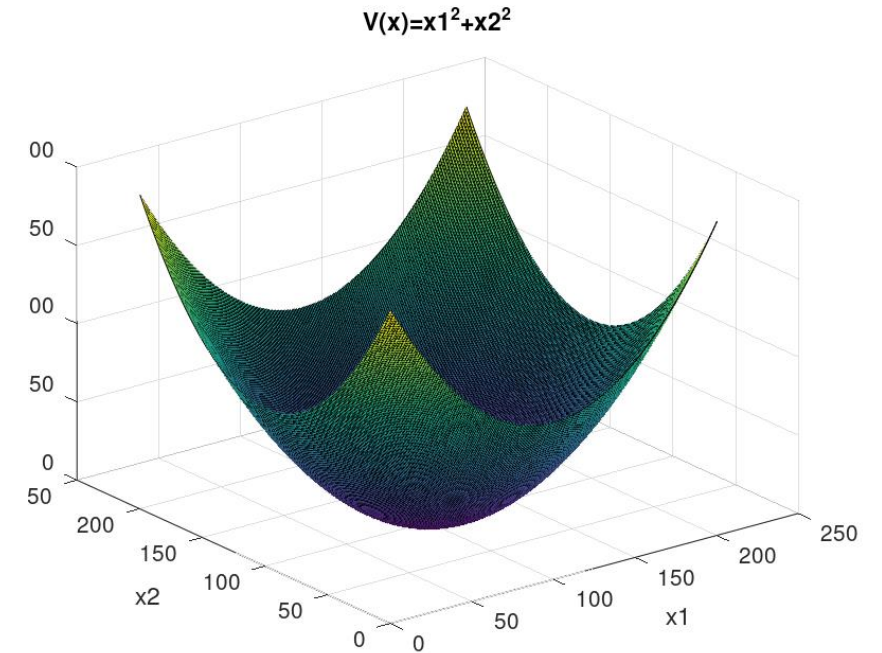
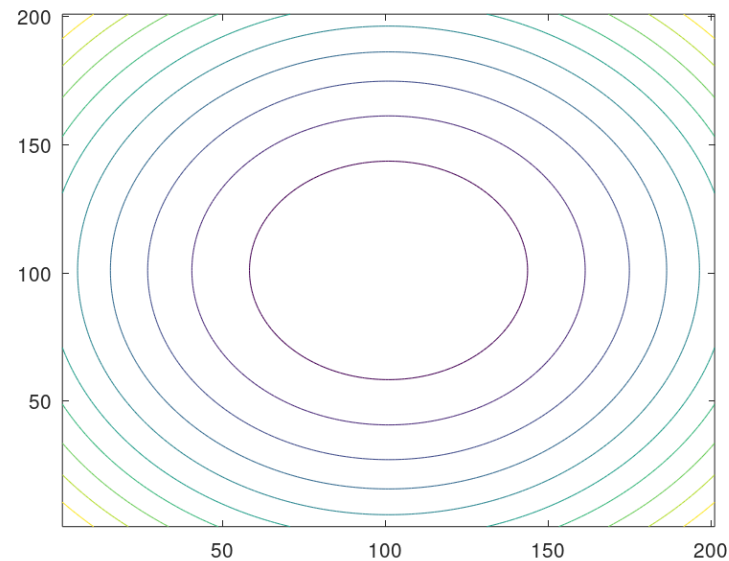
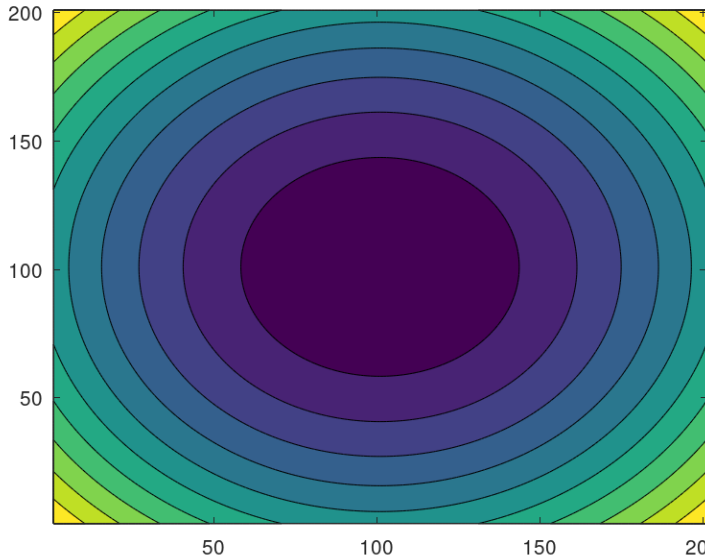
# Funções definidas e semi-definidas

- 1) Uma função  $V(x)$  é definida positiva ( $V(x) > 0$ ) em uma vizinhança de  $x = 0$  se  $V(x) > 0, \forall x$  tal que  $\|x\| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0, x \neq 0$ , e  $V(0) = 0$ .
- 2) Uma função  $V(x)$  é semi-definida positiva ( $V(x) \geq 0$ ) em uma vizinhança de  $x = 0$  se  $V(x) \geq 0, \forall x$  tal que  $\|x\| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0$  e  $V(0) = 0$  (pode se anular noutros pontos) .
- 3) Uma função  $V(x)$  é definida negativa ( $V(x) < 0$ ) em uma vizinhança de  $x = 0$  se  $V(x) < 0, \forall x$  tal que  $\|x\| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0, x \neq 0$ , e  $V(0) = 0$ .
- 4) Uma função  $V(x)$  é semi-definida negativa ( $V(x) \leq 0$ ) em uma vizinhança de  $x = 0$  se  $V(x) \leq 0, \forall x$  tal que  $\|x\| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0$  e  $V(0) = 0$ .

Se as propriedades são válidas  $\forall x \in R^n$  as funções são definidas (ou semi-definidas) positivas (ou negativas) GLOBAIS

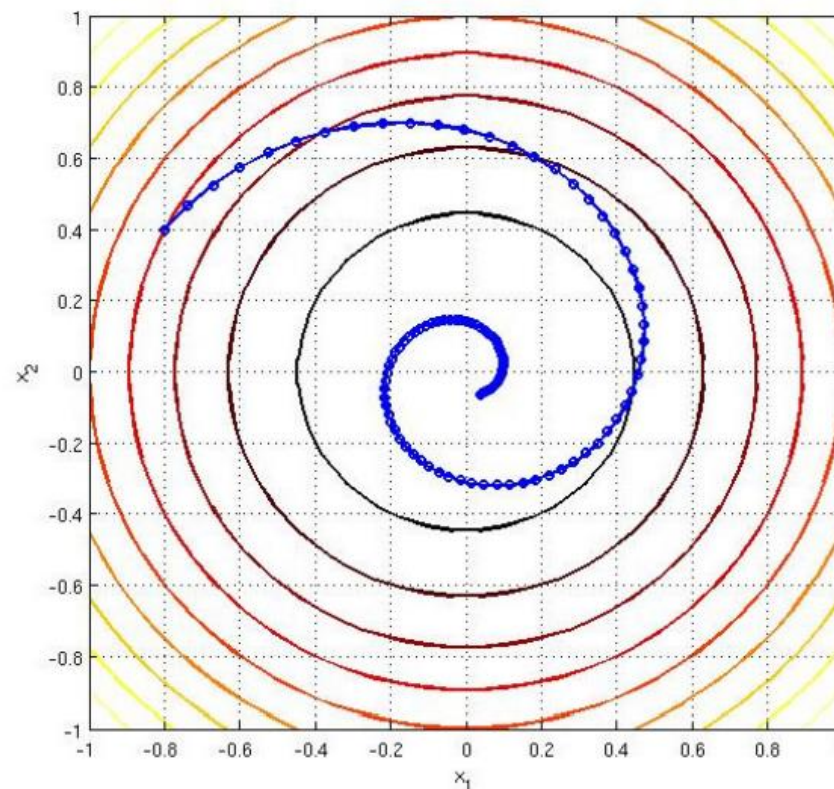
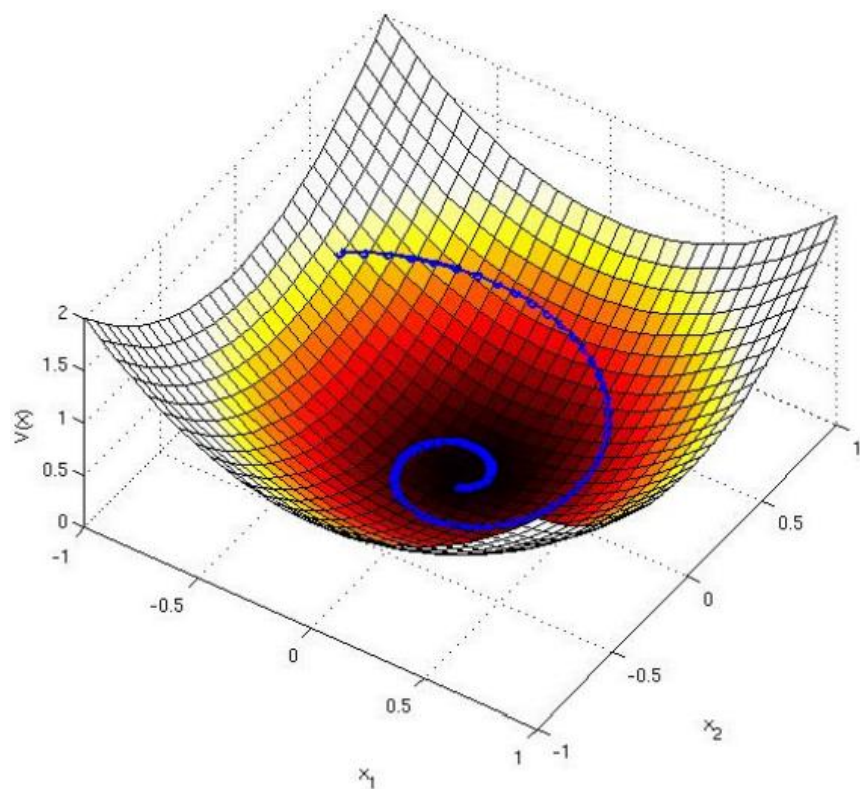
# Funções definidas e semi-definidas

$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$  Definida positiva, função de energia é escalar



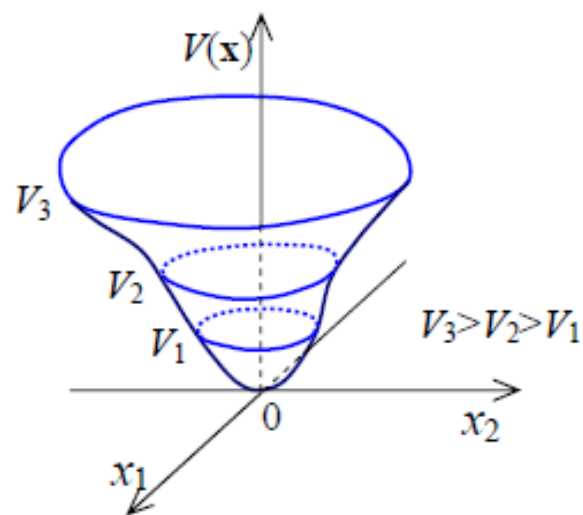
# Funções definidas e semi-definidas

$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$  Definida positiva, função de energia é escalar

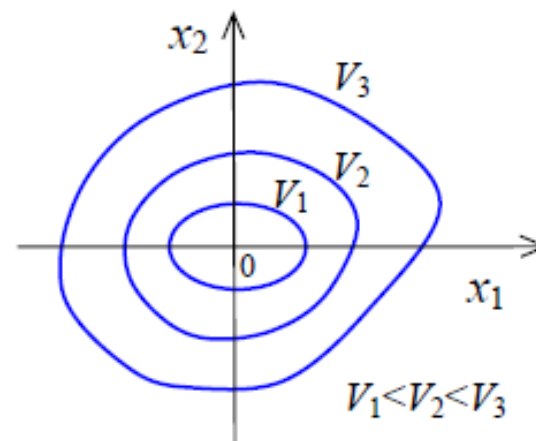


[Fonte: Torres, L.A.B. UFMG](#)

# Funções definidas e semi-definidas



a) Representação 3D

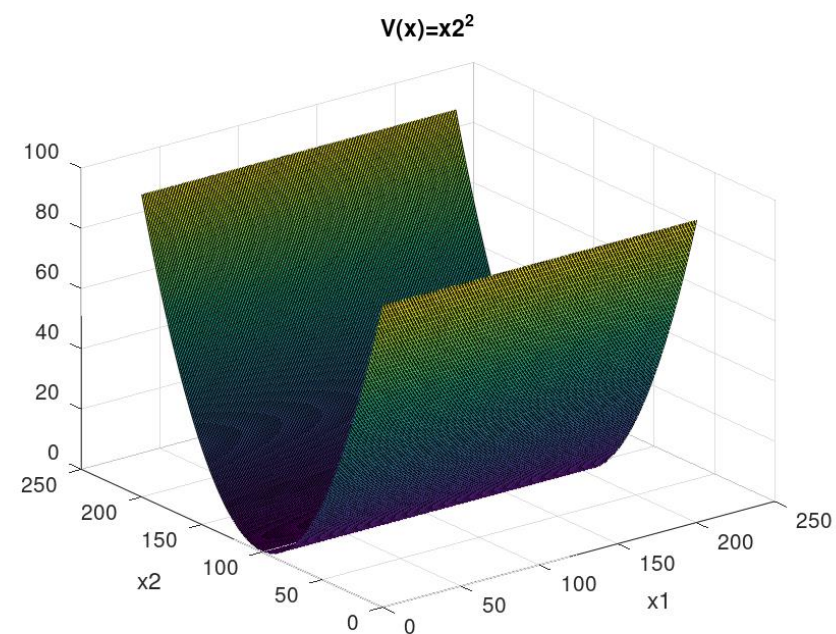
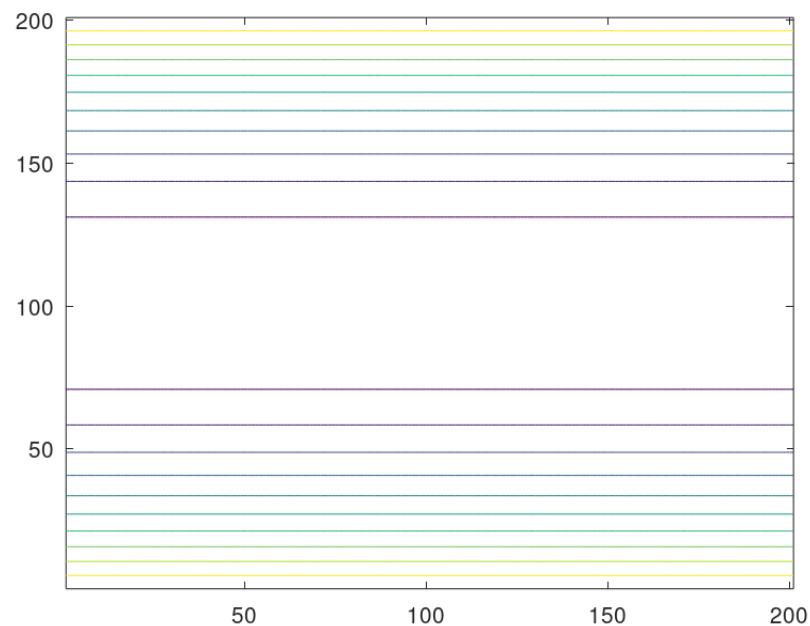


b) Curvas de nível

Fonte: SILVA, Gustavo. V.M. Controlo Não Linear, 3. ed. IPS – Portugal, 2006

# Funções definidas e semi-definidas

$V(x) = x_2^2 \geq 0$  Semi-definida positiva





# Interpretação geométrica

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle;$$

sendo  $\nabla V = \partial V / \partial x$  o gradiente da Função de Lyapunov, e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o operador produto escalar de dois vetores. Ou seja, para  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^\top$  e  $f(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_n(x)]^\top$  vetores coluna, tem-se:

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(x); \\ f_2(x); \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}.$$

# Interpretação geométrica

Neste caso, supondo superfícies de nível definidas por  $V(x) = c$ , sendo  $c > 0$  uma constante real positiva, e lembrando que o gradiente  $\nabla V(x)$  é perpendicular à superfície de nível em questão no ponto  $x$ , vê-se que os vetores “velocidade”  $f(x)$  correspondentes devem apontar para dentro da superfície, uma vez que:

$$\frac{dV}{dt} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \|\nabla V(x)\| \|f(x)\| \cos(\theta);$$

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2};$$

Lembrete:

### Teorema 3

*Se  $f$  é uma função diferenciável, então  $f$  tem derivada direcional para qualquer vetor unitário  $\mathbf{u}$  e*

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} u_j$$

### Observação:

Qualquer vetor unitário  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  pode ser escrito como  $\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$ , para algum ângulo  $\theta$ . Nesse caso,

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta.$$

Fonte: VALLE, Marcos. E. Notas de aula MA211 – Cálculo II@IMECC: Unicamp



Lembrete:

## Vetor Gradiente

A derivada direcional de  $f$  na direção  $\mathbf{u}$  pode ser escrita em termos do seguinte produto escalar

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} u_j = \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)}_{\text{vetor gradiente}} \cdot \mathbf{u} = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

### Definição 4 (Vetor Gradiente)

O gradiente de uma função  $f$ , denotado por  $\nabla f$  ou **grad**  $f$ , é a função vetorial cujas componentes são as derivadas parciais, ou seja,

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Lembrete:

## Interpretação do Vetor Gradiente

Sabemos que o produto escalar de dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  satisfaz:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta,$$

em que  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Assim, podemos escrever

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f\| \underbrace{\|\mathbf{u}\|}_{=1} \cos \theta = \|\nabla f\| \cos \theta.$$

O valor máximo de  $\cos \theta$  é 1, e isso ocorre quando  $\theta = 0$ . Logo,

### Teorema 5

*O valor máximo da derivada direcional  $D_{\mathbf{u}}f$  de uma função diferenciável é  $\|\nabla f\|$  e ocorre quando  $\mathbf{u}$  tem a mesma direção e sentido que  $\nabla f$ .*

Em outras palavras, a maior taxa de variação de  $f(\mathbf{x})$  ocorre na direção e sentido do vetor gradiente.

Lembrete:

Em  $\mathbb{R}^2$ ...

Considere uma função  $f$  de duas variáveis  $x$  e  $y$  e uma curva de nível dada pelo conjunto dos pontos

$$\{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) : f(x(t), y(t)) = k\}.$$

Se  $P = (x(t_0), y(t_0))$ , então pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0,$$

em que  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$  e  $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$  é o vetor tangente a curva de nível em  $P$ .

### Conclusão:

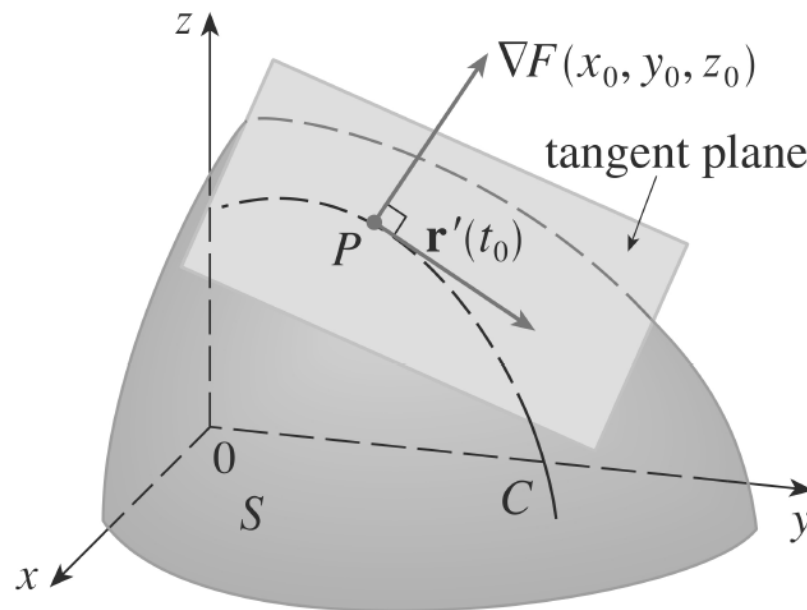
O vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0)$ , além de fornecer a direção e sentido de maior crescimento, é perpendicular à reta tangente à curva de nível de  $f(x, y) = k$  que passa por  $P = (x_0, y_0)$ .

Fonte: VALLE, Marcos. E. Notas de aula MA211 – Cálculo II@IMECC: Unicamp

Lembrete:

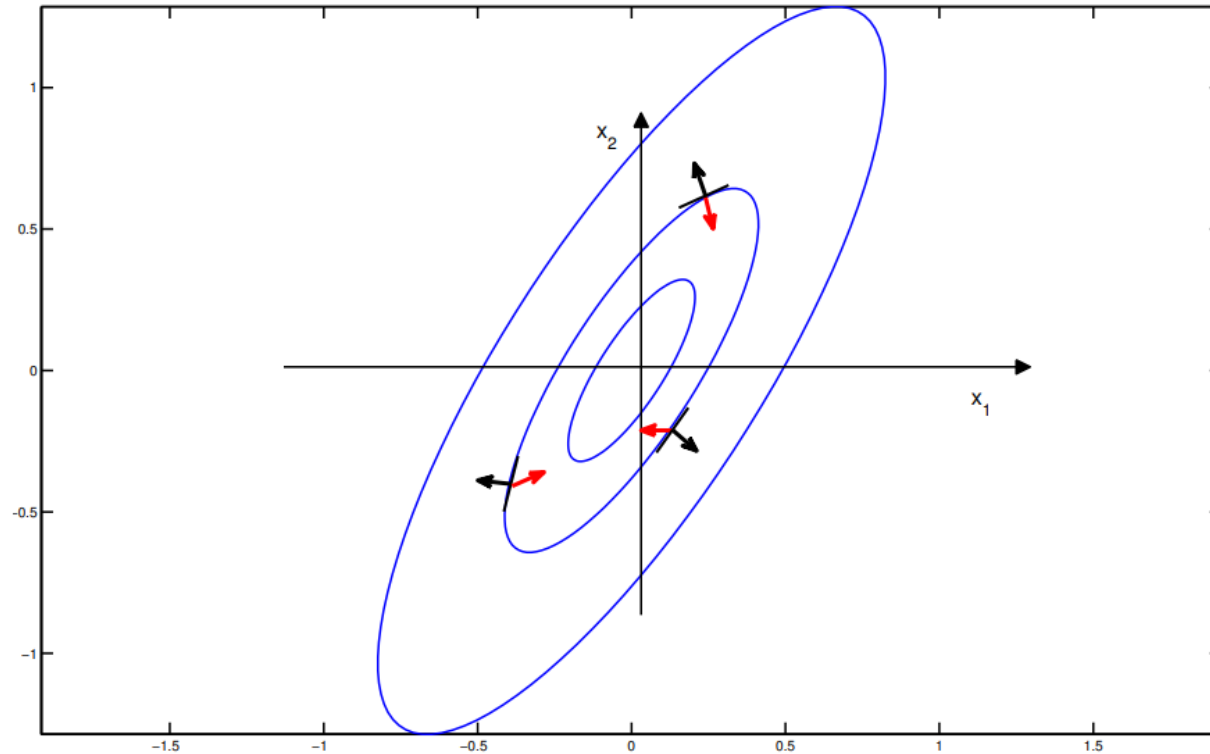
Em  $\mathbb{R}^3$ ...

O vetor gradiente  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ , além de fornecer a direção e sentido de maior crescimento, é perpendicular ao plano tangente à superfície de nível de  $F(x, y, z) = k$  que passa por  $P = (x_0, y_0, z_0)$ .



Fonte: VALLE, Marcos. E. Notas de aula MA211 – Cálculo II@IMECC: Unicamp

# Interpretação geométrica



Em preto os vetores gradiente  $\nabla V(x)$  perpendiculares às superfícies de nível, e em vermelho os vetores “velocidade”  $f(x)$ .

[Fonte: Torres, L.A.B. UFMG](#)

Importantes observações sobre o Método Direto de Lyapunov:

- 1 Se a Função de Lyapunov Candidata mostra-se não ser uma Função de Lyapunov, isto é,

$$\frac{dV}{dt} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle > 0$$

para algum  $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , nada podemos concluir sobre a estabilidade do Ponto de Equilíbrio.

- 2 Não há um procedimento formal geral por meio do qual se possa obter sempre uma Função de Lyapunov para o problema.
- 3 As Funções de Lyapunov não são únicas. Por exemplo, se  $V(x)$  é uma Função de Lyapunov, então  $W(x) = \rho[V(x)]^\alpha$ , com  $\rho > 0$  e  $\alpha > 0$ , também é uma F. de Lyapunov para o sistema.

# Aplicação em controle...

[Fonte: Torres, L.A.B. UFMG](#)

Projete uma lei de controle para estabilizar o P.E.  $x = \dot{x} = 0$ ,

$$\ddot{x} + (\dot{x})^3 - x^2 = u.$$

- 1 Tentativa 1:  $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ ;
- 2 Tentativa 2:  $V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2$ , isto é,

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [x_1 \ x_2]^\top \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^\top P x,$$

em que  $P = P^\top = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  é uma matriz simétrica definida positiva, ou seja,

$$x^\top P x > 0, \forall x \neq 0.$$

# Teoremas sobre estabilidade

Seja o sistema  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f(0) = 0$  (a origem é no ponto de equilíbrio) onde  $f(x)$  satisfaz uma condição de Lipschitz, para garantir a existência e a unicidade da solução

Teorema 1: se para o sistema  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f(0) = 0$ , existe uma função  $V(x)$  tal que

- a)  $V(x) > 0$
  - b)  $V(x)$  é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)
  - c)  $\dot{V}(x) \leq 0$
- então,  $x^* = 0$  é estável

Exemplo de sistema conservativo: massa-mola sem atrito viscoso  $m\ddot{x} = -kx$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2 > 0 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad \text{por simplicidade, } k = m = 1$$

$\dot{V} = 0 \implies V$  constante. Permanece sobre uma curva de nível, trocando energia



# Teoremas sobre estabilidade

E se o sistema massa-mola tem atrito viscoso  $b$ ,  $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2 > 0 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad \text{por simplicidade, } k = m = b = 1$$

$$\dot{V} = -x_2^2 \leq 0 \implies \text{origem estável}$$

Seja o sistema, com função setorial:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

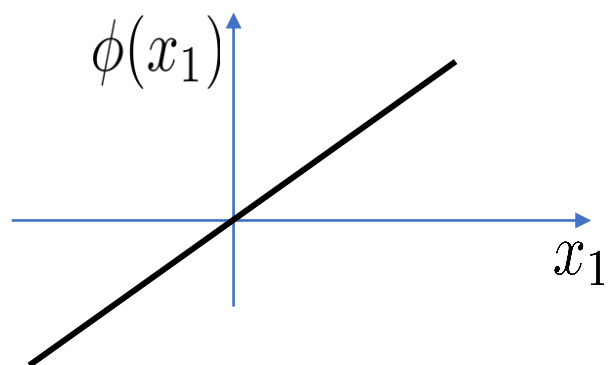
$$\dot{x}_2 = -\phi(x_1) - \mu x_2, \quad \mu > 0$$

Com  $x_1 \times \phi(x_1) > 0$  se  $x_1 \neq 0$  e se  $x_1 = 0 \implies \phi(x_1) = 0$

$x^* = [0 \ 0]^T$  único PE

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \phi(\sigma)d\sigma > 0$$

Função de Lyapunov tipo Lur -Postnikov



# Teoremas sobre estabilidade

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \phi(\sigma)d\sigma > 0$$

Função de Lyapunov tipo Lur -Postnikov

$$\dot{V}(x) = x_2\dot{x}_2 + \phi(x_1)\dot{x}_1 = x_2[-\phi(x_1) - \mu x_2] + \phi(x_1)x_2 = -\mu x_2^2 \leq 0, \text{ origem   estável}$$

# Teoremas sobre estabilidade

Teorema 2: se para o sistema  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f(0) = 0$ , existe uma função  $V(x)$  tal que

a)  $V(x) > 0$

b)  $V(x)$  é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)

c)  $\dot{V}(x) < 0$

então,  $x^* = 0$  é assintoticamente estável

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 < 0, \quad x^* = [0 \quad 0]^T \text{ é assintoticamente estável}$$

# Teoremas sobre estabilidade

Teorema 3: se para o sistema  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f(0) = 0$ , existe uma função  $V(x)$  tal que

a)  $V(x) > 0$

b)  $V(x)$  é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)

c)  $\dot{V}(x) > 0$

então,  $x^* = 0$  é instável

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + 2x_2^2 > 0, \quad \text{energia vai crescer, logo instável}$$

# Teoremas sobre estabilidade

Teorema 4: se para o sistema  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f(0) = 0$ , existe uma função  $V(x)$  tal que

a)  $V(x) > 0$  ou  $V(x) < 0$  sinal indefinido

b)  $V(x)$  é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)

c)  $\dot{V}(x) > 0$  ou exclusivo  $\dot{V}(x) < 0$

então,  $x^* = 0$  é instável

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$V(x) = x_1 x_2 > 0 \text{ ou } x_1 x_2 < 0$$

$$\dot{V}(x) = x_2^2 + x_1^2 > 0, \quad \text{energia vai crescer, logo instável}$$

# Teoremas sobre estabilidade

Teorema 5: se para o sistema  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f(0) = 0$ , existe uma função  $V(x)$  tal que

- a)  $V(x) > 0$  ou  $V(x) < 0$  sinal indefinido
- b)  $V(x)$  é continuamente diferenciável (para ver como a energia varia com o tempo)
- c)  $\dot{V}(x) < 0$
- d)  $V(x) \rightarrow \infty$  quando  $\|x\| \rightarrow \infty$  (radialmente ilimitada)

então,  $x^* = 0$  é globalmente assintoticamente estável

A condição  $V(x) \rightarrow \infty$  quando  $\|x\| \rightarrow \infty$  assegura que as curvas de nível  $V(x) = cte$  sejam fechadas

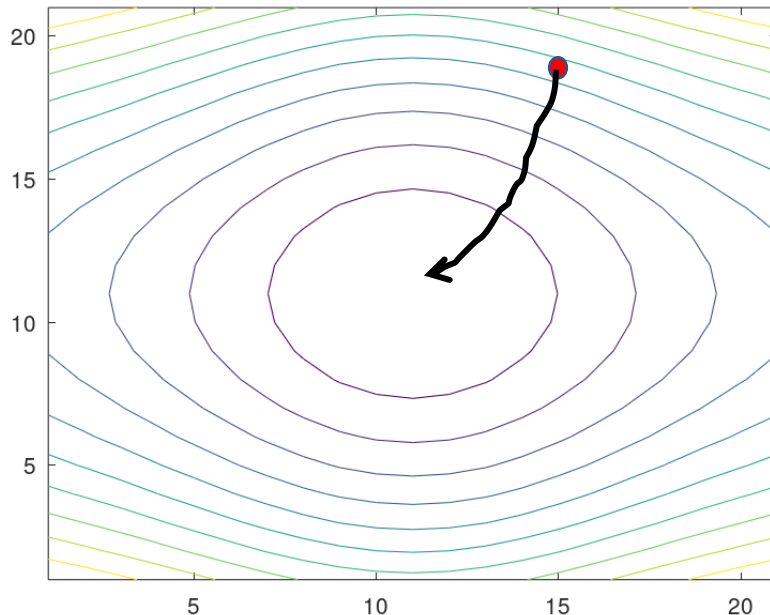
$$V(x) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2 \text{ e } \dot{V} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

# Teoremas sobre estabilidade

A condição  $V(x) \rightarrow \infty$  quando  $\|x\| \rightarrow \infty$  assegura que as curvas de nível  $V(x) = cte$  sejam fechadas

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \text{ e } \dot{V} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

As curvas  $V(x) = cte$  são dadas por  $V(x) = c$  ou seja,  $V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 = c$



Para  $c \geq 1$ , não são fechadas

Se  $x(0)$  tal que  $V(x(0)) \geq 1$

Mesmo que  $V(x) > 0$  e  $\dot{V} < 0$

A solução poderia ser afastar da origem, ou seja,  
 $|x_1| \rightarrow \infty$  e  $V(x) \rightarrow \infty$

# Teoremas sobre estabilidade

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2$$

$$V(x) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \text{ Matriz definida negativa } \lambda_1 = -1.5, \lambda_2 = -0.5$$

$$\text{Menores principais: } -1 < 0 \text{ e } (-1)^2 - (-1/2)^2 = 1 - 1/4 = 3/4 > 0, \text{ logo resulta } < 0$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 < 0 \text{ e } \|x\| \rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow \infty$$

Portanto origem é GAS