EGM0004

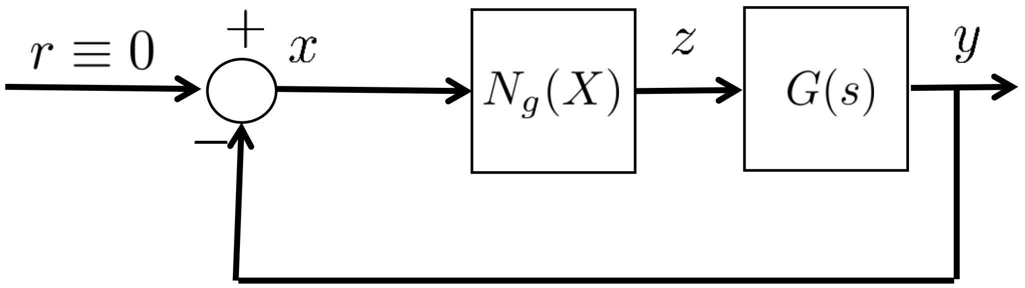
Sistemas Não Lineares

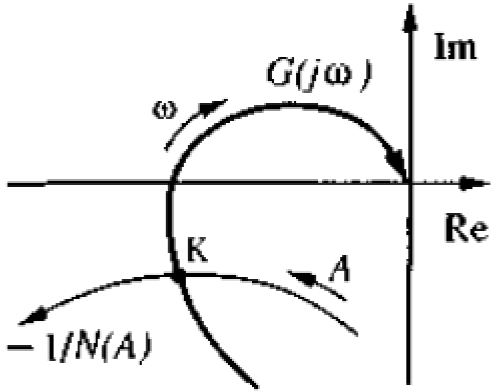
Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Relembrando: Existência de ciclo limite





$$x(t) = -y(t)$$

$$y(t) = G(j\omega)z(t) \implies z(t) = N(X)x(t)$$

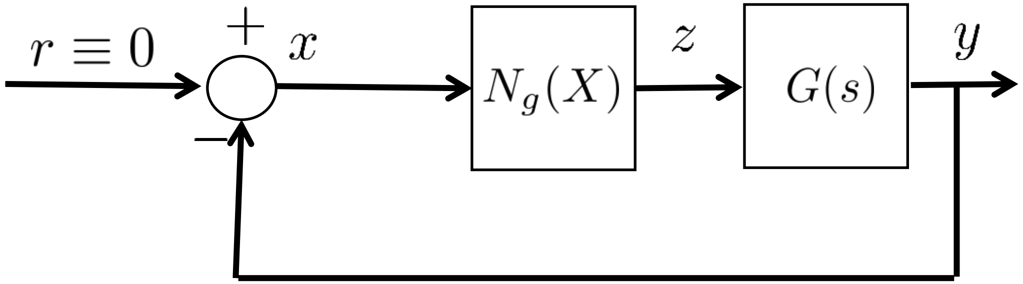
$$x(t) = -G(j\omega)N(X)x(t) \implies 1 = -G(j\omega)N(X)$$

z

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(X)}$$

Se há solução (intersecção) das curvas, há ciclo limite

Exemplo: relé puro com amplitude M



$$N_g(X) = \frac{4M}{\pi X} \qquad G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} \times \frac{(-j\omega)(1-j\omega)(2-j\omega)}{(-j\omega)(1-j\omega)(2-j\omega)} = \frac{-3\omega + j(\omega^2-2)}{\omega(1+\omega^2)(4+\omega^2)}$$

$$Re[G(j\omega)] = \frac{-3}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} \quad \omega = 0, \quad \Longrightarrow Re[G(j\omega)] = -3/4, \quad Im[G(j\omega)] = -\infty$$

$$Im[G(j\omega)] = \frac{\omega^2-2}{\omega(1+\omega^2)(4+\omega^2)} \quad \omega \to \infty, \quad \Longrightarrow Re[G(j\omega)] = 0, \quad Im[G(j\omega)] = 0$$

Ou, de modo geral para a forma...

$$G(s) = \frac{k_1}{s(s+k_2)(s+k_3)}$$

$$G(j\omega) = \frac{k_1}{j\omega(j\omega+k_2)(j\omega+k_3)} \times \frac{(-j\omega)(k_2-j\omega)(k_3-j\omega)}{(-j\omega)(k_2-j\omega)(k_3-j\omega)} = \frac{-\omega^2(k_1k_2+k_1k_3)+\omega j(k_1\omega^2-k_1k_2k_3)}{\omega^2(k_2^2+\omega^2)(k_3^2+\omega^2)}$$

$$Re[G(j\omega)] = \frac{-(k_1k_2+k_1k_3)}{(k_2^2+\omega^2)(k_3^2+\omega^2)}$$

$$Im[G(j\omega)] = \frac{k_1\omega^2-k_1k_2k_3}{\omega(k_2^2+\omega^2)(k_3^2+\omega^2)}$$

Exemplo: relé puro com amplitude M

$$N(X) = \frac{4M}{\pi X}, \qquad -\frac{1}{N(X)} = \frac{-\pi X}{4M}$$

Como N é função apenas da amplitude da entrada, ocorre apenas sobre o eixo real, no sentido negativo do eixo, à medida que X varia.... Assim, na intersecção de G(jw) com o eixo real, a parte imaginária de G(jw) é nula, de onde extrai-se a frequência de cruzamento, ou seja, a frequência do ciclo limite

$$Im[G(j\omega)] = 0 \implies \omega = \sqrt{2}\ \mathrm{rad/s}$$

Para esta frequência, o valor de G(jw) no eixo real é:

$$Re[G(j\omega)] = \frac{-3}{(1+2)(4+2)} = -1/6 \qquad -\frac{1}{N(X)} = \frac{-\pi X}{4M} = \frac{-1}{6} \implies X = \frac{2M}{3\pi}$$

Ciclo LIMITE: $\frac{2M}{3\pi} sen(\sqrt{2}t)$ Estável???

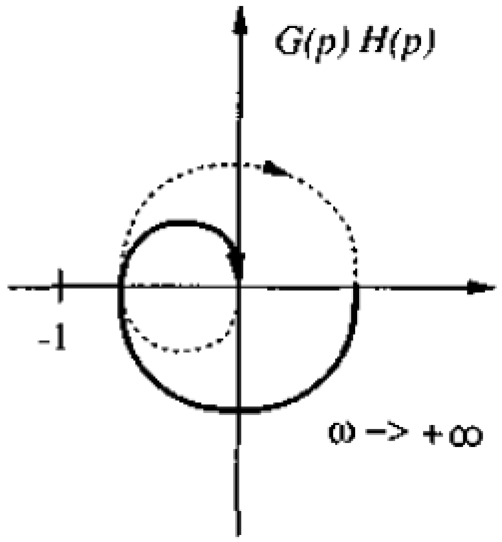
Critério de Nyquist

- Desenhar no plano complexo um caminho de Nyquist no semi plano direito no sentido horário
- Este caminho é então mapeado no plano G(s)H(s)
- Determina-se N, o número de contornos/voltas no sentido horário que envolve o ponto (-1,0)
- Determina-se Z = N + P, que deve ser

0 para ter-se sistema estável em malha fechada.

Z: número de zeros de malha fechada;

P: número de polos instáveis de malha aberta.



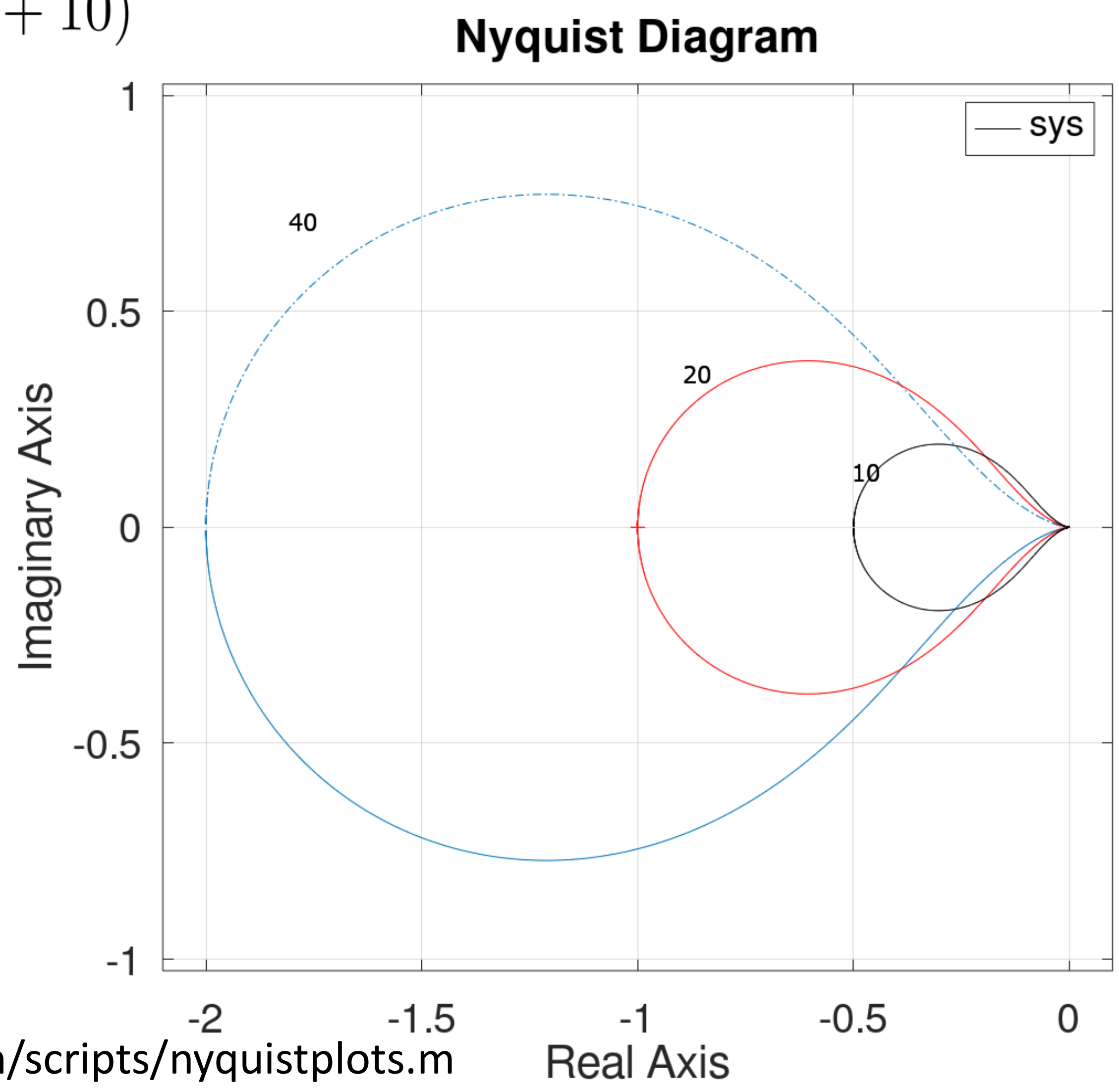
Critério de Nyquist: Exemplo

$$G(s)H(s) = \frac{2}{(0.5s-1)(0.1s+1)} = A.\frac{1}{(s-2)(s+10)}, \quad A = 40$$

$$A = 10 : P = 1, N = 0, Z = N + P = 1(\text{instável})$$

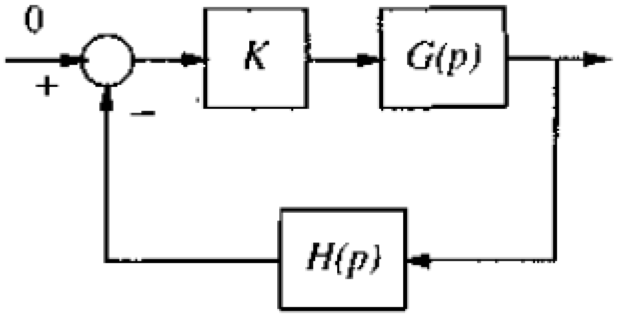
$$A = 40 : P = 1, N = -1, Z = N + P = \text{estável}$$

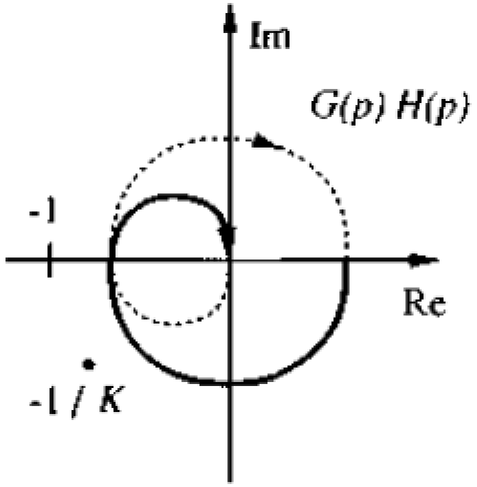
Anti-horário

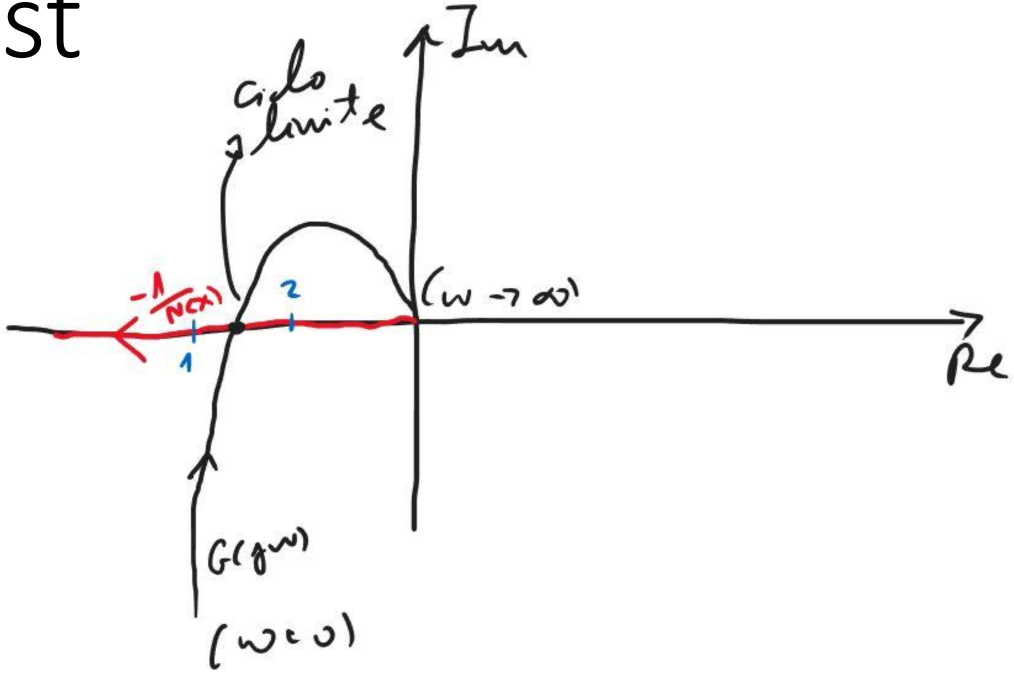


https://github.com/josenalde/nonlinear_systems/blob/main/scripts/nyquistplots.m

Extensão do Critério de Nyquist







K pode ser um ganho constante ou função complexa, como uma função descritiva...

Neste caso Z representa o número de contornos de G(s)H(s) ao ponto -1/K

Ponto 1: X é maior que a amplitude do ciclo limite. Percorrendo G(jw) o ponto fica à esquerda do ponto A, logo Z = 0, sistema estável. X tende a diminuir.
Ponto 2: X é menor que a amplitude do CL Percorrendo G(jw) o ponto 2 fica à direta, é englobado pela curva, logo instável, X tende a crescer. Então o CL é estável.

Exemplo: relé puro com amplitude M

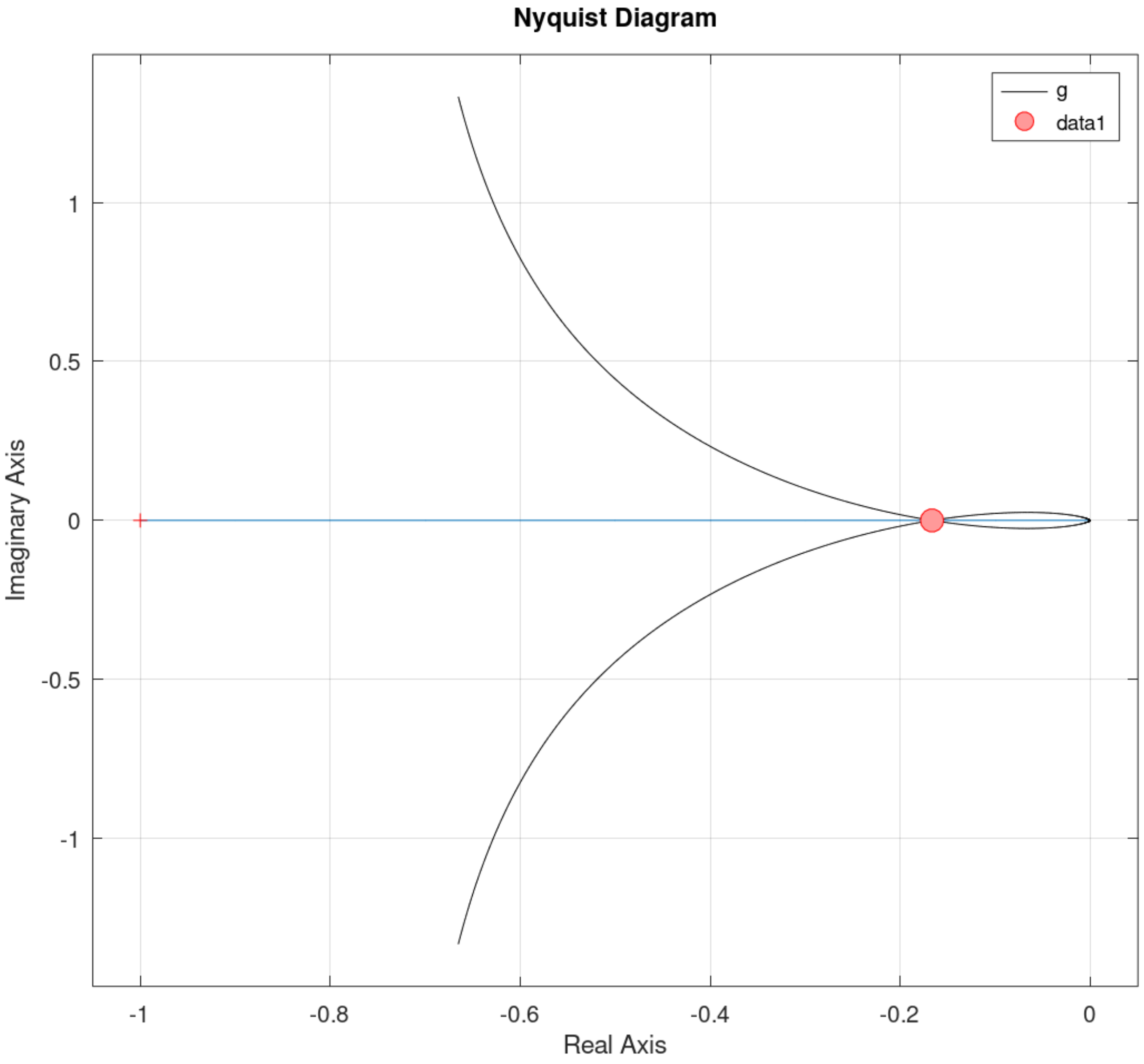
$$Im[G(j\omega)] = 0 \implies \omega = \sqrt{2}\ \mathrm{rad/s}$$

Para esta frequência, o valor de G(jw) no eixo real é:

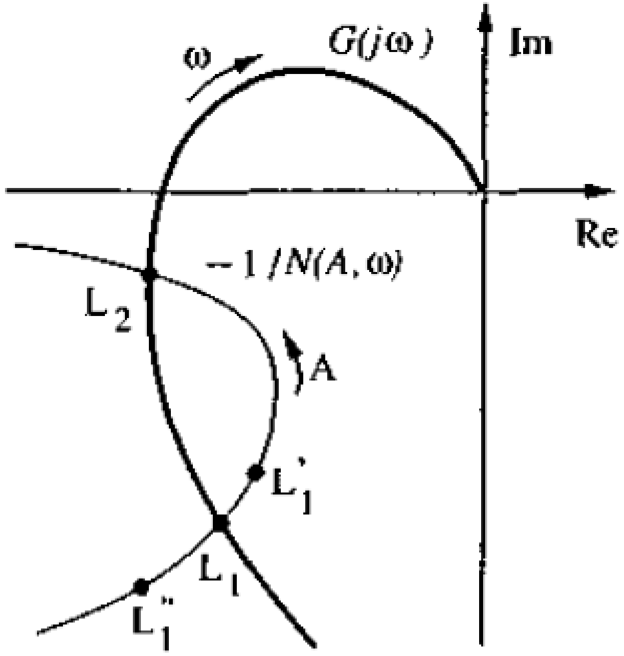
$$Re[G(j\omega)] = \frac{-3}{(1+2)(4+2)} = -1/6$$

$$-\frac{1}{N(X)} = \frac{-\pi X}{4M} = \frac{-1}{6} \implies X = \frac{2M}{3\pi}$$

Ciclo LIMITE: $\frac{2M}{3\pi} sen(\sqrt{2}t)$



Extensão do Critério de Nyquist

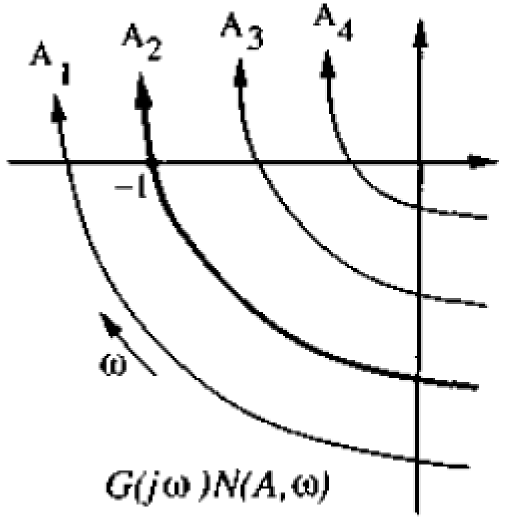


Ciclo limite em L1: *Perturbação que desloque para L1', aumentando amplitude, G(jw) envolve, logo, instável e desloca-se para L2, aumentando a amplitude; Já para L1'', estável, pois não engloba, X tende a diminuir, se aproximando de L1.*

Ciclo limite em L2: *Em L2' (após L2 com X crescente), estável, tende a diminuir amplitude e voltar a L2. Para L2'' (antes de L2 com X reduzindo), instável, X aumenta e se aproxima de L2*

CONCLUSÃO: L1 CL semi-estável; L2 CL estável

Extensão do Critério de Nyquist – caso geral



Gráficos de G(jw)N(X,w) com X fixo e variando w de 0 a infinito. Diferentes valores de X, diferentes curvas. A que interceptar com (-1,0) indica ciclo limite.

Confiabilidade na predição de ciclos limite

1. A amplitude e frequência do(s) ciclo limite(s) pode(m) não ser acuradas
2. Um ciclo limite pode não realmente existir
3. Um ciclo limite real não é predito
4. Observar a hipótese do filtro, que em alguns componentes lineares podem ter picos ressonantes etc.
5. As curvas quase tangentes pode levar a análise errônea (a), devido a harmônicas
Desprezadas ou incertezas no modelo, que pode alterar as situações de intersecção, principalmente quando a filtragem no componente linear é fraca
6. Já a situação (b) ilustrada abaixo, quase perpendicular, dá usualmente bons resultados.