

EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN



josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

24T12 (60h) (13:00-14:40h) – 22.08.2022 : 21.12.2022

Solução de equações diferenciais

Tópico particularmente importante em sistemas não lineares quando se fala em comportamentos imprevisíveis

Seja o problema de valor inicial de uma EDO:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0$$

Existência de uma solução:

Dado o estado inicial $x(t_0) = x_0$ no instante t_0 , existe solução $x(t)$ para $t \in [t_0, t_1], t_1 > t_0$?

Unicidade da solução:

Dado o estado inicial $x(t_0) = x_0$ no instante t_0 , existe uma única solução $x(t)$ para $t \in [t_0, t_1], t_1 > t_0$?

Uma solução de $\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0$, em um intervalo $[t_0, t_1], t_1 > t_0$ é uma função contínua $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\dot{x}(t)$ é definida e $\dot{x}(t) = f(x, t)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Se $f(t, x)$ é contínua em t e x , então, a solução $x(t)$ será continuamente diferenciável

Assumiremos que $f(t, x)$ é contínua em x mas somente contínua por partes em t .

Assim, $x(t)$ será somente continuamente diferenciável por partes (esta hipótese permite incluir o caso em que $f(x, t)$ depende de uma entrada variante no tempo que pode ter variações bruscas

Rudolf Lipschitz

Professor académico alemão

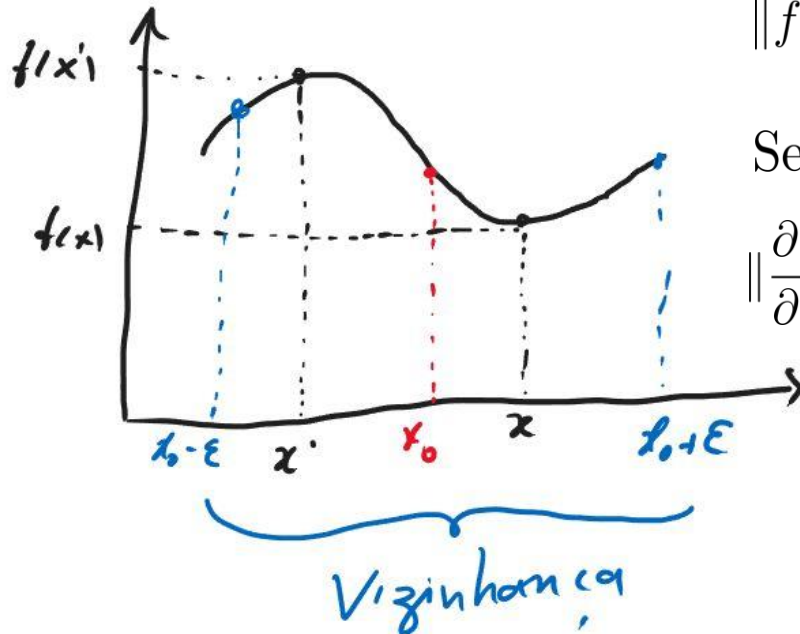
1832-1903



Solução de equações diferenciais

Teorema (existência e unicidade local de uma solução)

Seja $f(x, t)$ contínua em x e contínua por partes em t . Se $f(x, t)$ satisfaz uma condição de Lipschitz, ou seja, $\|f(x, t) - f(x', t)\| \leq L\|x - x'\|$ onde L é uma constante finita e positiva (constante de Lipschitz), $\forall x, x' \in B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \epsilon\}, \forall t \in [t_0, t_1]$, então existe um δ tal que a equação de estado $\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0$ tem uma única solução no intervalo $[t_0, t_0 + \delta]$



$$\|f(x, t) - f(x', t)\| \leq L\|x - x'\|, \quad \frac{\|f(x, t) - f(x', t)\|}{\|x - x'\|} \leq L$$

Se $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ é contínua, e existe $K \geq 0$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq K, \forall (t, x) \in B, \quad L = K$$

A função é *Lipschitziana*

A interpretação é de que se a variação de f é limitada, \dot{x} é definida e é possível escrever uma solução para $x(t)$

Naturalmente dependerá da função e do conjunto B

Solução de equações diferenciais

Exemplo 1

Seja $B = \mathbb{R}^2$ e $f(x, t) := t^2 + 2x$ Para $\forall(t, x), (t, x') \in B$

$$|f(x, t) - f(x', t)| = |(t^2 + 2x) - (t^2 + 2x')| = 2|x - x'|$$

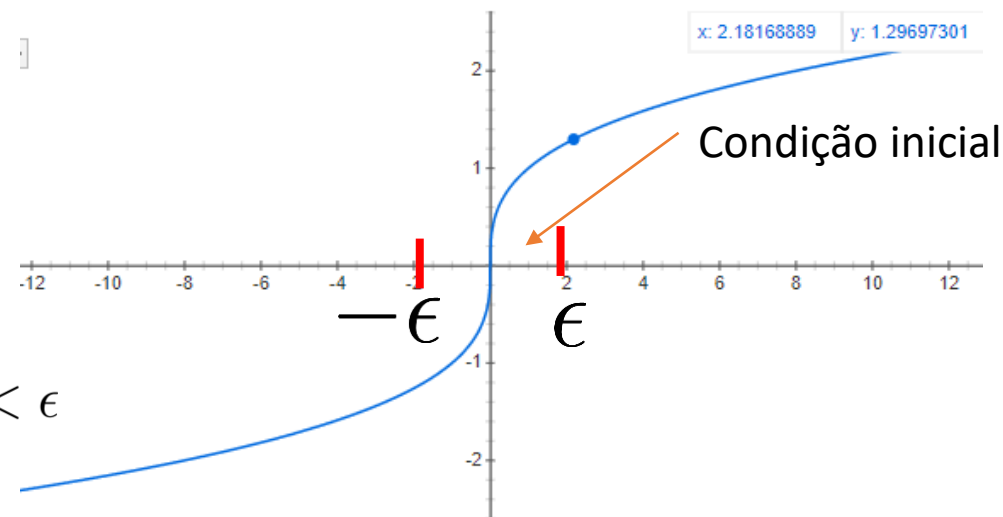
então f satisfaz condição de Lipschitz em B com $L = 2$

Exemplo 2

$$f(x) = x^{1/3}, \quad x(0) = 0$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{3} \frac{1}{x^{2/3}}. \text{ Para } x = 0 \implies \frac{df}{dx} \rightarrow \infty$$

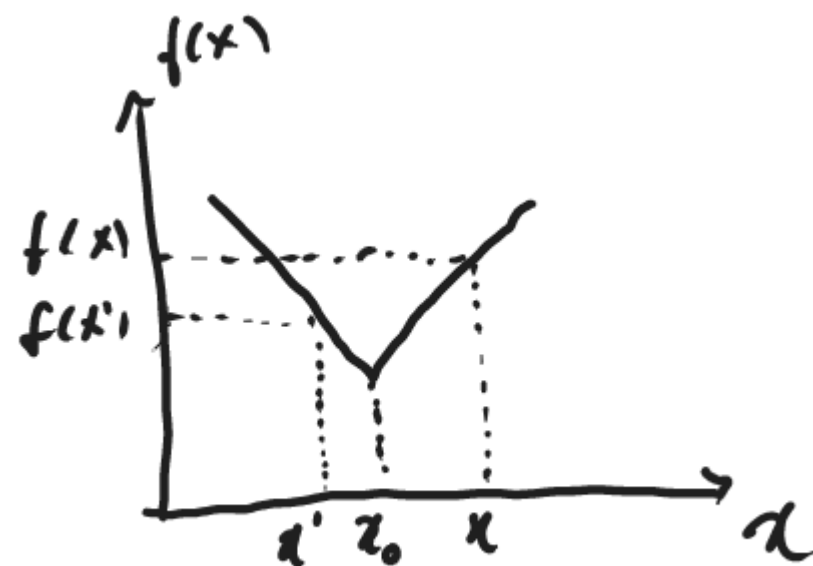
$f(x)$ não satisfaz uma condição de Lipschitz para $x \in B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \epsilon\}$
ou seja, para x pertencente a uma “bola” que engloba a origem. Isto não garante que a solução é única, e pode ou não ter solução, isto é, se tiver são muitas



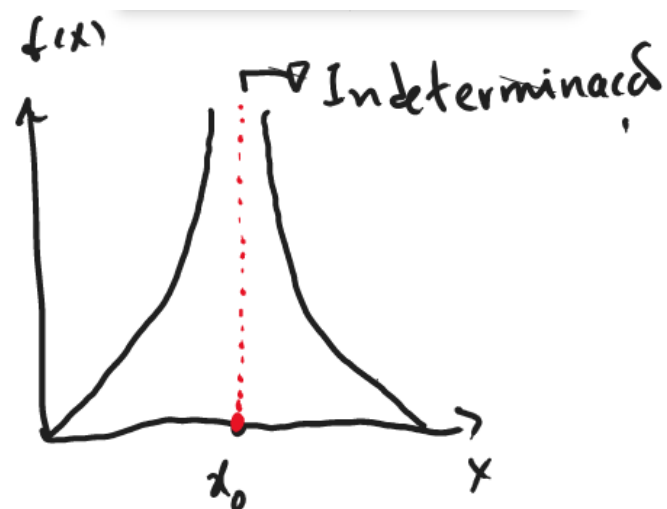
Solução de equações diferenciais

Exemplo 3

$f(x)$ é localmente Lipschitziana mesmo com função não diferenciável.
Se x é limitado, variação de $f(x)$ também é!



Exemplo 4



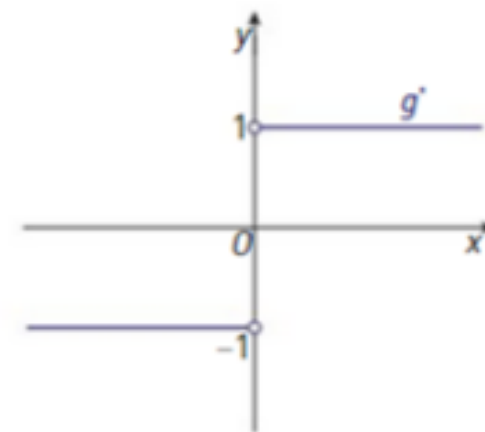
$f(x)$ não é localmente Lipschitziana
para "bolas" que englobem x_0

Definindo a função g , sem se utilizar
o sinal de módulo, tem-se:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Solução de equações diferenciais

Exemplo 5

$f(x)$ não é localmente Lipschitziana para bolas que englobem x_0 . Descontinuidade

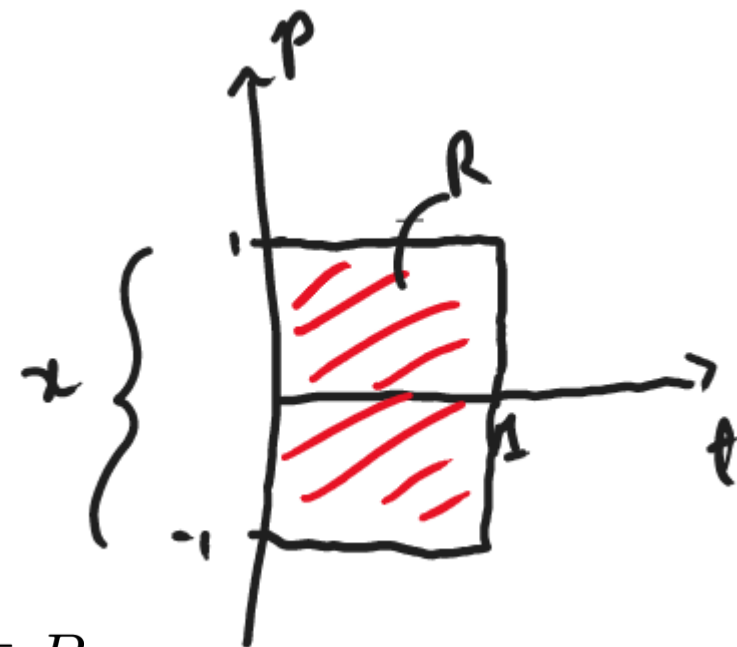
Exemplo 6

$$f(t, x) = \cos(t) + x^3, \quad B = R : (t, p) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 1], \quad |p| \leq 1$$

$$\forall (t, x) \in B, \text{ tem-se } \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| = |3x^2| \leq 3$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ é contínua em B . Assim $K = 3$. Logo,

$$|(\cos(t) + x^3) - (\cos(t) + x'^3)| \leq 3|x - x'|, \quad \forall (t, x), (t, x') \in B$$



Solução de equações diferenciais

Exemplo 7

$f(t, x) = t + \arctan(x)$ é Lipschitz local ou global?

Solução de equações diferenciais

Lema sobre existência e valor limitado de Jacobiano

Discussão em sala de aula para os sistemas:

$$\dot{x}_1 = 3x_1 + (\sin(t))x_2 = f_1$$

$$\dot{x}_2 = \sin(x_1) + x_2 = f_2$$

Calcular o Jacobiano do sistema e sua norma infinita $\|J\|_\infty$

Seja $A = [a_{ij}]_{r \times s}$ uma matriz $r \times s$. A norma infinito ou norma do máximo da matriz A , denotada por $\|A\|_\infty$, é o número não negativo

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{j=1}^s |a_{ij}|$$

(a maior soma absoluta das linhas)^[2]

Solução de equações diferenciais

Lema sobre existência e valor limitado de Jacobiano

Discussão em sala de aula para os sistemas:

$$\dot{x} = -x^2, \quad x(0) = 1$$

- a) Calcular Jacobiano (no caso apenas dx/dt). É limitado para todo t ?
- b) Calcular $x(t)$. Existe t para o qual $x(t)$ tende a infinito?
- c) Calcular $dx(t)/dt$ a partir do item b e fazer $t=0$ para encontrar $x(0)$
- d) Esboçar gráfico de $x(t)$ considerando este $x(0)$ e o tempo t limite