EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

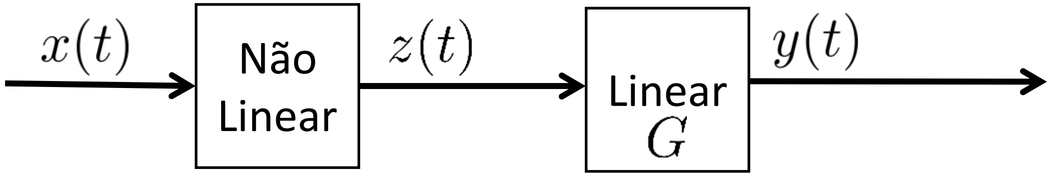
josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

24T12 (60h) (13:00-14:40h) – 22.08.2022 : 21.12.2022

Linearização harmônica

- Uso de aproximações para simplificação de análise sem comprometimento qualitativo (Taylor (*ver slide class08*) e Fourier)
- Este método permite analisar o fenômeno do ciclo-limite em sistemas não lineares através da representação da não linearidade por uma função *descritiva* N



G Função de transferência

$z(t)$ Continua por partes

- Seja uma função com domínio e contradomínio reais $g(x) : R \to R$ com

$$z(t) = g(x(t)), \quad x(t) = X sen(\omega t) = X sen(\theta), \quad \theta = \omega t$$

- Visto a entrada ser periódica com período: $T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} z(t)d(t) = 0$, supondo

z função simétrica

Sobre métodos de análise em não lineares

- Plano de fase: estabilidade e resposta temporal (só 2. ordem)
- Segundo método de Lyapunov: análise de estabilidade de qualquer sistema não linear (difícil encontrar funções de Lyapunov) – métodos de pesquisa de funções: Krasoviski, Shultz e Gibson (gradiente variável), Zubov, etc.)
- Funções descritivas: só análise de estabilidade (sem info sobre resposta temporal), predição de ciclos limite, método aproximado (opções numéricas: integrais abelianas, método averaging (AU) etc.)
- Simulação: condições limitadas às usadas na experimentação (Monte Carlo?)

Linearização harmônica

- Relembrando a expansão em Série de Fourier (1768-1830)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\omega_n t) + b_n sen(\omega_n t), \quad \omega_n = n\omega, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

- Coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

Nível DC do sinal

$$a_n = \frac{1}{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(\omega_n t)dt$$

$$b_n = \frac{1}{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sen(\omega_n t)dt$$

Exemplo: expandir em série de Fourier...(sala)

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & -\pi < t < -1 \\ 1, & -1 \le t \le 1 \\ 0, & 1 < t < \pi \end{array} \right\} f(t) = f(t + 2\pi)$$

Linearização harmônica

- Expandindo o termo não linear em série de Fourier...

$$z(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega t) + b_n sen(n\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\theta) + b_n sen(n\theta)$$

- Coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} z(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} z(t)cos(n\omega t)d(\omega t) = \int_0^{2\pi} z(\theta)cos(n\theta)d(\theta)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} z(t)sen(n\omega t)d(\omega t) = \int_0^{2\pi} z(\theta)sen(n\theta)d(\theta)$$

Exemplo: expandir em série de Fourier...(sala)

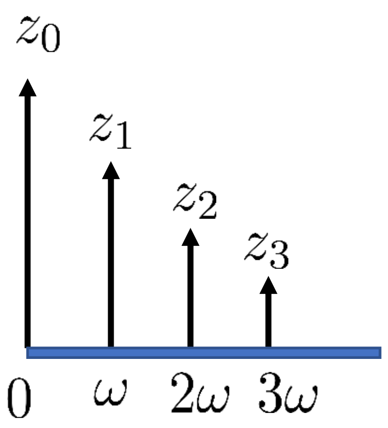
$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & -\pi < t < -1 \\ 1, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 < t < \pi \end{array} \right\} f(t) = f(t + 2\pi)$$

n é o número da harmônica

Observação: se z é ímpar (simétrica em relação à origem), $g(x) = -g(-x), \quad a_n = 0, \quad \forall n$

Linearização harmônica

- Hipótese do filtro:
  - a medida que n cresce, a amplitude das harmônicas ficam menores (dado o resultado da integral).
  - Visto que as plantas se comportam como filtros passa baixa, as harmônicas de ordem maior ou igual a 2 são fortemente atenuadas pela parte linear



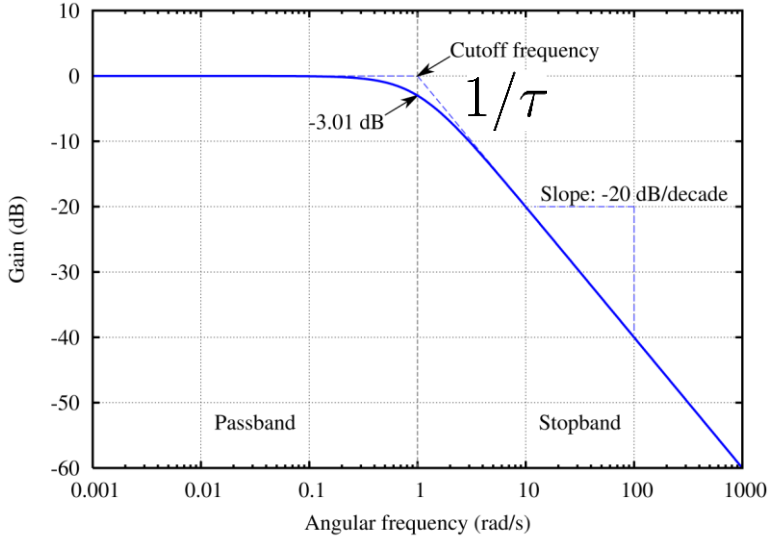
$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$ Parte linear de 1. ordem

$$H(\omega)_{dB} = 20log_{10}\left[H(\omega)\right]$$

$$H(\omega)_{dB} = 20log_{10}\left[2\right] = 6.0206$$

Oitava

$$\text{atenuação} = 10^{-6/20} = 0.5012(50\%)$$



Conclusão: $z(t) = a_0 + a_1 cos(\theta) + b_1 sen(\theta)$ Primeira harmônica

Linearização harmônica

- No caso linear, entrada senoidal, saída senoidal de mesma frequência
  - Seja uma função de transferência linear invariante no tempo $G(s)$
  - $G(j\omega) \in C, \text{ calculados para todo } \omega \in R, \text{ define sua resposta em frequência}$
  - G sendo assintoticamente estável, em regime permanente, excitado por senoide

$$y(t) = X|G(j\omega)|sen(\omega t + \angle G(j\omega))$$
$$y(t) = XRe(G(j\omega))sen(\omega t) + XIm(G(j\omega))cos(\omega t)$$

$$z = a + jb \equiv |z|\angle\theta$$
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = tan^{-1}\frac{b}{a}$$
$$G(s) = \frac{4}{s+5}, x(t) = 2cos(\omega t), f = 0.5Hz$$
$$G(j\omega) = G(j\pi) = \frac{4}{j\pi + 5} = \frac{4}{5.9\angle 32^\circ} = 0.677\angle - 32^\circ$$
$$y(t) = 2|G(j\pi)|cos(\pi t + \angle G(j\pi)) = 1.3548cos(\pi t - 32^\circ)$$

- Definição de função descritiva:

Seja $g(x) : R \to R$ uma função de variável real.
A função de variável complexa
$N_g(X) : X > 0 \to C, \text{ dada por } N_g(X) = \dfrac{b_1 + ja_1}{X}$
é a função descritiva associada à função g(x)

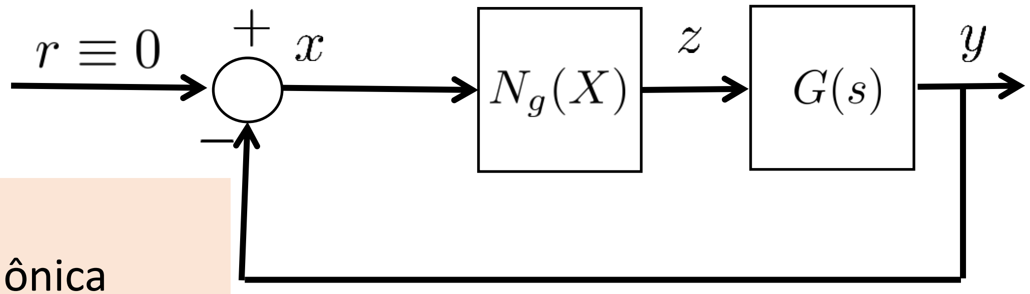
Linearização harmônica

- No caso caso particular linear, comparando com a definição de função descritiva

$$y(t) = X|G(j\omega)|sen(\omega t + \angle G(j\omega))$$
$$y(t) = XRe(G(j\omega))sen(\omega t) + XIm(G(j\omega))cos(\omega t)$$
$$N_G(\omega) = \frac{XRe(G(j\omega)) + jXIm(G(j\omega))}{X} = G(j\omega) \qquad N_g(X) : X > 0 \to C, \text{ dada por } N_g(X) = \frac{b_1 + ja_1}{X}$$

- No caso não linear,

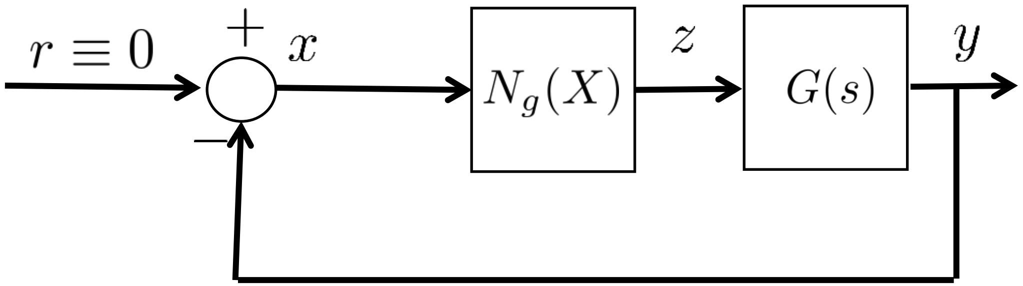
$$z(t) = X|N_g(X)|sen(\omega t + \angle N_g(X))$$



A função descritiva é interpretada com uma função de transferência que no regime permanente senoidal fornece a aproximação de primeira harmônica da saída (aproxima efeitos não lineares). Esta abordagem é importante para análise de estabilidade de soluções periódicas através do critério de Nyquist

Linearização harmônica

$$z(t) = X|N_g(X)|sen(\omega t + \angle N_g(X)) \qquad N = \frac{Z_1}{X}\angle\Phi_1$$



$$Z_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \Phi_1 = tan^{-1}\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$$

$X \rightarrow$ amplitude do sinal de entrada

$Z_1 \rightarrow$ amplitude da componente harmônica fundamental da saída

$\Phi_1 \rightarrow$ defasagem da componente harmônica fundamental da saída em relação à entrada

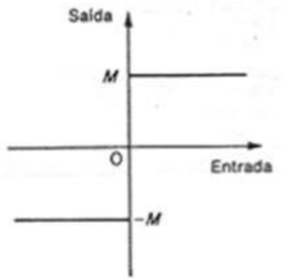
- No caso especial com g(x) ímpar, com simetria em relação à origem,

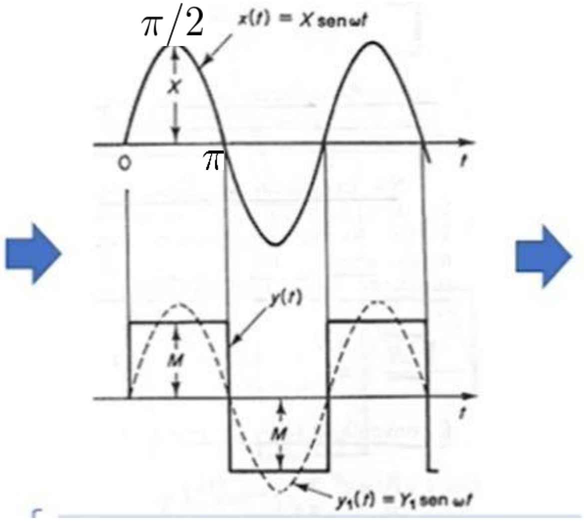
$$z(t) = b_1 sen(\theta), b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} z(\theta) sen\theta d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} z(\theta) sen\theta d\theta = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} z(\theta) sen\theta d\theta$$

$$N = \frac{b_1}{X}\angle 0^\circ$$

No caso do relé puro

On Off (Relê)





$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(n\omega t) + B_n \operatorname{sen}(n\omega t)\right]$$

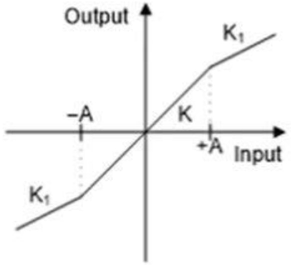
- No caso especial com g(x) ímpar, com simetria em relação à origem,

$$z(t) = b_1 sen(\theta), b_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} M sen\theta d\theta = \frac{4M}{\pi}(-cos\theta)_0^{\pi/2} = \frac{4M}{\pi}$$

$$N = \frac{4M}{\pi X}\angle 0^{\circ}$$

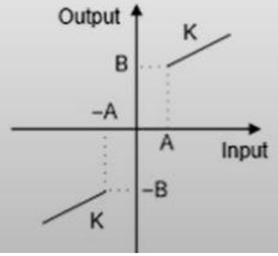
Funções descritas de não linearidades comuns em controle

Saturação



$$N = K_1 + \frac{2(K-K_1)}{\pi}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{A}{X}\right) + \frac{A}{X}\sqrt{1-\left(\frac{A}{X}\right)^2}\right], X \geq A$$

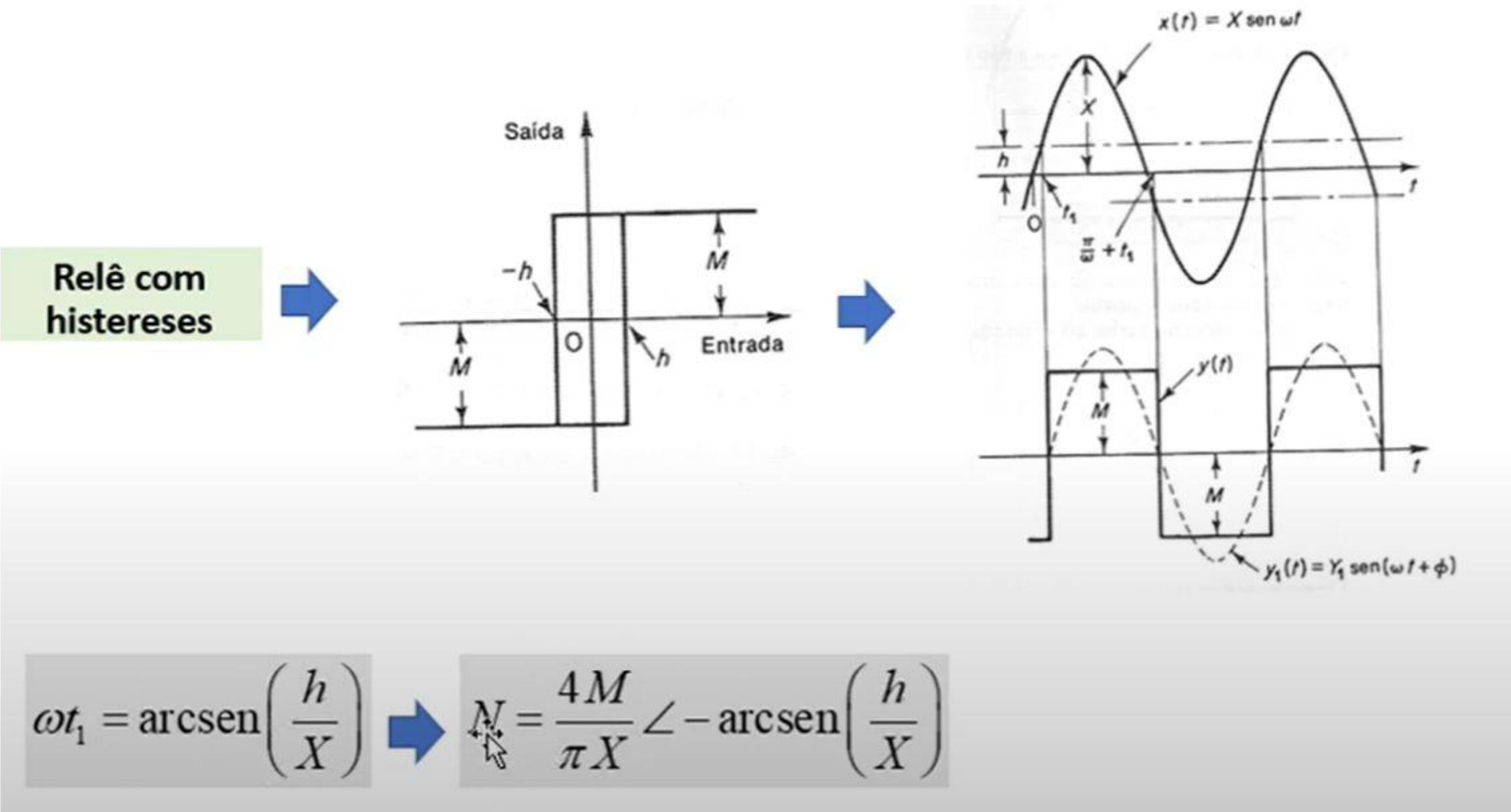
Relê com zona morta e degrau



$$N = K - \frac{2K}{\pi}\operatorname{arcsen}\left(\frac{A}{X}\right) + \frac{(4-2K)B}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{A}{X}\right)^2}, X \geq A$$

- No caso de inclinações K ou K1 = 0, suprimir das expressões

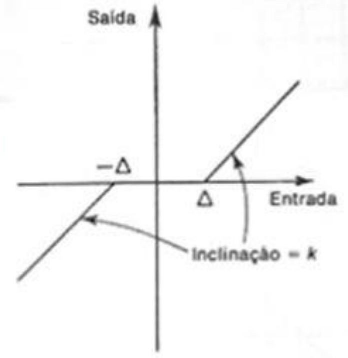
Funções descritas de não linearidades comuns em controle

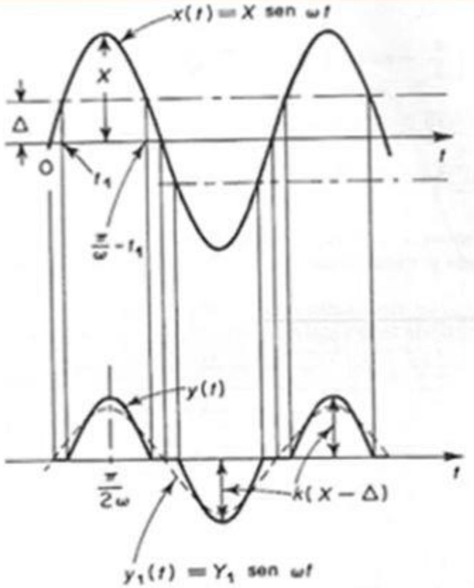


- No caso de inclinações K ou K1 = 0, suprimir das expressões

Funções descritas de não linearidades comuns em controle

Zona Morta (Dead Zone)





Comportamento da saída

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & , 0 < t < t_1 \\ K\left(X \operatorname{sen}(\omega t) - \Delta\right) & , t_1 < t < \frac{\pi}{\omega} - t_1 \\ 0 & , \frac{\pi}{\omega} - t_1 < t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

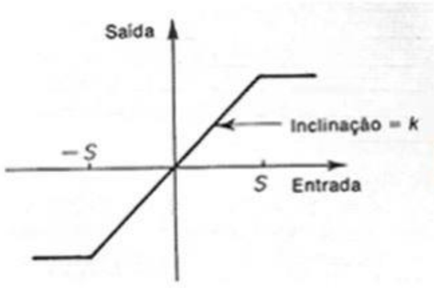
$$Y_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\operatorname{sen}(\omega t)\, d(\omega t) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} y(t)\operatorname{sen}(\omega t)\, d(\omega t) =$$

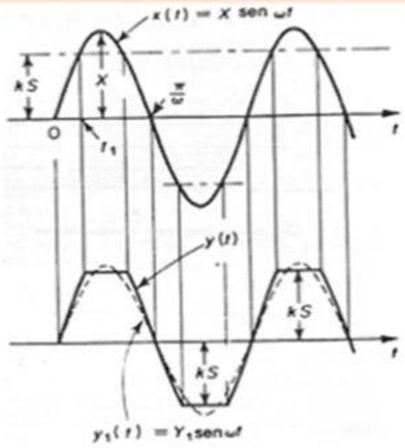
$$= \frac{4K}{\pi}\int_{\omega t_1}^{\pi/2} \left(X \operatorname{sen}(\omega t) - \Delta\right)\operatorname{sen}(\omega t)\, d(\omega t) =$$

$$= \frac{2XK}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{\Delta}{X}\right) - \frac{\Delta}{X}\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}\right]$$

Funções descritas de não linearidades comuns em controle

Saturação





Função Descritiva

$$N = \frac{2K}{\pi}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{S}{X}\right) + \frac{S}{X}\sqrt{1-\left(\frac{S}{X}\right)^2}\right], X > S$$

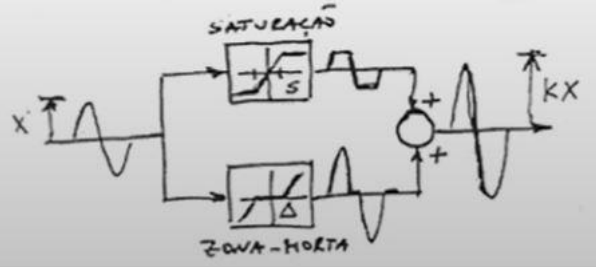
Observação: Semelhante a não linearidade Zona Morta

Zona Morta (Dead Zone)

$$N = K - \frac{2K}{\pi}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{\Delta}{X}\right) + \frac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}\right], X > \Delta$$

Comparação as funções descritivas da zona-morta e da saturação

$$N_{Zona\ Morta} = K - N_{Saturaçao} \quad Se \quad \Delta = S$$



Ideia da função descritiva para analisar ciclo limite (van der Pol)

Objetivo: determinar se existe ciclo limite e, se existir, calcular amplitude e frequência
Ideia é assumir que há CL de determinada amplitude e frequência e então verificar se o sistema de fato mantém esta solução

Seja um ciclo limite representado pelo sinal x $x(t) = X sen(\omega t)$

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \alpha > 0$$

$$s^2 x + \alpha s x x^2 - \alpha s x + x = 0$$

$$s(\alpha x^2)x + (s^2 - \alpha s + 1)x = 0$$

NL Linear

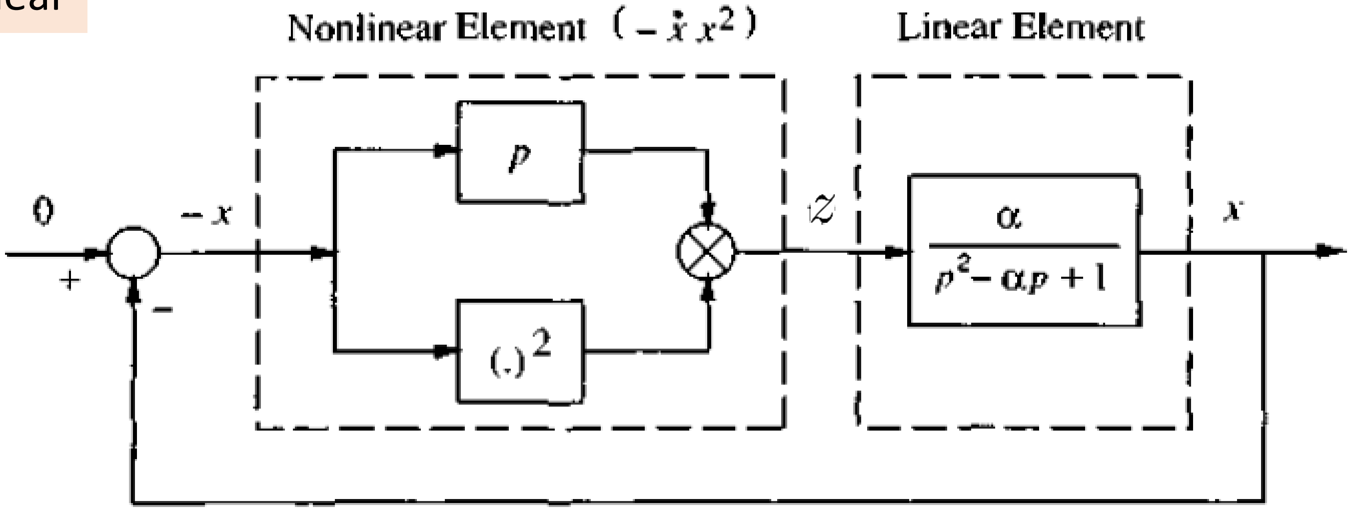


Figure 5.1 : Feedback interpretation of the Van der Pol oscillator

Ideia da função descritiva para analisar ciclo limite (van der Pol)

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \alpha > 0$$

$$s^2x + \alpha s x x^2 - \alpha s x + x = 0$$

$$s(\alpha x^2)x + (s^2 - \alpha s + 1)x = 0$$

NL

Linear

Analisando a entrada...

$$x(t) = Xsen(\omega t)$$
$$\dot{x}(t) = X\omega cos(\omega t)$$

$$z = -x^2\dot{x} = -(Xsen(\omega t))^2 X\omega cos(\omega t)$$
$$z = -X^2 sen^2(\omega t) X\omega cos(\omega t)$$
$$= -X^3\omega[sen^2(\omega t)]cos(\omega t)$$
$$= -\frac{X^3}{2}\omega[1 - cos(2\omega t)]cos(\omega t)$$

Lembrete:

$$cos^2(x) + sen^2(x) = 1, \quad cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$$
$$cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x), \quad sen^2(x) = cos^2(x) - cos(2x)$$
$$sen^2(x) = 1 - sen^2(x) - cos(2x) \implies 2sen^2(x) = 1 - cos(2x) \implies sen^2(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$$

Ideia da função descritiva para analisar ciclo limite (van der Pol)

Neste ponto, se desprezar segunda harmônica, dá uma aproximação com $X = 1.415, \quad \omega = 1, \quad s_{1,2} = \pm 0.00111j$

$$= -\frac{X^3}{2}\omega[1 - cos(2\omega t)]cos(\omega t) = -\frac{X^3}{2}\omega cos(\omega t) = \frac{X^2}{2}\frac{d}{dt}(-X sen(\omega t))$$

$$z = N(X,\omega)(-x), \quad N(X,\omega) = \frac{X^2}{2}(j\omega)$$

Bloco não linear aproximado (quase-linear dependente de X) por $N(X,\omega)$

$$x = X sen(\omega t) = G(j\omega)z = G(j\omega)N(X,\omega)(-x)$$

Equação característica em malha fechada:

$$1 + N(X,\omega)G(s) = 0$$

$$1 + \frac{X^2(j\omega)}{2}\frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega) + 1} = 0$$

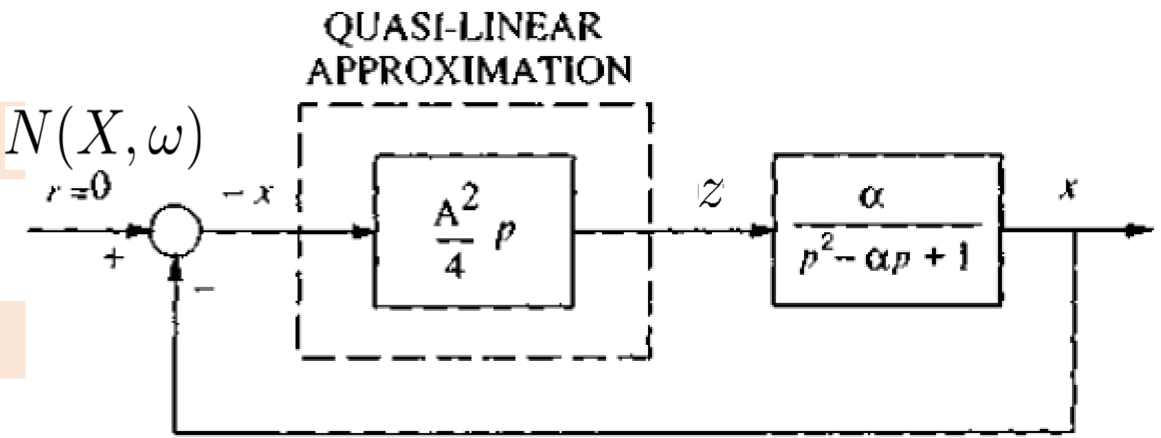


Figure 5.2 : Quasi-linear approximation of the Van der Pol oscillator

Ideia da função descritiva para analisar ciclo limite (van der Pol)

$$1 + \frac{X^2(j\omega)}{2}\frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega) + 1} = 0 \qquad X = 1.415, \quad \omega = 1, \quad s_{1,2} = \pm 0.99..j$$

$$s_{1,2} = \frac{-1}{4}\alpha(X^2 - 2) \pm \sqrt{\frac{1}{16}\alpha^2(X^2-2)^2 - 1}$$

Para convergência exata, avançar uma harmônica na aproximação...

$$= -\frac{X^3}{2}\omega[1 - cos(2\omega t)]cos(\omega t)$$

$$= -\frac{X^3}{4}\omega[cos(\omega t) - \cancel{cos(3\omega t)}]$$

$$s_{1,2} = \frac{-1}{8}\alpha(X^2 - 4) \pm \sqrt{\frac{1}{64}\alpha^2(X^2-4)^2 - 1}$$

$$X = 2, \quad \omega = 1, \quad s_{1,2} = \pm j$$

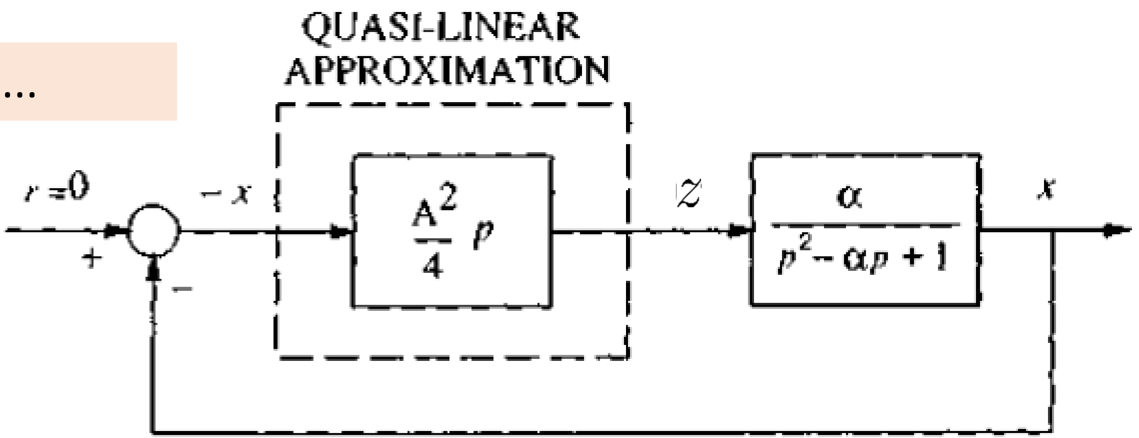
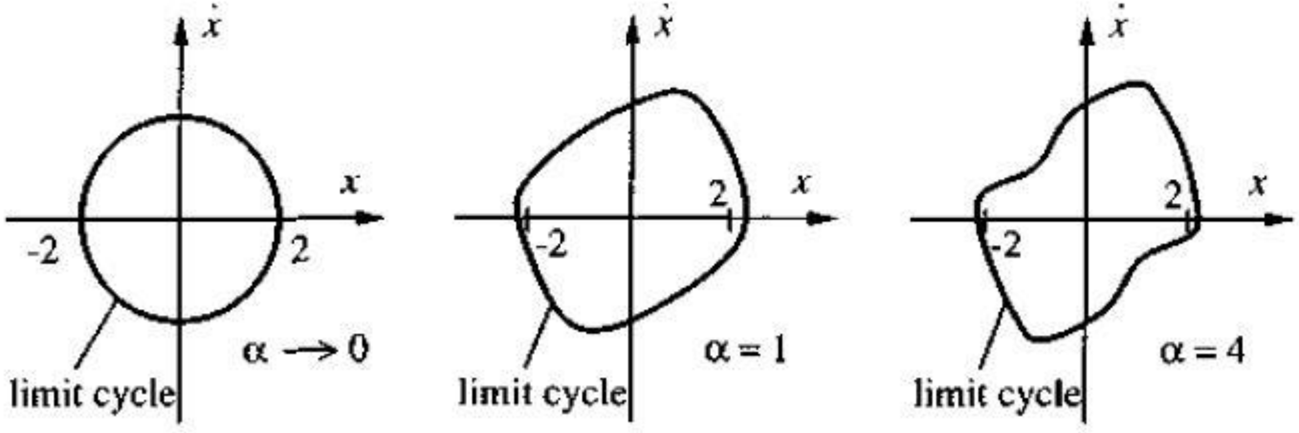


Figure 5.2 : Quasi-linear approximation of the Van der Pol oscillator

Ideia da função descritiva para analisar ciclo limite (van der Pol)



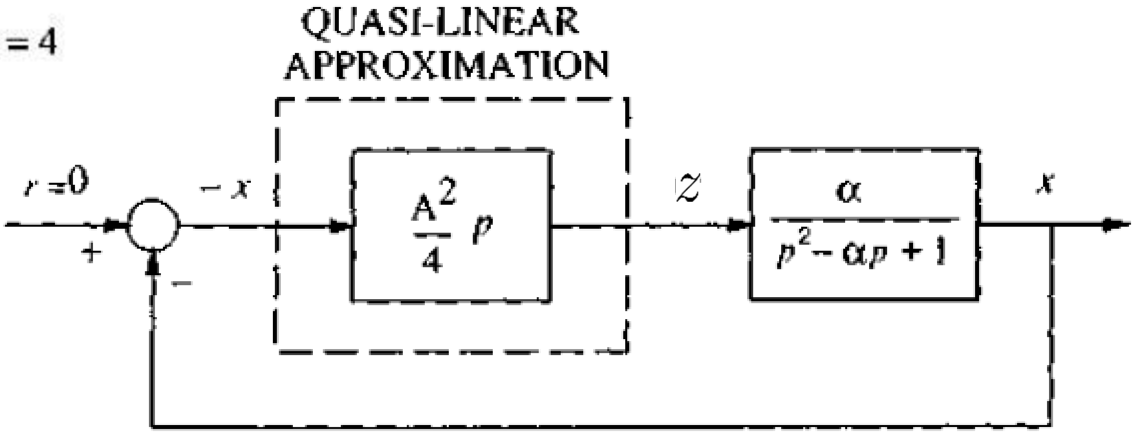
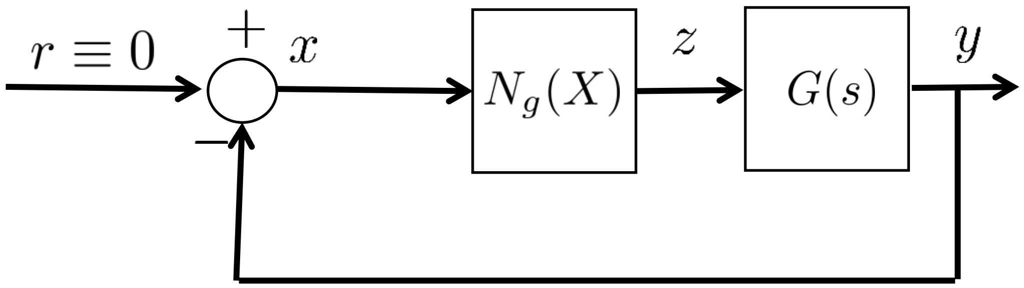
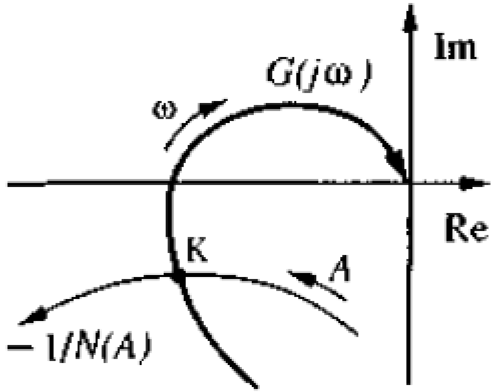


Figure 5.2 : Quasi-linear approximation of the Van der Pol oscillator

Existência de ciclo limite





$$x(t) = -y(t)$$

$$y(t) = G(j\omega)z(t) \implies z(t) = N(X)x(t)$$

$$x(t) = -G(j\omega)N(X)x(t) \implies 1 = -G(j\omega)N(X)$$

z

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(X)}$$

Se há solução (intersecção) das curvas, há ciclo limite