EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira – UFRN**

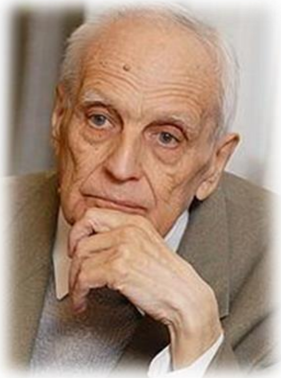
josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Teorema de Krasovsky

Escolha de Função de Lyapunov

Determina Função que garanta a máxima região de estabilidade quando o ponto de equilíbrio não tem estabilidade global



1924-2012

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0$$

$$F(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \rightarrow \text{ Jacobiano do sistema dinâmico}$$

$$F^T(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T$$

Função de Lyapunov: $V(x) = f^T(x) f(x)$

$$\hat{F}(x) = F^T(x) + F(x)$$

Se $\hat{F}(x) < 0 \implies \dot{V} < 0$ assintoticamente estável

Teorema de Krasoviskii

Prova:

$$\hat{F}(x) = F^T(x) + F(x)$$

$|\hat{F}(x)| = 0$ se $x = 0$ e $\neq 0$ para $x \neq 0$, pois $f(0) = 0, f(x) \neq 0, x \neq 0$

Seja uma Candidata à Função de Lyapunov: $V(x) = f^T(x)f(x) > 0$

$$\dot{V}(x) = \dot{f}^T(x)f(x) + f^T(x)\dot{f}(x)$$

$$\dot{f}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = F(x)\dot{x} = F(x)f(x)$$

$$\dot{V}(x) = [F(x)f(x)]^T f(x) + f^T(x)F(x)f(x)$$

$$\dot{V}(x) = f^T(x)F^T(x)f(x) + f^T(x)F(x)f(x)$$

$$\dot{V}(x) = f^T(x)[F^T(x) + F(x)]f(x) = f^T(x)\hat{F}(x)f(x)$$

Se $\hat{F}(x) < 0 \implies \dot{V}(x) < 0$

Teorema de Krasoviskii

Exemplo 1:

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3$$

1. Obter Jacobiano F(x)
2. Obter transposta
3. Somar Jacobiano com transposta do Jacobiano
4. Verificar se é definida negativa a resultante

$$V(x) = f^T(x)f(x) = x_1^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 > 0$$

$$||x|| \to \infty \implies V(x) \to \infty \quad (GAS)$$

Teorema de Krasoviskii

Exemplo 2: *Exemplo 3-10, p. 85 – 86, SILVA, G.V.M. Controlo não linear (2006)*

$$\dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3$$

$$V(x) = f^T(x)f(x) = (-6x_1^2 + x_2)^2 + (2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3)^2 > 0$$
$$||x|| \to \infty \implies V(x) \to \infty \quad (GAS)$$

1. Obter Jacobiano F(x)
2. Obter transposta
3. Somar Jacobiano com transposta do Jacobiano
4. Verificar se esta soma é definida negativa a resultante

Teorema de Krasoviskii

Exemplo 3:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2$$

$$V(x) = f^T(x)f(x) = (x_1 + x_2^2)^2 + x_2^2 > 0$$

$$\hat{F} < 0 \text{ para } |x_2| < 1 \implies \dot{V} < 0 \text{ para } |x_2| < 1$$

1. Obter Jacobiano F(x)
2. Obter transposta
3. Somar Jacobiano com transposta do Jacobiano
4. Verificar se esta soma é definida negativa a resultante, ou qual a condição para ser negativa

Domínio de estabilidade assintótica

Conjunto D de condições iniciais $x(0)$ para as quais $x^* = 0$ é assint. estável

Propriedades de D

$$D = \{x(0) | x^* = 0 \text{ é estável e } \lim_{t \to \infty} ||x(t)|| = 0\}$$

$a.D$ é aberto, fronteira normalmente é indefinida

$b.D$ é conexo: possível unir pontos sem sair do conjunto

$c.0 \in D$

Se relaxarmos ser assint. estável, tem-se domínio de atratividade

$$D = \{x(0) | \lim_{t \to \infty} ||x(t)|| = 0\}$$

$$\hat{D} = \{x \in \mathcal{R}^n | V(x) < K, V(x) > 0, \dot{V} < 0\}$$

Domínio de estabilidade estimado

Domínio de estabilidade assintótica

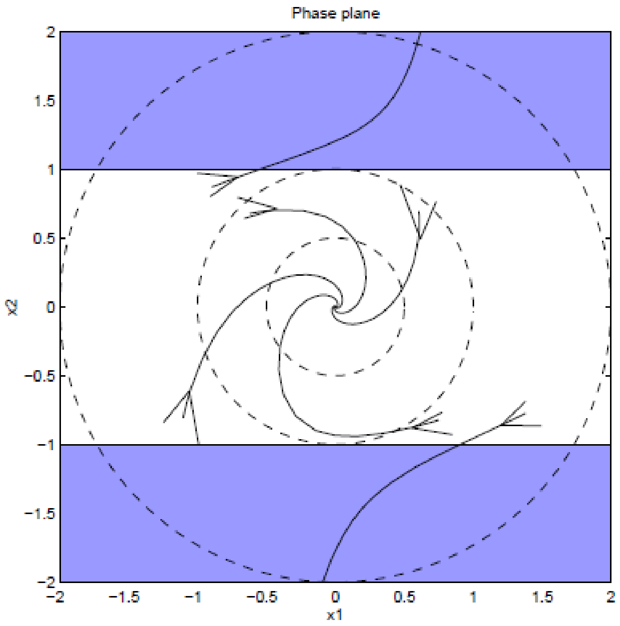
$$D = \{x(0) | \lim_{t\to\infty} ||x(t)|| = 0\} \qquad \hat{D} = \{x \in \mathcal{R}^n | V(x) < K, V(x) > 0, \dot{V} < 0\}$$

Domínio de estabilidade estimado

$$V(x) = f^T(x) f(x) = (x_1 + x_2^2)^2 + x_2^2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = -2[(x_1 + 2x_2^2)^2 + x_2^2(1 - x_2^2)] \;\; \dot{V} < 0 \text{ para } |x_2| < 1$$

Problema: maximizar $V(x)$ s.a. $\dot{V} < 0$, ou seja, $|x_2| < 1$



$$V(x) = 0.5x^T x$$

Teorema generalizado de Krasoviskii

Condição suficiente para estabilidade assintótica:
Existem matrizes simétricas $P > 0$ e $Q > 0$, tal que

$$\hat{F}(x) = F^T P + PF + Q$$

é negativa semi-definida em alguma vizinhança Ω da origem. A função

$V(x) = f^T(x) P f(x)$ é função de Lyapunov para o sistema

Se $\Omega = R^n$ e, ainda, $V(x) \to \infty$ quando $||x|| \to \infty$, o sistema é GAS

$$\dot{V}(x) = f^T(x)[F^T(x)P + PF]f(x) \quad , Q = -[F^T(x)P + PF(x)]$$

$$-Q < 0$$

Teorema generalizado de Krasoviskii

Exemplo 4:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2$$

$$V(x) = f^T(x) P f(x)$$

$$\boxed{P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}. \text{ Mas } P = P^T \implies p_{21} = p_{12}}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad p_{11} > 0 \text{ e } p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$$

$$p_{22} > 0$$

$$\hat{F}(x) = F^T P + PF + Q$$

$$Q = -[F^T P + PF]$$

$$Q = -\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -3x_1^2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 6x_1^2 p_{12} & 3x_1^2 p_{22} - p_{11} + p_{12} \\ 3x_1^2 p_{22} - p_{11} + p_{12} & -2p_{12} + 2p_{22} \end{bmatrix}$$

Teorema generalizado de Krasoviskii

Condições para positiva definida

Exemplo 4: $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad p_{11} > 0 \text{ e } p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$

$$p_{22} > 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 6x_1^2 p_{12} & 3x_1^2 p_{22} - p_{11} + p_{12} \\ 3x_1^2 p_{22} - p_{11} + p_{12} & -2p_{12} + 2p_{22} \end{bmatrix}$$

Condições para positiva definida

1) $6x_1^2 p_{12} > 0, \quad p_{12} > 0, x_1 \neq 0$

2) $6x_1^2 p_{12}(-2p_{12} + 2p_{22}) - (3x_1^2 p_{22} - p_{11} + p_{12})^2 > 0$

Se $p_{12} = p_{22}$, Q se torna indefinida

Se $p_{11} = p_{12}$, P se mantém definida positiva para $p_{22} > \beta p_{12}, \beta > 1$

$$12x_1^2 p_{12}^2(-1 + \beta) - 9x_1^4 \beta^2 p_{12}^2 > 0$$

$$4(-1 + \beta) - 3x_1^2 \beta^2 > 0 \implies x_1^2 < \frac{4}{3}\left(\frac{\beta - 1}{\beta^2}\right)$$

Maior valor de x_1 para $\beta = 2$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x_1 < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Teorema generalizado de Krasoviskii

Maior valor de x_1 para $\beta = 2$

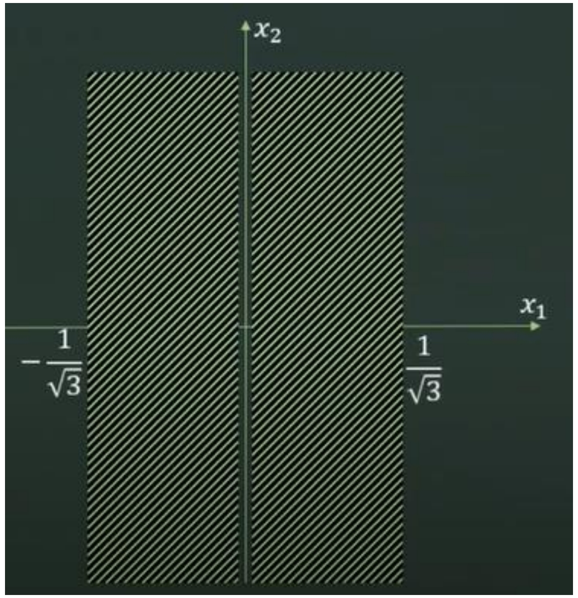
$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x_1 < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

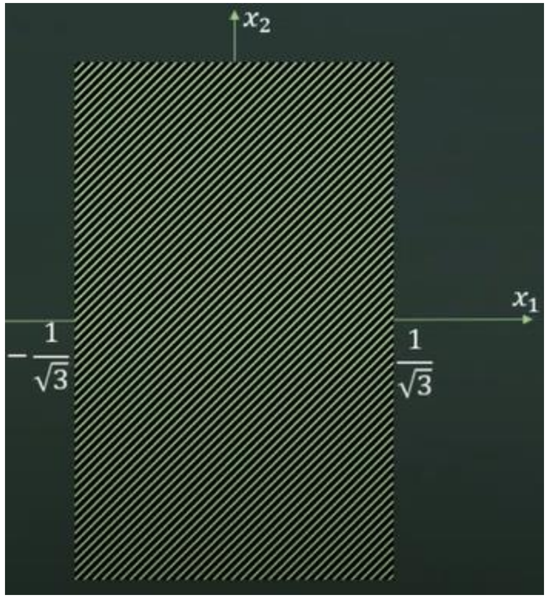
1) $6x_1^2 p_{12} > 0, \quad p_{12} > 0, x_1 \neq 0$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2$$

mas...se $x_1 = 0, \quad \dot{x}_1 \neq 0,$ se $x_2 \neq 0$





Então pode-se relaxar a condição $x_1 \neq 0$