

EGM0004

Sistemas Não Lineares

Prof. **Josenalde Barbosa de Oliveira** – UFRN



josenalde.oliveira@ufrn.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Descrição de um sistema dinâmico não linear

$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, u_1, \dots, u_p)$ p entradas com n equações diferenciais de primeira ordem

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, u_1, \dots, u_p)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix} \quad \dot{x} = f(t, x, u)$$

Equação de estado (eq. Diferencial vetorial de 1. ordem n-dimensional)

$$y_1 = h_1(t, x, u)$$

$$\vdots$$

$$y_q = h_q(t, x, u)$$

q saídas

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} \quad h(t, x, u) = \begin{bmatrix} h_1(t, x, u) \\ \vdots \\ h_q(t, x, u) \end{bmatrix} \quad y = h(t, x, u)$$

Equação de saída

Equação dinâmica

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

$$y = h(t, x, u)$$

Descrição de um sistema dinâmico não linear

Equação dinâmica

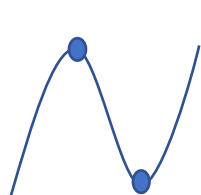
$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

$$y = h(t, x, u)$$

- a) Se $u \equiv 0$, $\dot{x} = f(t, x)$ tem-se entrada identicamente nula, por exemplo, uma auto-oscilação
- b) Se $u = \gamma(t)$ a entrada é uma função do tempo
- c) Se $u = \gamma(x)$ a entrada é uma função do estado (realimentação)
- d) Se $u = \gamma(x, t)$ a entrada é função do tempo e do estado. No caso mais geral tem-se

$$\dot{x} = f(t, x) \quad \text{Equação de estado não forçada (não tem a entrada explícita) variante no tempo (não autônomo)}$$

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{Caso mais simples, sendo não forçada e invariante no tempo (autônoma)}$$



Um ponto $x = x^*$ no espaço de estado é denominado um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$ se $f(x^*) = 0$, ou seja, se $x(0) = x^*$ implica $x(t) = x^*, \forall t \geq 0$

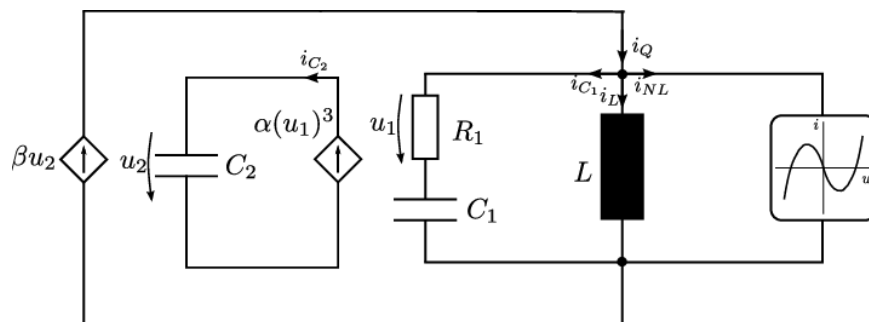
Mais algumas características de S. não lineares

- Ciclo limite (auto-oscilação)

<https://www.youtube.com/watch?v=By1g7Edoj0Y>

- Existem sistemas não lineares que podem produzir oscilações com frequência e amplitude fixas, independentes do estado inicial, oscilações da propriedade estrutural do sistema. São trajetórias fechadas no plano de fase
- No caso linear e invariante no tempo é necessário que ocorra um par de autovalores no eixo imaginário, o que é quase impossível de manter em presença de variações paramétricas e, mesmo assim, a amplitude da oscilação depende do estado inicial
- Considere a equação do oscilador harmônico de Van der Pol, com $m, c, k > 0$, que descreve um sistema massa-mola-amortecedor com um coeficiente de amortecimento dependente da posição

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0 \quad m\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



Rayleigh-van der Pol circuito RLC não linear

Mais algumas características de S. não lineares

- Ciclo limite (auto-oscilação)

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0$$

$$x_1 = x \implies \dot{x}_1 = x_2$$

$$x_2 = \dot{x} \implies \dot{x}_2 = \frac{-k}{m}x_1 - \frac{2c}{m}(x_1^2 - 1)x_2$$

$$\dot{x}_1 = 0 \implies x_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \implies \frac{-k}{m}x_1 - \frac{2c}{m}(x_1^2 - 1)x_2 = 0 \implies \frac{-k}{m}x_1 = 0 \implies x_1 = 0$$

Ponto de equilíbrio isolado $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Independente da condição inicial, resposta em regime tende à mesma oscilação. Existem teoremas para verificar condições suficientes para existência de ciclos limite (Poincaré, Bendixson)

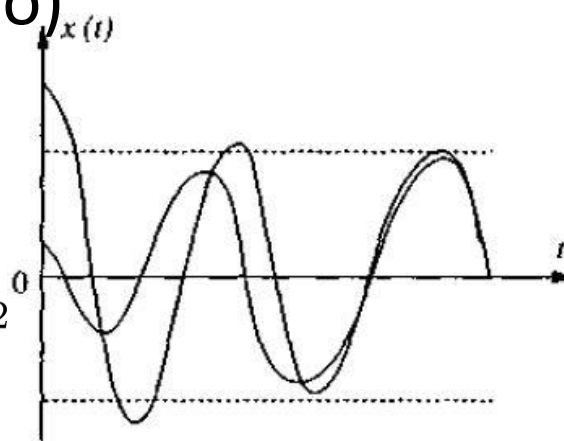


Figure 1.4 : Responses of the Van der Pol oscillator

Análises

$$2c(x_1^2 - 1) > 0, |x_1| > 1$$

Neste caso, o sistema tem uma tendência convergente em relação ao PE, ocorrendo perda de energia, pois caminha em relação ao ponto com energia nula

$$2c(x_1^2 - 1) < 0, |x_1| < 1$$

Neste caso, o sistema absorve energia

Tendência divergente (instável)

Portanto o movimento do sistema nem cresce

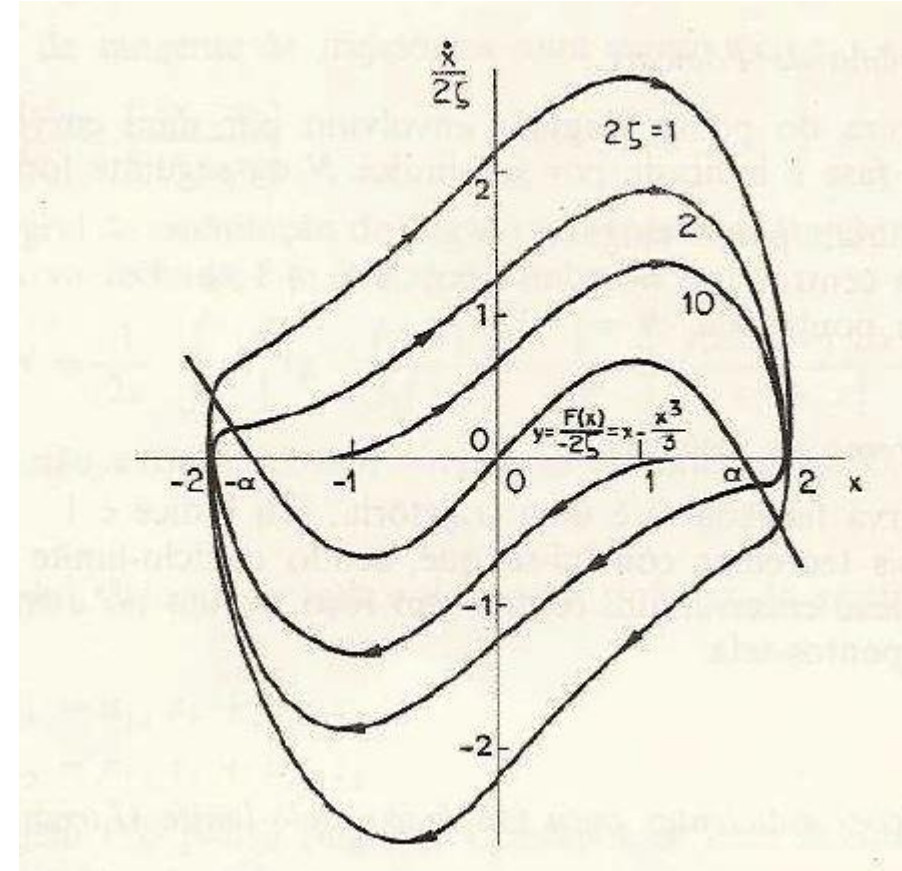
Indefinidamente nem decai a zero. Apresenta

uma oscilação independente das condições iniciais

Mais algumas características de S. não lineares

- Ciclo limite (auto-oscilação)

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0$$



Ciclo limite em van der Pol

Mais algumas características de S. não lineares

• Bifurcação

- Mudança **qualitativa** das propriedades de um sistema devido a uma mudança quantitativa dos parâmetros. Os valores dos parâmetros para os quais dá uma mudança qualitativa no comportamento do sistema são conhecidos como valores críticos ou de **bifurcação**.

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 \quad \text{Caso super crítico}$$

$$\dot{x} = 0 \implies \alpha x_e - x_e^3 = 0 \implies x_e(\alpha - x_e^2) = 0$$

$x_{e1} = 0$ é ponto de equilíbrio independente de α

a) Se $\alpha > 0$, $x_e(\sqrt{\alpha} - x_e)(\sqrt{\alpha} + x_e) = 0$

$$x_{e2} = \sqrt{\alpha}, x_{e3} = -\sqrt{\alpha}$$

b) Se $\alpha = 0$, $x_e(\alpha - x_e^2) = 0 \implies -x_e^3 = 0$, x_{e1} é ponto de equilíbrio

c) Se $\alpha < 0$, $x_e(\alpha - x_e^2) = 0 \implies x_{e1} = 0$ é única solução, pois não é possível fatorar nos reais

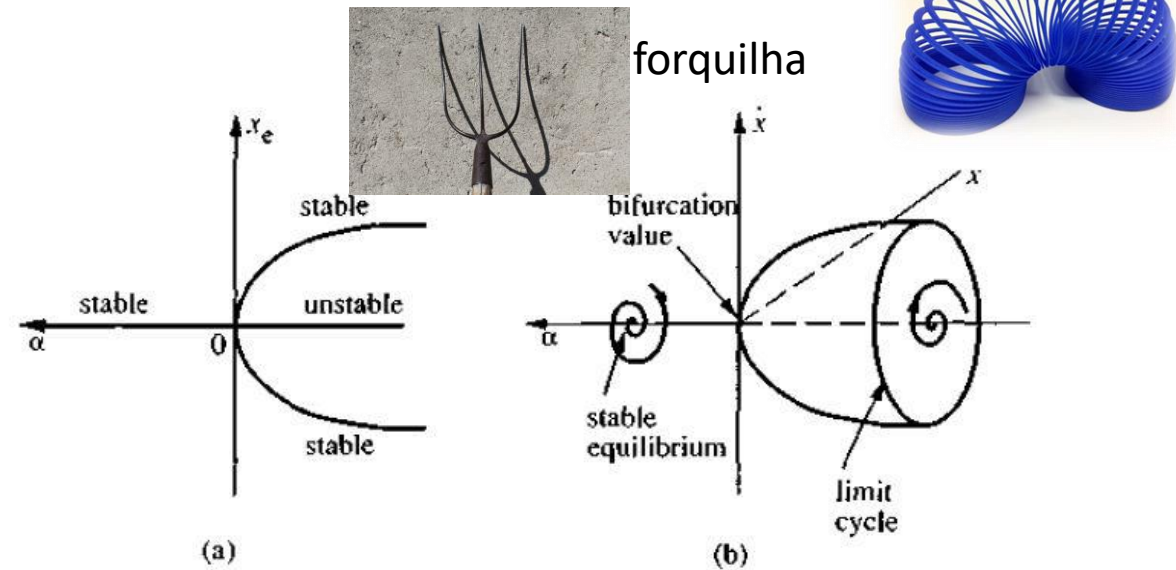


Figure 1.5 : (a) a pitchfork bifurcation; (b) a Hopf bifurcation

Logo, o ponto de equilíbrio depende de α

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x^* = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \quad x^* = \begin{bmatrix} -\sqrt{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mais algumas características de S. não lineares

- Bifurcação

- Vamos agora analisar o sistema em todos os pontos de equilíbrio

$$\dot{x} = f(x) = \alpha x - x^3$$

1) $\frac{df}{dx} = \alpha - 3x^2$. Em $x_{e1} = 0$, $\frac{df}{dx} = \alpha$

a) Se $\alpha = 0$, x_e estável (fracamente)

b) Se $\alpha < 0$, x_{e1} estável

c) Se $\alpha > 0$, x_{e1} instável

2) Se $\alpha > 0$, $x_{e2} = \sqrt{\alpha}$ estável

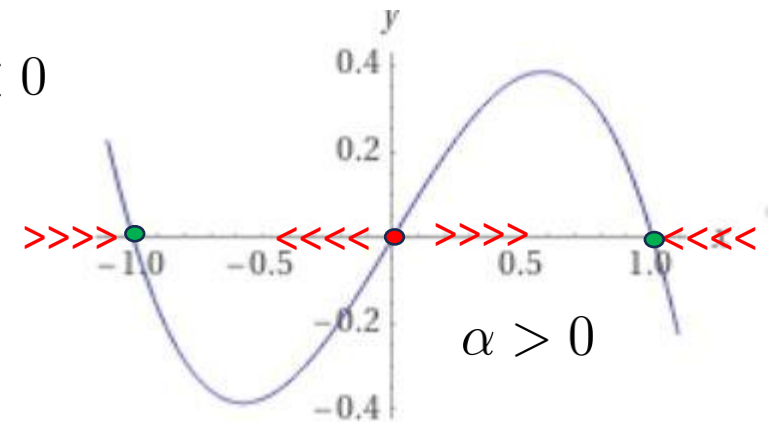
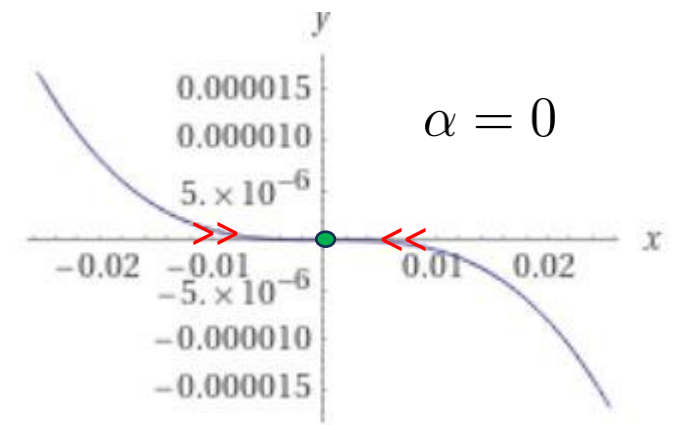
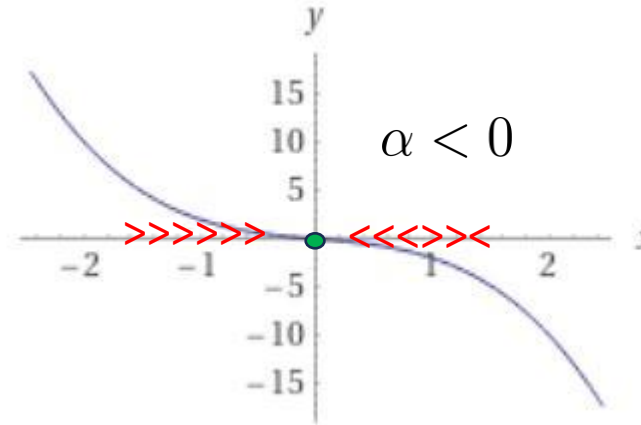
$$\dot{x} = f(x) = \alpha x - x^3$$

$$\frac{df}{dx} = \alpha - 3x^2. \text{ Em } x_{e2} = \sqrt{\alpha}, \frac{df}{dx} = \alpha - 3(\sqrt{\alpha})^2 = -2\alpha < 0$$

b) Se $\alpha > 0$, $x_{e3} = -\sqrt{\alpha}$ estável

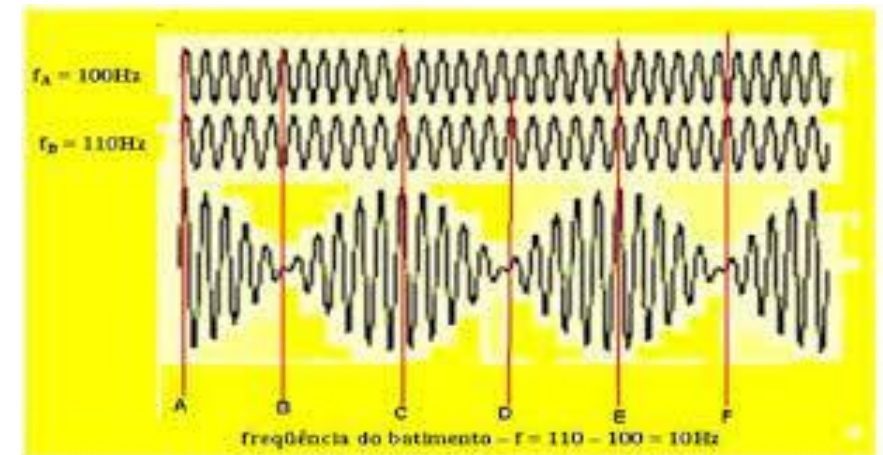
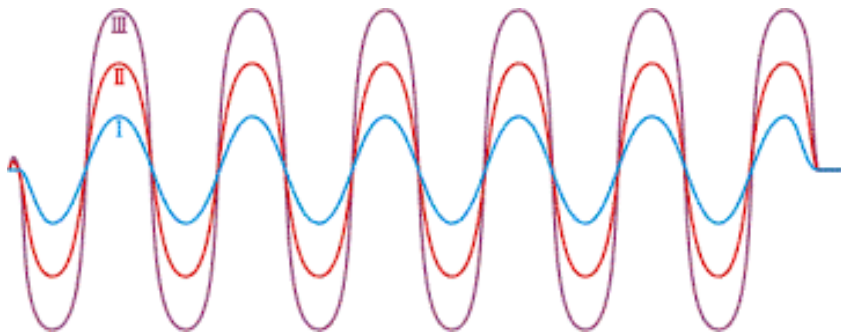
$$\dot{x} = f(x) = \alpha x - x^3$$

$$\frac{df}{dx} = \alpha - 3x^2. \text{ Em } x_{e3} = -\sqrt{\alpha}, \frac{df}{dx} = \alpha - 3(-\sqrt{\alpha})^2 = -2\alpha$$



Mais algumas características de S. não lineares

- Oscilações sub-harmônicas, harmônicas e quase-periódicas
 - Sistema linear
 - Sistema linear estável submetido a uma entrada periódica produz em regime permanente uma saída com mesma frequência da entrada, embora possa atenuar/atrasar...
 - Sistema não linear
 - Pode oscilar em regime permanente com frequências que são submúltiplas (sub-harmônicas), ou múltiplas (harmônicas) da frequência de entrada. Pode mesmo gerar uma oscilação quase-periódica (soma de oscilações com frequências não múltiplas uma das outras). Ex. fenômeno do batimento



Exercício proposto 1

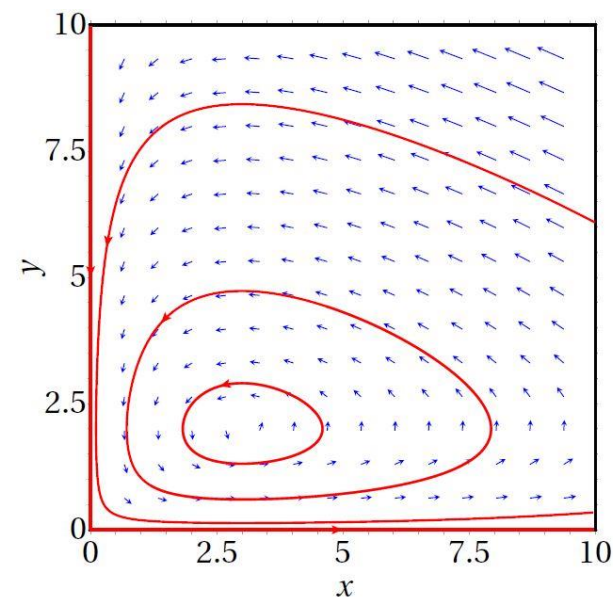
- Fazer análise e demonstração para o caso subcrítico, cuja forma normal da eq. Diferencial é:

$$\dot{x} = \alpha x + x^3$$

Exercício proposto 2

- Uma população de dragões, y , e uma população de águias, x , evoluem de acordo com um modelo de Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(2 - y) \\ \dot{y} &= \frac{y}{2}(x - 3)\end{aligned}$$



Analise a estabilidade e desenhe o retrato de fase do sistema. Qual será o estado limite? alguma das duas espécies será extinta?

Exercício 2

- Uma população de dragões, y , e uma população de águias, x , evoluem de acordo com um modelo de Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(2 - y) \\ \dot{y} &= \frac{y}{2}(x - 3)\end{aligned}$$

Analise a estabilidade e desenhe o retrato de fase do sistema. Qual será o estado limite? alguma das duas espécies será extinta?

R: os pontos de equilíbrio em $(0,0)$ e $(3,2)$ são classificados respectivamente em Ponto de Sela e Centro. As trajetórias são repelidas ao se aproximar de $(0,0)$ convergindo para oscilar em torno de $(3,2)$. Ou seja, nenhuma espécie é extinta mas ficam oscilando suas populações em equilíbrio.