Notas de Aula da Disciplina de Matemática Elementar

Igor, Josenaldo

1 de Outubro de 2018

Conteúdo

Capítulo 1

Conjuntos

1.1 Apresentação

Praticamente toda a matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos mesmo sendo a mais simples das ideias matemáticas. Portanto, o bom entendimento de como trabalhar com conjuntos é fundamental.

1.2 Introdução

Um *conjunto* é definido por seus elementos (e nada mais). Isso nos traz imediatamente que dois conjuntos são *iguais* se, e somente se, possuem os mesmos elementos.

Dados um conjunto A e um objeto qualquer b, há somente uma pergunta cabível para nós: b é um elemento do conjunto A? Tal pergunta só admite "sim" ou "não" como resposta. Isso se dá porque, na Matemática, qualquer afirmação é verdadeira ou é falsa, sem possibilidade de uma terceira opção ou de ser as duas coisas ao mesmo tempo.

O caráter binário e exclusivo do valor-verdade de afirmações faz parecer que a Matemática é infalível se usada corretamente, mas ela não é. O matemático austríaco Kurt Gödel provou, em 1931, que todo sistema formal é falho no sentido de que vai possuir verdades que não podem ser provadas – os chamados paradoxos. Antes de assistir ao vídeo `Este vídeo está mentindo`, reflita se você vai acreditar nele ou não.

Exemplo 1.1. O conjunto PP dos números primos pares pode ser representado por $PP = \{x\ ;\ x \text{ é primo e par }\} = \{2\}$. Nunca escreva $PP = \{ \text{ números primos pares } \}$.

Exemplo 1.2. Temos $V = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}$ como sendo o conjunto das vogais.

Observação. Quando um elemento pertence a um determinado conjunto, usamos o símbolo $\in$, e, quando não pertence, usamos $\notin$.

Exemplo 1.3. Considere PP e V conforme definido nos Exemplos 1.1 e 1.2, respectivamente. Temos que $\mathtt{e} \in \mathcal{V}$ e $3 \notin PP$.

Definição 1.1. O conjunto que não possui elementos é chamado de *conjunto vazio* e é representado por $\emptyset$.

Exemplo 1.4. Quais outros conjuntos você conhece? Que tal pensar sobre o conjunto $A = \{x\ ;\ x \notin A\}$?

1.3 Inclusão

Definição 1.2. Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for, também, elemento de B, diz-se que A é um *subconjunto* de B, que A está *contido* em B, ou que A é *parte* de B. Para indicar esse fato, usa-se a notação $A \subset B$.

Observação. Quando A não é um subconjunto de B, escreve-se $A \not\subset B$. Em outras palavras, existe pelo menos um elemento a tal que $a \in A$ e $a \notin B$.

Definição 1.3. Quando $A \subset B$, dizemos que B *contém* A, e escrevemos $B \supset A$.

Exemplo 1.5. Sejam T o conjunto de todos os triângulos e P o conjunto dos polígonos no plano. Todo triângulo é um polígono, logo, $T \subset P$.

Exemplo 1.6. Na Geometria, uma reta, um plano e o espaço são conjuntos. Seus elementos são pontos. Quando dizemos que uma reta r está no plano Π, estamos afirmando que r está contida em Π ou, equivalentemente, que r é um subconjunto de Π, pois todos os pontos que pertencem a r pertencem, também, a Π. Nesse caso, deve-se escrever $r \subset \Pi$. Porém, não é correto dizer que r pertence a Π, nem escrever $r \in \Pi$. Os elementos do conjunto Π são pontos, não retas.

Proposição 1.1 (Inclusão universal do $\emptyset$)**.** Para todo conjunto A, vale $\emptyset \subset A$.

Demonstração. Seja A um conjunto. Suponha, por absurdo, que $\emptyset \not\subset A$. Logo, existe $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Isso é um absurdo pois $\emptyset$ não possui elementos. Portanto, $\emptyset \subset A$. □

Definição 1.4. Dizemos que $A \neq \emptyset$ é um *subconjunto próprio* de B quando $A \subset B$ e $A \neq B$.

Proposição 1.2 (Propriedades da inclusão)**.** Sejam A, B e C conjuntos. Tem-se:

i. *Reflexividade*: $A \subset A$;
ii. *Antissimetria*: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;
iii. *Transitividade*: $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Demonstração.

i. Seja $x \in A$. Então, temos $x \in A$. Portanto, $A \subset A$.

ii. Sejam A e B conjuntos tais que $A \subset B$ e $B \subset A$. Suponha, por contradição, que $A \neq B$, ou seja, existe $x \in A$ tal que $x \notin B$ (1) ou existe $x \in B$ tal que $x \notin A$ (2). Ora, (1) é o mesmo que $A \not\subset B$, contradizendo $A \subset B$. Analogamente, (2) contradiz $B \subset A$. Portanto, $A = B$.

iii. Sejam A, B e C conjuntos tais que $A \subset B$ e $B \subset C$. Seja $x \in A$. Então $x \in B$ pois $A \subset B$. Como $x \in B$, segue que $x \in C$, pois $B \subset C$. Portanto, $A \subset C$.

□

Definição 1.5. Dado um conjunto A, chamamos de *conjunto das partes* de A o conjunto formado por todos os seus subconjuntos, e denotamo-lo $\mathcal{P}(A)$.

Exemplo 1.7. Dado $A = \{1, 2, 3\}$, determine $\mathcal{P}(A)$.

Solução. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, A\}$.

1.4 Complementar

A noção de complementar de um conjunto só faz sentido quando fixamos um *conjunto universo*, que denotaremos por $\mathcal{U}$. Uma vez fixado $\mathcal{U}$, todos os elementos considerados pertencerão a $\mathcal{U}$ e todos os conjuntos serão subconjuntos de $\mathcal{U}$. Na geometria plana, por exemplo, $\mathcal{U}$ é o plano.

Definição 1.6. Dado um conjunto A (isto é, um subconjunto de $\mathcal{U}$), chama-se *complementar* de A o conjunto A^C formado pelos elementos de $\mathcal{U}$ que não pertencem a A.

Exemplo 1.8. Seja $\mathcal{U}$ o conjunto dos triângulos. Qual o complementar do conjunto dos triângulos escalenos?

Proposição 1.3 (Propriedades do complementar)**.** Fixado um conjunto universo $\mathcal{U}$, sejam A e B conjuntos. Tem-se:

i. $\mathcal{U}^C = \emptyset$ e $\emptyset^C = \mathcal{U}$;

ii. $\left(A^C\right)^C = A$ (todo conjunto é complementar do seu complementar);

iii. Se $A \subset B$, então $B^C \subset A^C$ (se um conjunto está contido em outro, seu complementar contém o complementar desse outro).

Demonstração.

i. A inclusão $\emptyset \subset \mathcal{U}^C$ é imediata pois $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

Provemos, agora, que $\mathcal{U}^C \subset \emptyset$. Suponha, por absurdo, que $\mathcal{U}^C \not\subset \emptyset$; ou seja, existe $x \in \mathcal{U}^C$ tal que $x \notin \emptyset$. Ora, se $x \in \mathcal{U}^C$, então $x \notin \mathcal{U}$, o que é um absurdo. Logo, $\mathcal{U}^C \subset \emptyset$.

Dos fatos de que $\emptyset \subset \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \subset \emptyset$, conclui-se que $\mathcal{U}^C = \emptyset$.

A demonstração de que $\emptyset^C = \mathcal{U}$ fica como exercício para o leitor.

ii. Provemos, primeiro, que $A \subset (A^C)^C$. Para tal, seja $x \in A$. Logo, $x \notin A^C$. Assim, $x \in (A^C)^C$. Então, $A \subset (A^C)^C$. A prova de que $(A^C)^C \subset A$, item restante para podermos concluir que a igualdade desejada é válida, fica como exercício para o leitor.

iii. Sejam A, B conjuntos tais que $A \subset B$. Além disso, seja $x \in B^C$, o que implica em $x \notin B$. Temos duas possibilidades para a presença de x no conjunto A, a saber, $x \in A$ e $x \notin A$. Se $x \in A$, teríamos $x \in B$ também pois $A \subset B$; um absurdo visto que já temos $x \notin B$. Logo, concluímos que $x \notin A$, ou seja, $x \in A^C$. Segue, então, que $B^C \subset A^C$.

□

Definição 1.7. A *diferença* entre os conjuntos A e B, denotada por $B \setminus A$, é definida por:

$$B \setminus A = \{x \; ; \; x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

Observação. Em geral, não é verdade que $A \setminus B = B \setminus A$. Além disso, note que $A^C = \mathcal{U} \setminus A$.

1.5 Reunião e Interseção

Definição 1.8. Dados os conjuntos A e B, definem-se:

i. A *reunião* $A \cup B$ como sendo o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B;

ii. A *interseção* $A \cap B$ como sendo o conjunto formado pelos elementos que pertencem a ambos A e B.

Exemplo 1.9. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 5\}$. Determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ e $B \setminus A$.

Solução.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\};$$
$$A \cap B = \{2\};$$
$$A \setminus B = \{1, 3\};$$
$$B \setminus A = \{5\}.$$

Proposição 1.4 (Propriedades da reunião e interseção)**.** Sejam A, B e C conjuntos. Tem-se:

i. *Comutatividade*: $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$;

ii. *Associatividade*: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

iii. *Distributividade*, de uma em relação à outra: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

iv. $A \subset (A \cup B)$ e $(A \cap B) \subset A$;
v. *Leis de DeMorgan*: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ e $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Demonstração.
i. Exercício.
ii. Provemos que $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$. Para tal, seja $x \in A \cap (B \cap C)$, ou seja, $x \in A$ e $x \in B \cap C$. De $x \in B \cap C$, temos $x \in B$ e $x \in C$. Como $x \in A$ e $x \in B$, segue que $x \in A \cap B$. Além disso, $x \in C$. Então, $x \in A \cap (B \cap C)$. Logo, $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$.
A prova de que $A \cap (B \cap C) \supset (A \cap B) \cap C$, necessária para concluir a igualdade desejada, fica como exercício. Também o fica a verificação da comutatividade da reunião.
iii. Exercício.
iv. Exercício.

□

Atividade online 1.1 (`Notação Básica de Conjunto`)**.** Veja o desempenho na Missão O Mundo da Matemática - Probabilidade.

1.6 Conjuntos e Lógica

Observação. Em toda esta seção, considere P e Q propriedades aplicáveis aos elementos de $\mathcal{U}$. Considere, também, $A = \{x \ ; \ x \text{ possui } P\}$ e $B = \{x \ ; \ x \text{ possui } Q\}$.

Em Matemática, a Teoria de Conjuntos está intimamente relacionada à Lógica. Como evidência disso, existem diversas equivalências entre relações e operadpres de conjuntos e conectivos lógicos. Apresentar-se-ão quatro delas.

Equivalência 1.1 (Inclusão e implicação)**.** $A \subset B$ é equivalente a $P \implies Q$.

Equivalência 1.2 (Igualdade e bi-implicação)**.** $A = B$ é equivalente a $P \iff Q$.

Exemplo 1.10. Analise as implicações abaixo:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 = 0 &\implies \left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right) = 0 \cdot \left(x^2-1\right) \\ &\implies x^4 - 1 = 0 \\ &\implies x^4 = 1 \\ &\implies x \in \{-1, 1\} \end{aligned},$$

Isso quer dizer que o conjunto solução de $x^2 + 1 = 0$ é $\{-1, 1\}$?

Solução. O conjunto-solução de $x^2+1 = 0$ é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \ ; \ x^2 + 1 = 0\right\} = \emptyset$, o que implica que $S \neq \{-1, 1\}$.

Equivalência 1.3 (Complementar e negação)**.** A^C é equivalente a $\neg P$.

Podemos combinar os itens i. e i.. da Proposição 1.3 e obter que:

$$P \implies Q \text{ se, e somente se, } \neg P \implies \neg Q.$$

Chamamos $Q \implies P$ de *recíproca* de $P \implies Q$, e $P \wedge \neg Q$ de *negação* de $P \implies Q$. São dados exemplos no Exercício **??**.

Exemplo 1.11. Observe as afirmações:
i. Todo número primo maior do que 2 é ímpar;
ii. Todo número par maior do que 2 é composto.
Essas afirmações dizem exatamente a mesma coisa, ou seja, exprimem a mesma ideia; só que com diferentes termos. Podemos reescrevê-las na forma de implicações vendo claramente que uma é contrapositiva da outra, e todas estão sob a hipótese de que $n \in \mathbb{N}$, com $n > 2$:

$$\begin{aligned} n \text{ primo} &\implies n \text{ ímpar} \\ \neg(\ n \text{ ímpar }) &\implies \neg(\ n \text{ primo }) \\ n \text{ par} &\implies n \text{ composto} \end{aligned}$$

Equivalência 1.4 (Reunião e disjunção)**.** $A \cup B$ é equivalente a $P \vee Q$ (P ou Q).

Equivalência 1.5 (Interseção e conjunção)**.** $A \cup B$ é equivalente a $P \wedge Q$ (P e Q).

Observação. O conectivo lógico *ou* tem significado diferente do usado normalmente no português. Na linguagem coloquial, usamos P *ou* Q sem permitir que sejam as duas coisas ao mesmo tempo. Analise a seguinte história:

Um obstetra que também era matemático acabara de realizar um parto quando o pai perguntou: "É menino ou menina, doutor?". E ele respondeu: "sim".

As equivalências entre as relações e os operadores da Teoria dos Conjuntos e conectivos da Lógica são resumidas na Tabela 1.1.

Problema 1.1. A polícia prende quatro homens, um dos quais cometeu um furto. Eles fazem as seguintes declarações:
- Arnaldo: Bernaldo fez o furto.
- Bernaldo: Cernaldo fez o furto.
- Dernaldo: eu não fiz o furto.
- Cernaldo: Bernaldo mente ao dizer que eu fiz o furto.

Se sabemos que só uma destas declarações é a verdadeira, quem é culpado pelo furto?

Tabela 1.1. Equivalências entre as relações e operadores de conjuntos e conectivos lógicos.

Operação/relação em Conjuntos	Fórmula de Lógica
$A = B$	$P \iff Q$
$A \subset B$	$P \implies Q$
A^C	$\neg P$
$A \cup B$	$P \vee Q$
$A \cap B$	$P \wedge Q$

1.7 Exercícios

1.8 Bibliografia

Capítulo 2

Conjuntos Numéricos e Potenciação

2.1 Apresentação

Os números têm grande importância na matemática; eles podem servir para contar ou medir coisas. Conhecer os conjuntos numéricos e suas operações é indispensável para trabalhar corretamente com os números.

2.2 Conjuntos Numéricos

Definição 2.1. Ao conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots,\}$ damos o nome de *conjunto dos números naturais.*

Observação. Denotamos $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots,\}$ por $\mathbb{N}^*$.

Usamos o conjunto dos números naturais para contar coisas, como casas, animais, etc.

Definição 2.2. Ao conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -m-1, -m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots,\}$ damos o nome de *conjunto dos números inteiros.*

Usam-se as seguintes notações para se referir a certas "variações" do conjunto dos inteiros:

- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
- $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ (Inteiros não negativos);
- $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$ (Inteiros positivos);
- $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -m-1, -m, \ldots, -1, 0\}$ (Inteiros não positivos);
- $\mathbb{Z}_-^* = \mathbb{Z}_- \setminus \{0\}$ (Inteiros negativos).

Definição 2.3. Ao conjunto $\mathbb{Q} = \big\{p/q \ ; \ p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\big\}$ damos o nome de *conjunto dos números racionais.*

Observação. A representação decimal de um número racional é finita ou é uma dízima periódica (infinita).

Exercício 2.1. Reescreva os números 0,6; 1,37; 0,222...,; 0,313131..., e 1,123123123..., em forma de fração irredutível, ou seja, já simplificada.

Definição 2.4. O *conjunto dos números irracionais* é constituído por todos os números que possuem uma representação decimal infinita e não periódica.

Exemplo 2.1. $\sqrt{2}$, e e π são números irracionais.

Demonstração. Provemos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Para tal, suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Logo, existem $p, q \in \mathbb{Z}_+^*$ tais que p/q é uma fração irredutível, ou seja, p e q não possuem nenhum fator comum nas suas decomposições em fatores primos. Teremos:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} = \frac{p}{q} &\implies 2 = \frac{p^2}{q^2} \\
, \quad &\implies 2q^2 = p^2
\end{aligned}
$$

Isso é um absurdo pois, enquanto que o número $2q^2$ possui uma quantidade ímpar de fatores 2, o número p^2 possui uma quantidade par. Esse fato contraria o Teorema Fundamental da Aritmética, que garante a unicidade da decomposição dos números inteiros em fatores primos. Portanto, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

As provas de que π e e são irracionais vão além do escopo desse texto. □

Você sabia que existem infinitos "maiores" que outros? Qual conjunto você diria que tem mais elementos: racionais ou irracionais? O problema a seguir, proposto pelo matemático alemão David Hilbert em 1924, ilustra a ideia de enumeração de elementos de conjuntos infinitos.

O Grande Hotel Georg Cantor tinha uma infinidade de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural. Todos eram igualmente confortáveis. Num fim de semana prolongado, o hotel estava com seus quartos todos ocupados, quando chega um visitante. A recepcionista vai logo dizendo:

— Sinto muito, mas não há vagas.

Ouvindo isto, o gerente interveio:

— Podemos abrigar o cavalheiro sim, senhora.

E ordenou:

— Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante. Quem estiver no quarto n, mude para o quarto n+1. Isso manterá todos alojados e deixará disponível o quarto 1 para o recém chegado.

Logo depois, chegou um ônibus com 30 passageiros, todos querendo hospedagem. Como deve proceder a recepcionista para acomodar todos?

Horas depois, chegou um trem com uma infinidade de passageiros. Como proceder para acomodá-los?

Atividade online 2.1 (`Classifique números: racionais e irracionais`).

Atividade online 2.2 (`Expressões racionais versus irracionais`).

Veja o desempenho na Missão Álgebra I — números Racionais e Irracionais.

Definição 2.5. À reunião de $\mathbb{Q}$ com o conjunto dos números irracionais, nomeamos de *conjunto dos números reais*. Denotamo-la por $\mathbb{R}$.

Usamos os números reais para medir grandezas contínuas. A cada número real está associado um ponto na reta graduada, e vice-versa.

O conjunto dos números reais é "denso" no sentido de que, entre quaisquer dois números reais distintos, há um número racional e um irracional. Já `este vídeo` da Khan Academy mostra que, além disso, entre dois racionais distintos sempre há um número irracional.

Quando se trata de números reais, são frequentes as ocasiões nas quais nossa intuição inicial pode ser falha. Uma delas é a respeito de dízimas periódicas. Você consegue afirmar se a igualdade $0{,}999\ldots = 1$ é verdadeira?

Definição 2.6. Chamamos $i = \sqrt{-1}$ de *número imaginário*, e ao conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi \;;\; a, b \in \mathbb{R}\}$ damos o nome de *conjunto dos números complexos*.

Os conjuntos estudados até aqui estão relacionados por meio da seguinte cadeia de inclusões próprias:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Definição 2.7. Seja $a + bi \in \mathbb{C}$. Nomeamos o número $a - bi$ de *conjugado* de $a + bi$.

2.3 Operações Básicas

Definem-se duas operações básicas com os elementos dos conjuntos numéricos: adição e a multiplicação. A subtração e a divisão provêm da adição e da multiplicação, respectivamente. A diferença $a - b$ pode ser vista como $a + (-b)$, e a razão c/d, como $c \cdot (1/d)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $d \neq 0$.

Você está bem treinado nas operações com frações? Dê uma treinada na Khan Academy `aqui`!

2.4 Potenciação

Definição 2.8. A *potência* $n \in \mathbb{N}^*$ de um número real a é definida como sendo a multiplicação de a por ele mesmo n vezes, ou seja:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ vezes}}.$$

Definição 2.9. Quando $a \neq 0$, $a^0 = 1$. 0^0 é uma indeterminação. Além disso, para $n \in \mathbb{R}_+^*$, tem-se que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};$$
$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Observação. É importante ressaltar que é comum definir $0^0 = 1$ dependendo de como se quer abordar as potências. Saiba mais `aqui`.

Proposição 2.1 (Propriedades)**.** Sejam $a, b, n, m \in \mathbb{R}$, a menos que se diga o contrário.

i. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

ii. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$;

iii. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

iv. $a^{m^n} = a^{\overbrace{m \cdot m \ldots m}^{n \text{ vezes}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

v. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

vi. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;

vii. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $n \neq 0$.

Observação. Seja $a \in \mathbb{R}$. Temos que $\sqrt{a^2} = |a|$. Mais geralmente, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ para n par. Além disso, é errado dizer que $\sqrt{4} = \pm 2$. O correto é $\sqrt{4} = 2$, mesmo que escrevas $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2}$.

O erro apresentado é comum, e o fator de confusão é que responder o conjunto-solução da equação $x^2 = 4$ não é equivalente a responder qual a raiz de 4, e sim responder quais números que elevados ao quadrado são iguais a 4.

Atividade online 2.3 (`Propriedades da potenciação (expoentes racionais)`)**.**

Atividade online 2.4 (`Simplifique raízes quadradas (variáveis)`)**.** Veja o desempenho na Missão Álgebra I - Expressões com expoentes fracionários e radicais.

2.5 Exercícios

2.6 Bibliografia

Capítulo 3

Equações e Inequações

3.1 Introdução

Como você responderia se te perguntassem: Qual o número cujo dobro somado com sua quinta parte é igual a 121? Você já viu alguma brincadeira do tipo? A seguir, temos outro exemplo:

1. Escolha um número;
2. Multiplique esse número por 6;
3. Some 12;
4. Divida por 3;
5. Subtraia o dobro do número que você escolheu;
6. O resultado é igual a 4.

3.2 Equação do 1° grau

Definição 3.1. Uma *equação do primeiro grau* na variável x é uma expressão da forma

$$ax + b = 0,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e x é um número real a ser encontrado.

Proposição 3.1 (Propriedades)**.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Os seguintes valem:
i. $a = b \implies a + c = b + c$;
ii. $a = b \implies ac = bc$.

Exemplo 3.1. Resolva a equação $5x - 3 = 6$.

Solução. Utilizaremos as propriedades dadas na Proposição 3.1 para resolver a equação.

$$\begin{aligned}
5x - 3 = 6 &\iff 5x - 3 + 3 = 6 + 3 && \text{(i., com } c := 3)\\
&\iff 5x = 9 && \text{(Aritmética)}\\
&\iff \frac{5x}{5} = \frac{9}{5} && \left(\text{ii., com com } c := \tfrac{1}{5}\right)\\
&\iff x = \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

Exemplo 3.2. Escreva em forma de expressões cada passo da brincadeira da Introdução:
1. Escolha um número;
2. Multiplique esse número por 6;
3. Some 12;
4. Divida por 3;
5. Subtraia o dobro do número que você escolheu;
6. O resultado é igual a 4.

Solução.
1. x
2. $6x$
3. $6x + 12$
4. $\frac{6x+12}{3}$
5. $\frac{6x+12}{3} - 2x$
6. $\frac{6x+12}{3} - 2x = 4$

Observação. Deve-se ter cuidado ao efetuar divisões em ambos os lados de uma equação para não cometer o erro de dividir os lados por zero. Do contrário, pode-se derivar absurdos matemáticos. A seguir, temos um exemplo de "prova" de que $1 = 2$:

$$\begin{aligned}
0 = 0 &\implies 1 - 1 = 2 - 2\\
&\implies 1 \cdot \cancel{(1 - 1)} = 2 \cdot \cancel{(1 - 1)}\\
&\implies 1 = 2
\end{aligned}$$

Qual o erro?

Atividade online 3.1 (`Modelo com equações de primeiro grau e resolução`). Veja o desempenho na Missão 7° ano – Introdução às equações e inequações.

Exemplo 3.3. Se x representa um dígito na base 10 na equação

$$x11 + 11x + 1x1 = 777,$$

qual o valor de x?

Solução. Seja $x \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Teremos:

$$\begin{aligned} x11 + 11x + 1x1 = 777 &\iff 100x + 11 + 10x + 100 + 110 + x = 777 \\ &\iff 111x + 222 = 777 \\ &\iff 111x = 555 \\ &\iff x = 5 \end{aligned}$$

Logo, $x = 5$.

Exemplo 3.4. Determine se é possível completar o preenchimento do tabuleiro abaixo com os números naturais de 1 a 9, sem repetição, de modo que a soma de qualquer linha seja igual à de qualquer coluna ou diagonal.

1		6
	9	

Os tabuleiros preenchidos com essas propriedades são conhecidos como *quadrados mágicos*.

Solução. Seja c o valor constante da soma de cada uma das linhas, colunas ou diagonais. Note que a soma das 3 linhas será:

$$3c = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 \iff c = 15$$

Usaremos a notação posicional de matrizes para os quadrados q_{ij}. Da configuração inicial e da definição de quadrado mágico, além do valor de c, segue que:

$$1 + q_{12} + 6 = 15 \iff q_{12} = 8;$$

$$\begin{aligned} q_{12} + q_{22} + 9 = 15 &\iff 8 + q_{22} + 9 = 15 \\ , \qquad &\iff q_{22} = -2 \end{aligned}$$

Os quadrados q_{ij} não podem conter números negativos. Logo, não é possível montar um quadrado mágico com a configuração inicial dada.

Exemplo 3.5. Imagine que você possui um fio de cobre extremamente longo, mas tão longo que você consegue dar a volta na Terra com ele. Para simplificar, considere que a Terra é uma bola redonda e que seu raio é de exatamente 6.378.000 metros.

O fio com seus milhões de metros está ajustado à Terra, ficando bem colado ao chão ao longo do Equador. Digamos, agora, que você acrescente 1 metro ao fio e o molde de modo que ele forme um círculo enorme, cujo raio é um pouco maior que o raio da Terra e tenha o mesmo centro. Você acha que essa folga será de que tamanho?

Solução. Consideremos C o comprimento do círculo máximo da Terra, r e r' os raios desse círculo antes e depois do aumento do fio, respectivamente, e f o tamanho da folga. Ora,

$$\begin{aligned}
C + 1 = 2\pi r' &\iff 2\pi r + 1 = 2\pi r' && (C = 2\pi r)\\
&\iff 2\pi r + 1 = 2\pi\,(r + f) = 2\pi r + 2\pi f && (r' = r + f)\\
&\iff 1 = 2\pi f\\
&\iff f = \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

Logo, $f = 1/(2\pi)$ metros.

No Exemplo 3.5, a folga obtida aumentando-se o fio independe do raio em consideração. Além desse problema, veja outras curiosidades sobre o número π no vídeo `O Pi existe` e tente calculá-lo em casa usando algum objeto redondo.

3.3 Equação do 2° grau

Definição 3.2. A *equação do segundo grau* com coeficientes a, b e c é uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e x é uma variável real a ser determinada.

Exemplo 3.6. Encontre as soluções de uma equação do segundo grau.

Solução. Da Definição 3.2, sabemos que uma equação do segundo grau tem a seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Manipulemos a equação para encontrar o valor de x:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
&\iff x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\
&\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\iff \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
&\iff x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{\pm 2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Portanto, quando $b^2 - 4ac \geq 0$, o conjunto-solução S da equação será:

$$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

Atividade online 3.2 (`Equações do segundo grau com cálculo de raízes quadradas: com etapas`)**.**

Atividade online 3.3 (`Método de completar quadrados`)**.** Veja o desempenho na Missão Álgebra I – Equações do segundo grau.

Definição 3.3. Chamamos de *discriminante* da equação do segundo grau a expressão $b^2 - 4ac$ e denotamos pela letra grega maiúscula Δ (lê-se delta).

Observação. O número de soluções de uma equação do segundo grau é totalmente determinado pelo sinal do seu discriminante, de forma tal que:

- Se $\Delta > 0$, existem duas soluções reais;
- Se $\Delta = 0$, existe uma solução real ($x_1 = x_2 = -b/2a$);
- Se $\Delta < 0$, não existe solução real.

Exemplo 3.7. Sabendo que x é um número real que satisfaz a equação:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}},$$

determine os valores possíveis de x.

Solução. Manipulemos a equação:

$$
\begin{aligned}
x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}} &\iff x\left(1+\frac{1}{x}\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right)+1\\
&\iff x+1 = \frac{1}{x}+2\\
&\iff x^2+x = 1+2x\\
&\iff x^2-x-1=0\\
&\iff x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

Logo, as soluções são $\left(1-\sqrt{5}\right)/2$ e $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

Observação. O número $\phi = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$ é conhecido como razão áurea, número de ouro, proporção divina, entre outras denominações. Veja o episódio A Proporção Divina `parte 01` e `parte 02` do programa português Isto É Matemática.

Atividade online 3.4 (`Fórmula de Bhaskara`)**.** Veja o desempenho na Missão Álgebra I – Equações do segundo grau.

Teorema 3.1. Os números α e β são as raízes da equação do segundo grau:

$$ax^2+bx+c=0$$

se, e somente se,

$$\alpha+\beta = \frac{-b}{a} \quad \text{e} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

Demonstração. Sejam α e β raízes da equação do 2° grau $ax^2+bx+c=0$. Do Exemplo 3.6, temos:

$$
\begin{aligned}
&\alpha+\beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}\\
&\alpha\beta = \frac{c}{a} \text{ (exercício)}
\end{aligned}
$$

□

3.4 Inequação do 1° grau

Definição 3.4. Uma *inequação do primeiro grau* é uma relação de uma das seguintes formas:

$ax + b < 0;$

$ax + b > 0;$

$ax + b \leq 0;$

$ax + b \geq 0;$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Lemos os símbolos da seguinte maneira: $<$ (menor que), $>$ (maior que), $\leq$ (menor ou igual que) e $\geq$ (maior ou igual que).

Observação. O *conjunto solução* de uma inequação do primeiro grau é o conjunto S de números reais que satisfazem a inequação, isto é, o conjunto de números que, quando substituídos na inequação, tornam a desigualdade verdadeira.

Proposição 3.2. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$. Os seguintes valem:
i. Invariância por adição de números reais: $a < b \implies a + c < b + c$;
ii. Invariância por multiplicação de números reais positivos: $a < b; c > 0 \implies a{\cdot}c < b{\cdot}c$;
iii. Mudança por multiplicação de números reais negativos: $a < b; c < 0 \implies a \cdot c > b \cdot c$;
iv. Se $a < b$, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, para $a, b \neq 0$;
v. Se $a, b \geq 0$ e $c > 0$, segue que $a < b \implies a^c < b^c$;
vi. Se $a, b < 0$ e n par, segue que $a < b \implies a^n > b^n$;
vii. Se $a, b < 0$ e n ímpar, segue que $a < b \implies a^n < b^n$;
viii. Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;
ix. Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$. Se $a < b$ e $c < d$, então $ac < bd$.
Os resultados são análogos para os tipos $>$, $\leq$ e $\geq$.

Exemplo 3.8. Qual o conjunto solução da inequação $8x - 4 \geq 0$?

Solução. Note que:

$$\begin{aligned} 8x - 4 \geq 0 &\iff 8x \geq 4 \\ &\iff x \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Logo, o conjunto-solução da equação é $S = \big\{x \in \mathbb{R} \ ; \ x \geq 1/2\big\}$. A seguir, é exibida uma resolução alternativa da inequação:

$$\begin{aligned} 8x - 4 \geq 0 &\iff -4 \geq -8x \\ &\iff \frac{-4}{-8} \leq x \\ &\iff \frac{1}{2} \leq x \end{aligned}$$

Exemplo 3.9. Antes de fazer os cálculos, diga qual dos números $a = 3456784 \cdot 3456786 + 3456785$ e $b = 3456785^2 - 3456788$ é maior.

Solução. Suponha que $a > b$. Faça $x = 3456784$. Teremos:

$$\begin{aligned}
x(x+2) + x + 1 > (x+1)^2 - (x+4) &\iff x(x+1+1) + x + 1 > (x+1)^2 - (x+4) \\
&\iff x\,(x+1) + x + (x+1) > (x+1)^2 - x - 4 \\
&\iff (x+1)\,(x+1) + x > (x+1)^2 - x - 4 \\
&\iff (x+1)^2 > (x+1)^2 - 2x - 4 \\
&\iff 0 > -2x - 4 \\
&\iff 4 > -2x \\
&\iff -2 < x,
\end{aligned}$$

o que é uma verdade pois $x = 3456784$. Logo, $a > b$.

Atividade online 3.5 (`Problemas com Inequações`)**.** Veja o desempenho na Missão 7° Ano – Introdução às Equações e Inequações.

3.5 Inequação do 2° grau

Definição 3.5. Uma *inequação do segundo grau* é uma relação de uma das formas a seguir:

$$\begin{aligned}
&ax^2 + bx + c < 0; \\
&ax^2 + bx + c > 0; \\
&ax^2 + bx + c \leq 0; \\
&ax^2 + bx + c \geq 0;
\end{aligned}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$.

Exemplo 3.10. Resolva as seguintes inequações: $x^2 - 3x + 2 > 0$; $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

Solução. Observe que:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)\,(x-1) > 0,$$

logo, teremos:

ESTUDO DE SINAL

Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x < 1 \text{ ou } x > 2\}$. Ademais, a solução $\bar{S}$ para a inequação $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ será:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x \geq 1 \text{ e } x \leq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \; ; \; 1 \leq x \leq 2\}\end{aligned}$$

Demonstração. Queremos provar que $x + 1/x \geq 2$, para todo $x \neq 0$. Note que:

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} \geq 2 &\iff \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} \\ &\iff \frac{(x-1)^2}{x}\end{aligned}$$

ESTUDO DE SINAL

Logo, para que $x+1/x \geq 2$, é necessário e suficiente que $x > 0$, ou seja, x é positivo. □

3.6 Módulos

Solução.

i. Note que:

$$|2x - 5| = \begin{cases} 2x - 5, & \text{se } 2x - 5 \geq 0 \iff x \geq 5/2 \\ -(2x - 5), & \text{se } 2x - 5 < 0 \iff x < 5/2 \end{cases}$$

Se $x \geq 5/2$, teremos:

$$\begin{aligned}|2x - 5| = 3 &\iff 2x - 5 = 3 \\ &\iff x = 4\end{aligned}$$

Como $x = 4 \geq 5/2$, temos que $4 \in S$.
Se $x < 5/2$, teremos:

$$\begin{aligned}|2x - 5| = 3 &\iff -(2x - 5) = 3 \\ &\iff -2x = 2 \\ &\iff x = 1\end{aligned}$$

Como $x = 1 < 5/2$, então $1 \in S$.
Das análises dos dois casos, concluímos que o conjunto solução é $S = \{1, 4\}$.

ii. Observe que:

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & \text{se } 2x-3 \geq 0 \iff x \geq 3/2 \\ -(2x-3), & \text{se } 2x-3 < 0 \iff x < 3/2 \end{cases}$$

Se $x \geq 3/2$, teremos:

$$|2x-3| = 1-3x \iff 2x-3 = 1-3x \qquad \iff x = 4/5$$

Como $4/5 < 3/2$, então $4/5 \notin S$.
Se $x < 3/2$, teremos:

$$|2x-3| = 1-3x \iff -(2x-3) = 1-3x \qquad \iff x = -2$$

Como $-2 < 3/2$, então $-2 \in S$.
Das análises dos dois casos, concluímos que o conjunto solução é $S = \{2\}$.

iii. Note que:

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x, & \text{se } 3-x \geq 0 \iff x \neq 3 \\ -(3-x), & \text{se } 3-x < 0 \iff x > 3 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x+1 \geq 0 \iff x \geq 3 \\ -(x+1), & \text{se } x+1 < 0 \iff x < 3 \end{cases}$$

- Caso $x < -1$:

$$\begin{aligned} |3-x| - |x+1| = 4 &\iff 3-x-\big[-(x+1)\big] = 4 \\ &\iff 4 = 4 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Temos, então, que $x < -1$ é solução para a equação.

- Caso $-1 \leq x \leq 3$:

$$\begin{aligned} |3-x| - |x+1| = 4 &\iff 3-x-(x+1) = 4 \\ &\iff -2x+2 = 4 \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

Logo, $x = -1$ é solução da equação.

- Caso $x > 3$:

$$\begin{aligned} |3-x| - |x+1| = 4 &\iff -(3-x) - (x+1) = 4 \\ &\iff -4 = 4 \end{aligned}$$

Nesse caso, não há soluções.

Das análises dos casos, conclui-se que $S = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x \leq -1\}$.

Solução. Note que:

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x, & \text{se } 3-x \geq 0 \iff x \leq 3 \\ -(3-x), & \text{se } 3-x < 0 \iff x > 3 \end{cases}$$
$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x+1 \geq 0 \iff x \geq 1 \\ -(x+1), & \text{se } x+1 < 0 \iff x < -1 \end{cases}$$

- Caso $x < -1$:

$$\begin{aligned} |3-x| - |x+1| \leq 4 &\iff 3 - x - \big[-(x+1)\big] \leq 4 \\ - &\iff 4 \leq 4 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tem-se, então, que $x < -1$ é solução para a inequação.

3.7 Desigualdades Clássicas

3.8 Exercícios

3.9 Bibliografia