Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA111- Primeiro Semestre de 2014

2ª Prova - 16/05/2014 (6ª-Noturno)

Nome: ....

R.A.: .... **Turma:**........

Questão	1	2	3	4	5	Total
Nota						

Q1.(2.0) Considere a curva definida pela equação $(x+1)^3 + y^3 + \cos(xy) = 10$. Calcule y' e encontre a equação da reta tangente à curva no ponto $(0,2)$.

Solução. Derivando implicitamente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[(x+1)^3 + y^3 + \cos(xy)\right] &= 0 \\
3(x+1)^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - \sin(xy)\frac{d}{dx}(xy) &= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,3) \\
3(x+1)^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - \sin(xy)\left[y + x\frac{dy}{dx}\right] &= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,3) \\
\left[3(x+1)^2 - y\sin(xy)\right] + \left[3y^2 - x\sin(xy)\right]\frac{dy}{dx} &= 0
\end{aligned}$$

então,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3(x+1)^2 - y\sin(xy)}{3y^2 - x\sin(xy)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,4)$$

No ponto $(0,2)$, $x=0$ e $y=2$, temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3(0+1)^2 - 2\sin(0)}{3(2)^2 - 0\cdot\sin(0)} = -\frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,4)$$

Logo a equação da reta tangente é dada por

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x-0) \Longrightarrow y = 2 - \frac{x}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,5)$$

$\square$

Q2. Avalie os limites abaixo e encontre o correspondente valor caso exista.

(a) (1.0) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(3x+1)^4}{[\ln(3x+1)]^2}$ (b) (1.0) $\lim_{x\to 0^+} [tg(2x)]^x$

Solução.

a) Temos um limite do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, aplicando a regra de L'Hospital

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{(3x+1)^4}{[\ln(3x+1)]^2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4(3x+1)^3(3)}{2\ln(3x+1)\frac{1}{3x+1}(3)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,3)\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2(3x+1)^4}{\ln(3x+1)}\\
(L'Hospital) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{8(3x+1)^3(3)}{\frac{1}{3x+1}(3)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,4)\\
&= \lim_{x\to+\infty} 8(3x+1)^4 = \infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,3)
\end{aligned}
$$

b) No caso de um limite exponencial escrevemos,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} [tg(2x)]^x &= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln[tg(2x)]^x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,1)\\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln[tg(2x)]} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,2)\\
Continuidade &= e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln[tg(2x)]} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,1)\\
0\cdot\infty &= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln[tg(2x)]}{\frac{1}{x}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,1)\\
L'Hospital &= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{tg(2x)}\sec^2(2x)}{-\frac{1}{x^2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,2)\\
&= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}\frac{1}{\cos^2(2x)}}{-\frac{1}{x^2}}}\\
&= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{\sin(2x)}\frac{(-x)}{\cos(2x)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,1)\\
&= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{(-x)}{\cos(2x)}} = e^0 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,2)
\end{aligned}
$$

$\square$

Q3. Seja $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

(a)(0.8) Determine os intervalos de crescimento/decrescimento de f, e os seus pontos de máximo/mínimo.

Solução. Derivando

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(x) \cdot (2x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0, 2)$$

igualando a zero,

$$1 - 2\ln(x) = 0 \Longrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = e^{1/2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0, 2)$$

temos a tabela

x	$1 - 2\ln(x)$	x^3	$f'(x)$	$f(x)$
$0 < x < e^{1/2}$	$+$	$+$	$+$	crescente
$x = e^{1/2}$	$\ldots$	$\ldots$	0	$\Longrightarrow$ maximo local
$x > e^{1/2}$	-	$+$	-	decrescente

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (0,4)

$\square$

(b)(0.8) Determine os intervalos onde f é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão.

Solução. Derivando mais uma vez

$$f'(x) = \frac{-2\frac{1}{x} \cdot x^3 - (1 - 2\ln(x)) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-5 + 6\ln(x)}{x^4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0, 2)$$

igualando a zero,

$$-5 + 6\ln(x) = 0 \Longrightarrow \ln(x) = \frac{5}{6} \Longrightarrow x = e^{5/6} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0, 2)$$

temos a tabela

x	$-5 + 6\ln(x)$	x^4	$f''(x)$	$f(x)$
$0 < x < e^{5/6}$	-	$+$	$+$	concava para baixo
$x = e^{5/6}$	$\ldots$	$\ldots$	0	$\Longrightarrow$ ponto de inflexão
$x > e^{5/6}$	$+$	$+$	-	concava para cima

$\ldots\ldots\ldots\ldots$ (0,4)

$\square$

(c)(0.6) Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f.

Solução. Vejamos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty \dots\dots\dots\dots\dots\dots (0,2)$$

então não há assíntotas verticais.

Por outro lado,

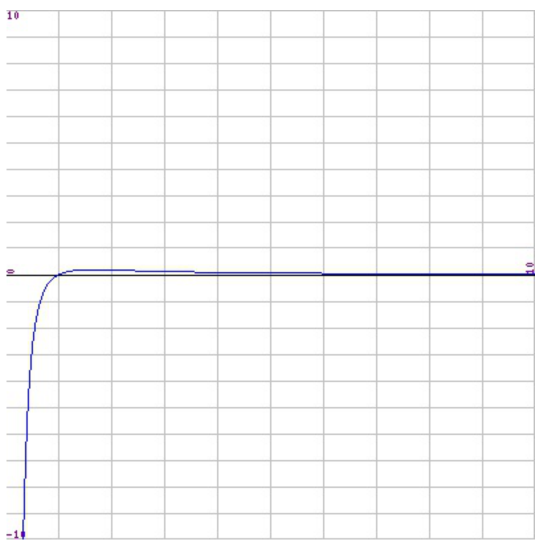
$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} \quad (L'Hospital) \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (0,2) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (0,2)$$

então, $y = 0$ é uma assíntota horizontal. $\square$

(d)(0.8) Esboce o gráfico de f usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c).



Q4.(1.0) Em um acidente industrial, um produto químico vaza de um duto formando em um lago uma mancha circular com espessura $0,05m$. Quando o raio da mancha atinge $12m$, este passa a aumentar a uma taxa de $0,3m$ por minuto. Em que taxa (em $m^3/\min$) o produto vaza do local do acidente neste mesmo instante?

Solução. o volume do lago formado pelo vazamento do produto químico é dado por

$$V = 0,05\pi r^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (0,3)$$

Por hipótese: Quando $r = 12$, $\frac{dr}{dt} = 0,3m/\min$ . . . . (0,2)

Derivando,

$$\frac{dV}{dt} = 0,1\pi r\frac{dr}{dt} = 0,1\pi(12)(0,3) = 0,36\pi m^3/\min \dots\dots\dots\dots\dots\dots (0,5)$$

□

Q5.(2.0) Encontre os pontos (x, y) sobre a curva $x^2 + \frac{1}{12}y^3 = (12)^2$ que satisfazem $4 \leq y \leq 12$ e estão mais distantes do ponto $(0, 1)$.

Solução. Seja D a distância do ponto $(0, 1)$ até a curva $x^2 + \frac{1}{12}y^3 = (12)^2$, dada por

$$D^2 = x^2 + (y-1)^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (0,3)$$

onde, pelo fato de (x, y) estar na curva, temos $x^2 = (12)^2 - \frac{1}{12}y^3$ Assim, temos

$$D^2 = (12)^2 - \frac{1}{12}y^3 + (y-1)^2, \qquad y \in [4, 12] \dots\dots\dots\dots\dots\dots (0,5)$$

Note que, desejamos maximizar a distância D, de maneira equivalente iremos maximizar D^2

Pontos críticos:

$$\frac{dD^2}{dy} = -\frac{1}{4}y^2 + 2(y-1) = 0 \Longrightarrow y^2 - 8y + 8 = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (0,2)$$

isto é, completando quadrados

$$(y-4)^2 - 8 = 0 \Longrightarrow y = 4 \pm 2\sqrt{2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (0,2)$$

uma vez que $y \in [4, 12]$, temos um só ponto crítico $y = 4+2\sqrt{2} \in [4, 12]$ . . . . (0,2)

Podemos utilizar o critério da segunda derivada,

$$\frac{d^2D^2}{dy^2} = -\frac{1}{2}y + 2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (0,2)$$

no ponto crítico,

$$\frac{d^2D^2}{dy^2}(4+2\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}(4+2\sqrt{2}) + 2 = -\sqrt{2} < 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (0,2)$$

logo $y = 4 + 2\sqrt{2}$ é um ponto de máximo, sendo assim a distância máxima é dada por . . . . (0,2)

$$D(4+2\sqrt{2}) = \sqrt{(12)^2 - \frac{1}{12}(4+2\sqrt{2})^3 + (3+2\sqrt{2})^2}$$

□