Aula 2
Limites e Continuidade

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Limite

Considere uma função f que associa um vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de um domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um número real $f(\mathbf{x})$. Considere também um vetor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, não necessariamente no domínio de f. Escrevemos,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L,$$

se pudermos tornar os valores $f(\mathbf{x})$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos quanto quisermos) tomando $\mathbf{x}$ próximo mas diferente de $\mathbf{a}$.

Definição 1 (Distância Euclideana)

Dados dois vetores $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, o valor

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2},$$

chamada *distância Euclideana*, fornece uma medida para avaliar quão próximo $\mathbf{x}$ está de $\mathbf{a}$.

Observação:

Em $\mathbb{R}^2$, o conjunto

$$\mathcal{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$$

representa um circulo de raio r centrado em $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. No caso geral, $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$ é chamada bola aberta de raio r centrada em $\mathbf{a}$.

Definição 2 (Limite)

Seja f uma função de várias variáveis cujo domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ contém pontos arbitrariamente próximos de $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Dizemos que o **limite de** $f(\mathbf{x})$ **quando x tende a a é** L e escrevemos

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L,$$

se para todo número $\varepsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que,

$$\text{se} \;\; \mathbf{x} \in D \;\; \text{e} \;\; 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \;\; \text{então} \;\; |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon.$$

Observe que

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \to 0} |f(\mathbf{x}) - L| = 0,$$

em que o segundo é um limite usual.

Teorema 3

Se $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ *e* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = M$*, então*

a) *Limite da soma:*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = L + M.$$

b) *Multiplicação por escalar:*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \alpha f(\mathbf{x}) = \alpha L, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

c) *Limite do produto:*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} [f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})] = LM.$$

d) *Limite do quociente:*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} [f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})] = L/M, \quad \text{se } M \neq 0.$$

Observação 1:

O teorema do confronto também vale para limite de funções de várias variáveis.

Observação 2:

Existem infinitas maneiras de $\mathbf{x}$ se aproximar de $\mathbf{a}$. Porém, a noção de distância não depende da maneira como $\mathbf{x}$ se aproxima de $\mathbf{a}$. Portanto, se o limite existe, $f(\mathbf{x})$ deve se aproximar de L independentemente da maneira como $\mathbf{x}$ se aproxima de $\mathbf{a}$.

Observação 3:

Se $f(\mathbf{x}) \to L_1$ quando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ ao longo de um caminho $\mathcal{C}_1$ e $f(\mathbf{x}) \to L_2$ quando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ ao longo de um caminho $\mathcal{C}_2$, com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ não existe.

Exemplo 4

Mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

não existe.

Exemplo 4

Mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

não existe.

Resposta: Considere os caminhos

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) : y = 0\}$$

e

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) : x = 0\}.$$

Exemplo 5

Se

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2},$$

será que existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)?$$

Exemplo 5

Se

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

será que existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)?$$

Resposta: Não! Basta considerar os caminhos

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) : y = 0\}$$

e

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) : x = y\}.$$

Exemplo 6

Se

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2},$$

será que existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)?$$

Exemplo 6

Se

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2},$$

será que existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)?$$

Resposta: Se considerarmos os caminhos

$$\mathcal{C}_1 = \{(x,y) : y = mx\},\ m \in \mathbb{R},$$

,

$$\mathcal{C}_2 = \{(x,y) : x = y^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_3 = \{(x,y) : y = x\},$$

encontramos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(\mathbf{x}) = 0$ sobre quaisquer um dos três caminhos. Essa observação sugere que o limite existe e é igual a zero. Demonstramos a existência do limite tomando $\delta = \varepsilon$!

Continuidade

Definição Informal de Continuidade:

Uma função f de várias variáveis é dita contínua em $\mathbf{a}$ se

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Dizemos que f é contínua em D se f for contínua em cada $\mathbf{a} \in D$.

Interpretação:

Se $\mathbf{x}$ sofre uma pequena variação, o valor $f(\mathbf{x})$ também sofrerá uma pequena variação.
Em $\mathbb{R}^2$, a superfície que corresponde ao gráfico de uma função contínua não tem buracos ou rupturas.

A soma, o produto e a composição de funções contínuas é também uma função contínua!

Função Polinomial de Duas Variáveis

Uma função polinomial de duas variáveis é uma soma de termos da forma

$$cx^n y^m,$$

em que c é uma constante e m e n são inteiros não-negativos.

Exemplo 7

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6,$$

é uma função polinomial de duas variáveis.

Observação:

Todas os polinômios são funções contínuas!

Função Racional

Uma função racional é a razão de dois polinômios.

Exemplo 8

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2},$$

é uma função racional de duas variáveis.

Observação:

Qualquer função racional é contínua em seu domínio (excluindo os pontos onde há divisão por zero)!

Exemplo 9

Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y).$$

Exemplo 9

Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y).$$

Resposta:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 11.$$

Exemplo 10

Onde a função

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

é contínua?

Exemplo 10

Onde a função

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

é contínua?

Resposta: Em todo seu domínio que corresponde ao conjunto

$$D = \{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Exemplo 11

Onde a função

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é contínua?

Exemplo 11

Onde a função

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é contínua?

Resposta: A função g é contínua em

$$D = \{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\},$$

pois o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ não existe.

Exemplo 12

Onde a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é contínua?

Exemplo 12

Onde a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é contínua?

Resposta: A função f é contínua em todo $\mathbb{R}^2$ pois é uma função racional e limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

Exemplo 13

Onde a função

$$h(x, y) = \arctan(y/x)$$

é contínua?

Exemplo 13

Onde a função

$$h(x, y) = \arctan(y/x)$$

é contínua?

Resposta: Como h é a composta de uma função contínua com uma função racional, ela é contínua em

$$D = \{(x, y) : x \neq 0\},$$

que exclui os pontos onde y/x não está definida.