Aula 5
Regra da Cadeia

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Motivação:

A regra da cadeia é usada para derivar uma função composta. Para funções de uma única variável, se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, tem-se

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},$$

se ambas f e g forem deriváveis. Para funções de duas variáveis, tem-se:

Regra da Cadeia - Caso I

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, em que $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis em t. Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Motivação:

A regra da cadeia é usada para derivar uma função composta. Para funções de uma única variável, se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, tem-se

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},$$

se ambas f e g forem deriváveis. Para funções de duas variáveis, tem-se:

Regra da Cadeia - Caso I

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, em que $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis em t. Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ideia da demonstração:

Vamos denotar $z(t) = f(x(t), y(t))$. Devemos calcular

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}.$$

Agora, uma variação Δt em t, resulta variações:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x(t + \Delta t) - x(t), \\
\Delta y &= y(t + \Delta t) - y(t), \\
\Delta z &= z(t + \Delta t) - z(t).
\end{aligned}$$

Além disso, sendo f diferenciável, temos que

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + E(x, y),$$

em que $\displaystyle \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{E(x, y)}{||(\Delta x, \Delta y)||} = 0.$

Dividindo ambos os lados da equação por Δt, encontramos:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{\Delta t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{E(x,y)}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{E(x,y)}{||(\Delta x, \Delta y)||}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}.\end{aligned}$$

Note que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} = g'(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Similarmente,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} = h'(t) = \frac{dy}{dt}.$$

Assim, como ambos $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$ quando $\Delta t \to 0$, temos

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.\end{aligned}$$

Exemplo 1

Se $z = x^2y + 3xy^4$, em que $x = \operatorname{sen} 2t$ e $y = cost$, determine $\frac{dz}{dt}$ quando $t = 0$.

Exemplo 1

Se $z = x^2y + 3xy^4$, em que $x = \operatorname{sen} 2t$ e $y = cost$, determine $\frac{dz}{dt}$ quando $t = 0$.

Resposta:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = 6.$$

Considere agora a situação $z = f(x, y)$, em que x e y também são funções de duas variáveis s e t, ou seja,

$$x = g(s, t) \quad \text{e} \quad y = h(s, t).$$

Neste caso, s e t são as variáveis **independentes**, x e y são as variáveis **intermediárias** e z é a variável **dependente.**

Regra da Cadeia - Caso II

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, em que $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t. Então,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

são as derivadas parciais de z com respeito a s e t, respectivamente.

Exemplo 2

Se $z = e^x \operatorname{sen} y$, em que $x = st^2$ e $y = s^2 t$, determine $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Exemplo 2

Se $z = e^x \operatorname{sen} y$, em que $x = st^2$ e $y = s^2 t$, determine $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Resposta:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2 t) + 2ste^{st^2} \cos(st^2),$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2ste^{st^2} \operatorname{sen}(s^2 t) + s^2 e^{st^2} \cos(s^2 t).$$

Regra da Cadeia - Caso Geral

No caso mais geral, a variável dependente u é dada por

$$u = f(x_1, \ldots, x_n),$$

em que cada variável intermediária x_j é uma função de m variáveis independentes $t_1, \ldots, t_m$.
Se u e cada x_j, $j = 1, \ldots, n$, são funções diferenciáveis, então a derivada parcial de u com respeito à uma variável independente t_i, para $i \in \{1, \ldots, m\}$, é

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i},$$

ou ainda,

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}.$$

Exemplo 3

Escreva a regra da cadeia para o caso em que $w = f(x, y, z, t)$, com $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ e $t = t(u, v)$.

Exemplo 3

Escreva a regra da cadeia para o caso em que $w = f(x, y, z, t)$, com $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ e $t = t(u, v)$.

Resposta:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u},$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}.$$

Exemplo 4

Se

$$u = x^4 y + y^2 z^3,$$

em que

$$x = rse^t, \quad y = rs^2 e^{-t} \quad \text{e} \quad z = r^2 s \,\text{sen}\, t,$$

determine o valor de $\frac{\partial u}{\partial s}$ quando $r = 2, s = 1$ e $t = 0$.

Exemplo 4

Se

$$u = x^4 y + y^2 z^3,$$

em que

$$x = rse^t, \quad y = rs^2 e^{-t} \quad \text{e} \quad z = r^2 s \operatorname{sen} t,$$

determine o valor de $\frac{\partial u}{\partial s}$ quando $r = 2, s = 1$ e $t = 0$.

Resposta:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192.$$

Exemplo 5

Se $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ e f é diferenciável, mostre que g satisfaz a equação

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Exemplo 6

Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$, expresse

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$,

(b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$,

em termos de derivadas parciais de z com respeito a x ou y.

Exemplo 6

Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$, expresse

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$,

(b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$,

em termos de derivadas parciais de z com respeito a x ou y.

Resposta:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s),$$

e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Derivação Implícita

A regra da cadeia é usada para deduzir o **Teorema da Função Implícita** que fornece condições para os quais $F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ define y implicitamente como uma função de $x_1, \ldots, x_n$. Ela também é usada para calcular a derivada de uma função implícita.

Exemplo 7

Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, em que z seja dado implicitamente como uma função $z = z(x, y)$ por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$.

Exemplo 7

Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, em que z seja dado implicitamente como uma função $z = z(x, y)$ por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$.

Resposta: Pela regra da cadeia, se F e z forem diferenciáveis, então

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Mas $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$. Logo, se $\frac{\partial F}{\partial z} \neq= 0$, isolamos $\frac{\partial z}{\partial x}$ e obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Exemplo 8

Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Exemplo 8

Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Resposta:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}.$$