Aula 10
Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Ideia:

Suponha que desejamos calcular a integral dupla de f sobre uma região D limitada.
Sendo D limitada, ela está contida numa região retangular R.
Definimos a nova função, com domínio R,

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Agora, como R é um retângulo, sabemos como calcular $\iint_R F(x,y)dA$. E mais, como $F(x,y) = 0$ para todo par $(x,y) \notin D$, os pontos que em $R \setminus D$ não contribuem para o valor da integral, ou seja,

$$\iint_R F(x,y)dA = \iint_D f(x,y)dA.$$

Região Plana do Tipo I

Definição 1 (Região Plana do Tipo I)

Uma região D é do tipo I se ela é dada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

em que g_1 e g_2 são funções contínuas em $[a, b]$.

Numa região plana do tipo I, temos que

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)dydx.$$

Agora, sabemos que

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_c^d F(x,y)dy = \int_c^{g_1(x)} 0dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy + \int_{g_2(x)}^{d} 0dy$$
$$= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

Logo,

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)dydx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx.$$

Teorema 2

Se f for uma função contínua em uma região D tal que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

em que g_1 e g_2 são funções contínuas em $[a, b]$, então

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx.$$

Região Plana do Tipo II

Definição 3 (Região Plana do Tipo II)

Uma região D é do tipo II se ela é dada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

em que h_1 e h_2 são funções contínuas em $[c, d]$.

Teorema 4

Se f for uma função contínua em uma região D tal que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

em que h_1 e h_2 são funções contínuas em $[c, d]$, então

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy.$$

Propriedades da Integral Dupla

Suponha que todas as integrais existam, então

$$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA,$$

e

$$\iint_D cf(x,y)dA = c\iint_D f(x,y)dA.$$

Se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, então

$$\iint_D f(x,y)dA \geq \iint_D g(x,y)dA.$$

Se $D = D_1 \cup D_2$, com $\text{int}(D_1) \cap \text{int}(D_2) = \emptyset$, em que $\text{int}(D_1)$ e $\text{int}(D_2)$ denotam o interior de D_1 e D_2, respectivamente, então

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA.$$

Em outras palavras, a equação acima vale se $D = D_1 \cup D_2$ e D_1 e D_2 não se sobrepõem exceto talvez nas fronteiras.

Se integramos a função constante $f(x, y) = 1$, para todo $(x, y) \in D$, obtemos a área de D. Formalmente,

$$A(D) = \iint_D 1 dA.$$

Finalmente, se $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$, então

$$mA(D) \leq \iint_D f(x, y) dA \leq MA(d).$$

As inequações acima são úteis quando desejamos uma estimativa do valor de uma integral dupla.

Exemplo 5

Calcule

$$\iint_D (x + 2y)\,dA,$$

em que D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Exemplo 5

Calcule

$$\iint_D (x + 2y)\,dA,$$

em que D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Resposta:

$$\iint_D (x + 2y)\,dA = \frac{32}{15}.$$

Exemplo 6

Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

Exemplo 6

Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

Resposta:

$$V = -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6}\Big|_0^2 = \frac{216}{35}.$$

Exemplo 7

Calcule

$$\iint_D xy\,dA,$$

em que D é a região limitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

Exemplo 7

Calcule

$$\iint_D xydA,$$

em que D é a região limitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

Resposta:

$$\iint_D xydA = \frac{1}{2}\left(-\frac{y^6}{24} + y^4 + \frac{2y^3}{3} - 4y^2\right)\Bigg|_{-2}^{4} = 36.$$

Exemplo 8

Calcule a integral iterada

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx.$$

Exemplo 8

Calcule a integral iterada

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dydx.$$

Resposta:

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dydx = \int_0^1 \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)\,dxdy = \frac{1}{2}(1 - \cos 1).$$

Exemplo 9

Estime o valor da integral

$$\iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos x}\, dA,$$

em que D é o disco com centro na origem e raio 2.

Exemplo 9

Estime o valor da integral

$$\iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos x}\, dA,$$

em que D é o disco com centro na origem e raio 2.

Resposta:

$$\frac{4\pi}{e} \leq \iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos x}\, dA \leq 4\pi e.$$