Aula 9
Integrais Duplas sobre Retângulos

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Volumes e Integrais Duplas

Considere uma função f de duas variáveis definida sobre um retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [b, c] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

e vamos supor que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$.
Seja S o sólido que está acima da região R no plano xy e abaixo do gráfico de f, isto é,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}.$$

Nosso objetivo será determinar o volume de S.

Estratégia:

1. Dividimos o retângulo em sub-intervalos:

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$$

   em que

$$x_i = a + i\Delta x, \quad \Delta x = (b - a)/m,$$

   e

$$y_j = c + i\Delta y, \quad \Delta y = (d - c)/n.$$

2. Para cada sub-retângulo, calculamos o volume da caixa com R_{ij} e altura $f(x_i, y_j)$.
3. Uma aproximação do volume de S é dada pela soma do volume de todas as caixas:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A,$$

   em que $\Delta A = \Delta x \Delta y$ é a área de um sub-retângulo.

Esperamos obter o volume aumentado o número de sub-retângulos, ou seja, esperamos

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A.$$

Mesmo quando f não é uma função positiva, definimos

Definição 1 (Integral Dupla de Riemann)

A integral dupla de uma função f sobre o retângulo R é

$$\iint_R f(x, y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A,$$

se o limite existir.

Linearidade da Integral

Admitindo que as integrais existem, temos que

$$\iint_R (f(x,y)+g(x,y))\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA,$$

e

$$\iint_R cf(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA.$$

Portanto, a integral é *linear*.
A integral também preserva ordem, ou seja, se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$, então

$$\iint_R f(x,y)\,dA \geq \iint_R g(x,y)\,dA.$$

Definição 2 (Valor Médio)

O valor médio de uma função f de duas variáveis em um retângulo R contido em seu domínio é

$$f_{med} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) dA,$$

em que $A(R)$ é a área de R.

Se $f(x, y) \geq 0$, então

$$A(R) f_{med} = \iint_R f(x, y) dA,$$

que é o volume da caixa com base R e altura f_{med}.

Considere uma função f contínua de duas variáveis com valores não-negativos sobre um retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [b, c] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

O volume do sólido S que está acima de R e abaixo do gráfico de f, pode ser escrito como

$$V = \int_a^b A(x)dx,$$

em que $A(x)$ é a área da secção transversal de S no plano que passa por x perpendicularmente ao eixo x.

Agora, $A(x)$ é também a área debaixo da curva C cuja equação é $z = f(x, y)$ quando x é mantido constante e $c \leq y \leq d$. Portanto,

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy.$$

O procedimento acima é chamado *integração parcial em relação a* y.
Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y)dA = V = \int_a^b A(x)dx \\ = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx \\ = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx.\end{aligned}$$

Usando argumentos semelhantes, concluímos que

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dA = V &= \int_c^d B(y)dy \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

Teorema 3 (Teorema de Fubini)

Se f for uma função contínua no retângulo $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, então

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy.$$

Observação:

Suponto que a integral iterada exista, o teorema de Fubini vale, de um modo mais geral, quando f é limitada em R e tem descontinuidade apenas num número finito de curvas lisas.

No caso especial em que

$$f(x,y) = g(x)h(y) \quad \text{e} \quad R = [a,b] \times [c,d],$$

o teorema de Fubini nos da o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\,dA &= \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y)\,dy \right) dx \\
&= \int_a^b g(x) \left(\int_c^d h(y)\,dy \right) dx \\
&= \left(\int_a^b g(x)\,dx \right) \left(\int_c^d h(y)\,dy \right) \\
&= \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Exemplo 4

Calcule a integral dupla

$$\iint_R (x - 3y^2)\,dA,$$

em que

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}.$$

Exemplo 4

Calcule a integral dupla

$$\iint_R (x - 3y^2)\,dA,$$

em que

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}.$$

Resposta:

$$\iint_R (x - 3y^2)\,dA = -12$$

Exemplo 5

Calcule a integral dupla

$$\iint_R y\,\mathrm{sen}(xy)\,dA,$$

em que

$$R = [1, 2] \times [0, \pi].$$

Exemplo 5

Calcule a integral dupla

$$\iint_R y\,\text{sen}(xy)\,dA,$$

em que

$$R = [1, 2] \times [0, \pi].$$

Resposta:

$$\iint_R y\,\text{sen}(xy)\,dA = 0$$

Exemplo 6

Determine o volume do sólido S que é delimitado pelo paraboloide elíptico

$$x^2 + 2y^2 + z = 16,$$

pelos planos $x = 2$ e $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

Exemplo 6

Determine o volume do sólido S que é delimitado pelo paraboloide elíptico

$$x^2 + 2y^2 + z = 16,$$

pelos planos $x = 2$ e $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

Resposta:

$$V = 48.$$