Aula 7
Valores Máximo e Mínimo (e Pontos de Sela)

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Ponto Crítico

Considere uma função diferenciável f. O plano tangente a superfície dada por $z = f(x, y)$ no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$, com $z_0 = f(x_0, y_0)$, é definido pela equação

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Se o plano tangente é paralelo ao plano (x, y), ou seja, se

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0,$$

então dizemos:

- O ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ é um **ponto estacionário** da superfície;
- O ponto (x_0, y_0), no domínio de f, é um **ponto estacionário** ou **ponto crítico** de f.

Dizemos também que (x_0, y_0) é um ponto crítico de f se uma das derivadas parciais não existir.

Máximo, mínimo e ponto de sela

Os pontos estacionários de uma superfície são geralmente classificados como:

- Máximo - que pode ser interpretado como o topo de uma montanha;
- Mínimo - que pode ser interpretado como o fundo de um vale;
- Ponto de Sela - que pode ser interpretado como uma passagem entre montanhas.

Formalmente, temos as seguintes definições:

Máximo

Definição 1 (Máximo Global e Local)

Uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ tem um **máximo absoluto** ou **máximo global** em **a** se

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}.$$

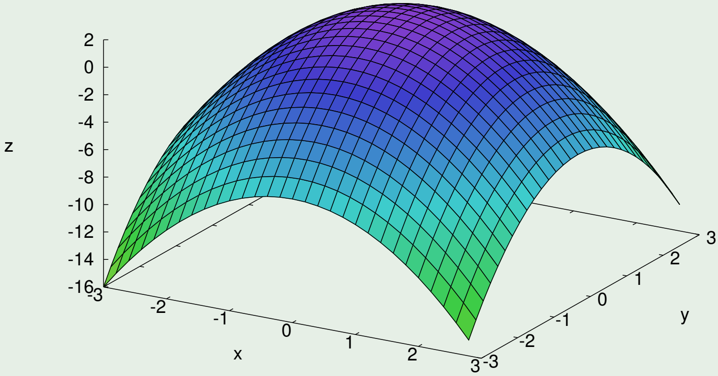
Dizemos **a** é um **máximo relativo** ou **máximo local** de f se

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{x} \text{ próximo de } \mathbf{a}.$$

Exemplo 2

Considere a função

$$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2.$$



Note que $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2 \leq 2 = f(0, 0)$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $(0, 0)$ é um máximo absoluto de f.

Mínimo

Definição 3 (Mínimo Global e Local)

Uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ tem um **mínimo absoluto** ou **mínimo global** em $\mathbf{a}$ se

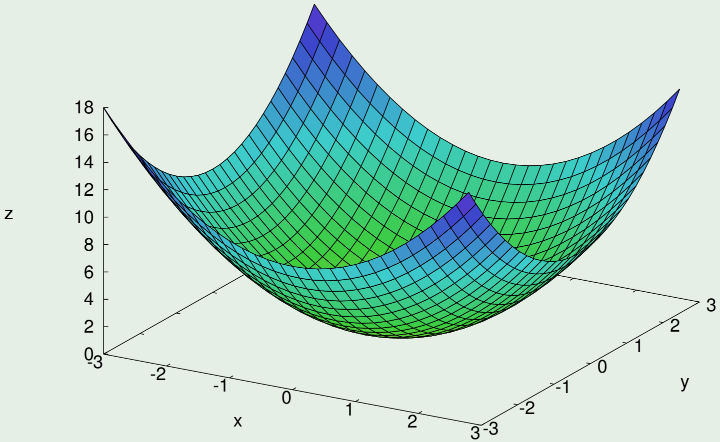
$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}.$$

Dizemos $\mathbf{a}$ é um **mínimo relativo** ou **mínimo local** de f se

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \text{ próximo de } \mathbf{a}.$$

Exemplo 4

Considere a função $f(x, y) = x^2 + y^2$.



Note que $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $(0, 0)$ é um mínimo absoluto de f.

Valor Extremo

Definição 5 (Valor Extremo)

Um número que é um máximo ou um mínimo local é chamado **valor extremo** de f.

Teorema 6

Se f é diferenciável e tem um valor extremo num ponto **a** *no interior de seu domínio, então devemos ter* $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

No entanto, podemos encontrar exemplos no qual $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ mas f não tem valor extremo em **a**.

Ponto de Sela

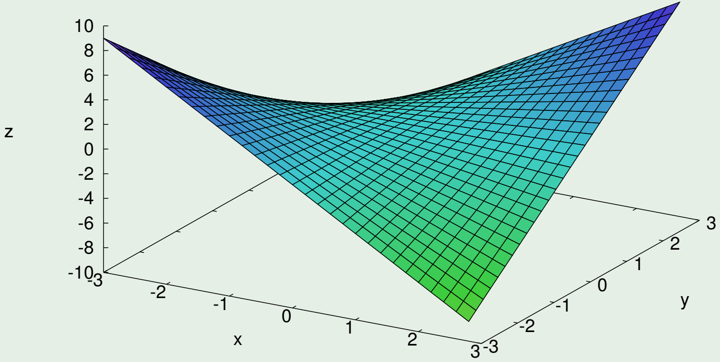
Definição 7 (Pontos de Sela)

Um ponto estacionário $\mathbf{a}$ de uma função diferenciável f é um **ponto de sela** se qualquer bola aberta $\mathcal{B}$ de centro $\mathbf{a}$ contém pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tais que $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{y})$.

O conceito de ponto de sela é análogo à noção de ponto de inflexão para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exemplo 8

Considere a função $f(x,y) = xy$ cujo gráfico é o paraboloide hiperbólico



Observe que o gradiente de f é

$$\nabla f(x,y) = (y,x).$$

Logo, $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Porém, $(0,0)$ não é um extremo de f.

Vamos mostrar que $(0,0)$ é um ponto de sela.

Considere uma bola aberta $\mathcal{B}$ que contém $(0,0)$.

A bola necessariamente contém um ponto (x_1, y_1) no primeiro quadrante e um ponto (x_2, y_2) no segundo quadrante.

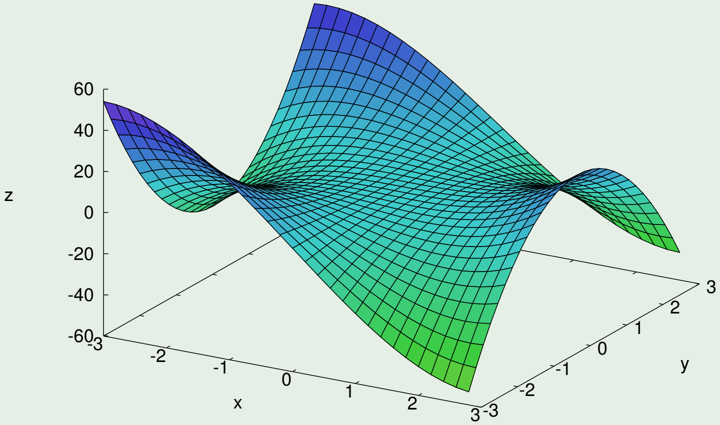
Em outras palavras, (x_1, y_1) são tais que $x_1 > 0$ e $y_1 > 0$. Similarmente, (x_2, y_2) são tais que $x_2 > 0$ e $y_2 < 0$.

Agora,

$$\underbrace{f(x_2, y_2)}_{=x_2 y_2} < \underbrace{f(0,0)}_{=0} < \underbrace{f(x_1, y_1)}_{=x_1 y_1}.$$

Exemplo 9

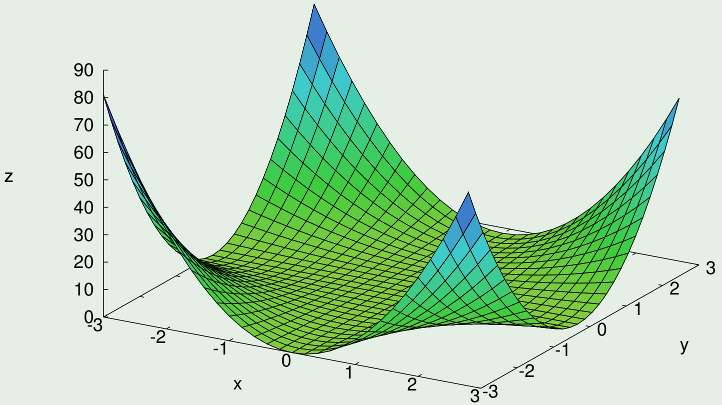
Considere a função $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$, cujo gráfico é



também possui um ponto de sela na origem.

Exemplo 10

Considere a função $f(x,y) = x^2y^2$, cujo gráfico é



possui um mínimo absoluto na origem porque $f(x,y) \geq f(0,0)$ para qualquer (x,y).

Matriz Hessiana

Definição 11 (Matriz Hessiana)

A matriz $n \times n$ com as derivas de segunda ordem de uma função de n variáveis é chamada **matriz Hessiana** e denotada por $H(\mathbf{x})$.

Em outras palavras,

$$H(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} D_{11}f(\mathbf{x}) & D_{12}f(\mathbf{x}) & \dots & D_{1n}f(\mathbf{x}) \\ D_{21}f(\mathbf{x}) & D_{22}f(\mathbf{x}) & \dots & D_{2n}f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}f(\mathbf{x}) & D_{n2}f(\mathbf{x}) & \dots & D_{nn}f(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Exemplo 12

Determine o vetor gradiente e a matriz Hessian da função $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ no ponto $(0, 0)$.

Exemplo 12

Determine o vetor gradiente e a matriz Hessian da função $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ no ponto $(0, 0)$.

Resposta:

$$\nabla f(x, y) = (-2x, -2y) \quad \Longrightarrow \quad \nabla f(0, 0) = (0, 0),$$

e

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Teorema da Hessiana

Teorema 13 (Teorema de Hessiana)

Seja $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *uma função com derivadas de segunda ordem contínuas numa bola aberta que contém um ponto estacionário* $\mathbf{a}$ *de* f*. Nesse caso,*

- *Se todos os auto-valores de* $H(\mathbf{a})$ *são positivos,* f *tem um mínimo relativo em* $\mathbf{a}$*.*
- *Se todos os auto-valores de* $H(\mathbf{a})$ *são negativos,* f *tem um máximo relativo em* $\mathbf{a}$*.*
- *Se* $H(\mathbf{a})$ *tem auto-valores positivos e negativos,* $\mathbf{a}$ *é um ponto de sela de* f*.*

Teste da Segunda Derivada

Teorema 14 (Teste da Segunda Derivada)

Seja $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis com derivadas de segunda ordem contínuas numa bola aberta que contém um ponto estacionário (a, b) de f. Denote o determinante da matriz Hessian em (a, b) por D, ou seja,

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy}^2).$$

Nesse caso, tem-se

- *Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, f tem um mínimo relativo em (a, b).*
- *Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, f tem um máximo relativo em (a, b).*
- *Se $D < 0$, é um ponto de sela de f.*

Exemplo 15

Determine os pontos de máximo e mínimo relativos e os pontos de sela da função

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

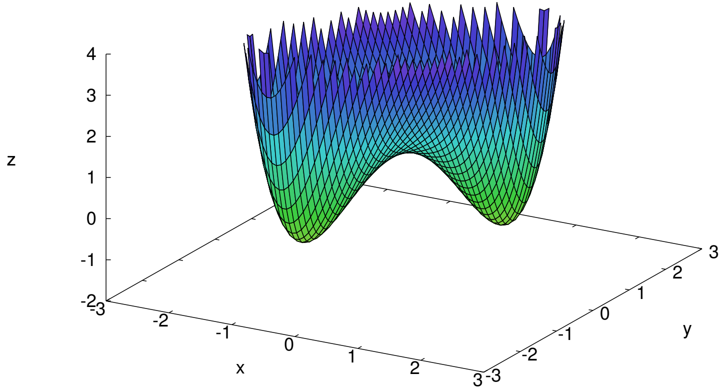
Exemplo 15

Determine os pontos de máximo e mínimo relativos e os pontos de sela da função

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Resposta: Os pontos críticos são: $(0, 0), (1, 1)$ e $(-1, -1)$. Aplicando o teste da segunda derivada, concluímos que $(0, 0)$ é um ponto de sela quanto os outros dois são mínimos relativos.

Gráfico da função $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$:



Exemplo 16

Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x + 2y + z = 4$.

Exemplo 16

Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x + 2y + z = 4$.

Resposta: A menor distância é $\frac{5}{6}\sqrt{6}$.

Teorema do Valor Extremo

Teorema 17 (Teorema do Valor Extremo)

Se f é uma função contínua em um conjunto fechado e limitado $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, então f assume um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em pontos de $\mathcal{D}$.

Observação:

Para determinar os valores extremos de uma função f em um conjunto fechado e limitado $\mathcal{D}$, deve-se:

1. Determinar os valores de f nos pontos críticos de f em $\mathcal{D}$.
2. Determinar os valores extremos de f na fronteira de $\mathcal{D}$.

O maior dos valores nos itens 1 e 2 é o valor máximo absoluto de f e o menor dos itens 1 e 2 é o mínimo absoluto de f.

Exemplo 18

Determine os valores extremos de

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y,$$

no retângulo $\mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

Exemplo 18

Determine os valores extremos de

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y,$$

no retângulo $\mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

Resposta: O valor máximo de f em $\mathcal{D}$ é $f(3, 0) = 9$ e o valor mínimo absoluto de f é $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$.

Gráfico da função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$, no retângulo
$\mathcal{D} = \{(x,y) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}.f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$: