Aula 23
Integrais de Superfície

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Definição 1 (Integral de Superfície de Campos Escalares)

Considere uma superfície lisa S descrita por

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D.$$

A **integral de superfície** de uma função f de três variáveis cujo domínio contém S é

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|dA.$$

Obervação:

Note que a área da superfície é obtida tomando $f(x,y,z) = 1$, ou seja,

$$A(S) = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|dA = \iint_S 1\,dS.$$

Exemplo 2

Calcule a integral de superfície

$$\iint_S x^2 dS,$$

em que S é a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Observação:

Lembre-se que a esfera de raio a é descrita por

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k},$$

e

$$\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| = a^2 \operatorname{sen} \phi.$$

Exemplo 2

Calcule a integral de superfície

$$\iint_S x^2 dS,$$

em que S é a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Observação:

Lembre-se que a esfera de raio a é descrita por

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k},$$

e

$$\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| = a^2 \operatorname{sen} \phi.$$

Resposta:

$$I = \iint_S x^2 dS = \frac{4\pi}{3}.$$

Aplicações de Integrais de Superfície

As integrais de superfície tem aplicações semelhantes àquelas das integrais estudadas anteriormente.

Por exemplo, se uma folha de alumínio tiver a forma de uma superfície S e se a densidade em (x, y, z) for $\rho(x, y, z)$, então a massa total da folha será

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)dS.$$

O centro de massa será o ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tal que

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x, y, z)dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x, y, z)dS$$

e

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x, y, z)dS.$$

Os momentos de inércia também pode ser definidos de forma semelhante.

Uma superfície S dada por $z = g(x, y)$ pode ser escrita como

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + g(x, y)\mathbf{k}.$$

Desse modo,

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + g_x\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + g_y\mathbf{k}.$$

Logo, a integral de f sobre S é

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_S f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}dA.$$

Exemplo 3

Calcule

$$\iint_S y dS,$$

em que S é a superfície $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$.

Exemplo 3

Calcule

$$\iint_S y dS,$$

em que S é a superfície $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$.

Resposta:

$$\iint_S y dS = \frac{13\sqrt{2}}{3}.$$

Se S é a união de n superfícies lisas $S_1, \ldots, S_n$ que se interceptam somente ao longo de suas fronteiras, então

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)dS + \ldots + \iint_{S_n} f(x,y,z)dS.$$

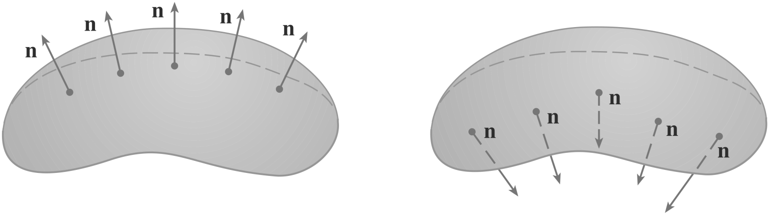
Veja no livro o seguinte exemplo:

Exemplo 4

Calcule $\iint_S zdS$, em que S é a superfície cujo lado S_1 é dado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, o fundo S_2 é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ no plano $z = 0$ e o topo S_3 é a parte do plano $z = 1 + x$ que está acima de S_2.

Superfícies Orientadas

Considere uma superfície S que tenha um plano tangente em qualquer ponto (x, y, z) no interior de S. De um modo geral, dizemos que S é uma **superfície orientada** se for possível escolher um vetor normal unitário $\mathbf{n}$ em cada ponto (x, y, z) de S de modo que $\mathbf{n}$ varie continuamente sobre S.

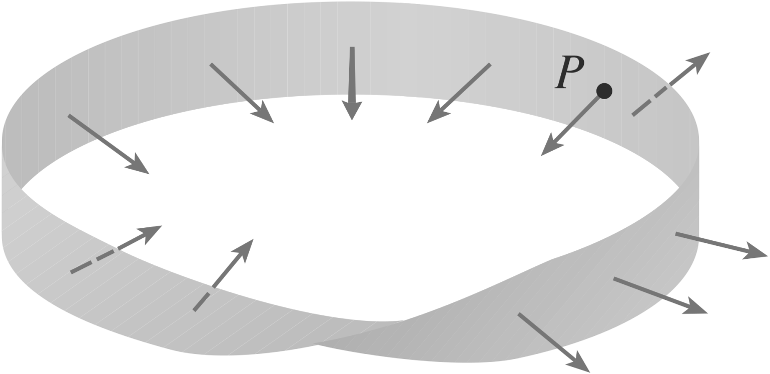


(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Note que existem dois vetores normais unitários $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ a superfície em cada ponto (x, y, z). Portanto, existem duas possíveis orientações para uma superfície orientada.

Exemplo de uma Superfície Não-Orientada

A faixa de Möbius é um exemplo de superfície não-orientada!



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Se S é dada pela equação $z = g(x, y)$, tem-se

$$\mathbf{n} = \frac{-g_x\mathbf{i} - g_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}}.$$

Note que a componente na direção $\mathbf{k}$ é positiva. Portanto, dizemos que a orientação é positiva *para cima* da superfície.

Para uma superfície fechada (como a esfera), a convenção é que a orientação positiva é aquela cujos *vetores normais apontam para fora*.

Integrais de Superfície de Campos Vetoriais

Definição 5 (Integral de Superfície de Campos Vetoriais)

Seja **F** um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com vetor normal unitário **n**. A **integral de superfície de F sobre** S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

A integral acima é também chamada **fluxo** de **F** através de S.

Observação:

Como $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$, podemos escrever

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA.$$

Exemplo 6

Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Exemplo 6

Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resposta:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{3}.$$

Aplicações

Exemplo 7 (Fluxo Elétrico e Carga Elétrica)

Se **E** é um campo elétrico, então $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ é chamada **fluxo elétrico** de **E** através da superfície. A Lei de Gauss diz que a carga total englobada por S é

$$Q = \epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E},$$

em que ϵ_0 é uma constante conhecida como *permissividade no vácuo*.

Exemplo 8

Se o campo vetorial do Exemplo 6 representa um campo elétrico, então a carga envolvida por S é $Q = 4\pi\epsilon_0/3$.

Aplicações

Exemplo 9 (Fluxo de Calor)

Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) seja $u(x, y, z)$. O **fluxo de calor** é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K\nabla u,$$

em que K é uma constante denominada **condutividade.** A **taxa de transmissão de calor** através da superfície S no corpo é dada por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}.$$

Exemplo 10

A temperatura u em uma bola metálica de raio R é proporcional ao quadrado da distância ao centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio $a < R$ e mesmo centro que a bola.

Exemplo 10

A temperatura u em uma bola metálica de raio R é proporcional ao quadrado da distância ao centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio $a < R$ e mesmo centro que a bola.

Resposta: A taxa de transmissão de calor é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -8KC\pi a^3,$$

em que C é a constante de proporcionalidade, ou seja, assumimos que a temperatura é dada por

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2).$$