Aula 24
Teorema de Stokes

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

O teorema de Stokes estabelece uma relação entre uma integral de superfície com uma integral em torno da curva dada pela fronteira da superfície de integração.

Por convenção, dizemos que a curva C dada pela fronteira de uma superfície S tem **orientação positiva** se a superfície estiver sempre a esquerda quando percorremos a curva com a cabeça na direção e sentido do vetor norma **n**.

Teorema de Stokes

Teorema 1 (Teorema de Stokes)

Seja S uma superfície orientada, lisa por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, lisa por partes, com orientação positiva. Seja **F** *um campo vetorial cujas componentes possuem derivadas parciais contínuas em uma região aberta de $\mathbb{R}^3$ que contém S. Nesse caso, tem-se*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S rot\, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Como

$$\oint_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad \text{e} \quad \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

a integral de linha em torno da curva fronteira de S da componente tangencial de **F** é igual à integral de superfície da componente normal do rotacional de **F**.

Teorema de Green $\subseteq$ Teorema de Stokes

Se S é uma superfície plana, pertence ao plano xy, e tem orientação para cima, então o vetor normal unitário é **k**. Neste caso, o teorema de Stokes afirma que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA,$$

que é exatamente a formulação do teorema de Green apresentada no final da Aula 21. Portanto, o teorema de Green é um caso especial do teorema de Stokes!

Veja no livro texto a demonstração do teorema de Stokes para o caso em que a superfície é dada pela equação $z = g(x, y)$.

Exemplo 2

Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, em que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

e C é a curva da intersecção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ (com orientação no sentido anti-horário quando vista por cima).

Exemplo 2

Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, em que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

e C é a curva da intersecção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ (com orientação no sentido anti-horário quando vista por cima).

Resposta: Pelo teorema de Stokes, temos

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot \|\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\theta\| dA = \pi,$$

em que D é o disco $0 \leq \rho \leq 1$ em coordenadas polares e

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = \rho \cos\theta\mathbf{i} + \rho \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + (2 - \rho \operatorname{sen}\theta)\mathbf{k}$$

descreve a superfície S.

Exemplo 3

Calcule a integral $\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, em que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy.

Exemplo 3

Calcule a integral $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, em que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy.

Resposta: Pelo teorema de Stokes, temos

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \big(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(\theta)\big) d\theta = 0,$$

em que $\mathbf{r}(\theta) = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$.

Consequências sobre o Teorema de Stokes

Se S_1 e S_2 são duas superfícies orientadas com a mesma curva fronteira orientada C e ambas satisfazem as hipóteses do teorema de Stokes, então

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Esse fato é útil quando for difícil calcular a integral sobre uma das superfícies, mas for mais fácil integrar sobre a outra!

Consequências sobre o Teorema de Stokes

Vimos na Aula 21 que se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{F}$ é conservativo. Vamos verificar esse resultado!

Sabemos que se $\mathbf{F}$ é conservativo, então $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C. Agora, dado C, considere uma superfície orientada S cuja fronteira é C. Pelo teorema de Stokes, temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} d\mathbf{S} = 0.$$

Interpretação do Rotacional

Suponha que C seja uma curva fechada orientada e $\mathbf{v}$ represente o campo de velocidades de um fluido. Considere a integral

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} ds, \tag{1}$$

em que $\mathbf{T}$ denota o vetor tangente unitário a curva C, ou seja, $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/\|\mathbf{r}\|$. Lembre-se que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ é a componente da velocidade $\mathbf{v}$ na direção do vetor tangente unitário $\mathbf{T}$. E mais, quanto mais próxima a direção de $\mathbf{v}$ está da direção de $\mathbf{T}$, maior é o valor de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$. Assim, a integral em (1) mede a tendência do fluido se mover em torno de C.

Interpretação do Rotacional

Considere agora (x_0, y_0, z_0) um ponto do fluido e seja S_a um pequeno circulo com raio a e centro (x_0, y_0, z_0). Como o rotacional é contínuo, podemos escrever

$$(\text{rot } \mathbf{v})(x, y, z) \approx (\text{rot } \mathbf{v})(x_0, y_0, z_0), \quad \forall (x, y, z) \in S_a.$$

Pelo teorema de Stokes, a circulação em torno do círculo fronteira C_a é aproximadamente

$$\begin{aligned}
\int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \\
&\approx \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v}(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{n}(x_0, y_0, z_0) dS \\
&= \Big(\text{rot } \mathbf{v}(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{n}(x_0, y_0, z_0)\Big) \pi a^2.
\end{aligned}$$

A aproximação se torna melhor quando $a \to 0$. Logo,

$$\text{rot } \mathbf{v}(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{n}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

A equação acima estabelece uma relação entre a circulação e o rotacional. Em palavras, rot $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ mede o efeito da rotação do fluido em torno do eixo $\mathbf{n}$. E mais, o efeito é maior em um eixo paralelo a rot $\mathbf{v}$.