Aula 16
Mudança de Variável em Integrais Múltiplas

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Mudança de Variáveis

Vimos um exemplo de mudança de variáveis quando convertemos o sistema retangular para coordenadas polares. Aqui, as variáveis (x, y) foram transformadas nas variáveis (r, θ). Especificamente, tomamos

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta.$$

e a integral de f sobre uma região R no plano xy tornou-se

$$\iint_R f(x, y)dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)r dr d\theta,$$

em que S é a região no plano $r\theta$ que corresponde à R.

De um modo mais geral, considere uma transformação T do plano uv no plano xy, ou seja,

$$T(u, v) = (x, y).$$

Em outras palavras, temos

$$x = X(u, v) \quad \text{e} \quad y = Y(u, v).$$

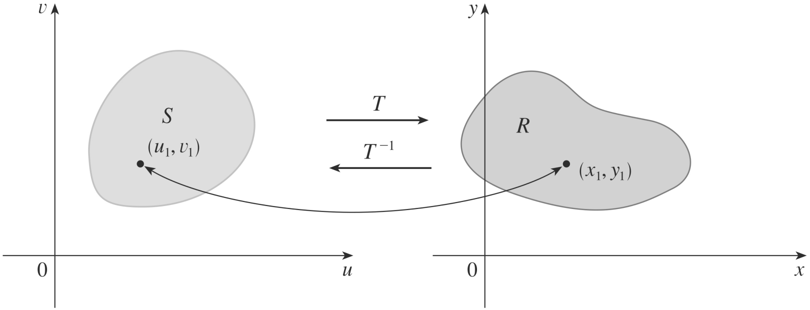
Vamos assumir que T é bijetora, ou seja, admite uma inversa T^{-1} tal que

$$T^{-1}(x, y) = (u, v),$$

ou ainda,

$$u = U(x, y) \quad \text{e} \quad v = V(x, y).$$

Dessa forma, podemos ir e voltar para ambos (u, v) e (x, y).
Em geral, assumimos também que T é uma função classe $\mathcal{C}^1$, ou seja, tem derivadas parciais de primeira ordem contínua.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Exemplo 1

Uma transformação é definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2 \quad \text{e} \quad y = 2uv.$$

Esboce a imagem do quadrado
$S = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$.

Exemplo 1

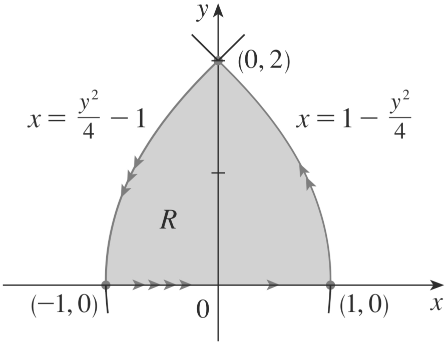
Uma transformação é definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2 \quad \text{e} \quad y = 2uv.$$

Esboce a imagem do quadrado
$S = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$.

Resposta:

A imagem do quadrado é a região limitada pelas parábolas $x = 1 - y^2/2$ e $x = y^2/4 - 1$ no semi-plano $y \geq 0$.
(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)



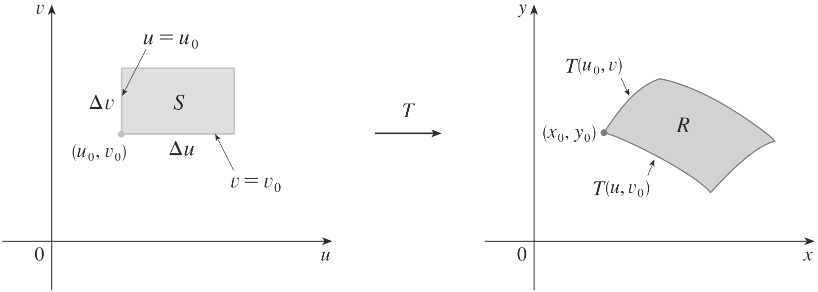
Mudança de variável em integrais duplas

Suponha que desejamos calcular a integral $\iint_R f(x,y)dA$ usando novas variáveis u e v. Para tanto, precisamos escrever dA em termos de du e dv.

Considere um pequeno retângulo

$$S = [u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v]$$

no plano uv. Vamos denotar por $R = T(S)$ a imagem de S.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Nosso objetivo será estimar a área ΔA de R.

Lembrando que

$$T(u,v) = X(u,v)\mathbf{i} + Y(u,v)\mathbf{j},$$

- O vetor tangente a curva $T(u, v_0)$ em $T(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$ é

$$T_u(u_0, v_0) = \frac{\partial X}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial u}\mathbf{j}.$$

- O vetor tangente a curva $T(u_0, v)$ em $T(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$ é

$$T_v(u_0, v_0) = \frac{\partial X}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial v}\mathbf{j}.$$

Agora, podemos aproximar a área de R pelo paralelogramo delimitado pelos vetores $\Delta u T_u(u_0, v_0)$ e $\Delta v T_v(u_0, v_0)$.

Lembrando que área do paralelogramo é dado pela norma do produto vetorial, obtemos

$$|\Delta u T_u(u_0, v_0) \times \Delta v T_v(u_0, v_0)| = |T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)|\Delta u \Delta v,$$

como estimativa da área ΔA de R. Agora, o produto vetorial $T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)$ é dado pelo determinante:

$$T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Devido a importância do determinante acima, temos a definição:

Definição 2 (Jacobiano)

O jacobiano da transformação T dada por

$$x = X(u, v) \quad \text{e} \quad y = Y(u, v),$$

é

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}.$$

Com essa notação, a área ΔA de R é aproximada por:

$$\Delta A \approx |J(u_0, v_0)|\, \Delta u \Delta v.$$

Observe que o jacobiano é calculado no ponto (u_0, v_0).

Definição 2 (Jacobiano)

O jacobiano da transformação T dada por

$$x = X(u, v) \quad \text{e} \quad y = Y(u, v),$$

é

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}.$$

Com essa notação, a área ΔA de R é aproximada por:

$$\Delta A \approx |J(u_0, v_0)|\, \Delta u \Delta v.$$

Observe que o jacobiano é calculado no ponto (u_0, v_0).

Voltando ao problema inicial, suponha que desejamos calcular a integral

$$\iint_R f(x, y) dA,$$

usando as variáveis u e v, com $(u, v) \in S$ e $R = T(S)$.
Primeiro, dividimos S em sub-retângulos S_{ij} e denotamos por $R_{ij} = T(S_{ij})$.
A área de R_{ij} é aproximadamente $|J(u_i, v_j)|\Delta u \Delta v$, em que (u_i, v_j) representam um vértice do sub-retângulo S_{ij}.

Finalmente, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)dA &= \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i,x_j)\Delta A \\
&= \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(X(u_i,v_j),Y(u_i,v_j))|J(u_i,v_j)|\Delta u\Delta v \\
&= \iint_S f(X(u,v),Y(u,v))|J(u,v)|dudv.
\end{aligned}$$

Teorema 3 (Mudança de variáveis em uma integral dupla)

Suponha que T seja uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $T(S) = R$ e $S = T^{-1}(R)$. Suponha também que o jacobiano de T seja não nulo no interior de S. Se f é contínua sobre R, então

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f\big(X(u,v), Y(u,v)\big)|J(u,v)|dudv.$$

Exemplo 4 (Coordenadas Polares)

No sistema de coordenadas polares, temos

$$x = X(r,\theta) = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = Y(r,\theta) = r\,\text{sen}\,\theta.$$

O jacobiano da transformação é

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\,\theta = r.$$

Logo, pelo teorema anterior,

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y)dA &= \iint_S f\big(X(u,v), Y(u,v)\big)|J(u,v)|dudv \\ &= \iint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) r dr d\theta. \end{aligned}$$

Mudança de variáveis em integrais triplas

Seja T uma transformação que leva uma região S do espaço uvw em uma região R do espaço xyz por meio das equações:

$$x = X(u, v, w), \quad y = Y(u, v, w) \quad \text{e} \quad z = Z(u, v, w).$$

Definição 5 (Jacobiano)

O jacobiano da transformação T é

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial w} \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Teorema 6 (Mudança de variáveis em uma integral tripla)

Suponha que T seja uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $T(S) = R$ e $S = T^{-1}(R)$. Suponha também que o jacobiano de T seja não nulo no interior de S. Se f é contínua sobre R, então

$$\iiint_R f(x, y, z)dV$$
$$= \iiint_S f\big(X(u, v, w), Y(u, v, w), Z(u, v, w)\big)|J(u, v, w)|dudvdw.$$

Exemplo 7 (Coordenadas Esféricas)

No sistema de coordenadas esféricas, temos

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad z = \rho\cos\phi.$$

O jacobiano da transformação é

$$\begin{aligned} J(r,\theta,\phi) &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2\operatorname{sen}\phi. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema anterior,

$$\begin{aligned} &\iiint_R f(x,y,z)dV \\ &= \iiint_S f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\operatorname{sen}\phi d\rho d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Exemplo 8

Utilize a mudança de coordenadas $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para calcular a integral $\iint_R y dA$, em que R é a região delimitada pelo eixo x e pelas parábolas $y^2 = 4 - 4x$ e $y^2 = 4 + 4x$, $y \geq 0$ (**Dica:** Use o resultado do Exemplo 1).

Exemplo 8

Utilize a mudança de coordenadas $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para calcular a integral $\iint_R y dA$, em que R é a região delimitada pelo eixo x e pelas parábolas $y^2 = 4 - 4x$ e $y^2 = 4 + 4x$, $y \geq 0$ (**Dica:** Use o resultado do Exemplo 1).

Resposta:

$$\iint_R y dA = \int_0^1 \int_0^1 (2uv)4(u^2 + v^2) du dv = 2.$$

Exemplo 9

Calcule a integral

$$I = \iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA,$$

em que R é a região trapezoidal com vértices $(1,0),(2,0),(0,-2)$ e $(0,-1)$.

Exemplo 9

Calcule a integral

$$I = \iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA,$$

em que R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0), (2, 0), (0, -2)$ e $(0, -1)$.

Resposta:

$$I = \frac{3}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$