Aula 17
Integrais de Linha (com Relação ao Comprimento de Arco)

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Visão Geral:

Uma integral são semelhantes à integral unidimensional mas, em vez de integrar sobre um intervalo $[a, b]$, integramos sobre uma curva C.

As integrais de linha tem papel importante tanto do ponto de vista teórico como prático. Suas aplicações incluem: trabalho, energia potencial, fluxo de calor, mudança de entropia e muitas outras situações em que o comportamento de um campo vetorial ou campo escalar é estudado ao longo de uma curva.

Curvas em $\mathbb{R}^2$

Definição 1 (Curva em $\mathbb{R}^2$)

Descrevemos uma curva C em $\mathbb{R}^2$ através das equações paramétricas

$$x = x(t) \quad \text{e} \quad y = y(t), \quad \text{para} \quad a \leq t \leq b.$$

Alternativamente, podemos descrever C através da equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

Dizemos que C é uma curva lisa se $\mathbf{r}'$, dada por $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$, é contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.

Integral de Linha em $\mathbb{R}^2$

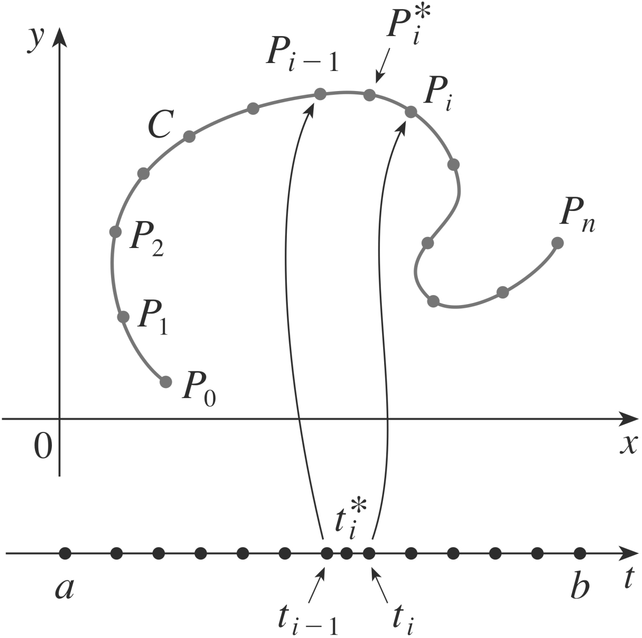
Inicialmente dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de tamanho igual Δt e tomamos $x_i = x(t_i)$ e $y_i = y(t_i)$. Desta forma, os pontos $P_i = (x_i, y_i)$ dividem o caminho C em n subarcos de comprimento $\Delta s_1, \dots, \Delta s_n$.
O comprimento Δs_i do i-ésimo subarco pode ser aproximado pelo comprimento da diferença $\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})$. Se C for uma curva lisa, pelo teorema do valor médio, existe $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\mathbf{r}'(t_i^*)\Delta t = \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}).$$

Portanto,

$$\Delta s_i \approx \|\mathbf{r}'(t_i^*)\|\Delta t.$$

Denotamos por $P_i^* = (x_i^*, y_i^*)$ o ponto no i-ésimo subarco obtido considerando o parâmetro t_i^*.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Integral de Linha em $\mathbb{R}^2$

Definição 2 (Integral de Linha)

Se f é uma função de duas variáveis cujo domínio contém uma curva lisa C, então a **integral de linha de f sobre C** é

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i,$$

se esse limite existir.

Na prática, de $\Delta s_i \approx \|r_i'(t_i)\|\Delta t$, podemos mostrar que:

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y)ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|dt \\ &= \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt.\end{aligned}$$

Curvas em $\mathbb{R}^3$

De um modo similar, temos:

Definição 3 (Curva em $\mathbb{R}^3$)

Descrevemos uma curva C em $\mathbb{R}^3$ através das equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{e} \quad z = z(t), \quad \text{para} \quad a \leq t \leq b.$$

Alternativamente, podemos descrever C através da equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Dizemos que C é uma curva lisa se $\mathbf{r}'$, dada por $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$, é contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.

Integral de Linha em $\mathbb{R}^3$

Definição 4 (Integral de Linha)

Se f é uma função de três variáveis cujo domínio contém uma curva lisa C, então a **integral de linha de f sobre C** é definida

$$\int_C f(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta s_i,$$

se esse limite existir.

Na prática, calculamos

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|dt$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt.$$

Curvas Lisas por Partes

Dizemos que C é uma curva lisa por partes se C é a união de curvas lisas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ em que o ponto inicial de C_{i+1} coincide com o ponto final de C_i. Neste caso, a integral de linha de $f(x, y)$ ao longo de C é dada pela soma de integrais:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \ldots + \int_{C_n} f(x,y)ds.$$

ou, para uma função $f(x, y, z)$ de três variáveis:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{C_1} f(x,y,z)ds + \ldots + \int_{C_n} f(x,y,z)ds.$$

Comprimento da Curva

Observe que a integral de linha

$$\int_C 1\,ds$$

fornece o comprimento da curva C.
As integrais

$$\int_C f(x,y)ds \quad \text{ou} \quad \int_C f(x,y,z)ds,$$

são referidas como **integral de linha com relação ao comprimento do arco.**

Exemplo 5

Calcule $\int_C (2 + x^2 y)\, ds$, em que C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Exemplo 5

Calcule $\int_C (2 + x^2 y)\,ds$, em que C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Resposta:

$$\int_C (2 + x^2 y)\,ds = 2\pi + \frac{2}{3}.$$

Exemplo 6

Calcule $\int_C 2x ds$, em que C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(1,1)$ a $(1,2)$.

Exemplo 6

Calcule $\int_C 2xds$, em que C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(1,1)$ a $(1,2)$.

Resposta:

$$\int_C 2xds = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2.$$