Aula 4
Planos Tangentes e Aproximações Lineares

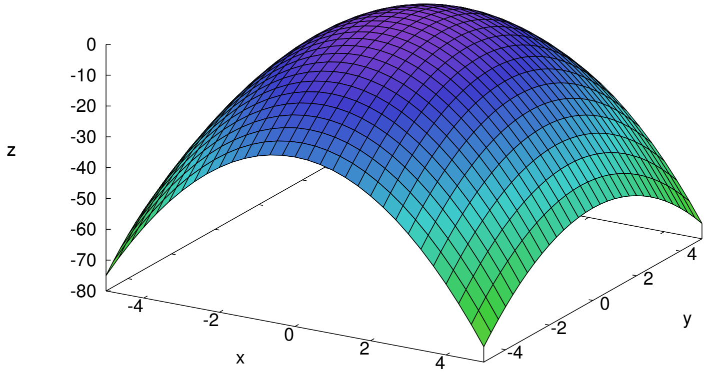
MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

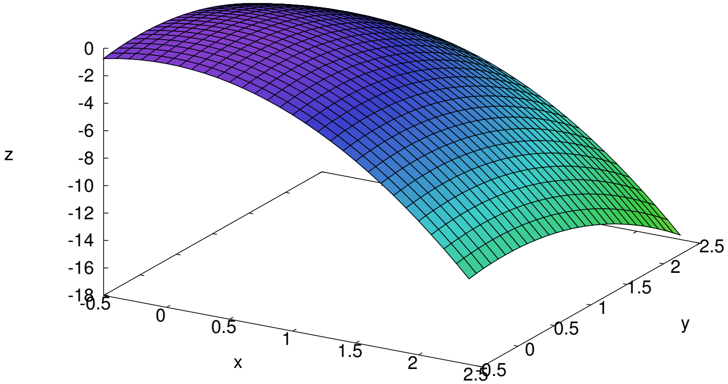
Motivação

Considere o paraboloide elíptico dado por $z = -2x^2 - y^2$.

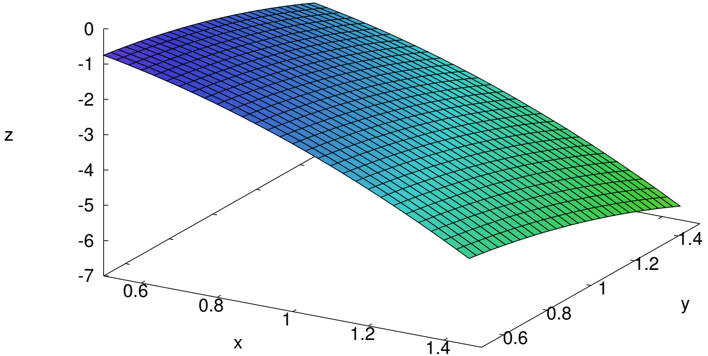


Suponha que desejamos estudar a figura próximo do ponto $P(1, 1, -3)$.

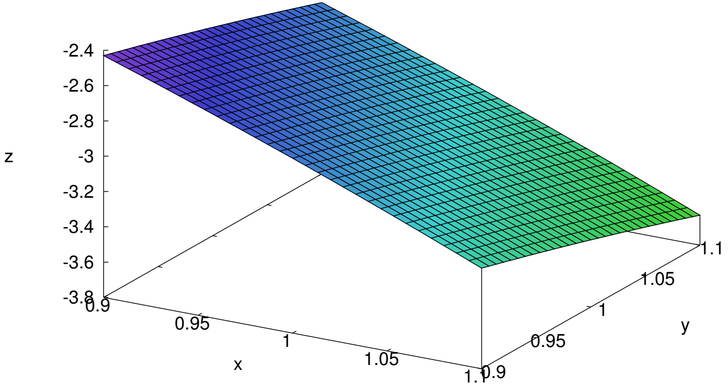
A medida que damos *zoom*, vemos:



A medida que damos mais *zoom*, vemos:



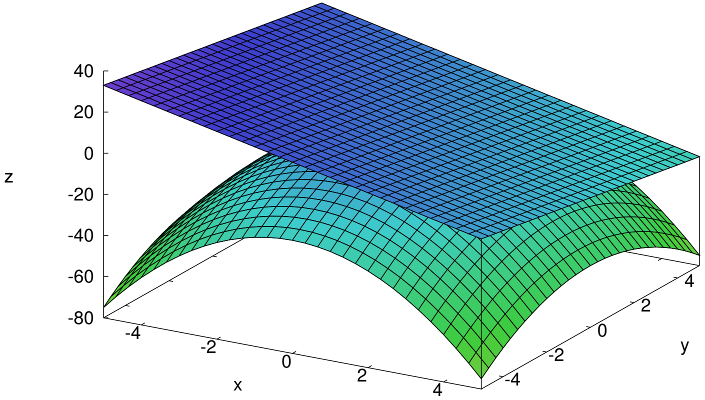
E com mais *zoom* ainda, vemos:



Aparentemente, observamos um plano!

Planos Tangentes

Suponha que a superfície S é dada pelo gráfico de $z = f(x, y)$, em que f tem derivadas parciais f_x e f_y contínuas.
Seja $P = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto em S.



Vamos deduzir a equação do plano tangente a S em P.

A equação de qualquer plano passando por $P = (x_0, y_0, z_0)$ é

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

ou ainda, supondo $C \neq 0$, obtemos

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0). \tag{1}$$

A intersecção do plano tangente com o plano $y = y_0$, fornece

$$z - z_0 = a(x - x_0).$$

Agora, essa reta é também tangente a superfície S ao londo da curva $\mathcal{C}_1$ obtida pela intersecção com o plano $y = y_0$. Logo,

$$a = f_x(x_0, y_0).$$

Analogamente, devemos ter

$$b = f_y(x_0, y_0).$$

Plano Tangente

Suponha que f seja uma função de duas variáveis com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. A equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Linearização e Aproximação Afim

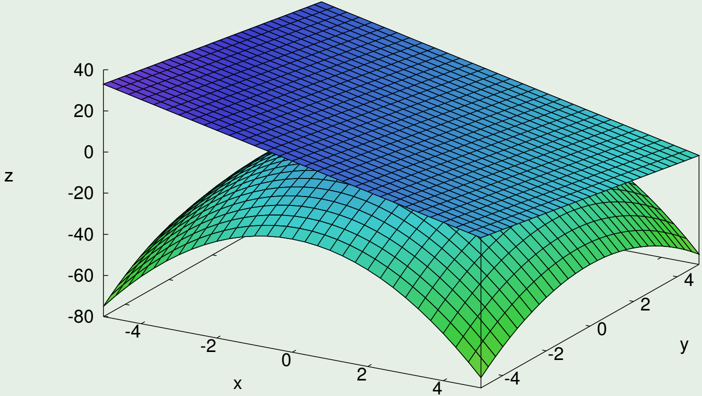
A função afim (transformação linear transladada)

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

é denominada **linearização** de f em (x_0, y_0).
A linearização fornece uma **aproximação afim** de f para pontos (x, y) próximos de (x_0, y_0).

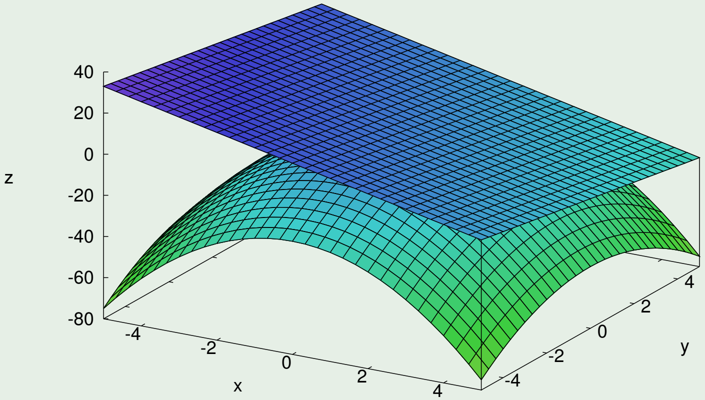
Exemplo 1

Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico $z = -2x^2 - y^2$ no ponto $P = (1, 1, -3)$.



Exemplo 1

Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico $z = -2x^2 - y^2$ no ponto $P = (1, 1, -3)$.

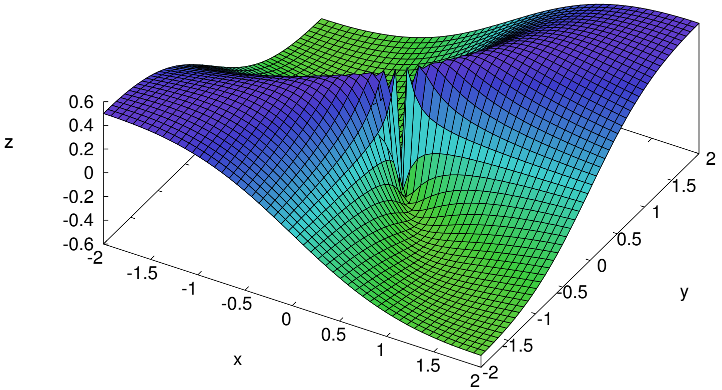


Resposta: A equação do plano tangente é $z = -4x - 2y + 3$.
A linearização é $L(x, y) = -4x - 2y + 3$.

A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

cujo gráfico é



possui derivadas parciais f_x e f_y, mas elas não são contínuas. A equação $z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ não fornece o plano tangente.

Função Diferencial

Uma função f das variáveis x e y é **diferenciável em** (x_0, y_0) se ela pode ser bem aproximada por um plano em pontos próximos de (x_0, y_0). Formalmente, temos:

Definição 2 (Função Diferenciável)

Uma função f é diferenciável em (x_0, y_0) se existem a e b tais que tal que o erro

$$E(x,y) = f(x,y) - \left[f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) \right] L(x,y)),$$

dado pela diferença entre f e uma aproximação afim satisfaz

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0.$$

Teorema 3 (Condição Suficiente para Diferenciabilidade)

Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto de (x_0, y_0) e forem contínuas em (x_0, y_0), então f é diferenciável em (a, b). Nesse caso,

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + E(x, y),$$

com $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{||(x,y)-(x_0,y_0)||} = 0$.

Exemplo 4

Mostre que

$$f(x, y) = xe^{xy},$$

é diferenciável em $(1, 0)$ e determine sua linearização ali. Em seguida, use a linearização para aproximar $f(1.1, -0, 1)$.

Teorema 3 (Condição Suficiente para Diferenciabilidade)

Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto de (x_0, y_0) e forem contínuas em (x_0, y_0), então f é diferenciável em (a, b). Nesse caso,

$$f(x,y) = f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+E(x,y),$$

com $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{||(x,y)-(x_0,y_0)||} = 0$.

Exemplo 4

Mostre que

$$f(x,y) = xe^{xy},$$

é diferenciável em $(1,0)$ e determine sua linearização ali. Em seguida, use a linearização para aproximar $f(1.1, -0,1)$.

Resposta: Verifique que f_x e f_y são funções contínuas. A linearização é $L(x,y) = x + y$ e $L(1.1, -0.1) = 1$. O valor da função é $f(1.1, -0.1) \approx 0.98542$.

Continuidade, Derivadas Parciais e Diferenciabilidade

A existência das derivadas parciais não implica a continuidade da função. A diferenciabilidade, porém, implica continuidade!

Teorema 5

Se f é diferenciável em (x_0, y_0), então f é contínua em (x_0, y_0).

Com efeito, por um lado temos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} E(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} ||(x-x_0, y-y_0)|| \frac{E(x,y)}{||(x-x_0, y-y_0)||} = 0.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} E(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(x-x_0)\\ &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - f(x_0,y_0) = 0.\end{aligned}$$

Logo, f é contínua em (x_0, y_0) pois $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Diferenciais

Suponha que a função f é diferenciável em (x_0, y_0). Defina

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0 \quad \text{e} \quad \Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

A diferenciabilidade pode ser escrita como

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + E(\Delta x, \Delta y),$$

em que $E(\Delta x, \Delta y)$, o erro da aproximação linear de f, satisfaz

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{E(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0.$$

Desprezando o erro $E(\Delta x, \Delta y)$, que será zero quando $\Delta x \equiv dx$ e $\Delta y \equiv dy$ são diferenciais (ou infinitesimais), temos:

Derivada Total

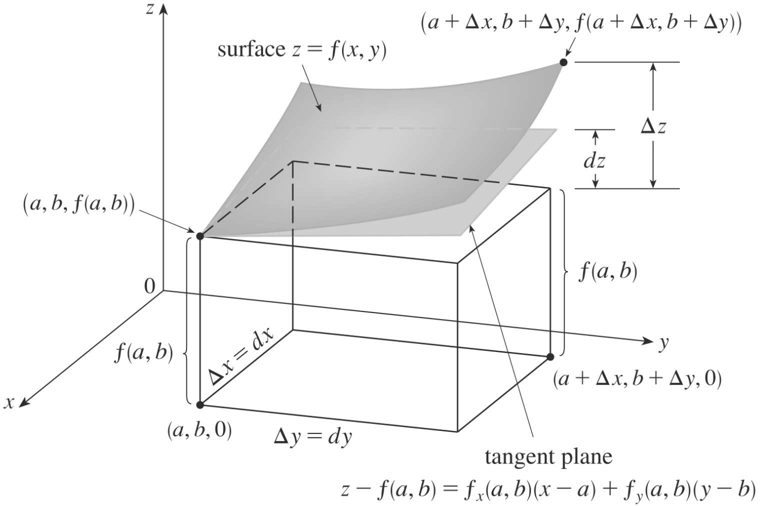
A **diferencial** dz, também chamada **derivada total**, é

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Interpretação Geométrica

Com a notação de diferencial, temos:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + dz.$$



Exemplo 6

a) Se $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine a diferencial dz.

b) Se x varia de 2 a 2.05 e y varia de 3 a 2.96, compare os valores de Δz e dz.

Exemplo 6

a) Se $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine a diferencial dz.

b) Se x varia de 2 a 2.05 e y varia de 3 a 2.96, compare os valores de Δz e dz.

Resposta:

a) $dz = (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy$.

b) Tomando $x_0 = 2$, $dx = \Delta x = 0.05$, $y_0 = 3$, $dy = \Delta y = -0.04$, obtemos

$$dz = [2(2) + 3(3)]0.05 + [3(2) - 2(3)](-0.04) = 0.65.$$

O incremento Δz é

$$\Delta z = f(2.05, 2.96) - f(2, 3) = 0.6449.$$

Observe que $\Delta z \approx dz$, mas dz é mais fácil de ser calculado.

Exemplo 7

Foram feitas medidas do raio da base e da altura de um cone circular reto e obtivemos 10cm e 25cm, respectivamente, com possível erro nessas medidas de, no máximo, 0.1cm. Utilize a diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone.

Exemplo 7

Foram feitas medidas do raio da base e da altura de um cone circular reto e obtivemos 10cm e 25cm, respectivamente, com possível erro nessas medidas de, no máximo, 0.1cm. Utilize a diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone.

Resposta: O volume do cone é dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

A diferencial do volume é

$$dV = \frac{1}{3}\pi(2rhdr + r^2 h).$$

Como cada erro é no máximo 0.1, obtemos

$$dV = \frac{1}{3}\pi(500 \times 0.1 + 100 \times 0.1) = 20\pi \approx 63cm^3,$$

como estimativa do erro do volume.

Funções de três ou mais variáveis

Aproximações lineares, diferenciabilidade e diferenciais são definidas de forma análoga para funções de três ou mais variáveis. Por exemplo:

A linearização de uma função de três variáveis em $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + f_x(\mathbf{x}_0)(x - x_0) + f_y(\mathbf{x}_0)(y - y_0) + f_z(\mathbf{x}_0)(z - z_0),$$

para $\mathbf{x} = (x, y, z)$ suficientemente próximos de $\mathbf{x}_0$.

Se $w = f(x, y, z)$, a diferencial dw é dada por

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

Exemplo 8

As dimensões de uma caixa retangular são medidas como 75cm, 60cm e 40cm, e cada medida foi feita com precisão 0.2cm. Use diferenciais para estimar o maior erro possível quando calcularmos o volume da caixa usando essas medidas.

Exemplo 8

As dimensões de uma caixa retangular são medidas como 75cm, 60cm e 40cm, e cada medida foi feita com precisão 0.2cm. Use diferenciais para estimar o maior erro possível quando calcularmos o volume da caixa usando essas medidas.

Resposta: O volume da caixa é $V = xyz$ e o diferencial é

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = yzdx + xzdy + xydz.$$

Logo,

$$dV \approx (60)(40)(0.2)+(75)(40)(0.2)+(75)(60)(0.2) = 1980cm^3.$$

Embora pareça grande, o erro cometido é apenas 1% do volume da caixa.