Aula 15
Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

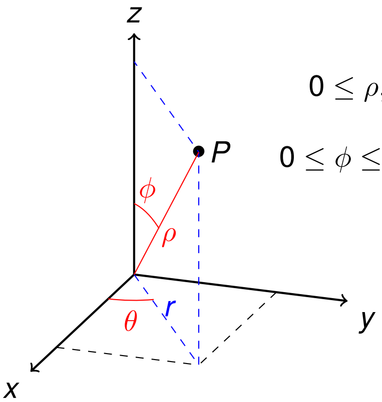
MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Coordenadas Esféricas

No sistema de coordenadas esféricas, um ponto P é representado pela tripla ordenada (ρ, θ, ϕ), em que ρ é a distância da origem O ao ponto P, θ é mesmo ângulo das coordenadas cilíndricas e ϕ é o ângulo entre o eixo z e o seguimento de reta OP.



$$0 \leq \rho,$$

$$0 \leq \phi \leq \pi,$$

Conversão entre sistemas de coordenadas

Esféricas para cartesianas

A conversão de coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) para coordenadas cartesianas (x, y, z) é dada pelas equações

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad \text{e} \quad z = \rho \cos \phi.$$

Cartesianas para esféricas

A conversão de coordenadas cartesianas (x, y, z) para esféricas (ρ, θ, ϕ) é dada através das equações

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{e} \quad \tan \phi = \frac{r}{z},$$

em que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ou $r = \rho \operatorname{sen} \phi$).

Cunha Esférica

Em coordenadas esféricas, uma cunha esférica é dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) : a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\},$$

em que $0 \leq a$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq c$ e $d \leq \pi$.

Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

Suponha que desejamos calcular a integral tripla $\iiint_E f(x,y,z)dV$ em que f é uma função contínua e E é uma cunha esférica.
Primeiramente dividimos E em pequenas cunhas esféricas E_{ijk}, igualmente espaçadas, com volume V_{ijk}.
O volume V_{ijk} pode ser aproximado pelo volume de uma caixa retangular com dimensões

$$\Delta\rho \times \rho_{ijk}\Delta\phi \times \rho_{ijk}\,\mathrm{sen}\,\phi_{ijk}\Delta\theta,$$

pois $\rho_{ijk}\Delta\phi$ representa o arco de circunferência de raio ρ_{ijk} e ângulo $\Delta\phi$ enquanto que $\rho_{ijk}\,\mathrm{sen}\,\phi_{ijk}\Delta\theta$ corresponde ao arco de circunferência de raio $r_{ijk} = \rho_{ijk}\,\mathrm{sen}\,\phi_{ijk}$ e ângulo $\Delta\theta$.

De fato, com o auxílio do Teorema do Valor Médio, pode-se mostrar que

$$V_{ijk} = \rho^*_{ijk} \,\text{sen}\, \phi^*_{ijk} \Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi,$$

em que $(\rho^*_{ijk}, \theta^*_{ijk}, \phi^*_{ijk})$ é um ponto no interior de E_{ijK}.
Finalmente, análogo as integrais triplas, definimos

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta V_{ijk},$$

$$= \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\rho^*_{ijk} \,\text{sen}\, \phi^*_{ijk}\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi,$$

em que (x^*_i, y^*_j, z^*_k) as coordenadas retangulares do ponto $(\rho^*_{ijk}, \theta^*_{ijk}, \phi^*_{ijk})$ no interior de E_{ijK}.

Integrais triplas em coordenadas esféricas

Em resumo, a fórmula para integração tripla em coordenadas esféricas é:

Teorema 1

Seja f é uma função contínua e $E \subseteq \mathbb{R}^3$ a cunha esférica

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) : a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\},$$

em que $0 \leq a$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq c$ e $d \leq \pi$. A integral tripla de f sobre E em coordenadas esféricas é calculada através da equação:

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(x, y, z)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\theta d\phi,$$

com $x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$ e $z = \rho \cos\phi$.

Integrais triplas em coordenadas esféricas

No caso mais geral, tem-se:

Teorema 2

Seja f é uma função contínua e $E \subseteq \mathbb{R}^3$ uma região descrita por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) : \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d, g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi)\},$$

em que $0 \leq g_1(\theta, \phi)$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq c$ e $d \leq \pi$. A integral tripla de f sobre E em coordenadas esféricas é calculada através da equação:

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta,\phi)}^{g_2(\theta,\phi)} f(x, y, z)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\theta d\phi,$$

com $x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$ e $z = \rho\cos\phi$.

Exemplo 3

Calcule

$$I = \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}} dV,$$

em que B é a bola unitária

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Exemplo 3

Calcule

$$I = \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}} dV,$$

em que B é a bola unitária

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Resposta:

$$I = \frac{4}{3}\pi(e - 1).$$

Exemplo 4

Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Exemplo 4

Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Resposta: Em coordenadas esféricas, o sólido é descrito por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq \cos\phi\}.$$

Assim,

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{8}.$$