Aula 11
Integrais Duplas em Coordenadas Polares

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

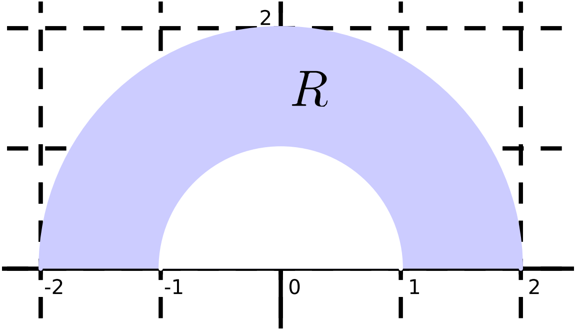
Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 1

Calcule $\iint_R (3x + 4y^2)dA$, em que R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.



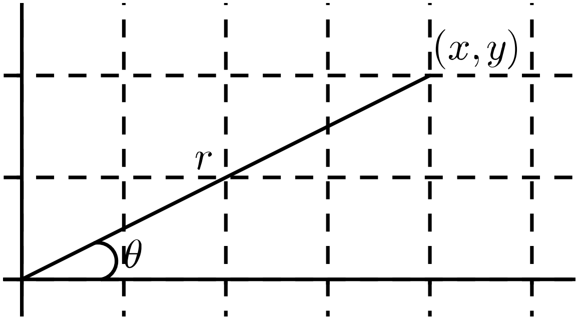
Esta integral é mais fácil de ser calculada usando coordenadas polares!

Coordenadas Polares e o Retângulo Polar

Definição 2 (Coordenads Polares)

As coordenadas polares (r, θ) de um ponto (x, y) satisfazem:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$



Neste caso, a região do Exemplo 1 é tal que

$$R = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\},$$

que é um caso especial de um retângulo polar.

Definição 3 (Retângulo Polar)

Uma região dada por

$$R = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}, \quad 0 \leq a,\ 0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi,$$

é chamada retângulo polar.

Para calcular a integral dupla $\iint_R f(x,y)dA$ usando coordenadas polares, dividimos o intervalo $[a,b]$ em m sub-intervalos de largura igual

$$\Delta r = (b-a)/m.$$

Similarmente, dividimos o intervalo $[\alpha,\beta]$ em n sub-intervalos de larguras iguais

$$\Delta\theta = (\beta-\alpha)/n.$$

Desta forma, dividimos o retângulo polar R em R_{ij} sub-retângulos polares menores dados por

$$R_{ij} = \{(r,\theta) : r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}.$$

Denotamos por

$$r_i^* = \frac{r_{i-1}+r_i}{2} \quad \text{e} \quad \theta_j^* = \frac{\theta_{j-1}+\theta_j}{2},$$

o centro do sub-retângulo R_{ij}.

A área de um sub-retângulo é

$$\begin{aligned}\Delta A_{ij} &= \underbrace{\frac{1}{2}\left(r_i^* + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta}_{\text{setor externo}} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(r_i^* - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta}_{\text{setor interno}} \\ &= \frac{1}{2}\left((r_i^*)^2 + r_i^*\Delta r + \frac{1}{4}\Delta r^2 - (r_i^*)^2 + r_i^*\Delta r - \frac{1}{4}\Delta r^2\right)\Delta\theta \\ &= r_i^*\Delta r\Delta\theta.\end{aligned}$$

Desta forma, a integral dupla é dado pelo seguinte limite da seguinte soma de Riemann:

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\,dA &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)\Delta A_{ij} \\
&= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\theta \\
&= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\,dr\,d\theta.
\end{aligned}$$

Mundança para Coordenadas Polares em Integrais Duplas

Teorema 4 (Integral sobre o retângulo polar)

Se f é contínua no retângulo polar

$$R = \{(r,\theta) : a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}, \quad 0 \le a,\ 0 \le \beta - \alpha \le 2\pi,$$

então

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr d\theta.$$

Exemplo 5

Calcule $\iint_R (3x + 4y^2)dA$, em que R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Exemplo 5

Calcule $\iint_R (3x + 4y^2) dA$, em que R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Resposta:

$$\iint_R (3x + 4y^2) dA = \frac{15\pi}{4}.$$

Mundança para Coordenadas Polares em Integrais Duplas

No caso mais geral, temos

Teorema 6 (Integral sobre uma região mais geral)

Se f é contínua em uma região polar da forma

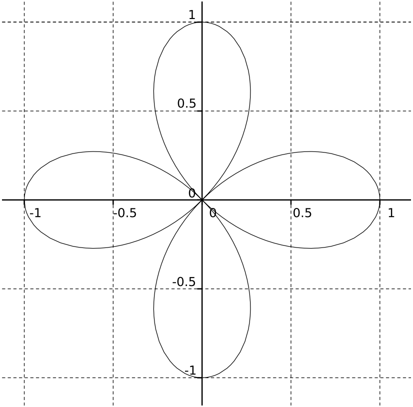
$$R = \{(r,\theta) : \alpha \le \theta \le \beta, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\},$$

com $0 \le h_1(\theta), \forall\theta \in [\alpha,\beta]$ *e* $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$*, então*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,drd\theta.$$

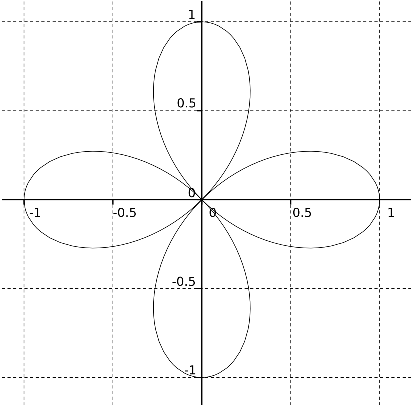
Exemplo 7

Use integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas dada por $r = \cos 2\theta$.



Exemplo 7

Use integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas dada por $r = \cos 2\theta$.



Resposta:

$$\text{Área} = \frac{\pi}{8}.$$

Exemplo 8

Determine o volume do sólido que está sob o paraboloide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

Exemplo 8

Determine o volume do sólido que está sob o paraboloide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

Resposta:

$$V = \frac{3\pi}{2}.$$