Aula 1
Funções de Várias Variáveis

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Diferença entre Cálculo I e Cálculo II:

- **Cálculo I** - Estuda-se funções de uma única variável, i.e.,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

- **Cálculo II** - Estuda-se funções de várias variáveis e campos vetoriais, ou seja,

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Funções de Duas Variáveis

Exemplo 1

A temperatura na superfície da Terra num ponto com longitude x e latitude y é dada por $U(x, y)$, ou seja, é uma função das duas variáveis x e y.

Exemplo 2

O volume V de um cilindro circular é uma função do seu raio r e sua altura h, ou seja,

$$V(r, h) = \pi r^2 h.$$

Exemplo 3 (Função de Produção de Cobb-Douglas)

Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelavam o crescimento da economia norte-americana durante o período de 1899 a 1922. Apesar de existirem muitos fatores que afetam o desempenho da economia, eles assumiram que a produção P depende apenas da quantidade de trabalho L e a quantidade de capital investido K. Especificamente, eles apresentaram a seguinte função

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha},$$

em que b e α são parâmetros fixos. Por exemplo, $b = 1,01$ e $\alpha = 0.75$

Definição 4 (Função de Duas Variáveis)

Uma função de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um domínio D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é chamado **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de todos os valores possíveis de f, ou seja, $\{f(x, y) : (x, y) \in D\}$.

Notação:

Escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícitos os valores tomados por f em (x, y). Nesse caso, x e y representam as **variáveis independentes** e z é a **variável dependente.**

Observação:

Se uma função é dada por uma fórmula e seu domínio não é especificado, fica subentendido que o domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) para os quais a expressão dada está bem definida.

Exemplo 5

O domínio da função f dada por

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$$

é o conjunto

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Exemplo 6

O domínio da função

$$g(x, y) = x \ln(y^2 - x)$$

é o conjunto

$$\{(x, y) : x < y^2\}.$$

Exemplo 7

O domínio da função

$$h(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1},$$

é o conjunto

$$\{(x, y) : x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}.$$

Exemplo 8

O domínio da função de produção de Cobb-Douglas dada por

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha},$$

é o conjunto

$$\{(L, K) : L \geq 0, K \geq 0\},$$

pois L e K representam trabalho e capital, portanto, não podem ser negativos.

Gráficos e Curvas de Níveis

O gráfico e as curvas de níveis são duas formas de visualizar o comportamento de uma função.

Definição 9 (Gráfico)

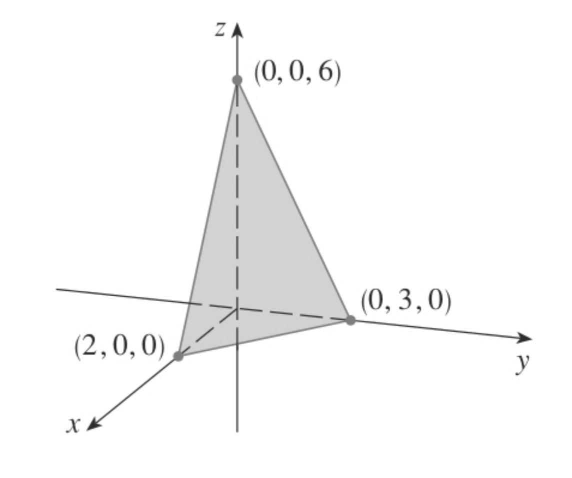
Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o **gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tais que $z = f(x, y)$ com $(x, y) \in D$.

Definição 10 (Curvas de Nível)

As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, em que k é uma constante (na imagem de f).

Exemplo 11

A seguinte figura apresenta o gráfico da função
$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

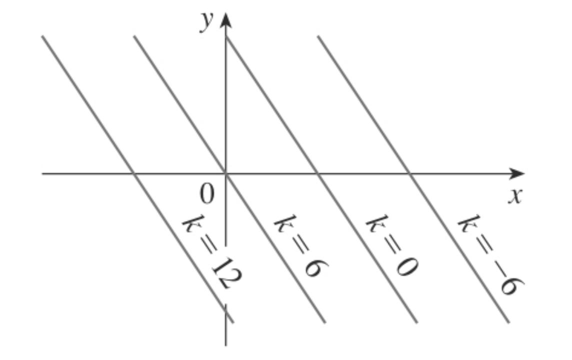


Exemplo 12

As curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para um certo k satisfazem

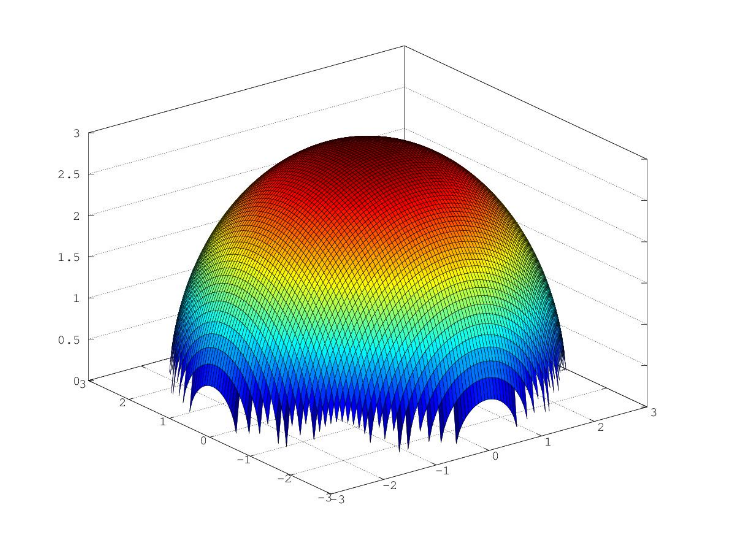
$$6 - 3x - 2y = k \quad \text{ou} \quad 3x + 2y + (k - 6).$$

Em outras palavras, são retas com inclinação $-3/2$. Abaixo estão as curvas de nível para os valores $k = -6, 0, 6$ e $k = 12$.



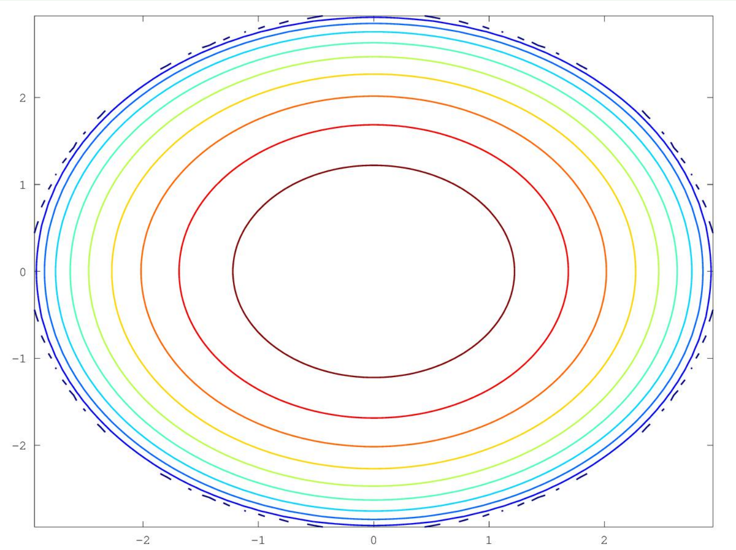
Exemplo 13

A seguinte figura apresenta o gráfico da função $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.



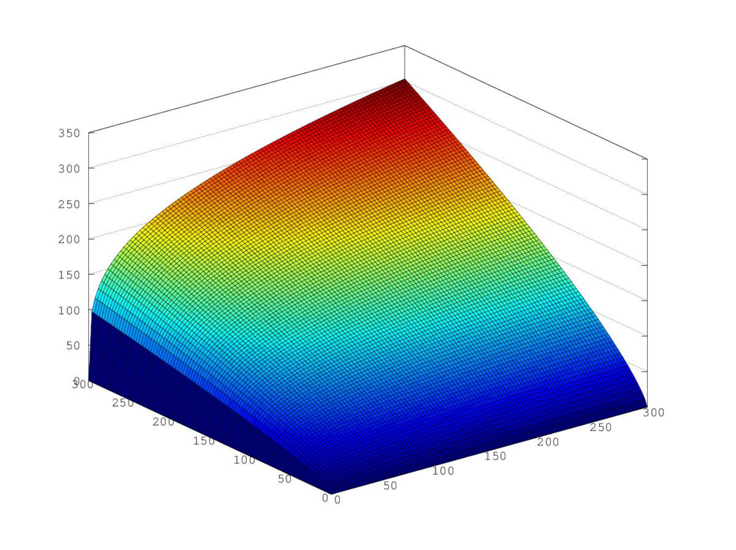
Exemplo 14

A figura abaixo apresenta as curvas de nível da função $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.



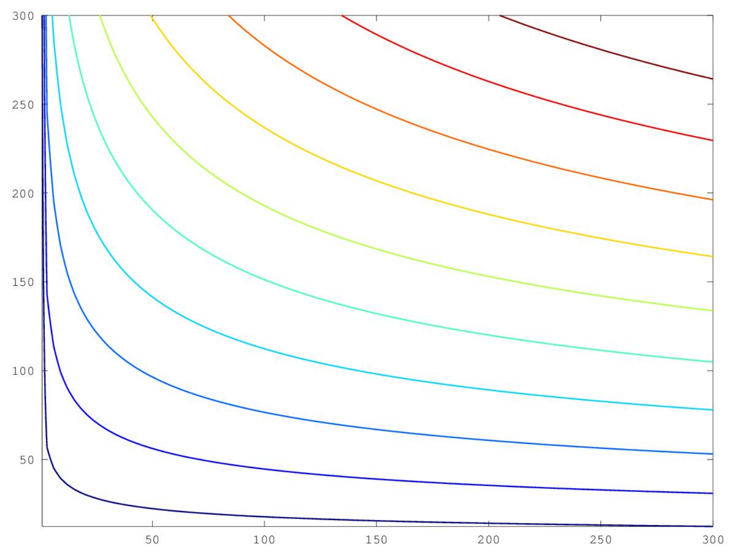
Exemplo 15

Gráfico da função de produção de Cobb-Douglas
$P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$:



Exemplo 16

Curvas de nível da função $P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$:



Funções com Três Variáveis

Uma função com três variáveis associa a cada tripla ordenada $(x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$ um único número real, denotado por $f(x, y, z)$.

Exemplo 17

O domínio da função

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z,$$

é o conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > y\}.$$

É muito difícil visualizar o gráfico de uma função f de três variáveis. Em geral, usa-se o conceito de **superfície de nível**, que generaliza a noção de curva de nível, para visualizar uma função de três variáveis.

Funções com n Variáveis

Uma função com n variáveis associa a cada n-upla ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ um único número real, denotado por $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Exemplo 18

Uma fábrica de alimentos usa n ingredientes para produzir um certo alimento. Se c_i denota o custo unitário do i-ésimo ingrediente e se são necessárias x_i unidades do i-ésimo ingrediente, o custo total da produção do alimento é dada pela função

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n.$$

A função acima é um exemplo de função linear de n variáveis. Alternativamente, podemos escrever

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x},$$

em que $\mathbf{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, $\mathbf{c} = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ e $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ denota o produto escalar dos vetores $\mathbf{c}$ e $\mathbf{x}$.