# Aula 12
# Aplicações de Integrais Duplas

## MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

# Introdução

Já vimos que integrais duplas podem ser usadas para calcular volumes.
Elas também podem ser usadas para determinar a área de uma região plana.
Na aula de hoje, outras aplicações das integrais duplas. Entre elas:

- Densidade de massa;
- Momentos e centro de massa;
- Momento de inércia;
- Probabilidade;
- Valor esperado.

# Densidade de Massa

Suponha que uma lâmina ocupe uma região $D$ do plano $xy$ e que sua **densidade** (em unidades de massa por unidade de área) no ponto $(x, y) \in D$ é $\rho(x, y)$, em que $\rho$ é uma função contínua. Após calcular um limite semelhante ao usado na dedução das integrais duplas, concluímos que a **massa total** $m$ da lâmina é dada por

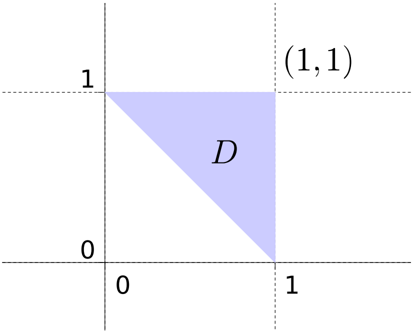
$$m = \iint_D \rho(x, y) dA.$$

De um modo semelhante, podemos considerar que uma carga elétrica está distribuída sobre uma região $D$ e a densidade de carga é dada por $\sigma(x, y)$ em um ponto $(x, y) \in D$. Nesse caso, a **carga total** $Q$ é dada por

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA.$$

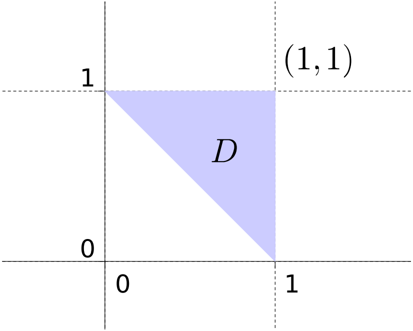
## Exemplo 1

Uma carga está distribuída na região triangular $D$ abaixo de modo que a densidade de carga em $(x, y)$ é $\sigma(x, y) = xy$, medida em coulombs por metro quadrado $(C/m^2)$. Determine a carga total.



## Exemplo 1

Uma carga está distribuída na região triangular $D$ abaixo de modo que a densidade de carga em $(x, y)$ é $\sigma(x, y) = xy$, medida em coulombs por metro quadrado $(C/m^2)$. Determine a carga total.




**Resposta:**

$$Q = \frac{5}{24} C.$$

# Momentos e Centro de Massa

Suponha que uma lâmina ocupe uma região $D$ e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade. O **momento** da lâmina inteira **em relação ao eixo** $x$ é

$$M_x = \iint_D y\rho(x, y)dA.$$

Analogamente, o **momento em relação ao eixo** $y$ é

$$M_y = \iint_D x\rho(x, y)dA.$$

Finalmente, as coordenadas do **centro de massa** $(\bar{x}, \bar{y})$ são

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x, y)dA \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \iint_D y\rho(x, y)dA,$$

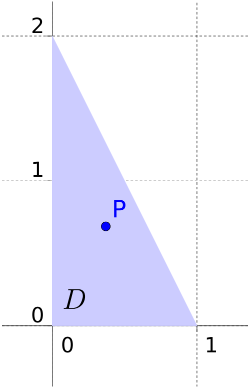
em que a massa $m$ é dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y)dA.$$

O equilíbrio ocorre no centro de massa!

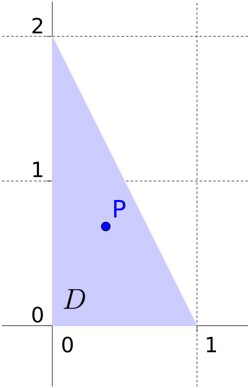
## Exemplo 2

Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade é $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.



## Exemplo 2

Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,2)$, se a função densidade é $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$.




**Resposta:** A massa é $m = \frac{8}{3}$ e o centro de massa é $\left(\frac{3}{8}, \frac{11}{16}\right)$.

# Momento de Inércia

Suponha que uma lâmina ocupe uma região $D$ e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade. O **momento de inércia** da lâmina **em relação ao eixo** $x$ é

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA.$$

Analogamente, o **momento de inércia em relação ao eixo** $y$ é

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA.$$

Finalmente, o **momento de inércia em relação a origem**, também chamado **momento polar de inércia**,

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA.$$

Observe que $I_0 = I_x + I_y$.

Samuel Dixon usa o momento de inércia de uma vara longa para ajuda-lo a manter o equilíbrio enquanto cruza o rio Niagara em 1890.

## Exemplo 3

Determine o momento de inércia $I_x$, $I_y$ e $I_0$ do disco homogêneo $D$ com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio $a$.

## Exemplo 3

Determine o momento de inércia $I_x$, $I_y$ e $I_0$ do disco homogêneo $D$ com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio $a$.

**Resposta:**

$$I_0 = \frac{\pi\rho a^4}{2}, \qquad I_x = I_y = \frac{\pi\rho a^4}{4}.$$

# Probabilidade

Considere um par de variáveis aleatórias $X$ e $Y$. Por exemplo, $X$ e $Y$ podem representar o tempo de vida de dois componentes de uma máquina ou a altura e o peso de um indivíduo.

A **função densidade conjunta** de $X$ e $Y$ é uma função $f$ de duas variáveis tais que a probabilidade de que $(X, Y)$ esteja em uma região $D$ seja

$$P\big[(X, Y) \in D\big] = \iint_D f(x, y)dA.$$

Em particular, a função densidade conjunta satisfaz

$$f(x, y) \geq 0 \quad \text{e} \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dA = 1,$$

em que a integral dupla sobre $\mathbb{R}^2$ é definida em termos das seguintes integrais impróprias:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dA = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy.$$

Suponha que $X$ e $Y$ sejam variáveis aleatórias com funções densidades $f_X$ e $f_Y$, respectivamente. Dizemos que $X$ e $Y$ são **variáveis aleatórias independentes** se a função densidade conjunta for o produto das densidades individuais, ou seja,

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

## Exemplo 4

O gerente de um cinema determina que o tempo médio de espera na fila para pessoas comprarem entrada para o filme da semana seja de 10 minutos e que o tempo médio que levam para comprar pipoca seja de 5 minutos. Supondo que o tempo de espera sejam independentes, determine a probabilidade de um espectador esperar menos de 20 minutos até se dirigir a seu assento.

## Função Densidade Exponencial

O tempo de espera é modelado através da função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu}, & t \geq 0, \end{cases}$$

em que $\mu$ é o tempo médio de espera.

## Exemplo 4

O gerente de um cinema determina que o tempo médio de espera na fila para pessoas comprarem entrada para o filme da semana seja de 10 minutos e que o tempo médio que levam para comprar pipoca seja de 5 minutos. Supondo que o tempo de espera sejam independentes, determine a probabilidade de um espectador esperar menos de 20 minutos até se dirigir a seu assento.

## Função Densidade Exponencial

O tempo de espera é modelado através da função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu}, & t \geq 0, \end{cases}$$

em que $\mu$ é o tempo médio de espera.

**Resposta:** $P\big[X + Y \leq 20\big] = 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476.$

# Valor Esperado

Se $X$ e $Y$ são variáveis aleatórias com função densidade conjunta $f$, definimos a **média** $X$ e a **média** $Y$, também chamados **valores esperados** de $X$ e $Y$, como

$$\mu_X = \iint_{\mathbb{R}^2} xf(x,y)dA \qquad \text{e} \qquad \mu_Y = \iint_{\mathbb{R}^2} yf(x,y)dA.$$

Observe a semelhança das expressões para $\mu_X$ e $\mu_Y$ com os momentos $M_x$ e $M_y$ de uma lâmina com função densidade $\rho$.

## Exemplo 5

Uma fábrica produz rolamentos de forma cilíndrica tais que

- O diâmetro $X$ tem distribuição normal com média $4,0$cm e desvio padrão $0,01$cm,
- O comprimento $Y$ tem distribuição normal com média $6,0$cm e desvio padrão $0,01$cm.

Supondo que $X$ e $Y$ sejam independentes, determine a probabilidade de um rolamento escolhido aleatoriamente da linha de produção ter comprimento ou diâmetro que difiram dos valores médios em mais que $0,02$cm.

## Distribuição Normal

A função densidade de uma variável aleatória com distribuição normal é

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$

em que $\mu$ é sua média e $\sigma$ é seu desvio padrão.

**Resposta:**

A probabilidade que ambos $X$ e $Y$ difiram de seus valores médios por menos de $0,02$cm é

$$\begin{aligned}
&P\left[3,98 \leq X \leq 4,02; 5,98 \leq Y \leq 6,02\right] \\
&= \int_{3,98}^{4,02} \int_{5,98}^{6,02} f(x,y)dydx \\
&= \frac{5000}{\pi} \int_{3,98}^{4,02} \int_{5,98}^{6,02} e^{-5000((x-4)^2+(y-6)^2)}dydx \\
&\approx 0,91.
\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de $X$ ou $Y$ diferir de seu valor médio em mais de $0,02$cm é aproximadamente $1 - 0,91 = 0,09$.

**Obs.:** A integral dupla deve ser estimada numericamente usando um computador.