Aula 26
Revisão dos Principais Teoremas

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Teorema Fundamental para as Integrais de Linha

Seja C uma curva lisa dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Se f é uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C, então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

Campo Vetorial Conservativo

Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é conservativo se $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguma função f.

Teorema de Green

Seja C uma curva lisa simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C. Se P e Q tem derivadas parciais contínuas de primeira ordem sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Teorema de Stokes

Seja S uma superfície orientada, lisa por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, lisa por partes, com orientação positiva. Seja **F** um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de $\mathbb{R}^3$ que contém S. Nesse caso,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Teorema do Divergente

Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E, orientada positivamente (para fora). Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E. Nesse caso,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV.$$

Exemplo 1 (Ex. 16, pp 1049)

Calcule a integral de linha

$$\int_C \sqrt{1+x^3}dx + 2xydy,$$

onde C é o triangulo com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,3)$.

Exemplo 1 (Ex. 16, pp 1049)

Calcule a integral de linha

$$\int_C \sqrt{1+x^3}dx + 2xydy,$$

onde C é o triangulo com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,3)$.

Resposta:

$$\int_C \sqrt{1+x^3}dx + 2xydy = 3.$$

Exemplo 2 (Ex. 29, pp 1050)

Calcule a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k},$$

e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com direção para fora.

Exemplo 2 (Ex. 29, pp 1050)

Calcule a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k},$$

e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com direção para fora.

Resposta:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{64}{3}\pi.$$

Exemplo 3 (Ex. 33, pp 1050)

Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$F(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k},$$

e C é o triangulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, orientado no sentido horário.

Exemplo 3 (Ex. 33, pp 1050)

Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$F(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k},$$

e C é o triangulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, orientado no sentido horário.

Resposta:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{2}.$$