Aula 14
Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

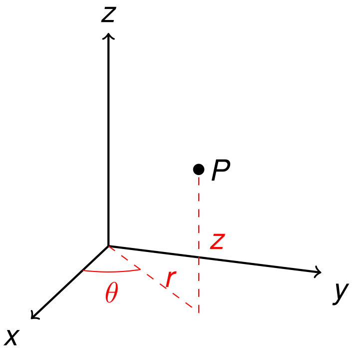
MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Coordenadas Cilíndricas

No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P é representado pela tripla ordenada (r, θ, z), em que r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e z é a distância orientada do plano xy ao ponto P.



Conversão entre sistemas de coordenadas

Cilíndricas para cartesianas

A conversão de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) para coordenadas cartesianas (x, y, z) é dada pelas equações

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{e} \quad z = z.$$

Cartesianas para cilíndricas

A conversão de coordenadas cartesianas (x, y, z) para cilíndricas (r, θ, z) é dada através das equações

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{e} \quad z = z.$$

Exemplo 1

Descreva a superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é $z = r$.

Exemplo 1

Descreva a superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é $z = r$.

Resposta: A superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é $z = r$ é o cone circular cujo eixo é o eixo z.

Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

Suponha que desejamos calcular a integral tripla $\iiint_E f(x,y,z)dV$ em que f é uma função contínua e

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}.$$

Se D pode ser escrito em coordenadas polares como

$$D = \{(r,\theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\},$$

então

$$\begin{aligned}\iiint_E f(x,y,z)dV &= \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dA \\ &= \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\alpha)}^{h_2(\beta)} \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) rdrd\theta.\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula para integração tripla usando coordenadas cilíndricas é dada pelo teorema:

Teorema 2

Seja f é uma função contínua e $E \subseteq \mathbb{R}^3$ uma região do tipo

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

com

$$D = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\},$$

em coordenadas polares. A integral tripla de f sobre E em coordenadas cilíndricas é calculada através da equação:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\alpha)}^{h_2(\beta)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) r dz dr d\theta.$$

Exemplo 3

Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E.

Exemplo 3

Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E.

Resposta: A massa é

$$
\begin{aligned}
m &= \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\,dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 (Kr)r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \frac{12\pi K}{5}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4

Calcule

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dzdydx.$$

Exemplo 4

Calcule
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dzdydx.$$

Resposta: Em coordenadas cilíndricas, temos

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dzdydx = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{r}^{2} r^3\,dzdrd\theta$$
$$= \frac{16\pi}{5}.$$