Aula 3
Derivadas Parciais

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Derivadas Parciais

Definição 1 (Derivada Parcial em **a**)

Considere uma função f que associa $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a um número real $f(\mathbf{x})$. A **derivada parcial** de f em relação a i-ésima variável em $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, é

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h},$$

se o limite existir.

Observação:

Em outras palavras, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ é a derivada usual de f com respeito a i-ésima variável obtida considerando todas as outras variáveis como constantes.

Derivadas Parciais

Definição 2 (Derivada Parcial como uma nova função)

Considere uma função f que associa $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a um número real $f(\mathbf{x})$. A **derivada parcial** de f em relação a i-ésima variável, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, é a função de várias variáveis dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h},$$

nos pontos $\mathbf{x}$ para os quais o limite existe.

Notação:

A derivada parcial de f com respeito a i-ésima variável é também denotada por f_{x_i} ou $D_i f$.

Exemplo 3

Determine as derivadas parciais $f_x(2,1)$ e $f_y(2,1)$ da função

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Exemplo 3

Determine as derivadas parciais $f_x(2,1)$ e $f_y(2,1)$ da função

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Resposta:

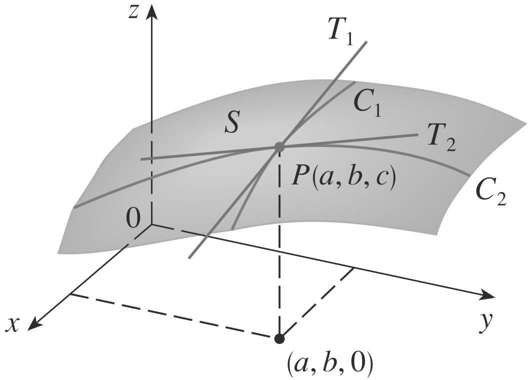
$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3, \quad f_x(2,1) = 16.$$

e

$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y, \quad f_y(2,1) = 8.$$

Interpretação das Derivadas Parciais

Se f é uma função de duas variáveis, os pontos (x, y, z) tais que $z = f(x, y)$ representa uma superfície S em $\mathbb{R}^3$.



As derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ representam as inclinações das retas tangentes à superfície S em $P(a, b, c)$, com $c = f(a, b)$, com os cortes C_1 e C_2 dos planos $y = b$ e $x = a$, respectivamente.

Derivadas Parciais de Ordem Superior

- As derivadas parciais $D_1 f, \dots, D_n f$ de uma função f de n variáveis são também funções de n variáveis.
- As derivadas de $D_1 f, \dots, D_n f$ são chamadas **derivadas de segunda ordem de** f. Por exemplo,

$$D_j(D_i f) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = (f_{x_i})_{x_j} = f_{x_i x_j},$$

  denota a j-ésima derivada parcial de $D_i f$.
- Derivadas de ordem superior são obtidas derivando as derivadas parciais. Por exemplo,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = D_k(D_j(D_i f)) = f_{x_i x_j x_k},$$

  é uma derivada de ordem 3 de f.

Existem 4 derivadas parciais de segunda ordem para funções de duas variáveis:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \text{e} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Exemplo 4

Determine as derivadas parciais de segunda ordem da função

$$f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2.$$

Existem 4 derivadas parciais de segunda ordem para funções de duas variáveis:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \text{e} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Exemplo 4

Determine as derivadas parciais de segunda ordem da função

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Resposta:

$$f_{xx} = 6x + 2y^3,$$
$$f_{xy} = 6xy^2,$$
$$f_{yx} = 6xy^2,$$
$$f_{yy} = 6x^2y - 4.$$

Cuidado!

Podemos ter

$$f_{xy} \neq f_{yx}.$$

Um exemplo é a função

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

em que

$$f_{xy}(0,0) = -1 \quad \text{e} \quad f_{yx}(0,0) = 1.$$

Teorema 5 (Teorema de Clairaut)

Suponha que f seja definida em uma bola aberta B que contenha o ponto (a,b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} são ambas contínuas em B, então

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$

Exemplo 6

Calcule f_{xxyz} se

$$f(x, y, z) = \text{sen}(3x + yz).$$

Observação:

Leia no livro texto as subseções sobre equações diferenciais parciais e a função de produção de Cobb-Douglas.

Exemplo 6

Calcule f_{xxyz} se

$$f(x, y, z) = \text{sen}(3x + yz).$$

Resposta:

$$f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\,\text{sen}(3x + yz).$$

Observação:

Leia no livro texto as subseções sobre equações diferenciais parciais e a função de produção de Cobb-Douglas.

Exemplo 7

Calcule as derivadas parciais de primeira ordem da função

$$f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1+y}\right).$$

Exemplo 7

Calcule as derivadas parciais de primeira ordem da função

$$f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1+y}\right).$$

Resposta:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\left(\frac{1}{1+y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\left(\frac{x}{(1+y)^2}\right).$$

Exemplo 8

Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ se z é definido de forma implícita como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1.$$

Exemplo 8

Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ se z é definido de forma implícita como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1.$$

Resposta:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy},$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}.$$

Exemplo 9

Determine f_x, f_y e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

Exemplo 9

Determine f_x, f_y e f_z se $f(x,y,z) = e^{xy}\ln z$.

Resposta:

$$f_x = ye^{xy}\ln z, \quad f_y = xe^{xy}\ln z \quad \text{e} \quad f_z = \frac{e^{xy}}{z}.$$