Aula 21
Rotacional e Divergente

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

- Rotacional e divergente são duas operações essenciais nas aplicações de cálculo vetorial em mecânica dos fluidos, eletricidade e magnetismo, entre outras áreas.
- Em termos gerais, o rotacional e o divergente lembram a derivada mas produzem, respectivamente, um campo vetorial e um campo escalar.
- Ambas operações são descritas em termos do operador diferencial ∇.

Operador Diferencial e o Vetor Gradiente

Definição 1 (Operador Diferencial)

O operador diferencial é definido como:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Exemplo 2 (Vetor Gradiente)

O vetor gradiente é obtido aplicando o operador diferencial ∇ num campo escalar f, ou seja,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Definição 3 (Rotacional)

Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, então o rotacional de $\mathbf{F}$, denotado por rot $\mathbf{F}$, é o campo vetorial dado pelo produto vetorial do operador diferencial com $\mathbf{F}$, ou seja,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}.$$

Em outras palavras,

$$\begin{aligned}
\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (P, Q, R) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Definição 4 (Divergente)

Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, então o divergente de $\mathbf{F}$, denotado por div $\mathbf{F}$, é o campo escalar dado pelo produto escalar do operador diferencial com $\mathbf{F}$, ou seja,

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Em outras palavras,

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned}$$

Exemplo 5

Determine o rotacional e o divergente de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}.$$

Exemplo 5

Determine o rotacional e o divergente de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}.$$

Resposta: O rotacional é

$$\text{rot } \mathbf{F} = -y(x+2)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}.$$

O divergente é

$$\text{div } \mathbf{F} = z + xz.$$

Teorema 6

Se f é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então o rotacional do gradiente de f é o vetor nulo, ou seja,

$$rot\,(\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Demonstração.

Pelo teorema de Clairaut, temos

$$\begin{aligned}
\text{rot}\,(\nabla f) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} \\
&= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Lembre-se que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo se $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguma função escalar f. Logo,

Coroário 7

Se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo, então $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$*.*

Desse modo, se $\operatorname{rot} \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{F}$ não é um campo vetorial conservativo.

Exemplo 8

O campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k},$$

do Exemplo 5 não é conservativo porque

$$\text{rot } \mathbf{F} = -y(x+2)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k},$$

é diferente do vetor nulo.

A recíproca do Teorema 6 pode ser enunciada da seguinte forma:

Teorema 9

Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ *for um campo vetorial definido sobre todo* $\mathbb{R}^3$ *cujas funções componentes* P, Q *e* R *tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e* $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$*, então* $\mathbf{F}$ *será um campo vetorial conservativo.*

Exemplo 10

a) Mostre que o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 z^3 \mathbf{i} + 2xyz^3 \mathbf{j} + 3xy^2 z^2 \mathbf{k},$$

é conservativo.

b) Determine uma função potencial f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

Exemplo 10

a) Mostre que o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 z^3 \mathbf{i} + 2xyz^3 \mathbf{j} + 3xy^2 z^2 \mathbf{k},$$

é conservativo.

b) Determine uma função potencial f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

Resposta:

a) Como rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ e o domínio de $\mathbf{F}$ é todo $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo.

b) A função

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3 + K,$$

em que K é uma constante, é tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

Teorema 11

Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ *é um campo vetorial sobre* $\mathbb{R}^3$ *e* P, Q *e* R *têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então*

$$\mathit{div}\ \mathit{rot}\ \mathbf{F} = 0.$$

Demonstração.

Pela definição de divergente e rotacional, temos que

$$\begin{aligned}
\text{div rot } \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0
\end{aligned}$$

pelo teorema de Clairaut. $\square$

Exemplo 12

O campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k},$$

do Exemplo 5 não pode ser escrito como o rotacional de outro campo vetorial porque div $\mathbf{F} \neq 0$. Com efeito, se existisse $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$, então div $\mathbf{F} = \text{div } (\text{rot } \mathbf{G}) = 0$.

O divergente do vetor gradiente de uma função de três variáveis f é

$$\text{div}\,(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Definição 13 (Operador e Equação de Laplace)

O operador de Laplace ou laplaciano, denotado por ∇^2, para funções de três variáveis é

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

A equação de Laplace é

$$\nabla^2 f = 0 \quad \text{ou seja} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Formas vetoriais do teorema de Green

O teorema de Green afirma que

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Considerando um campo vetorial $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_C P dx + Q dy.$$

Além disso,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Logo,

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Concluindo, o teorema de Green pode ser escrito na forma vetorial como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA.$$

De forma alternativa, podemos descrever a curva C como

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

O vetor tangente unitário a curva no ponto $(x(t), y(t))$ é

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

E mais, o vetor normal unitário externo a curva C é

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

Por um lado, a integral de linha com relação ao comprimento do arco de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \left(P \frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} - Q \frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \left(P \frac{dy}{dt} - Q \frac{dx}{dt} \right) dt = \int_a^b P dy - Q dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos escrever

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA = \iint_D (\text{div } \mathbf{F}) dA.$$

Desse modo, pelo teorema de Green podemos escrever:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D (\text{div } \mathbf{F}) dA.$$

Concluindo, as duas versões vetoriais do teorema de Green são:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA,$$

e

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D (\text{div } \mathbf{F}) \, dA.$$