Aula 19
Teorema Fundamental das Integrais de Linha

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Motivação

O teorema fundamental do cálculo afirma que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

em que F é uma primitiva de f, ou seja, $F' = f$. Em outras palavras,

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Existem um teorema semelhante para as integrais de linha!

Teorema 1 (Teorema Fundamental das Integrais de Linha)

Seja C uma curva lisa descrita por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é continuo em C. Nesse caso,

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f\big(\mathbf{r}(b)\big) - f\big(\mathbf{r}(a)\big).$$

Campo vetorial conservativo:

Podemos calcular a integral de um campo vetorial conservativo conhecendo $\mathbf{F} = \nabla f$ apenas o valor de f nas extremidades da curva C.

Demonstração:

Suponha que f é uma função de três variáveis. Nesse caso,

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t)dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) dt\end{aligned}$$

Pela regra da cadeia e aplicando o teorema fundamental do cálculo, concluímos que

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

Exemplo 2

Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x},$$

ao mover uma partícula de massa m do ponto $(3, 4, 12)$ para o ponto $(2, 2, 0)$ ao longo de uma linha reta.

Exemplo 2

Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x},$$

ao mover uma partícula de massa m do ponto $(3, 4, 12)$ para o ponto $(2, 2, 0)$ ao longo de uma linha reta.

Resposta: Sabemos que $\mathbf{F}$ é um campo conservativo e $\mathbf{F} = \nabla f$ com

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Pelo teorema fundamental das integrais de linha,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) = mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right).$$

Independência do Caminho

Definição 3 (Independência do caminho)

Dizemos que a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de um campo vetorial $\mathbf{F}$ contínuo em D é **independente do caminho** se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 que tenham os mesmos pontos iniciais e finais.

Corolário 4

A integral de linha de um campo vetorial conversativo $\mathbf{F} = \nabla f$ *é independente do caminho.*

Definição 5 (Curva Fechada)

Uma curva é dita **fechada** se seu ponto final coincide com seu ponto inicial, ou seja, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$.

Teorema 6

A integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *é independente do caminho em* D *se e somente se* $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ *para toda curva fechada* C.

Corolário 7

Se $\mathbf{F}$ *é um campo vetorial conservativo em* D*, então* $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ *para toda curva fechada* C *em* D.

Como saber se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo?

O seguinte teorema, que pode ser visto como a recíproca do Corolário 7, fornece uma resposta para essa pergunta.

Teorema 8

Considere um campo vetorial $\mathbf{F}$ *sobre uma região* ***aberta conexa*** *D. Se* $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ *para qualquer curva fechada C, então* $\mathbf{F}$ *é um campo vetorial conservativo, ou seja, existe f tal que* $\mathbf{F} = \nabla f$.

Veja a demonstração do Teorema 8 no livro texto!

O Teorema 8 infelizmente não fornece uma resposta prática para a pergunta: Como saber se **F** é um campo vetorial conservativo?

Suponha que

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

é um campo vetorial conservativo com P e Q com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Nesse caso, existe f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ e, portanto,

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Pelo teorema de Clairaut, temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Teorema 9

Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ *é um campo vetorial conservativo, em que* P *e* Q *possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio* D*, então em todos os pontos de* D *temos*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

A recíproca do Teorema 9 só é verdadeira para um tipo especial de região.

Definição 10 (Curva Simples)

Dizemos que C é uma curva simples se ela não se autointercepta em nenhum ponto entre as extremidades, ou seja, $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ para todo $a < t_1 < t_2 < b$.

Definição 11 (Região Simplesmente Conexa)

Uma região conexa D é dita simplesmente conexa se toda curva simples fechada em D contorna somente pontos que estão em D.

Intuitivamente, uma região simplesmente conexa não contém buracos nem é constituída por dois pedaços separados.

Teorema 12

Seja $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ *um campo vetorial sobre uma região* D *aberta e simplesmente conexa. Se* P *e* Q *possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas e*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

então $\mathbf{F}$ *é um campo vetorial conservativo.*

Exemplo 13

Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x - 2)\mathbf{j},$$

é ou não conservativo.

Exemplo 13

Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x - 2)\mathbf{j},$$

é ou não conservativo.

Resposta: Pelo Teorema 9, **F** não é conservativo.

Exemplo 14

Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y2)\mathbf{j},$$

é ou não conservativo.

Exemplo 14

Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y2)\mathbf{j},$$

é ou não conservativo.

Resposta: Pelo Teorema 12, **F** é conservativo.

Exemplo 15

a) Se $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, em que C é a curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Exemplo 15

a) Se $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, em que C é a curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Resposta:

a) A função potencial desejada é

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K,$$

em que K é uma constante.

b) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = e^{3\pi} + 1.$

Exemplo 16

Se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\mathbf{j} + 3ye^{3z}\mathbf{k},$$

é um campo vetorial conservativo, determine f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

Exemplo 16

Se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\mathbf{j} + 3ye^{3z}\mathbf{k},$$

é um campo vetorial conservativo, determine f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

Resposta: A função potencial desejada é

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + k,$$

em que k é uma constante.