Aula 20
Teorema de Green

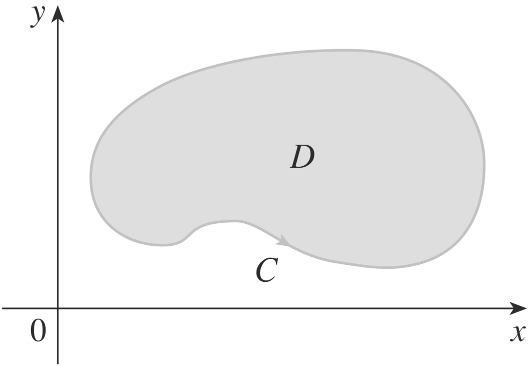
MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

O teorema de Green estabelece uma relação entre uma integral de linha sobre uma curva fechada simples C e uma integral dupla na região D delimitada por C.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Orientação positiva significa que a região fica a esquerda ao percorrermos a curva. No exemplo acima, percorremos a curva C no sentido anti-horário!

Teorema de Green

Teorema 1 (Teorema de Green)

Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente e seja D a região delimitada por C. Se P e Q tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contém D, então

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Notações Alternativas

As notações

$$\oint_C Pd + Qdy \quad \text{e} \quad \ointctrclockwise_C Pd + Qdy,$$

são também usadas para enfatizar que a integral é calculada sobre uma curva fechada C usando a orientação positiva.
A fronteira da região D também pode ser denotada por ∂D.
Usando essa notação, o teorema de Green é enunciado como

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

Ideia da demonstração

Mostraremos que

$$\int_C P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

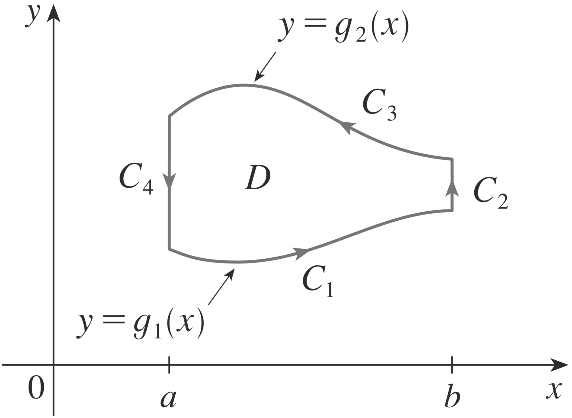
Para tanto, vamos supor que a região D pode ser escrita como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

onde g_1 e g_2 são funções contínuas.
Por um lado, pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b \Big[P\big(x, g_2(x)\big) - P\big(x, g_1(x)\big)\Big] dx.$$

Por outro lado, pode escrever a fronteira C de D como a união dos caminhos C_1, C_2, C_3 e C_4 mostrados abaixo:



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

O caminho C_1 pode ser descrito por

$$\mathbf{r}_1(x) = x\mathbf{i} + g_1(x)\mathbf{j}, \quad a \leq x \leq b.$$

Logo,

$$\int_{C_1} P dx = \int_a^b P\big(x, g_1(x)\big) dx.$$

De um modo similar, $-C_3$ pode ser descrita por

$$\mathbf{r}_3(x) = x\mathbf{i} + g_2(x)\mathbf{j}, \quad a \leq x \leq b.$$

Assim,

$$\int_{C_3} P dx = -\int_{C_3} P dx = -\int_a^b P\big(x, g_2(x)\big) dx.$$

Finalmente, sobre C_2 e C_4, x é constante e, portanto, $dx = 0$. Consequentemente,

$$\int_{C_2} P dx = 0 = \int_{C_4} P dx.$$

Concluindo, a integral de P sobre a curva C com respeito a x é

$$\begin{aligned}
\int_C P dx &= \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx + \int_{C_3} P dx + \int_{C_4} P dx \\
&= \int_a^b P\big(x, g_1(x)\big) dx - \int_a^b P\big(x, g_2(x)\big) dx \\
&= \int_a^b \Big[P\big(x, g_1(x)\big) - P\big(x, g_2(x)\big)\Big] dx \\
&= -\int_a^b \Big[P\big(x, g_2(x)\big) - P\big(x, g_1(x)\big)\Big] dx \\
&= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA.
\end{aligned}$$

De um modo similar, podemos mostrar que

$$\int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA,$$

descrevendo D da seguinte forma:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

onde h_1 e h_2 são funções contínuas.
Finalmente, combinando as equações

$$\int_C P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \quad \text{e} \quad \int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA,$$

concluímos que

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Região Simples

Na demonstração do teorema de Green, assumimos que a região D pode ser escrita tando como

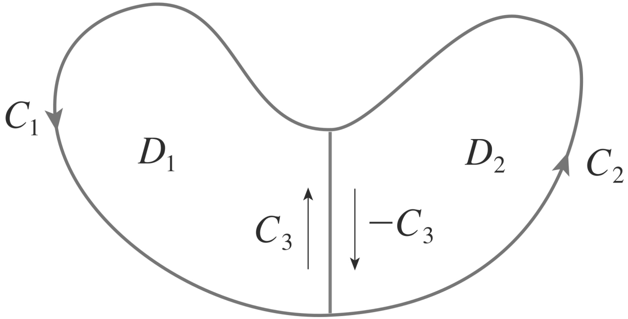
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

como

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

em que g_1, g_2, h_1 e h_2 são todas funções contínuas. Chamamos tais regiões de **regiões simples**.

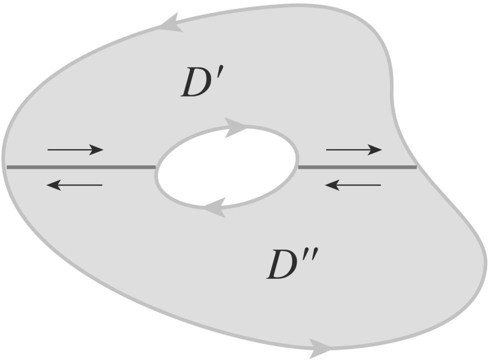
O teorema de Green pode ser estendido para o caso em que D é a união finita de regiões simples.
Um exemplo é mostrado na figura abaixo:



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

A ideia é que as integrais de linha sobre C_3 e $-C_3$ se cancelam.

O teorema de Green também pode ser aplicado para regiões com furo, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas. Um exemplo é mostrado na figura abaixo:



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Novamente, a ideia é que as integrais de linha em curvas percorridas em ambos sentidos se cancelam.
Observe que a região fica sempre a esquerda quando percorremos a fronteira.

Exemplo 2

Calcule

$$\int_C x^4 dx + xydy,$$

em que C é a curva triangular constituída pleos seguimentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

Exemplo 2

Calcule

$$\int_C x^4 dx + xydy,$$

em que C é a curva triangular constituída pleos seguimentos de reta de $(0,0)$ a $(1,0)$, de $(1,0)$ a $(0,1)$ e de $(0,1)$ a $(0,0)$.

Resposta: Pelo teorema de Green,

$$\int_C x^4 dx + xydy = \int_0^1 \int_0^{1-x} ydydx = \frac{1}{6}.$$

Exemplo 3

Calcule

$$\int_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})dy,$$

em que C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

Exemplo 3

Calcule

$$\int_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})dy,$$

em que C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

Resposta: Pelo teorema de Green e usando coordenadas polares, encontramos

$$\begin{aligned}\int_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})dy &= \iint_D 4dA \\ &= 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r dr \\ &= 36\pi.\end{aligned}$$

Área de uma Região

Se P e Q são tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \tag{1}$$

então, pelo teorema de Green, a área de uma região D é dada por

$$A = \iint_D 1 dA = \int_C P dx + Q dy.$$

Exemplos de funções P e Q e que que satisfazem (1), incluem:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 0 \quad \text{e} \quad Q(x,y) = x, \\ P(x,y) &= -y \quad \text{e} \quad Q(x,y) = 0, \\ P(x,y) &= -y/2 \quad \text{e} \quad Q(x,y) = x/2. \end{aligned}$$

Assim, a área de D pode ser obtida por uma das equações:

$$A = \int_C x dy = -\int_C y dx = \frac{1}{2}\int_C x dy - y dx.$$

Exemplo 4

Determine a área delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Exemplo 4

Determine a área delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Resposta: Usando a última fórmula, concluímos que a área da elipse é $A = ab\pi$.

Exemplo 5

Calcule

$$\oint_C y^2 dx + 3xy dy,$$

em que C é a fronteira da região semianular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Exemplo 5

Calcule

$$\oint_C y^2 dx + 3xy dy,$$

em que C é a fronteira da região semianular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Resposta: Usando o teorema de Green e coordenadas polares para calcular a integral dupla, encontramos

$$\oint_C y^2 dx + 3xy dy = \iint_D y dA = \frac{14}{3}.$$

Exemplo 6

Se

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2},$$

mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

Exemplo 6

Se

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2},$$

mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

Resposta: Considere uma curva C e seja C' o círculo de raio a centrado na origem. Pelo teorema de Green, temos

$$\int_C Pdx + Qdy - \int_{C'} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0.$$

Logo, calculando a integral sobre o círculo C', encontramos

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C'} Pdx + Qdy = 2\pi.$$