Aula 22
Superfícies Parametrizadas e Suas Áreas

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Superfícies Parametrizadas

De um modo semelhante à nossa descrição de curvas por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, que depende de um parâmetro t, podemos descrever uma superfície por uma função vetorial $\mathbf{r}(u,v)$ que depende de dois parâmetros u e v. Formalmente, temos:

Definição 1 (Superfície Parametrizada)

O conjunto dos pontos em $\mathbb{R}^3$ que satisfazem

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k},$$

em que $(u,v) \in D$ é denominado **superfície parametrizada** S. As equações

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v) \quad \text{e} \quad z = z(u,v),$$

que define os pontos de S são chamadas **equações paramétricas** de S.

Exemplo 2

Identifique e esboce a superfície com equação vetorial

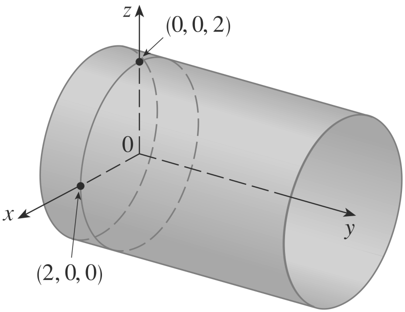
$$\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2\,\mathrm{sen}\,u\mathbf{k}.$$

Exemplo 2

Identifique e esboce a superfície com equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\, u\mathbf{k}.$$

Resposta: A superfície é o cilindro de raio 2 cujo eixo coincide com o eixo y mostrado abaixo:



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Curvas de Grade

Definição 3 (Curvas de Grade)

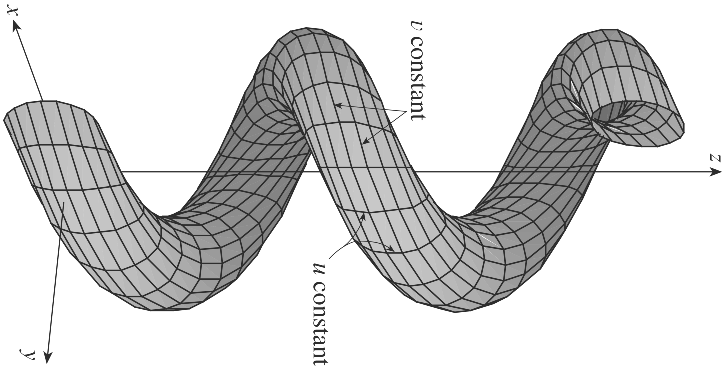
Uma curva de grade é obtida quando um dos parâmetros u ou v é mantido constante. Especificamente, $\mathbf{r}(u_0, v)$ fornece uma família de curvas de grande em que $u = u_0$ é constante. Outra família de curvas de grade é $\mathbf{r}(u, v_0)$, obtida fixando $v = v_0$.

Exemplo 4

As curvas de grade da superfície parametrizada do Exemplo 2 são retas horizontais, obtidas tomando u constante, e circunferências, obtidas considerando v constante.

Exemplo 5

A figura abaixo ilustra uma superfície parametrizada e suas curvas de grade.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Exemplo 6

Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}_0$ e que contenha dois vetores não paralelos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Exemplo 6

Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}_0$ e que contenha dois vetores não paralelos **a** e **b**.

Resposta: A equação vetorial do plano pode ser

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

Além disso, se escrevermos $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, então

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1, \quad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \quad \text{e} \quad z = z_0 + ua_3 + vb_3,$$

são as equações paramétricas do plano.

Exemplo 7

Determine uma representação paramétrica da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Exemplo 7

Determine uma representação paramétrica da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Resposta: Em coordenadas esféricas, temos que

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad \text{e} \quad z = a \cos \phi.$$

Escolhendo ϕ e θ como parâmetros, obtemos a equação vetorial

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}.$$

Exemplo 8

Determine uma representação paramétrica para a superfície $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a metade superior do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Exemplo 8

Determine uma representação paramétrica para a superfície $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a metade superior do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Resposta: Uma representação possível, usando coordenadas cartesianas, é

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}.$$

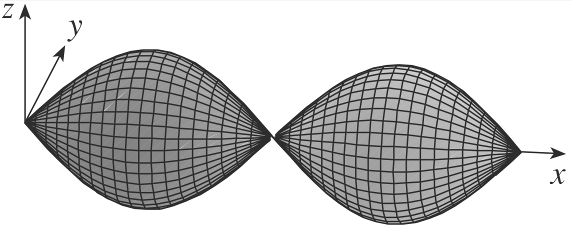
Outra representação paramétrica, obtida usando coordenadas cilíndricas, é dada pela equação

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = \rho \cos \theta \mathbf{i} + \rho \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + 2\rho \mathbf{k}.$$

Superfícies de Revolução

Exemplo 9

Determine as equações paramétricas da superfície gerada pela rotação da curva $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, em torno do eixo x.

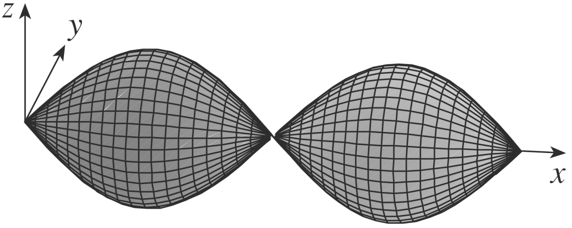


(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Superfícies de Revolução

Exemplo 9

Determine as equações paramétricas da superfície gerada pela rotação da curva $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, em torno do eixo x.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Resposta: As equações paramétricas são:

$$x = x, \quad y = \operatorname{sen} x \cos\theta \quad \text{e} \quad z = \operatorname{sen} x \cos\theta,$$

com $0 \leq x \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Plano Tangente

Considere uma superfície parametrizada S descrita por

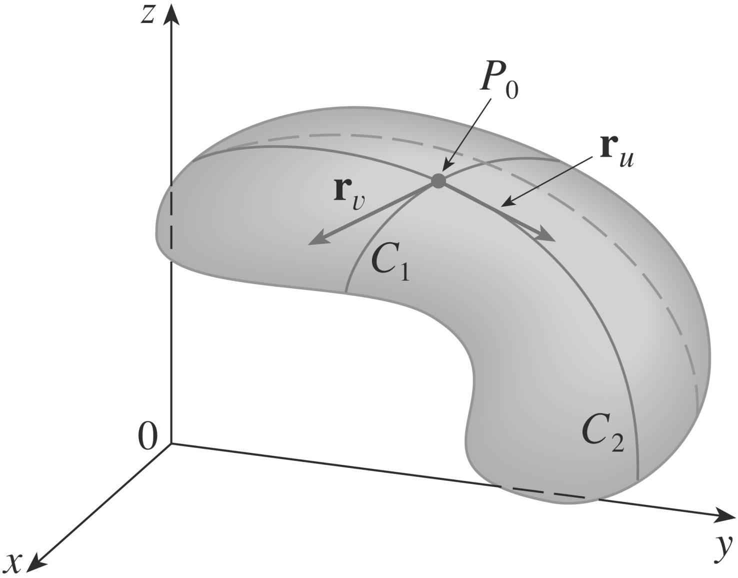
$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}.$$

O vetor tangente a curva de grade C_1, descrita por $\mathbf{r}(u_0, v)$, em um ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ é

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$

De um modo similar, o vetor tangente a curva de grade C_2, obtida tomando $v = v_0$, em P_0 é

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Considere uma superfície parametrizada S descrita por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}.$$

Definição 10 (Superfície Lisa)

Se $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$, então S é dita uma superfície lisa.

Definição 11 (Plano Tangente)

Se S é uma superfície lisa, então o plano tangente a S em P_0, cujo vetor posição é $\mathbf{r}(u_0, v_0)$, é aquele que contém os vetores

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_v(u_0, v_0).$$

O vetor normal ao plano tangente em P_0 é

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0).$$

Exemplo 12

Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = v^2$ e $z = u + 2v$ no ponto $(1, 1, 3)$.

Exemplo 12

Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = v^2$ e $z = u + 2v$ no ponto $(1, 1, 3)$.

Resposta: O plano tangente é

$$x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

Área de Superfície

Definição 13 (Área de Superfície)

Se uma superfície parametrizada lisa S é descrita por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

e S é coberta uma única vez quando (u, v) varre todo o domínio D dos parâmetros, então a **área da superfície** S é

$$A(S) = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA,$$

em que

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Exemplo 14

Determine a área da esfera de raio a.

Exemplo 14

Determine a área da esfera de raio a.

Resposta: A área da esfera de raio a é dada pela integral dupla

$$A = \iint_D \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi d\theta = 4\pi a^2.$$

Área de Superfície do Gráfico de uma Função

O gráfico de uma função f de duas variáveis ($z = f(x, y)$) pode ser descrito por

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}.$$

Sendo

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}.$$

a área de superfície do gráfico de f é:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dA.$$

Exemplo 15

Determine a área da parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

Exemplo 15

Determine a área da parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

Resposta: A área da superfície do paraboloide, usando coordenadas polares, é

$$
\begin{aligned}
A(S) &= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr d\theta \\
&= \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1).
\end{aligned}
$$