Aula 13
Integrais Triplas

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Integral tripla em uma caixa retangular

As integrais triplas são definidas para funções de três variáveis. Inicialmente, vamos supor que f está definida sobre a caixa retangular

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\} \\ &= [a, b] \times [c, d] \times [r, s]. \end{aligned}$$

Análogo a formulação das integrais duplas, dividimos B em sub-caixas de mesma dimensão $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ e da forma

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k],$$

para $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, m$ e $k = 1, \ldots, n$. Aqui,

$$\Delta x = \frac{b-a}{l}, \quad \Delta y = \frac{d-c}{m} \quad \text{e} \quad \Delta z = \frac{s-r}{n},$$

e $x_i = x_{i-1} + \Delta x$, $y_j = y_{j-1} + \Delta y$ e $z_k = z_{k-1} + \Delta z$.

Por analogia com a definição de integral dupla, definimos:

Definição 1 (Integral Tripla numa Caixa)

A integral tripla de f na caixa B é, se o limite existir,

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V,$$

em que $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ é o volume da sub-caixa B_{ijk} e $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \in B_{ijk}$ é um ponto amostral.

O termo, chamado **soma tripla de Riemann**,

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V,$$

fornece uma estimativa para a integral tripla $\iiint_B f(x,y,z)\,dV$.

Teorema 2 (Teorema de Fubini para Integrais Triplas)

Se f for uma função contínua em uma caixa retangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, então

$$\iiint_B f(x, y, z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z)dzdydx.$$

Sobretudo, a integral iterada acima pode ser calculada trocando as ordens de integração de forma apropriada.

Exemplo 3

Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2 dV$, em que B é a caixa retangular dada por

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}.$$

Exemplo 3

Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2 dV$, em que B é a caixa retangular dada por

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}.$$

Resposta:

$$\iiint_B xyz^2 dV = \int_0^1 \int_{-1}^2 \int_0^3 xyz^2 dzdydz = \frac{27}{4}.$$

Integral tripla em regiões mais gerais

Suponha agora que desejamos calcular a integral de f em uma região limita $E \subseteq \mathbb{R}^3$ (um sólido). Análogo ao cálculo de integrais duplas, envolvemos E por uma caixa retangular B e definimos a função $F : B \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in E, \\ 0, & (x, y, z) \in B \setminus E. \end{cases}$$

Desta forma,

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iiint_B F(x, y, z)dV,$$

sendo que, a princípio, sabemos como calcular a integral do lado direito.

Na prática, nos restringimos a regiões do seguinte tipo:

Definição 4 (Região do Tipo 1)

Dizemos que E é uma região do Tipo 1 se

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

Nesse caso, reduzimos a integral tripla numa integral simples seguida de uma integral dupla.

Teorema 5

A integral tripla de uma função f contínua sobre uma região do Tipo I é determinada da seguinte forma:

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dA.$$

Analogamente, temos:

Definição 6 (Região do Tipo 2)

Dizemos que E é uma região do Tipo 2 se

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}.$$

Teorema 7

A integral tripla de uma função f contínua sobre uma região do Tipo 2 é determinada da seguinte forma:

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \left(\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)dx \right) dA.$$

Finalmente, temos também:

Definição 8 (Região do Tipo 3)

Dizemos que E é uma região do Tipo 3 se

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}.$$

Teorema 9

A integral tripla de uma função f contínua sobre uma região do Tipo 3 é determinada da seguinte forma:

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \left(\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)dy \right) dA.$$

Exemplo 10

Calcule $\iiint_E z dV$, em que E é o tetraedro sólido delimitado pelos quatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

Exemplo 10

Calcule $\iiint_E z dV$, em que E é o tetraedro sólido delimitado pelos quatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

Resposta: A região E, vista como uma região do Tipo 1, pode ser escrita como

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y\}.$$

Assim,

$$\iiint_E z dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z dz dy dx = \frac{1}{24}.$$

Aplicações de Integrais Tripas

Cálculo de Volume

Se $E \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma região limitada (sólido), o volume $V(E)$ de E é dado pela integral tripla

$$V(E) = \iiint_E dV.$$

Exemplo 11

Utilize integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

Aplicações de Integrais Tripas

Cálculo de Volume

Se $E \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma região limitada (sólido), o volume $V(E)$ de E é dado pela integral tripla

$$V(E) = \iiint_E dV.$$

Exemplo 11

Utilize integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

Resposta:

$$V(T) = \frac{1}{3}.$$

Aplicações de Integrais Triplas

As aplicações de integrais duplas da Aula 12 podem ser estendidas para integrais triplas. Veja no livro texto como são definidos os conceitos:

- Massa,
- Momentos e centro de massa,
- Momentos de inércia,
- Função densidade conjunta,

definidos usando integrais triplas.

Exemplo 12

Determine o centro de massa de um sólido com densidade constante que é limitado pelo cilindro parabólico $x = y^2$ e pelos planos $x = z$, $z = 0$ e $x = 1$.

Exemplo 12

Determine o centro de massa de um sólido com densidade constante que é limitado pelo cilindro parabólico $x = y^2$ e pelos planos $x = z$, $z = 0$ e $x = 1$.

Resposta: A massa do sólido é:

$$m = \iiint_E \rho dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^x \rho dzdydx = \frac{4\rho}{5}.$$

Os momentos são: $M_{xz} = 0$ devido a simetria do problema,

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^x x\rho dzdydx = \frac{4\rho}{7},$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^x z\rho dzdydx = \frac{2\rho}{7}.$$

Logo, o centro de massa é

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14}\right).$$