Aula 25
Teorema do Divergente

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

O **teorema do divergente**, também chamado **teorema de Gauss**, estabelece uma relação entre a integral (derivada) do divergente de um campo vetorial **F** sobre uma região com a integral de **F** sobre a fronteira da região.

Uma região $E \subseteq \mathbb{R}^3$ é chamada **região sólida simples** se E pode ser escrita simultaneamente como:

$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}, \quad \textbf{(tipo 1)},$$
$$E = \{(x, y, z) : (y, z) \in D_{yz}, v_1(y, z) \leq x \leq v_2(y, z)\}, \quad \textbf{(tipo 2)},$$
$$E = \{(x, y, z) : (x, z) \in D_{xz}, w_1(x, z) \leq y \leq w_2(x, z)\}, \quad \textbf{(tipo 3)}.$$

A fronteira de E é uma superfície fechada e usaremos a convenção de que a orientação positiva é para fora.

Teorema do Divergente

Teorema 1 (Teorema do Divergente)

Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E, orientada positivamente (para fora). Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial cujas componentes tenha derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E. Sob essas hipóteses, tem-se:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E div\, \mathbf{F} dV.$$

Ideia da Demonstração do Teorema do Divergente

Seja $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Vamos mostrar que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV.$$

Por um lado,

$$\iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV.$$

Por outro lado, se $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário para fora de S,

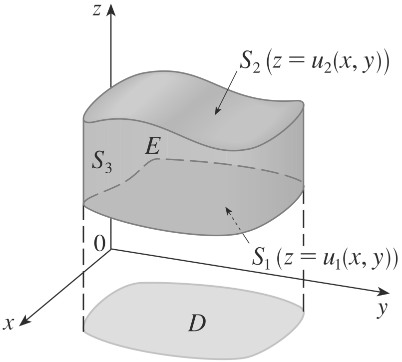
$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_S P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_S Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned}$$

Mostraremos apenas que $\displaystyle\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS.$

Primeiramente, como E é uma região sólida simples, temos

$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

Observe que superfície fronteira S é formada por três partes: o fundo S_1, o topo S_2 e possivelmente a lateral S_3.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Calcularemos a integral $\displaystyle\iint_{S_i} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS$, para $i = 1, 2$ e 3.

Sobre S_3, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$ pois $\mathbf{k}$ é vertical e $\mathbf{n}$ é horizontal. Assim,

$$\iint_{S_3} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

A superfície S_2 (topo) é dada por $z = u_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, e $\mathbf{n}$ aponta para cima. Consequentemente,

$$\iint_{S_2} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D R(x, y, u_2(x, y))\, dA.$$

Analogamente, a superfície S_1 (fundo) é dada por $z = u_1(x, y)$, $(x, y) \in D$, e $\mathbf{n}$ aponta para baixo. Portanto,

$$\iint_{S_1} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = -\iint_D R(x, y, u_1(x, y))\, dA.$$

Logo, por um lado temos

$$\iint_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_{S_1} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS + \iint_{S_2} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS + \iint_{S_3} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS$$
$$= -\iint_D R\big(x,y,u_1(x,y)\big)dA + \iint_D R\big(x,y,u_2(x,y)\big)dA.$$

Por outro lado, pelo teorema fundamental do cálculo temos

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}dV = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) dA$$
$$= \iint_D R\big(x,y,u_2(x,y)\big)dA - \iint_D R\big(x,y,u_1(x,y)\big)dA.$$

Comparando os resultados, concluímos que

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}dV = \iint_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS.$$

De um modo similar, pode-se mostrar que

$$\iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dV = \iint_S P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS,$$

e

$$\iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \iint_S Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Essas últimas equações concluem a demostração do teorema do divergente!

Exemplo 2

Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ sobre a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Exemplo 2

Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ sobre a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resposta: Pelo teorema do divergente, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV = \iiint_E 1 dV = \frac{3}{4}\pi.$$

Exemplo 3

Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ em que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2})\mathbf{j} + \text{sen}(xy)\mathbf{k},$$

e S é a superfície da região E limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$.

Exemplo 3

Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ em que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2})\mathbf{j} + \text{sen}(xy)\mathbf{k},$$

e S é a superfície da região E limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$.

Resposta: Pelo teorema do divergente, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{0}^{2-z} 3y dy dz dx = \frac{184}{35}.$$

O teorema do divergente vale quando E é a união de regiões sólidas simples!

Por exemplo, suponha que E é uma região solida entre duas superfícies S_1 e S_2, onde S_1 está dentro de S_2. Sejam $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ os vetores normais (unitários) apontando para foram de S_1 e S_2, respectivamente. A superfície fronteira de S é $S = S_1 \cup S_2$ e sua normal $\mathbf{n}$ é dada por $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ sobre S_1 e $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ sobre S_2. Pelo teorema do divergente, temos

$$\begin{aligned}\iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1) dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 dS \\ &= \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 dS - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{n}_1) dS.\end{aligned}$$

Exemplo 4

Determine o fluxo elétrico **E**, dado por $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \dfrac{\epsilon Q}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}$, sobre uma superfície fechada S que contém a origem.

Dica: Pode-se verificar que div $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ para qualquer $\mathbf{x}$.

Exemplo 4

Determine o fluxo elétrico **E**, dado por $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \dfrac{\epsilon Q}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}$, sobre uma superfície fechada S que contém a origem.
Dica: Pode-se verificar que div $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ para qualquer **x**.

Resposta: Considere uma esfera S_a, com centro na origem e raio a suficientemente pequeno tal que S_a está dentro de S. Assim,

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{n}_a) dS.$$

Porém, div $\mathbf{E} = 0$ e $\displaystyle\iint_{S_a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_a dS = 4\pi\epsilon Q$.

Portanto,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi\epsilon Q,$$

para qualquer superfície fechada S que contém a origem.

Interpretação do Divergente

Seja $\mathbf{v}$ um campo de velocidades de um fluido com densidade constante ρ. A vazão do fluido por unidade de área é $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$. Se (x_0, y_0, z_0) é um ponto no fluido e B_a é uma bola de raio a (pequeno) e centro em P_0, então
div $\mathbf{F}(x, y, z) \approx$ div $\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)$ para todo $(x, y, z) \in B_a$. Assim, o fluxo na fronteira S_a da bola B_a é

$$\begin{aligned}\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F} dV \approx \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) dV \\ = \operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) V(B_a),\end{aligned}$$

em que $V(B_a)$ denota o volume de B_a.

Tomando $a \to 0$, temos

$$\text{div } \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Portanto, div $\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)$ é a vazão total por unidade de volume que sai de (x_0, y_0, z_0).

- Se div $\mathbf{F}(x, y, z) > 0$, o escoamento total perto de (x, y, z) é para fora de (x, y, z). Nesse caso, (x, y, z) é chamado **fonte.**
- Se div $\mathbf{F}(x, y, z) < 0$, o escoamento total perto de (x, y, z) é para dentro e (x, y, z) é chamado **sorvedouro.**