Exploración en profundidad, o *DFS*

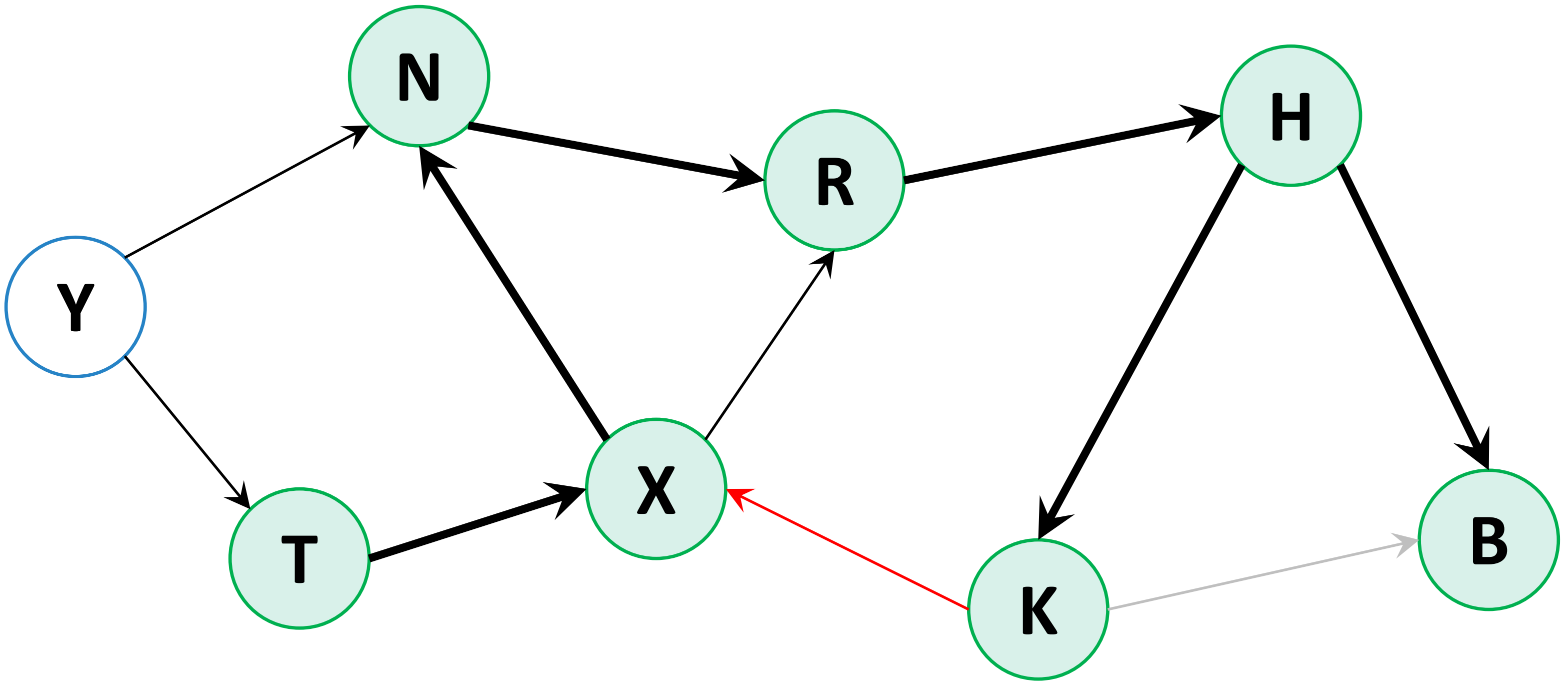
Es una forma de recorrer sistemáticamente un grafo:

- visitar todos sus nodos
- transitar todas sus aristas

Es una forma de obtener información sobre algunas propiedades del grafo —p.ej., determinar si el grafo tiene ciclos:

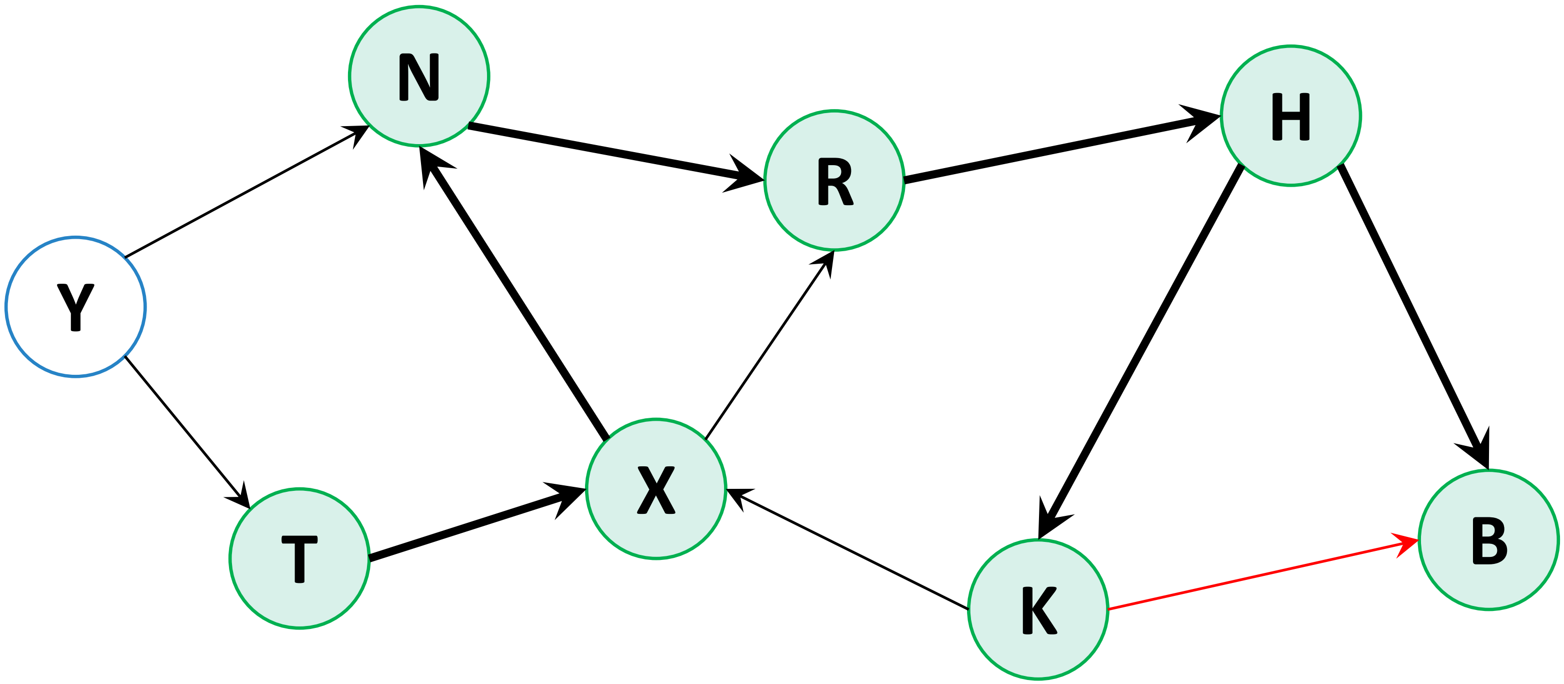
- todos los vértices son inicialmente *blancos*
- un vértice se pinta de *gris* cuando es descubierto
- un vértice se pinta de *negro* cuando su lista de adyacencias ha sido examinada exhaustivamente

Queremos distinguir este caso …



¡Algoritmo, date cuenta de que esto es un ciclo!

… de este otro



¡Y que esto otro, no!

El algoritmo *dfs*

$dfs(V, E)$:

$\quad for\ each\ u\ in\ V$:

$\quad\quad u.color\ =\ white$

$\quad for\ each\ u\ in\ V$:

$\quad\quad if\ u.color\ ==\ white$:

$\quad\quad\quad dfsVisit(u)$

$dfsVisit(u)$:

$\quad u.color\ =\ gray$

$\quad for\ each\ v\ in\ \alpha[u]$:

$\quad\quad if\ v.color\ ==\ white$:

$\quad\quad\quad dfsVisit(v)$

$\quad u.color\ =\ black$

¿Cuál es la complejidad de *dfs*?

Clase anterior: *dfs*

dfs itera sobre todos los nodos sin repetirlos

Para ello usa colores:

- blanco: el nodo no ha sido visitado
- gris: el nodo fue visitado pero aún no se han visitado todos sus vecinos
- negro: el nodo fue visitado y también fueron visitados todos sus vecinos

Ahora agregamos a cada nodo tiempos de inicio y de finalización

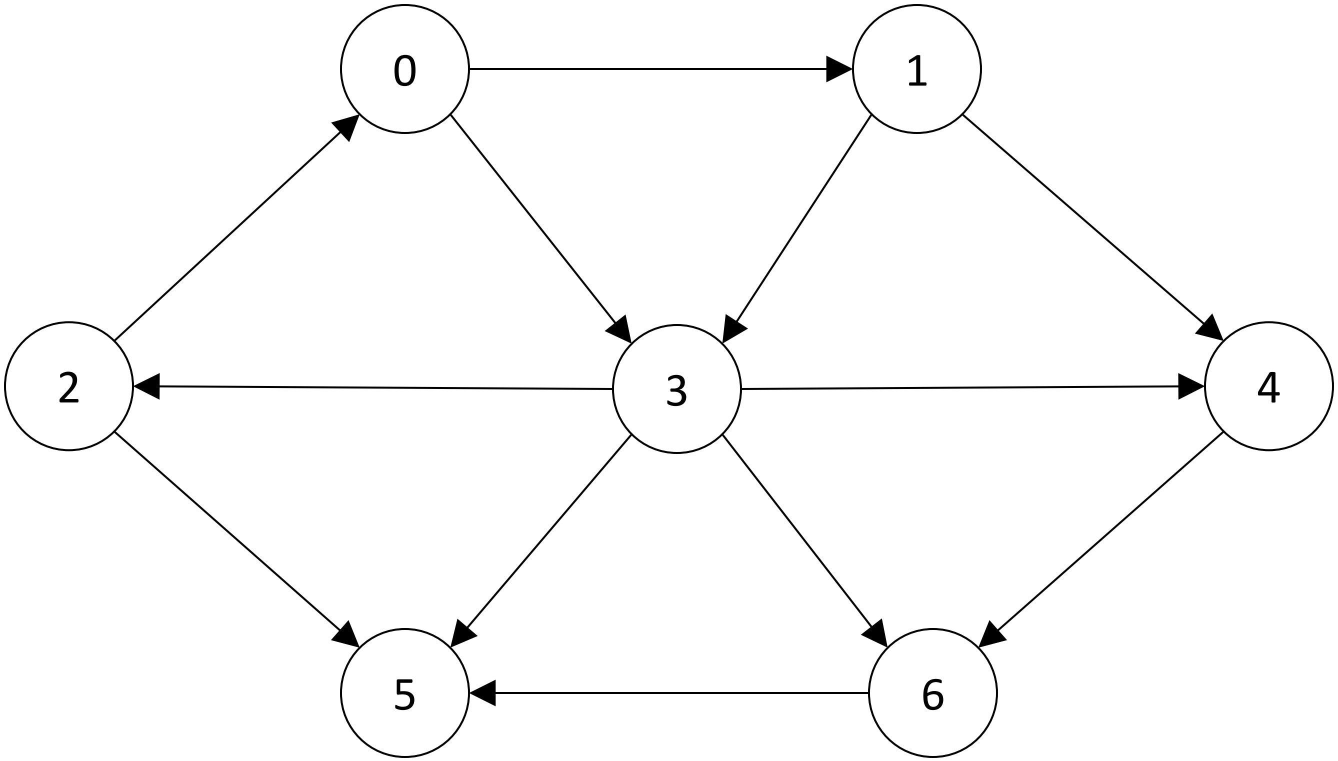
Cuando se visita un nodo blanco no solo se pinta de gris …

… además, se marca el tiempo (la hora) en que se pinta de gris

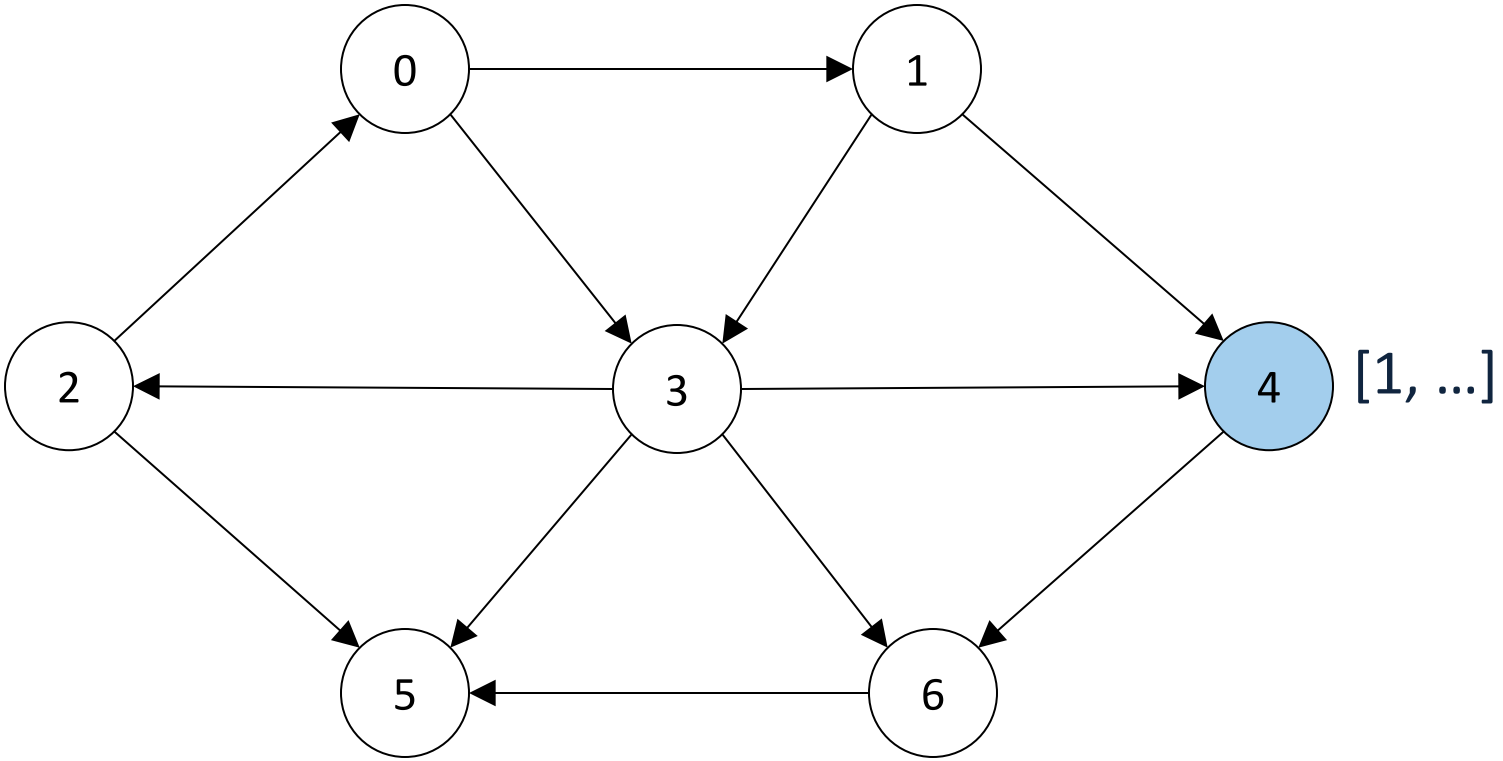
Similarmente, cuando se pinta de negro

Estos son, respectivamente, el *tiempo de inicio* (o descubrimiento) y el *tiempo de finalización* de un nodo

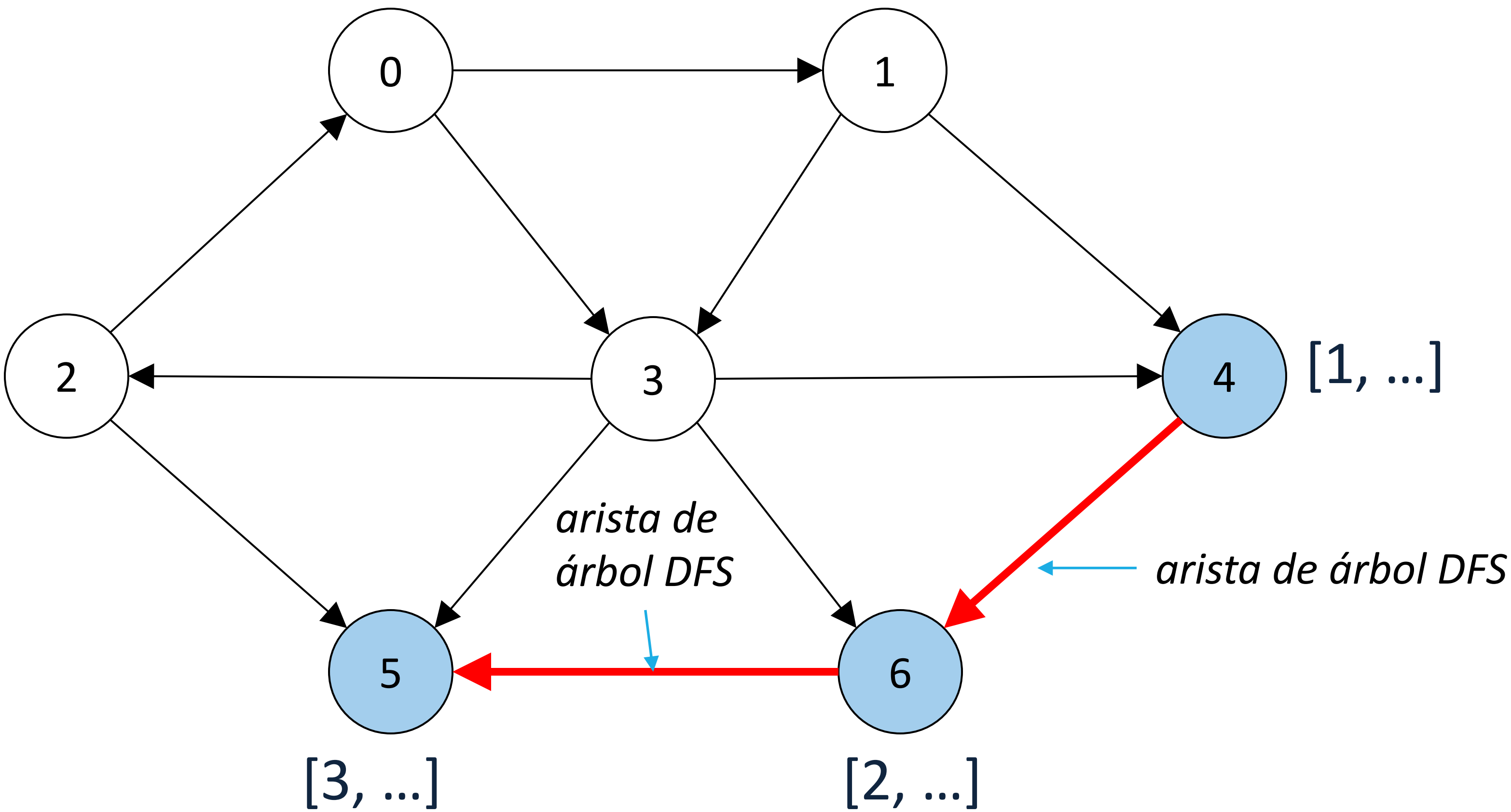
Ej.: un grafo *G* direccional



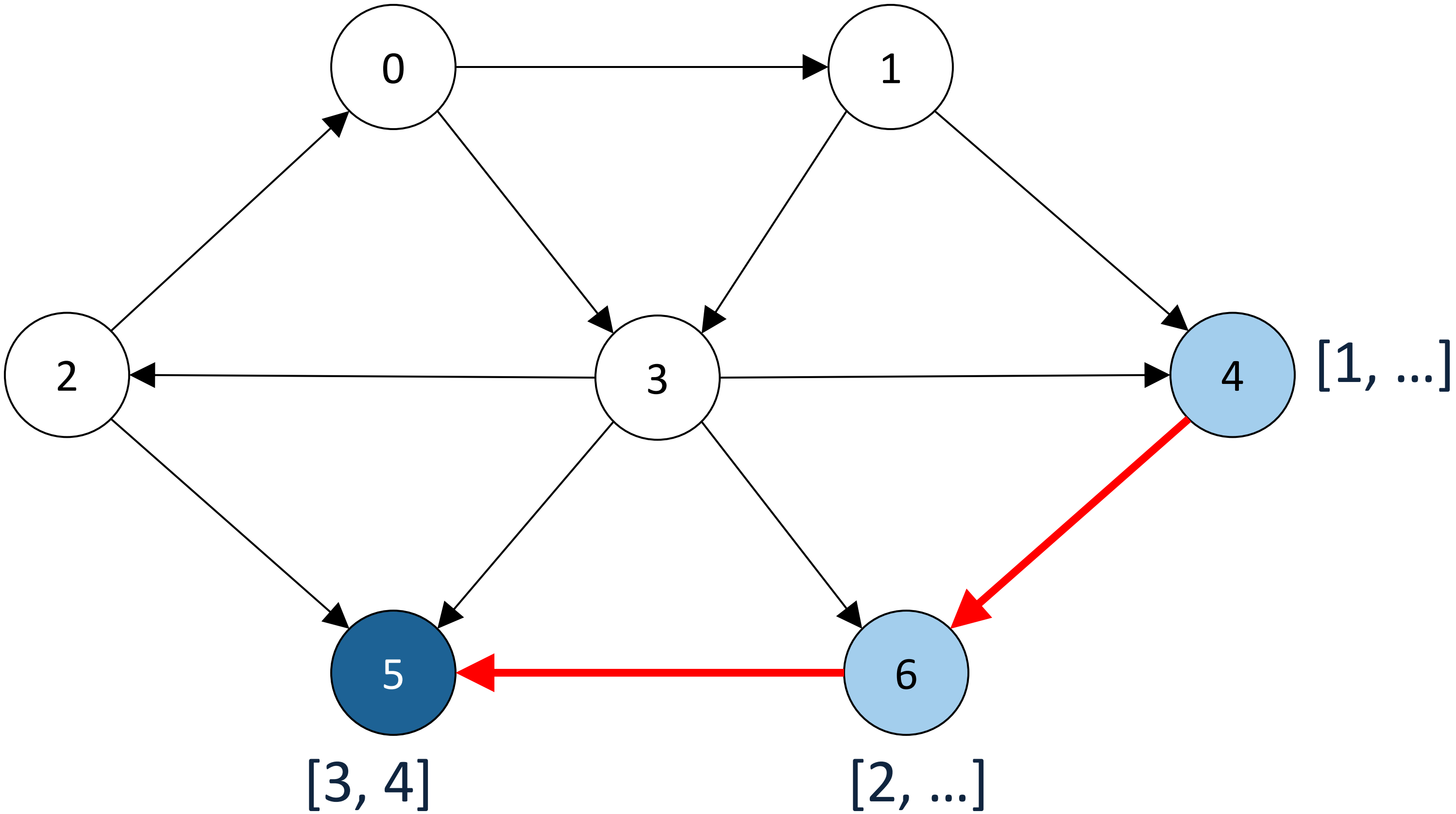
dfsVisit de *G* a partir del vértice 4



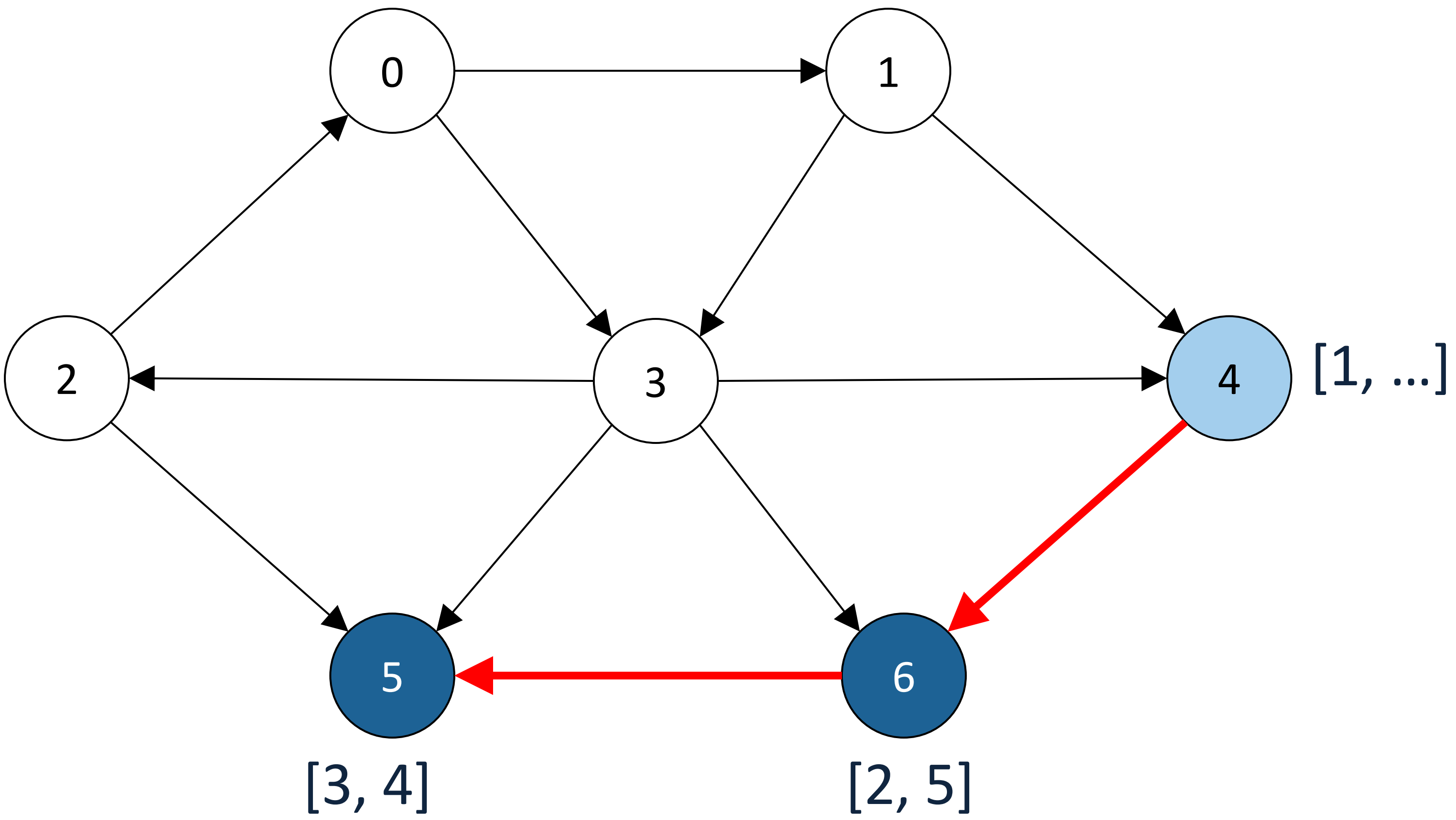
dfsVisit de *G*: del vértice 4 vamos al 6 y de ahí al 5



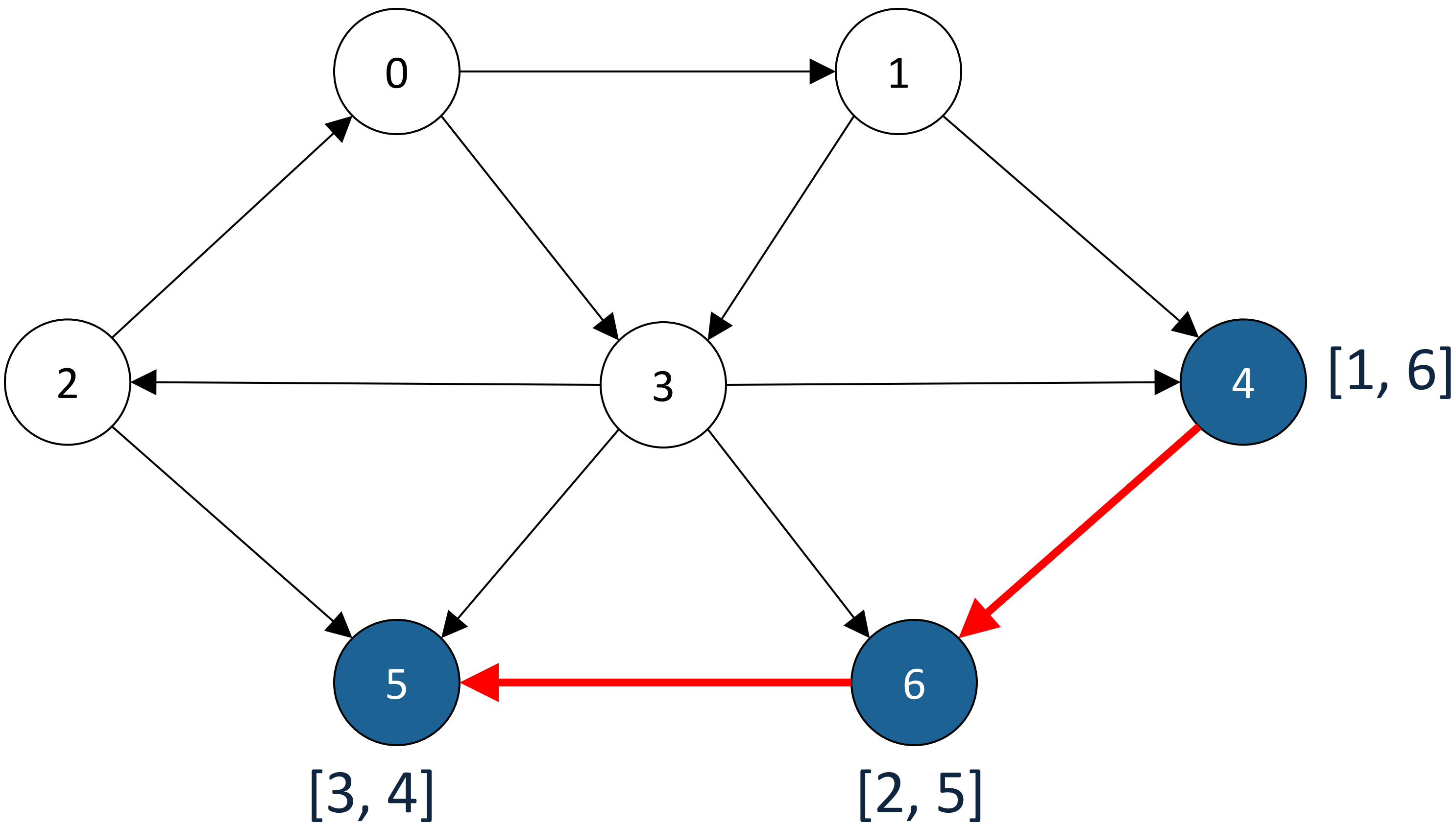
Como desde 5 no podemos seguir, finalizamos el nodo 5 y volvemos a 6



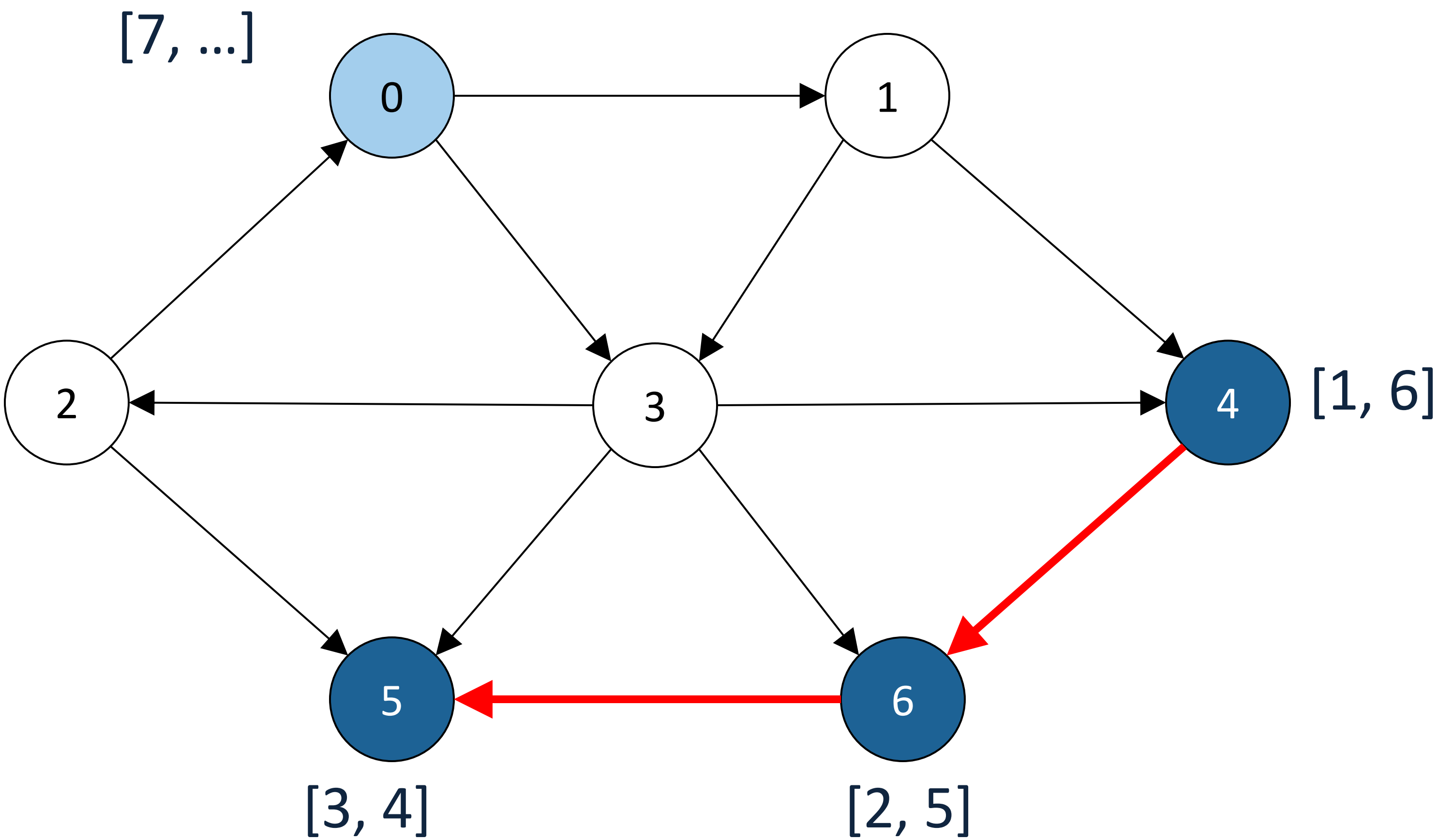
Como desde 6 no salen otras aristas, finalizamos 6 y volvemos a 4



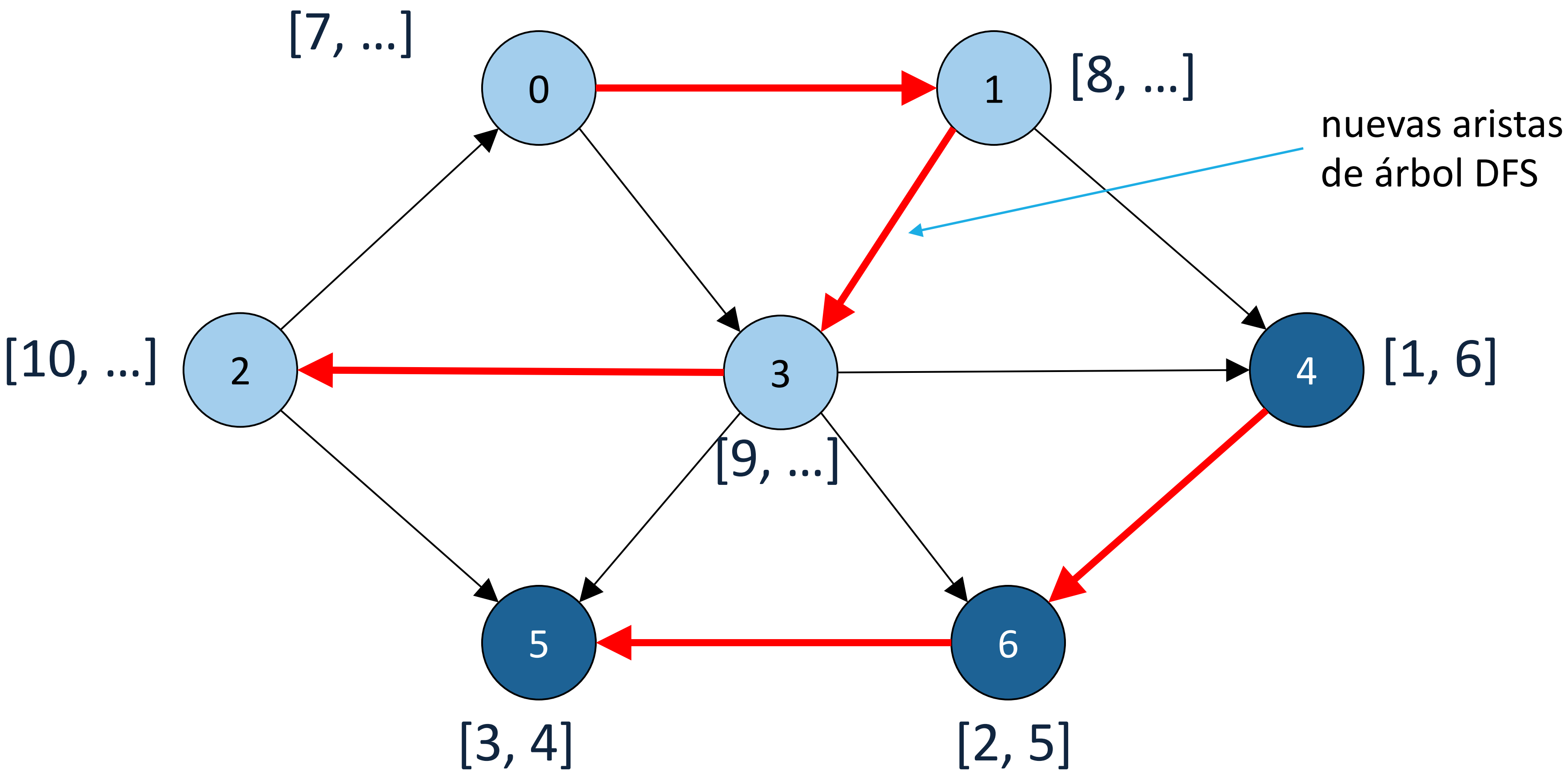
Como desde 4 no salen otras aristas → terminamos *dfsVisit* de *G* desde 4



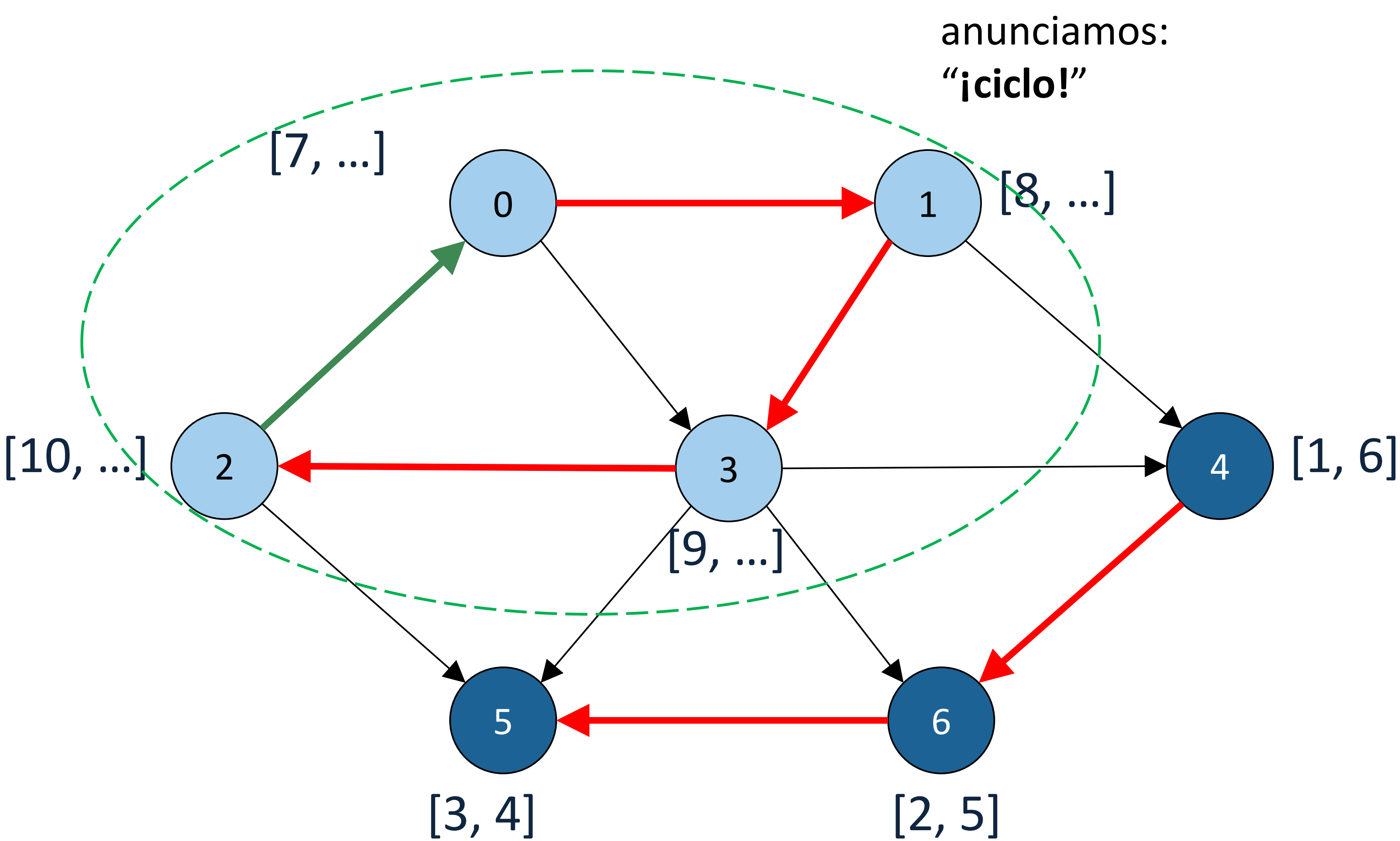
dfsVisit de *G* a partir del vértice 0



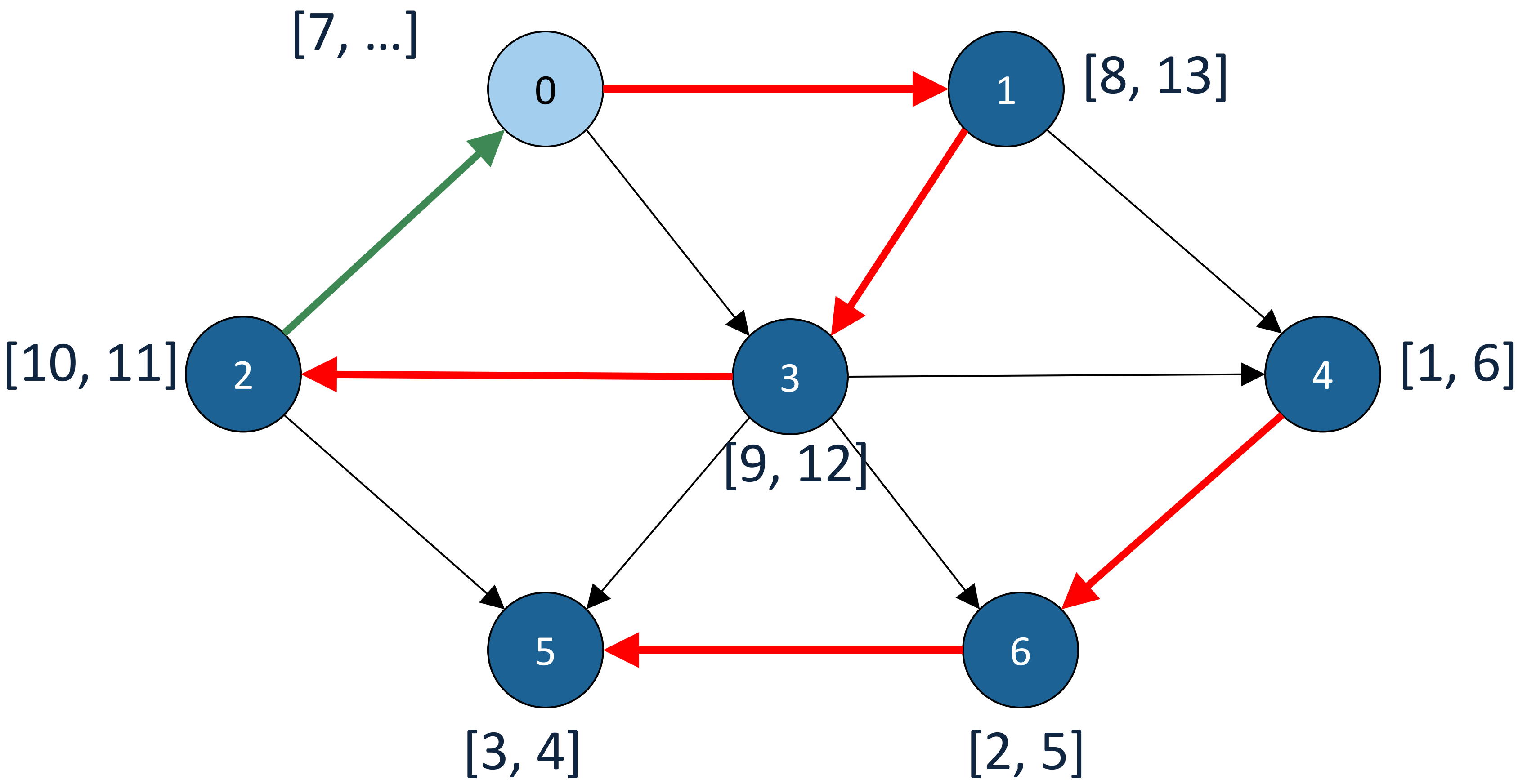
dfsVisit de *G*: de 0 vamos a 1, de ahí a 3 y de ahí a 2



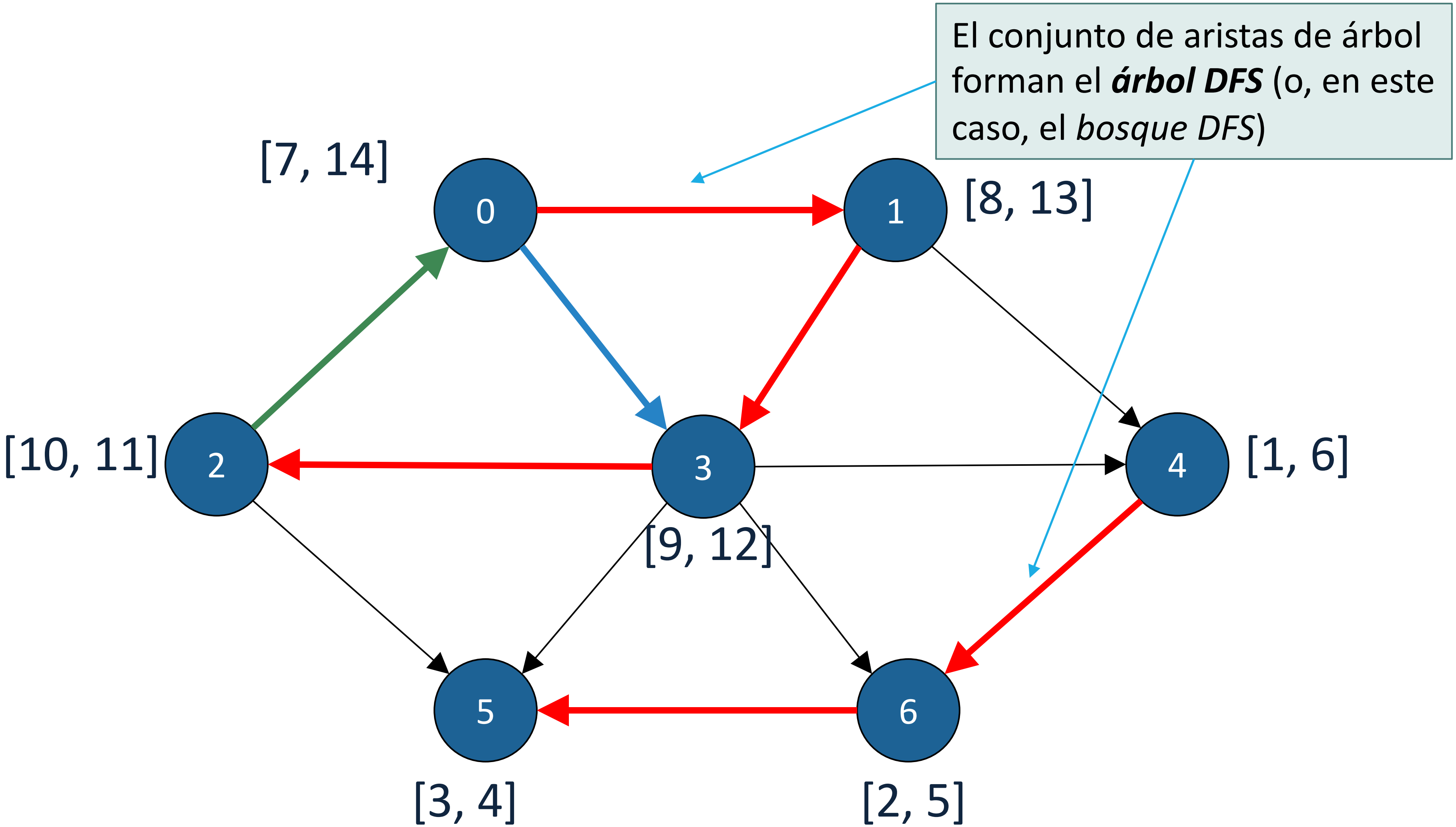
De 2 **no** vamos a 5 ni a 0; la diferencia es que 5 ya está finalizado, pero 0 aún no



Finalizamos 2, volvemos a 3 y (con 4, 5 y 6 terminados), finalizamos 3 y luego 1



Volvemos a 0, **no** vamos a 3 → terminamos *dfsVisit* de *G* desde 0



El algoritmo *dfs* sobre un grafo *G* = (*V*, *E*) con tiempos de inicio y de finalización

$\boldsymbol{dfs(V,E)}$:

$\quad \boldsymbol{time = 1}$

$\quad \boldsymbol{for\ each\ u\ in\ V}$:

$\quad\quad \boldsymbol{u.color\ =\ white}$

$\quad \boldsymbol{for\ each\ u\ in\ V}$:

$\quad\quad \boldsymbol{if\ u.color\ ==\ white}$:

$\quad\quad\quad \boldsymbol{time = dfsVisit(u, time)}$

un únco contador de tiempo, *time*, para poder asignar los tiempos de inicio (*start*) y de finalización (*end*) de cada nodo

```
dfsVisit(u, time):
  u.color = gray
  u.start = time
  time += 1
  for each v in α[u]:
    if v.color == white:
      time = dfsVisit(v, time)
  u.color = black
  u.end = time
  time += 1
  return time
```

en el momento en que un nodo es visitado por primera vez, se le asigna como tiempo de inicio el valor que el contador tiene en ese momento ...

... el cual es incrementado inmediatamente

en el momento en que se terminó de visitar al nodo, se le asigna como tiempo de finalización el valor que el contador tiene en ese momento ...

... el cual es incrementado inmediatamente

Propiedades de los intervalos $[u.start, u.end]$

Dados dos vértices *u* y *v,* sus intervalos cumplen una de las siguientes relaciones:

- [*u.start*, *u.end*] y [*v.start*, *v.end*] son *disjuntos*, y ni *u* ni *v* es descendiente del otro en el bosque DFS
- [*u.start*, *u.end*] *está contenido* en el intervalo [*v.start*, *v.end*], y *u es descendiente de v* en un árbol DFS
- [*v.start*, *v.end*] *está contenido* en el intervalo [*u.start*, *u.end*], y *v es descendiente de u* en un árbol DFS

Tipos de aristas luego de *dfs*

Aristas de árbol: la arista (u, v) es una arista de árbol si v fue descubierto por primera vez al transitar (u, v)

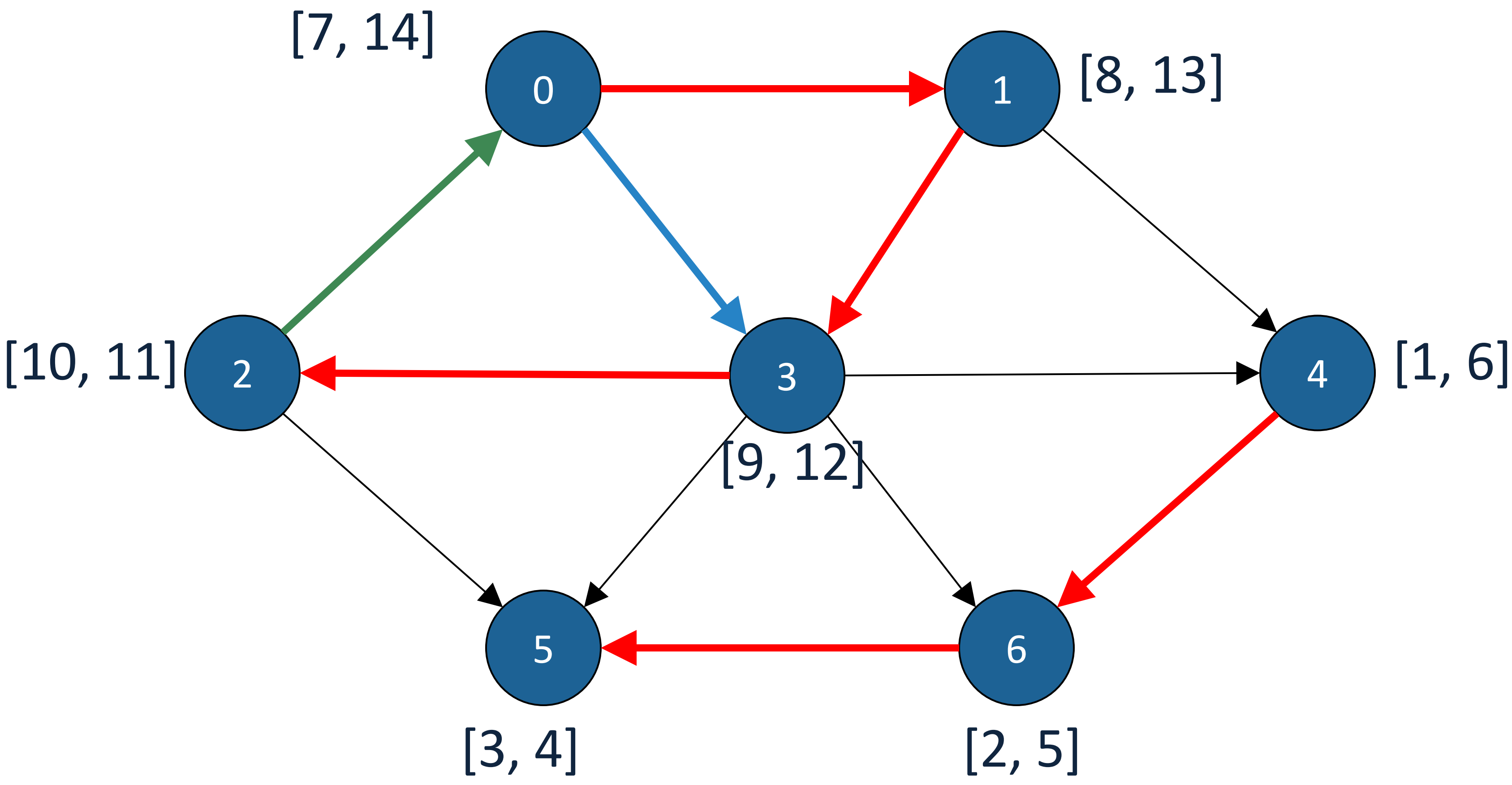
Aristas hacia atrás: aristas (u, v) que conectan un nodo u a un ancestro v en un árbol DFS:

- **el grafo es acíclico si y solo si DFS no produce aristas hacia atrás**

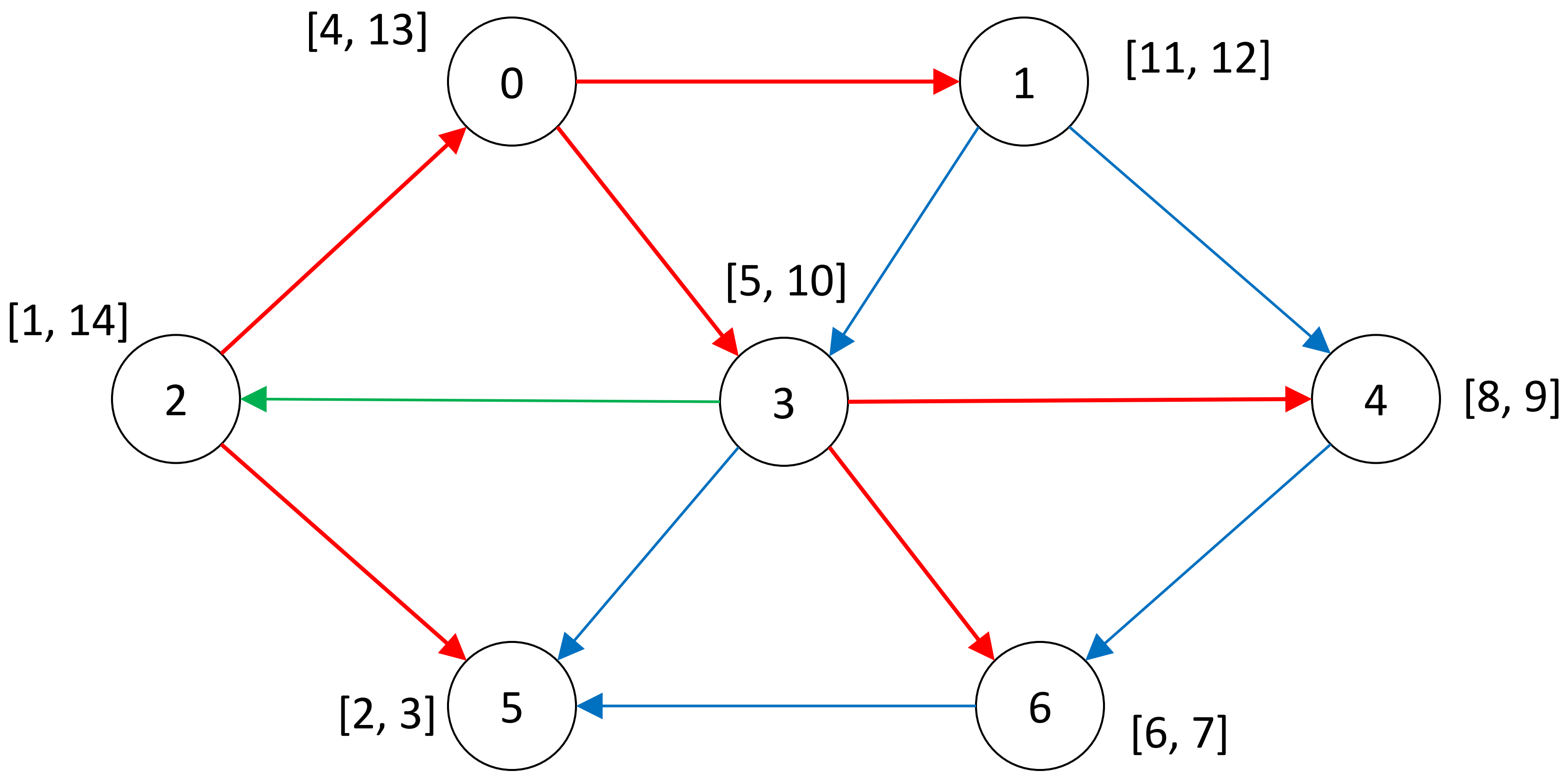
Aristas hacia adelante: aristas (u, v) que no son de árbol y conectan un nodo u a un descendiente v en un árbol DFS; *no aparecen en grafos no direccionales*

Aristas cruzadas: todas las otras aristas; *no aparecen en grafos no direccionales*

Las propiedades de los intervalos de tiempo y los tipos de arista



Ej.: *dfs* de *G* a partir del nodo 2



¿Qué usos le podemos dar a *dfs*
+ los tiempos de (inicio y) finalización?

En grafos acíclicos: ordenación topológica

En grafos con ciclos: componentes fuertemente conectadas

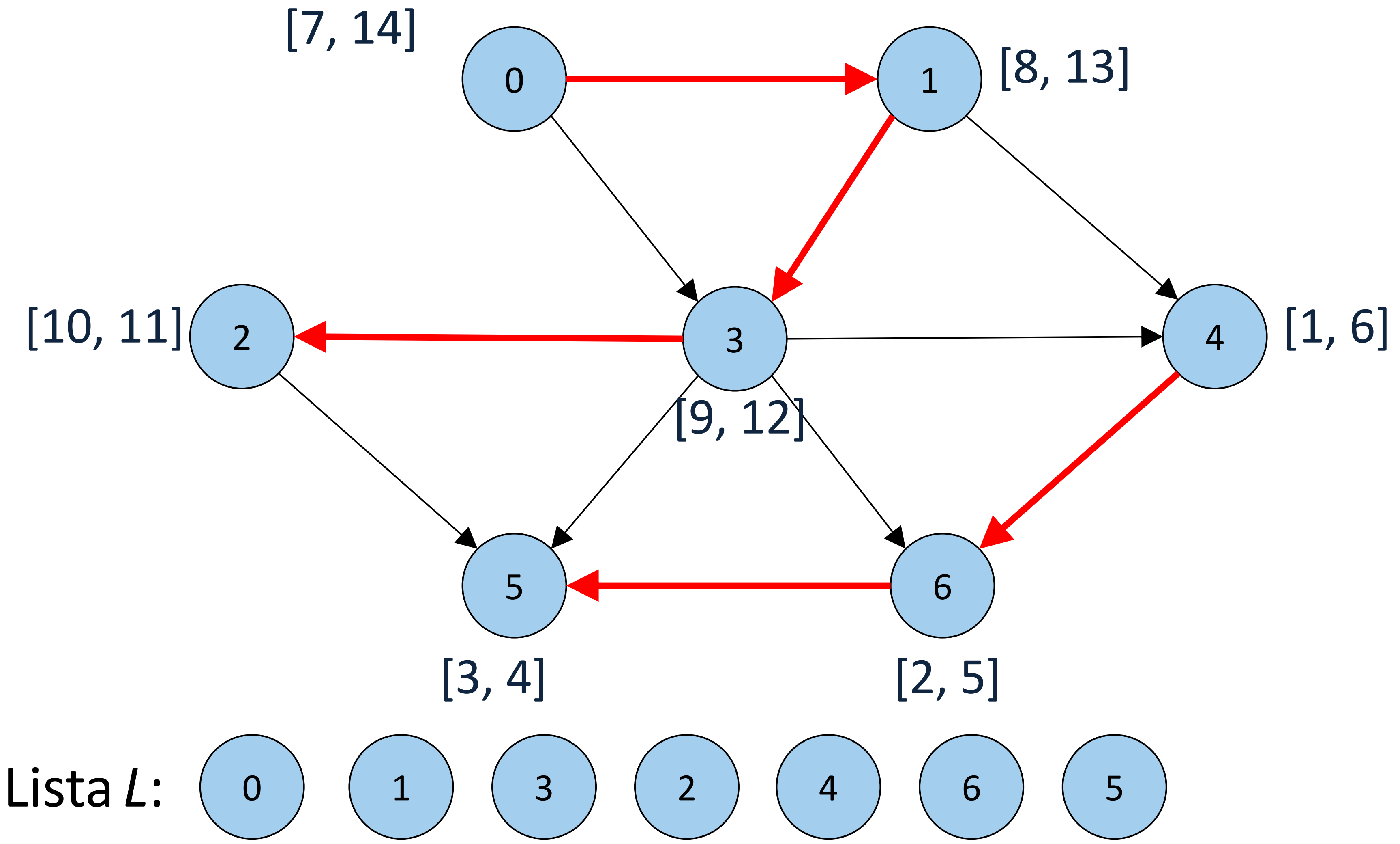
Un grafo direccional acíclico *G* se puede *ordenar topológicamente*

La **ordenación topológica** de *G* es una ordenación lineal de todos los nodos

… tal que si *G* contiene la arista direccional (*u*, *v*), entonces *u* aparece antes que *v* en la ordenación

Si *G* tiene ciclos, entonces no existe un orden topológico de *G*

Ej.: grafo después de ejecutar *dfs*



El algoritmo de ordenación topológica

$\boldsymbol{topSort}(\boldsymbol{G})$

Crear lista $\boldsymbol{L}$ vacía

Ejecutar $\boldsymbol{dfs}(\boldsymbol{G})$ con tiempos

Insertar nodos en $\boldsymbol{L}$ en orden descendiente de tiempos $\boldsymbol{end}$

$\boldsymbol{return}\ \boldsymbol{L}$

El algoritmo de ordenación topológica

$\boldsymbol{topSort}(\boldsymbol{G})$

Crear lista $\boldsymbol{L}$ vacía

Ejecutar $\boldsymbol{dfs}(\boldsymbol{G})$ con tiempos:

- cada vez que calculamos el tiempo $\boldsymbol{end}$ para un nodo, insertamos ese nodo al frente de $\boldsymbol{L}$

$\boldsymbol{return}\ \boldsymbol{L}$

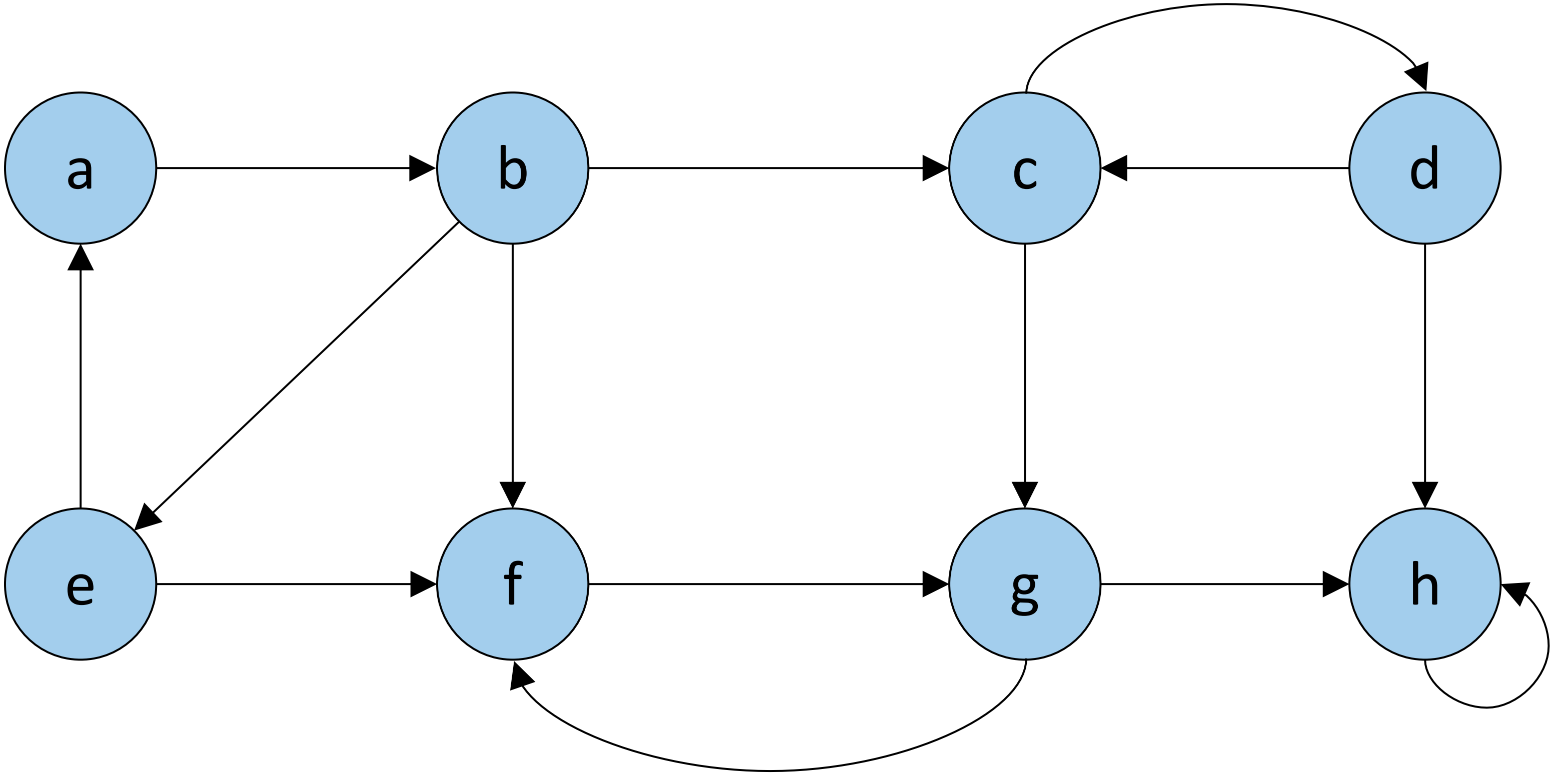
Grafos direccionales con ciclos y sus *componentes fuertemente conectadas*

En un grafo con ciclos no es posible encontrar un orden topológico ya que dos nodos de un ciclo pueden alcanzarse mutuamente

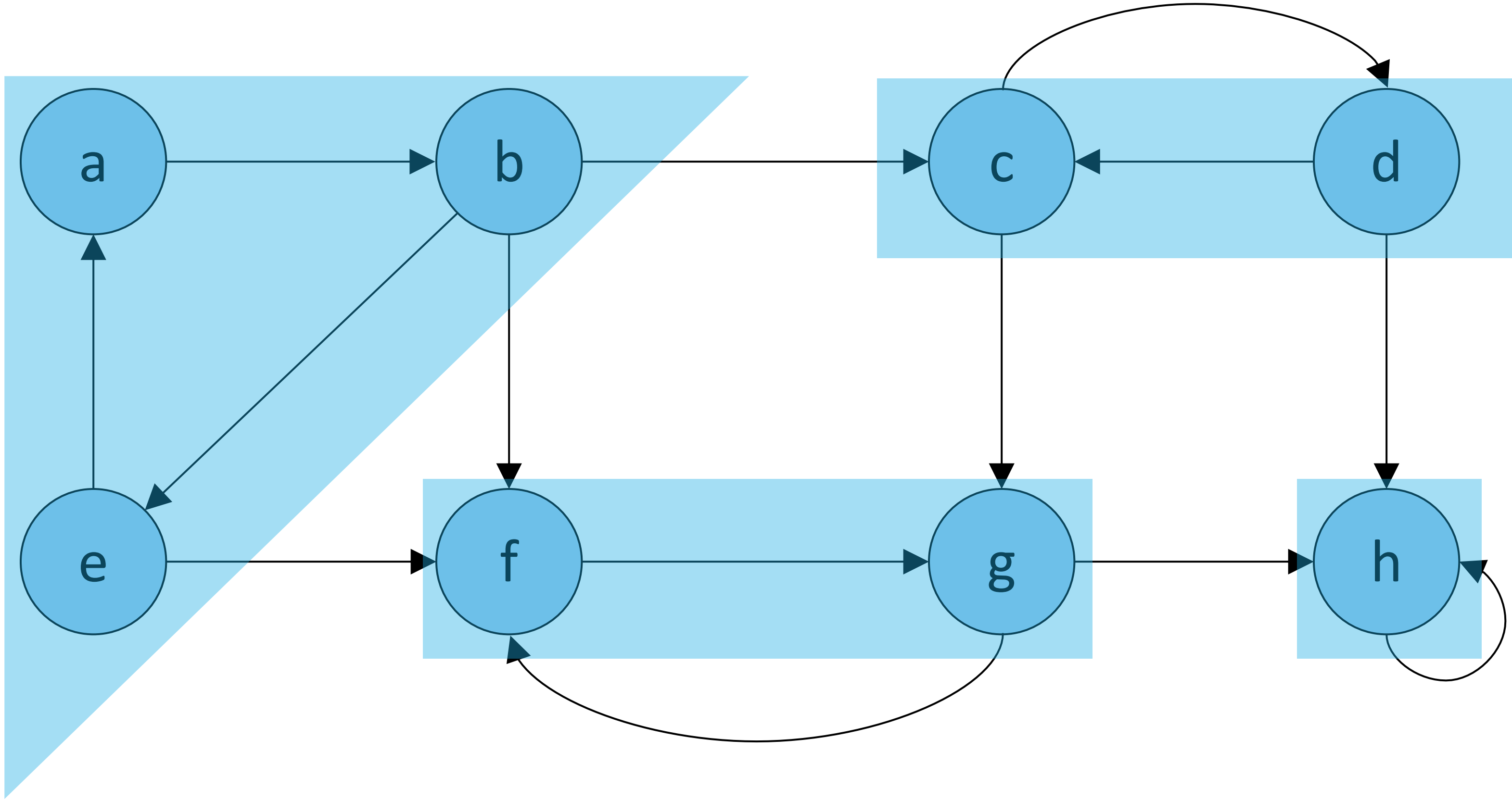
Los nodos que se pueden alcanzar mutuamente son miembros de una misma *componente fuertemente conectada* (CFC) del grafo

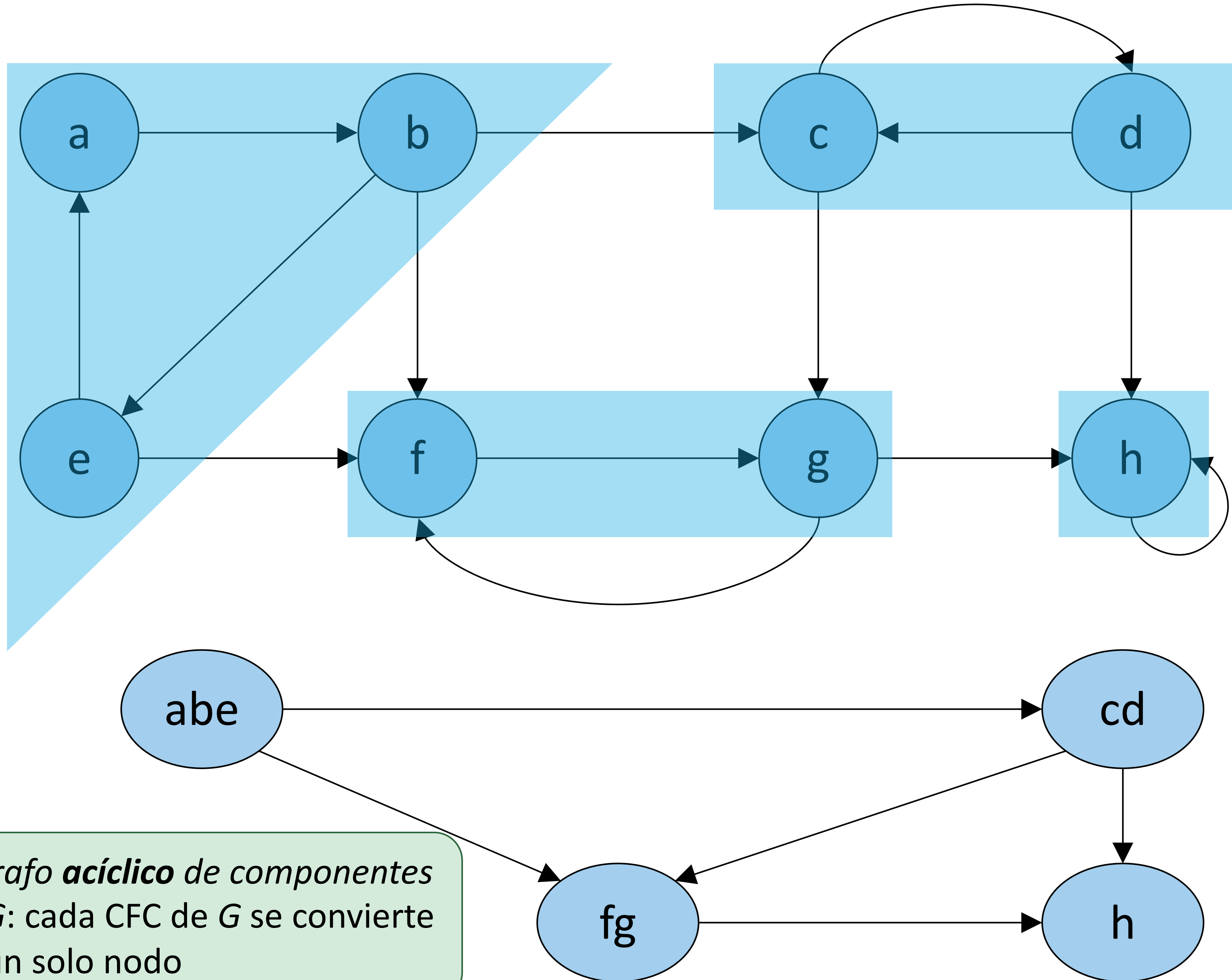
Las CFCs de un grafo direccional G son conjuntos máximos de nodos $C \subseteq V$ tales que para todo par de nodos u y v en C, u y v son mutuamente alcanzables

Ej.: un grafo *G* con ciclos



Las CFCs de *G*

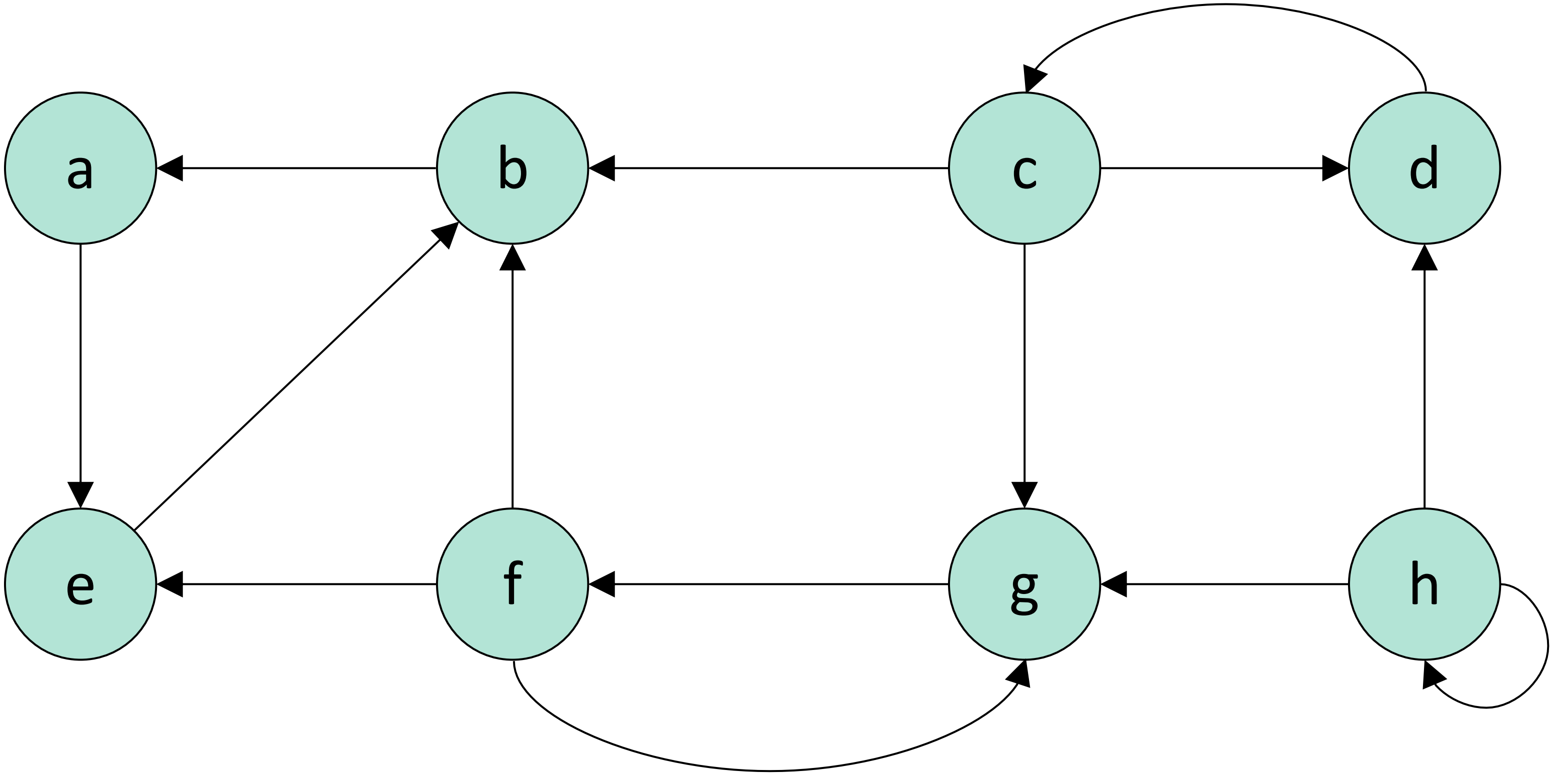




El *grafo **acíclico** de componentes de G*: cada CFC de *G* se convierte en un solo nodo

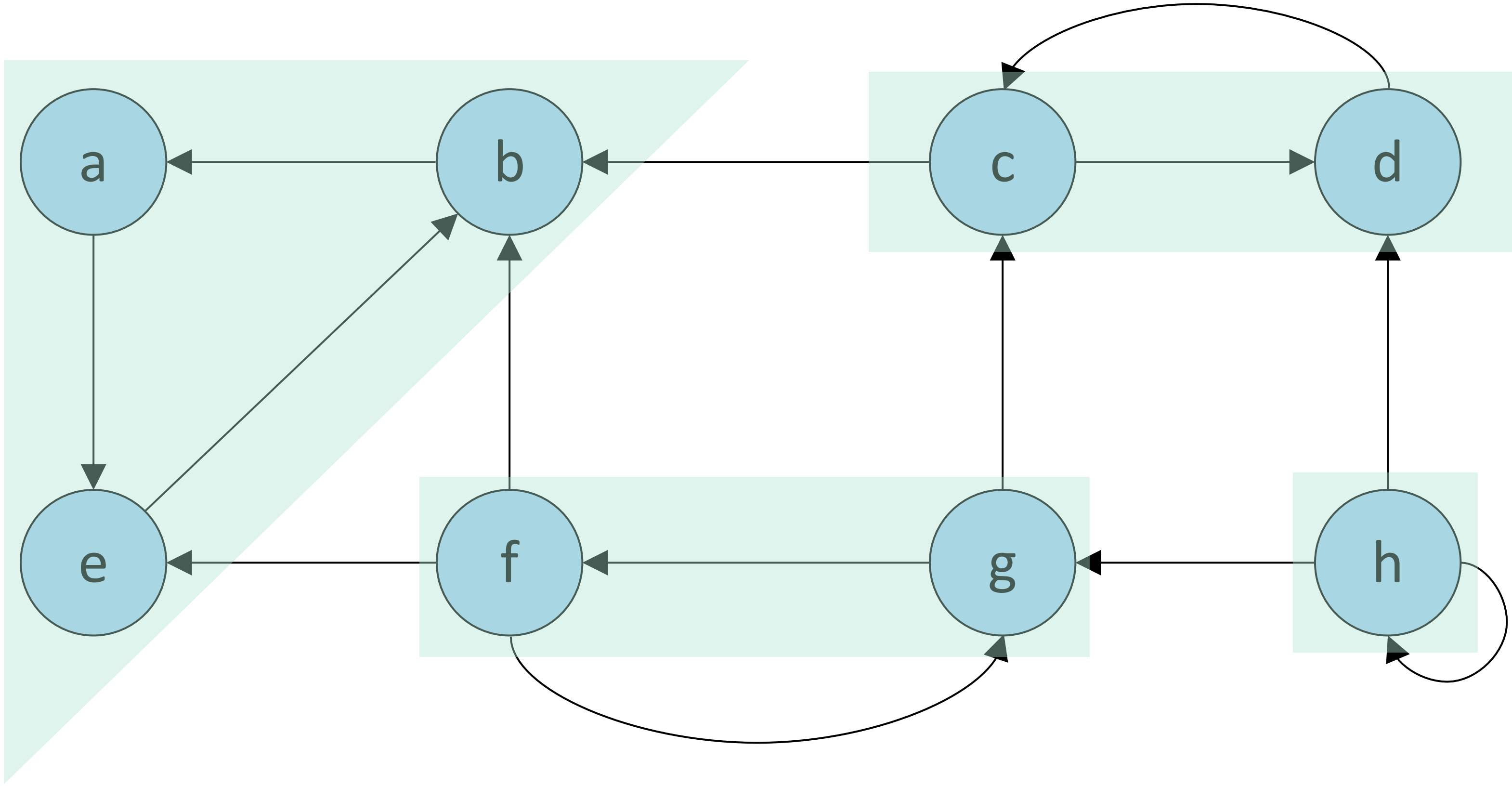
El algoritmo usa el *grafo transpuesto G’* de *G*

G’ es *G* pero con las direcciones de las aristas invertidas:
sea $\alpha'[\boldsymbol{u}]$ la lista de aristas que salen de de $\boldsymbol{u}$ en *G’*

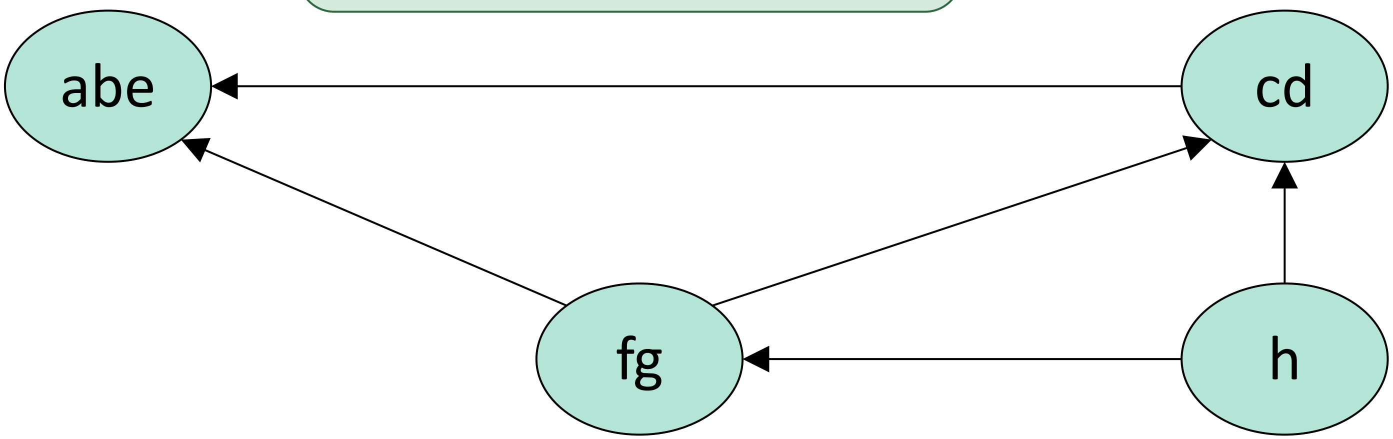


G´ tiene las mismas CFCs que *G*

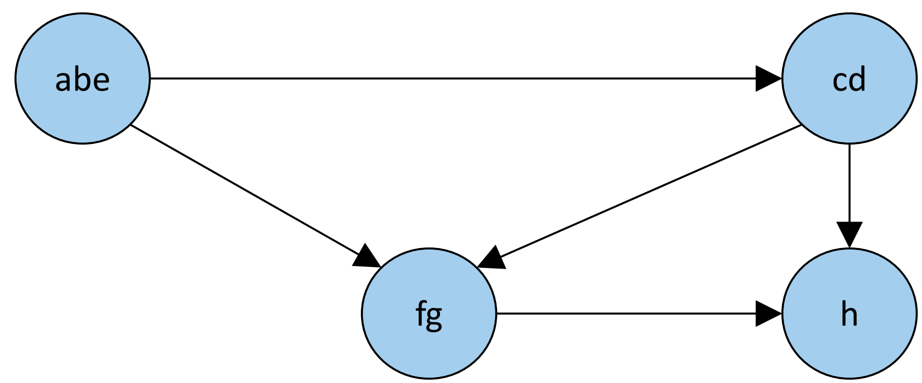
Dos nodos *u* y *v* son mutuamente alcanzables en *G* si y sólo si son mutuamente alcanzables en *G´*



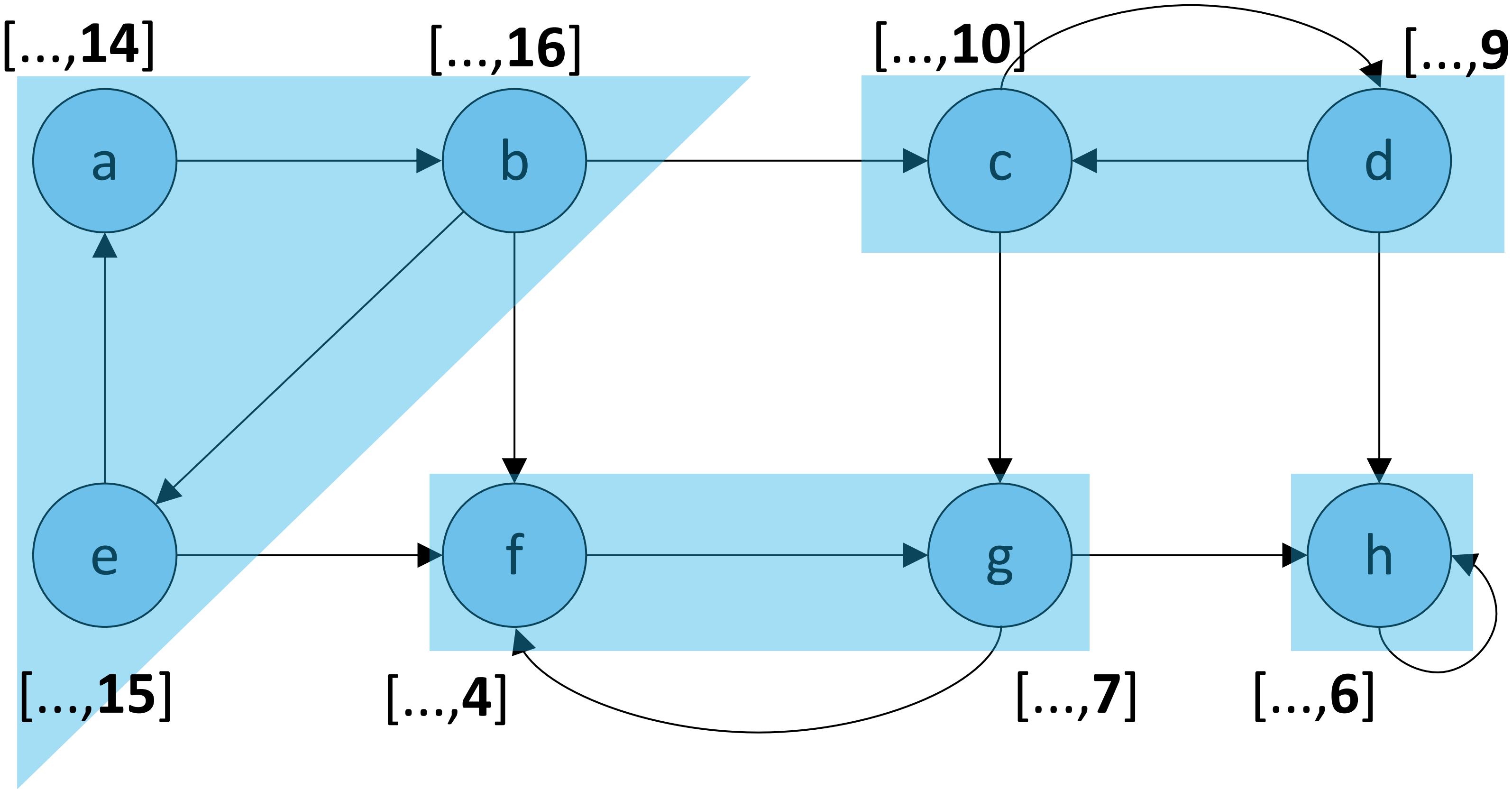
El grafo de componentes de *G´* es el grafo de componentes de *G*, transpuesto



En cualquier recorrido DFS de *G*, el tiempo de finalización de algún nodo en la componente "*abe*" del grafo de componentes de *G*, va a ser mayor que los tiempos de finalización de cualquier otro nodo de *G*

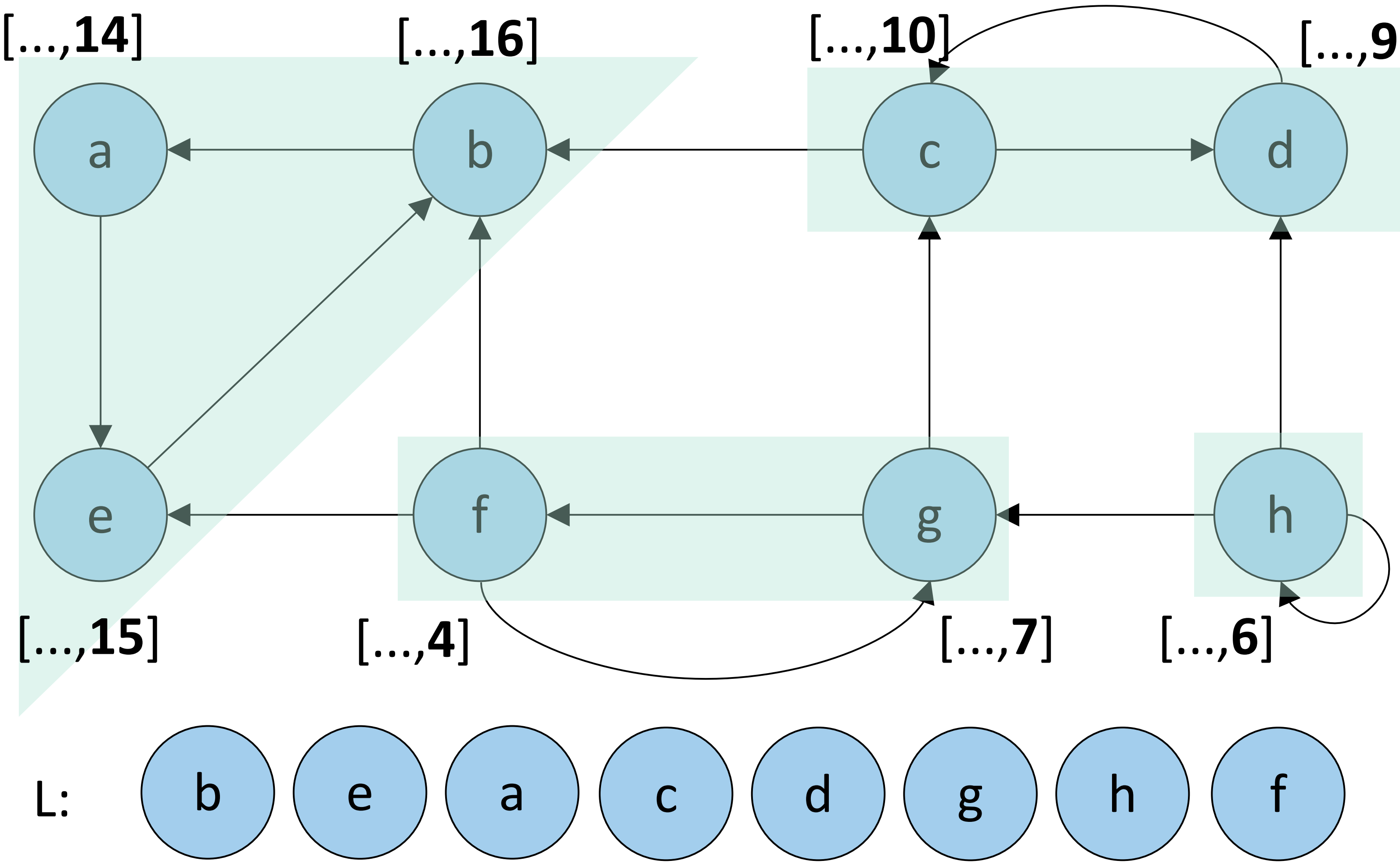


Hagamos un recorrido DFS de *G*, anotando los tiempos de finalización de cada nodo ...



... y ordenemos los vértices en una lista *L* según sus tiempos de finalización

dfs sobre *G'*, pero en orden decreciente de tiempos ***end*** (según el recorrido anterior)



Algoritmo de Kosaraju para CFCs

Cada CFC tiene un nodo ***representante:***

si el representante de dos nodos es el mismo, entonces los nodos pertenecen a la misma CFC

$\boldsymbol{assign}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{rep})$:

$\quad \boldsymbol{if}\ \boldsymbol{u}.\boldsymbol{rep} = \emptyset$:

$\quad\quad \boldsymbol{u}.\boldsymbol{rep} = \boldsymbol{rep}$

$\quad\quad \boldsymbol{foreach}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{in}\ \alpha'[\boldsymbol{u}]$:

$\quad\quad\quad \boldsymbol{assign}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{rep})$

Algoritmo de Kosaraju para CFCs

$\boldsymbol{kosaraju}(\boldsymbol{G})$

Crear lista $\boldsymbol{L}$ vacía

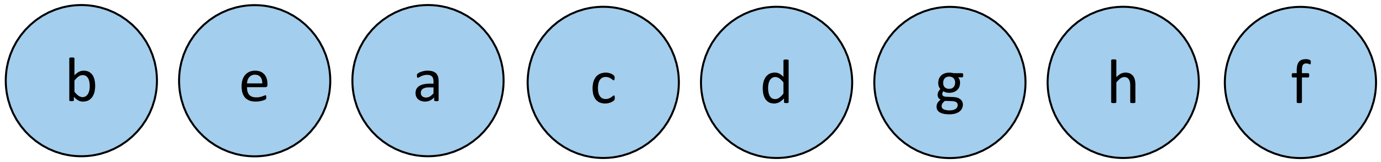
Ejecutar $\boldsymbol{dfs}(\boldsymbol{G})$ con tiempos

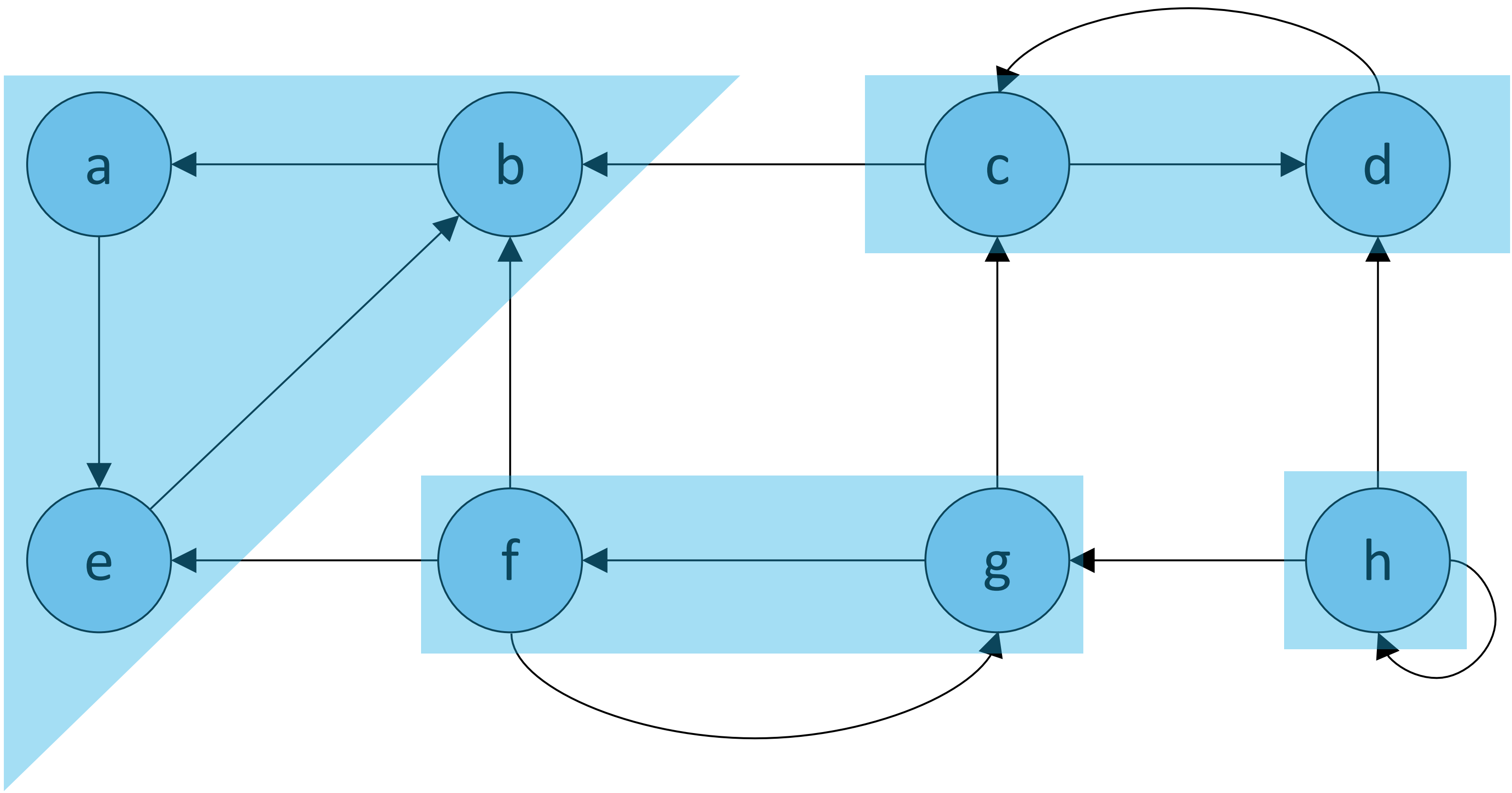
Insertar vértices en $\boldsymbol{L}$ en orden descendiente de tiempos $\boldsymbol{f}$

$\boldsymbol{for\ each\ u\ in\ L}$:

$\boldsymbol{assign}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$

L:





Definamos el *grafo de componentes* G^{CFC}

Supongamos que G tiene las componentes fuertemente conectadas C_1, C_2, …, C_k

V^{CFC} es $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$

Hay una arista $(C_i, C_j) \in E^{\mathrm{CFC}}$ si G tiene una arista direccional (x, y) para algún $x \in C_i$ y algún $y \in C_j$

El grafo G^{CFC} tiene un orden topológico

G^{CFC} es un grafo direccional acíclico

Esto, ya que si existiera un ciclo en G^{CFC}, este tendría CFCs, lo cual no es posible por construcción del grafo

Por lo que podemos encontrar un orden topológico en G^{CFC}

Resumen

- Podemos guardar los tiempos de inicio y fin de cada nodo al hacer DFS
- Usando los tiempos podemos encontrar un orden topológico en un grafo acíclico
- En un grafo cíclico podemos encontrar las componentes fuertemente conectadas
- Podemos encontrar el orden topológico de las componentes fuertemente conectadas en un grafo cualquiera