UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA – Cálculo 1 – **Simulacro 3** - Segundo ciclo de 2017 – **A**

Nombre: Clave Carnet: ________ Sección:_____ Auxiliar: ____________

Problema	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Punteo	/15	/15	/20	/25	/25	/100

Instrucciones: resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento.

1) El período (en segundos) de un péndulo simple de longitud L es $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Calcule el cambio exacto en el periodo si L se incrementa de 4 metros a 5 metros. Luego use diferenciales para encontrar una aproximación al cambio en período. Suponga que $g = 9.8\ m/s^2$.

$\rightarrow T(4) = 2\pi\sqrt{\frac{4}{9.8}} \simeq 4.0142$ $\rightarrow$ Cambio exacto:

$T(5) - T(4) = 0.4738$ segundos //

$\rightarrow T(5) = 2\pi\sqrt{\frac{5}{9.8}} \simeq 4.4880$

$\rightarrow T = 2\pi (L)^{1/2}(g)^{-1/2}$

$\rightarrow dT = \left[\cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(L)^{-1/2}(g)^{-1/2}\right]dL = \frac{\pi}{\sqrt{Lg}}(dL) = \frac{\pi}{\sqrt{(4)(9.8)}}(1) \simeq 0.5018$ segundos

2) Dada $f(x) = \sqrt{3-x}$, verifique que se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Medio para el intervalo $[-6,-1]$. Luego, encuentre un valor adecuado de c que cumpla con la conclusión del teorema.

$\rightarrow$ f(x) es Continua en $[-6,-1]$ Existe f(x) para todo valor & existe límite también.

$\rightarrow$ f(x) es derivable en $(-6,-1)$

En todos los puntos puede trazarse una recta tangente

$\rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\frac{-1}{2\sqrt{3-c}} = \frac{\sqrt{3-(-1)} - \sqrt{3-(-6)}}{-1-(-6)}$

$\frac{-1}{2\sqrt{3-c}} = \frac{2-3}{5} = -\frac{1}{5}$

$5 = 2\sqrt{3-c}$

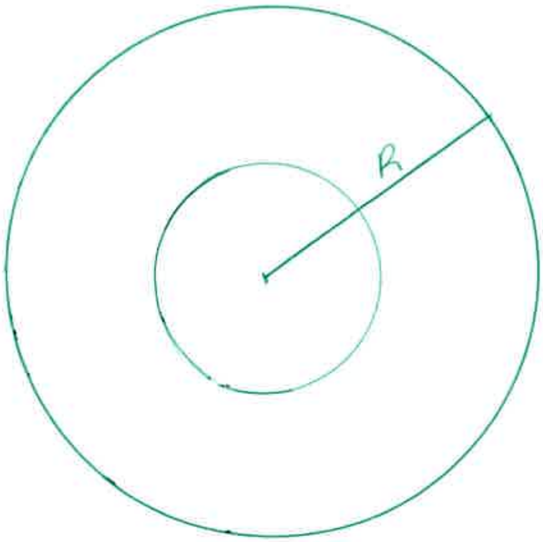
$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3-c$

$\frac{25}{4} = 3-c$

$c = 3 - \frac{25}{4} = -\frac{13}{4}$ //

$-6 < -\frac{13}{4} < -1$

3) Al arrojar una piedra a un estanque de agua tranquila se forman ondas circulares concéntricas cuyos radios aumentan de longitud al paso del tiempo. Cuando la onda exterior tiene un radio de 3 metros, éste aumenta a una rapidez (velocidad) de 50 cm/s. ¿A qué rapidez (velocidad) aumenta el área del círculo formado por dicha onda?



Instante:

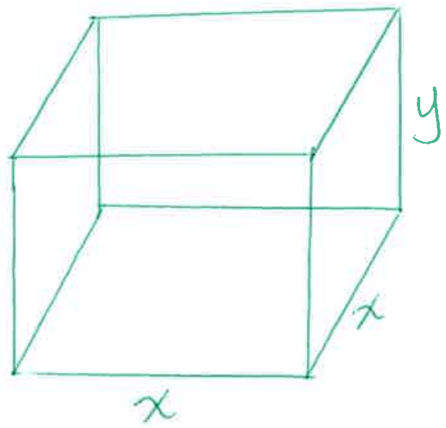
$R = 3$ metros

$\rightarrow \frac{dR}{dt} = 0.5\ m/s$

$A = \pi R^2$

$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi R \frac{dR}{dt} = 2\pi(3)(0.5) = 3\pi\ cm^2/s$

4) La empresa donde usted trabaja ha sido contratada para diseñar y construir un tanque rectangular de acero, de base cuadrada, abierto por arriba y con una capacidad de 500 pies cúbicos. El tanque se fabricará soldando placas delgadas de acero a lo largo de sus bordes. Como ingeniero de producción, su trabajo consiste en determinar las dimensiones de la base y la altura que harán que el tanque pese lo menos posible.



$V = 500 \text{ ft}^3$

Ecuación:

$A_{sup} = x^2 + 4xy$

Restricción:

$V = x^2 y = 500 \rightarrow y = 500/x^2$

Ecuación:

$$A_{sup} = x^2 + 4x\left(\frac{500}{x^2}\right) = x^2 + \frac{2000}{x}$$

$$A' = 2x - \frac{2000}{x^2} = 0 \rightarrow 2x = \frac{2000}{x^2} \rightarrow x^3 = 1000$$

$$x = \sqrt[3]{1000} = 10$$

Número crítico

$$y = \frac{500}{10^2} = 5$$

Prueba de la 1ª Derivada

x	9	10	12
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Comp.	$\searrow$	$\bullet$	$\nearrow$

Mínimo

→ Base: 10 ft × 10 ft

→ Altura: 5 ft //

5) Haga el análisis de $f(x)$, completando los siguientes incisos:

$f(x) = \sqrt[3]{x}\ln(x)$ $\qquad f'(x) = \frac{\ln(x)+3}{3x^{2/3}}$ $\qquad f''(x) = \frac{-2\ln(x)-3}{9x^{5/3}}$

a) Dominio

$D: (0, \infty)$ ← Raíz cúbica admite cualquier valor
logaritmo natural admite solo positivos

b) Intersecciones con los ejes

Eje x:

$\sqrt[3]{x} \cdot \ln(x) = 0$

→ $\sqrt[3]{x} = 0$

$x = 0$ ✗

→ $\ln(x) = 0$

$x = e^0 = 1$ $\quad (1, 0)$

Eje y:

$f(0)$ no existe

c) Extremos relativos e intervalos donde la función es creciente o decreciente.

d) Puntos de inflexión e intervalos donde la función es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba.

→ $f'(x) = \frac{\ln(x)+3}{3x^{2/3}} = 0$

$\ln(x) + 3 = 0$

$\ln(x) = -3$

$x = e^{-3} = 1/e^3 \simeq 0.0498$

↑ Número crítico

$3x^{2/3} = 0$

$x = 0$ ✗

→ $f''(x) = \frac{-2\ln(x) - 3}{9x^{5/3}}$

$-2\ln(x) - 3 = 0$

$\ln(x) = -3/2$

$x = e^{-3/2} = \frac{1}{e^{3/2}} \simeq 0.2231$

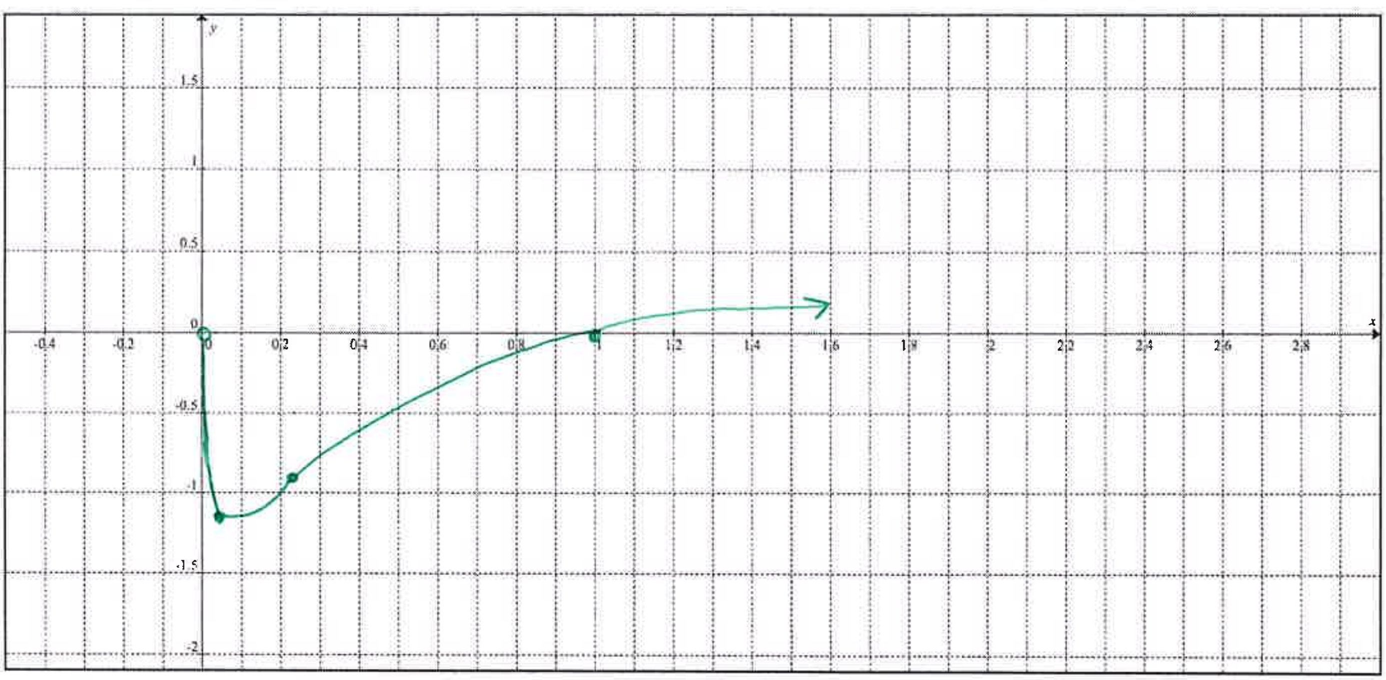
↑ Posible punto de inflexión

$9x^{5/3} = 0$

$x = 0$ ✗

Int.	f(x)	f'(x)	f''(x)	Conclusión
$(0, 1/e^3)$		−	+	∪ ↘
$x = 1/e^3$	−1.1036	0	+	Mínimo
$(1/e^3, 1/e^{3/2})$		+	+	∪ ↗
$x = 1/e^{3/2}$	−0.9098	+	0	Punto Inflexión
$(1/e^{3/2}, \infty)$		+	−	∩ ↗

e) Trace el esbozo de $f(x)$, tomando en cuenta los resultados de los incisos anteriores.



UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA – Cálculo 1 – **Simulacro 3** - Segundo ciclo de 2017 – C

Nombre: Clave Carnet: ________ Sección:_____ Auxiliar: __________

Instrucciones: resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento.

Problema	1	2	3	4	5	Total
Punteo	/15	/15	/20	/25	/25	/100

1) Considere la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo $[1,4]$. Verifique si se cumplen las hipótesis del teorema de *Rolle* y encuentre, si es posible, el valor c que cumple con la conclusión del teorema.

→ $f(x)$ es continua en el intervalo $[1,4]$ pues existe límite en todo valor y existe $f(x)$ en todo valor.

→ $f(x)$ es derivable en $(1,4)$ dado que puede trazarse una recta tangente en cualquier punto del intervalo.

→ $f(1) \neq f(4)$

$\ln(1) \neq \ln(4)$

Por lo que, la tercera condición del teorema no se cumple, y no hay garantía que un número "C" en $(1,4)$ tal que $f'(c) = 0$ exista en el intervalo.

2) Utilice una aproximación lineal para estimar el siguiente número.

$$\frac{(0.9)^4}{(0.9)+1}$$

→ $f(x) = \dfrac{x^4}{x+1}$ → $a = 1$ → $x = 0.9$ $\quad L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

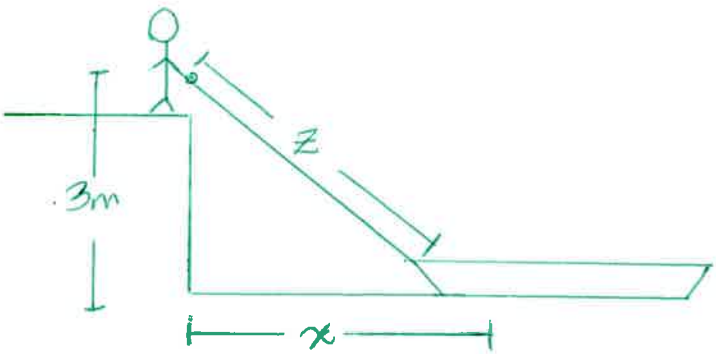
→ $f(1) = \dfrac{1}{2}$

$f'(x) = \dfrac{4x^3(x+1) - x^4(1)}{(x+1)^2} = \dfrac{4x^4 + 4x^3 - x^4}{(x+1)^2} = \dfrac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2}$

→ $f'(1) = \dfrac{3+4}{4} = 7/4$ → $x - a = 0.9 - 1 = -0.1$

→ $L(x) = 1/2 + 7/4(-0.1) = \underline{13/40} \approx \dfrac{6561}{19000} = 0.3453$

3) Un hombre está parado en un muelle y hala una lancha por medio de una cuerda. Sus manos están a 3 m por encima del amarre de la lancha. Cuando la lancha está a 4 m del muelle, el hombre está jalando la cuerda a una velocidad de 80 cm/s. ¿A qué velocidad se aproxima la lancha al muelle?



Instante:

$x = 4m$

$\frac{dz}{dt} = -0.8 \ m/s$

$z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

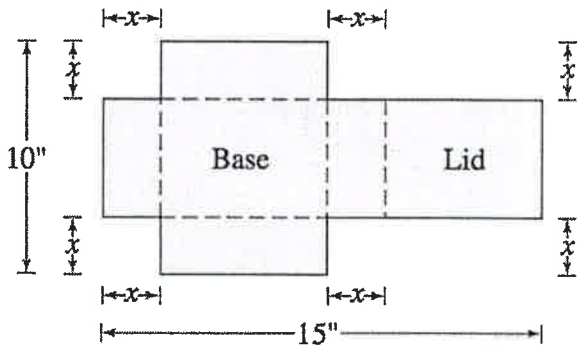
$$x^2 + 3^2 = z^2$$

$$\cancel{2}x \cdot \frac{dx}{dt} = \cancel{2}z \frac{dz}{dt}$$

$$4 \cdot \frac{dx}{dt} = 5(-0.8)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{10} = -\frac{2}{2} = -1 \ m/s$$

4) Una pieza de cartón mide 10 por 15 pulgadas. Como se ilustra en la figura, se han quitado dos cuadrados en las esquinas del lado que mide 10 pulgadas. Además, se han eliminado dos rectángulos de las otras dos esquinas, de manera que las cejas puedan doblarse para formar una caja rectangular con tapa. Calcule el volumen máximo.



Volumen máximo

$$V = \left(\frac{15-2x}{2}\right)(10-2x)(x)$$

$$V = (15-2x)(5-x)(x)$$

$$V = (15-2x)(5x-x^2)$$

$$V = 75x - 15x^2 - 10x^2 + 2x^3$$

$$V = 2x^3 - 25x^2 + 75x$$

$$V' = 6x^2 - 50x + 75 = 0$$

$$x = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 4(6)(75)}}{2(6)} = \frac{50 \pm 10\sqrt{7}}{12}$$

$$x_1 = \frac{25+5\sqrt{7}}{6} \simeq 6.3715$$

$$x_2 = \frac{25-5\sqrt{7}}{6} = 1.9619$$

Prueba de la 2ª Derivada

$$V'' = 12x - 50$$

$V''(6.3715) = 10\sqrt{7}$ ← Mínimo

$V''(1.9619) = -10\sqrt{7}$ ← Máximo

$$V = 2(1.9619)^3 - 25(1.9619)^2 + 75(1.9619)$$

$$V = 66.02 \text{ plg}^3$$

5) Haga el análisis de $f(x)$, completando los siguientes incisos:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \qquad f'(x) = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \qquad f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

a) Dominio

$\rightarrow$ D: $(-\infty, \infty)$

No hay valor que indefina el denominador

$$\rightarrow f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2+1} = -\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = -f(x)$$

Función impar

b) Intersecciones con los ejes

Eje x

$2x = 0$

$x = 0$

Eje y

$f(0) = 0$

$(0,0)$

c) Asíntotas (si las hay)

$$\rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$y = 0$ // Asíntota horizontal

Asíntotas verticales No hay porque $x^2+1 \neq 0$ para algún valor real

d) Extremos relativos e intervalos donde la función es creciente o decreciente.

e) Puntos de inflexión e intervalos donde la función es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba.

$\rightarrow f'(x) = 2(x^2-1) = 0$

$x = \pm 1$ Números críticos

$(x^2+1)^2 = 0$ No existe valor de x

$$\rightarrow f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0$$

$x = 0$

$x = \pm\sqrt{3}$

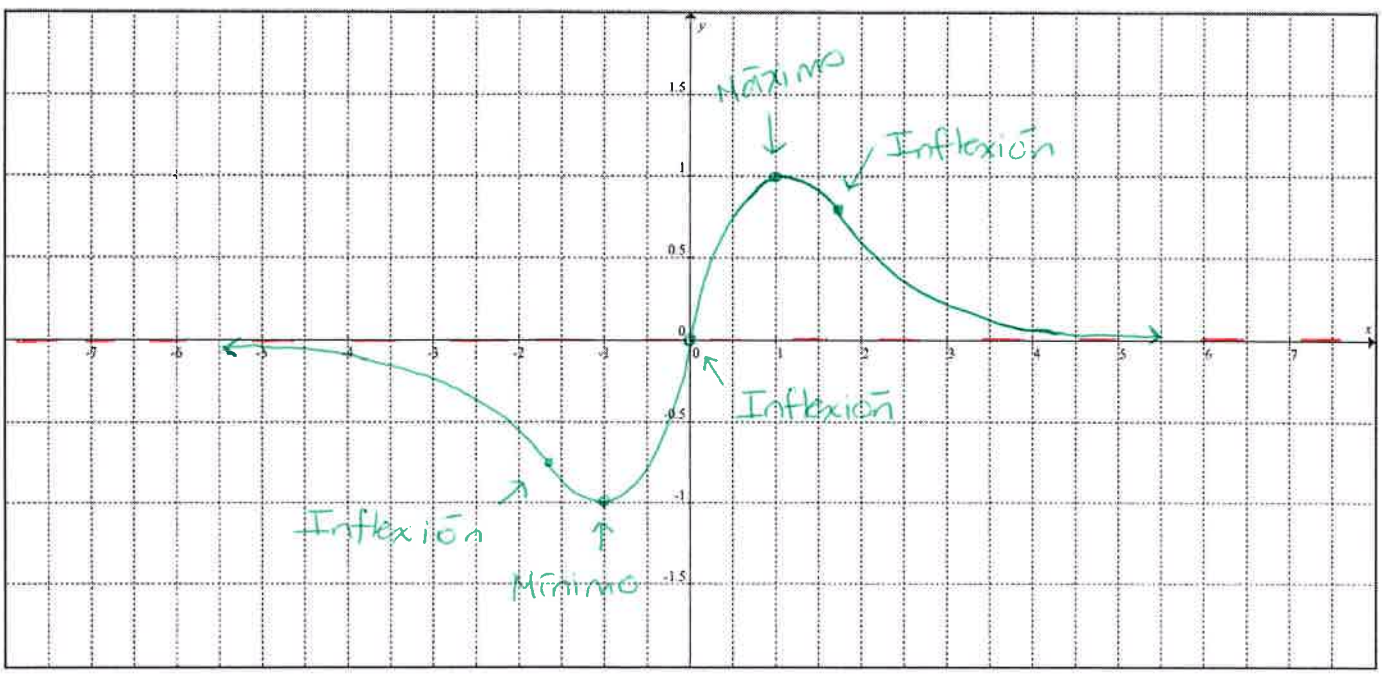
Posibles puntos de inflexión

$(x^2+1)^3 = 0$ No existe valor de x

→ Puede trabajarse con valores positivos solamente y luego hacer el reflejo sobre el origen, por tratarse de una función impar.

Intervalo	f(x)	f'(x)	f''(x)	Conclusión
$x=0$	0	+	0	Punto de Inflexión
$(0,1)$		+	−	↗ ∩
$x=1$	1	0	−	Máximo
$(1,\sqrt{3})$		−	−	↘ ∩
$x=\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2 \approx 0.87$	−	0	Pto. Inflexión
$(\sqrt{3},\infty)$		−	+	↘ ∪

f) Trace el esbozo de $f(x)$, tomando en cuenta los resultados de los incisos anteriores.



UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA – Cálculo 1 – **Simulacro 3** - Segundo ciclo de 2017 – **B**

Nombre: Clave Carnet: ________ Sección:_____ Auxiliar: ____________

Problema	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Punteo	/15	/15	/20	/25	/25	/100

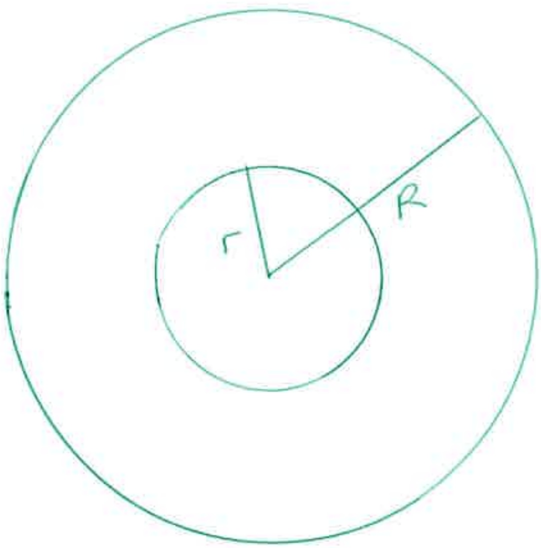
1. El período (en segundos) de un péndulo simple de longitud L es $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Calcule el cambio exacto en el periodo si L se incrementa de 4 metros a 5 metros. Luego use diferenciales para encontrar una aproximación al cambio en período. Suponga que $g = 9.8\,m/s^2$.

Versión A

2. Considere la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo $[1, 4]$. Verifique si se cumplen las hipótesis del teorema de *Rolle* y encuentre, si es posible, el valor c que cumple con la conclusión del teorema.

Versión C

3. El volumen V entre dos esferas concéntricas está en expansión. El radio de la esfera exterior crece a razón constante de 2 m/h, mientras el radio de la esfera interior disminuye a razón constante $\frac{1}{2}$ m/h. ¿A qué razón cambia V cuando el radio exterior es de 3 m y el radio interior es 1 m?



$\rightarrow \frac{dR}{dt} = 2 \, m/h$ $\qquad \rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2} \, m/h$

Instante

$R = 3m$

$r = 1m$

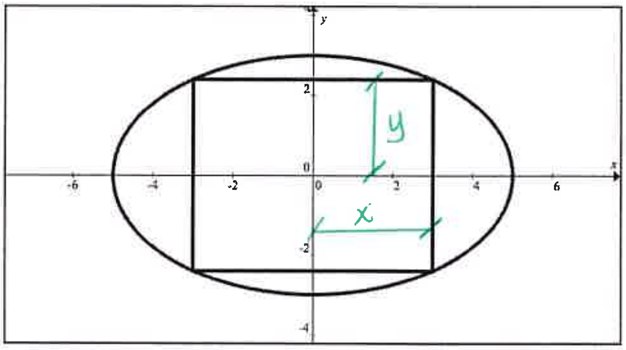
$\rightarrow \frac{dV}{dt} = ¿?$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3)$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2 \left(\frac{dR}{dt}\right) - 4\pi r^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi (3)^2 (2) - 4\pi (1)^2 (-1/2) = 4\pi \left[18 + 1/2\right] = 74\pi \, m^3/h$$

4. Determine las dimensiones del rectángulo (con lados paralelos a los ejes coordenados) de área máxima que se puede inscribir en la elipse con ecuación: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.



Ecuación

$$V = 2x \cdot 2y = 4xy = 4x \cdot 3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}} = 12x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}$$

Restricción

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad \frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{25} \qquad y=\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{25}\right)}=3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}$$

$$V' = 12\sqrt{1-\frac{x^2}{25}} + 12x \cdot \frac{\left(-\frac{\cancel{2}x}{25}\right)}{\cancel{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}} = \emptyset$$

$$\cancel{12}\sqrt{1-\frac{x^2}{25}} = \frac{\cancel{12}x^2}{25\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}} \rightarrow 25\left(1-\frac{x^2}{25}\right)=x^2 \rightarrow 25-x^2=x^2$$

$$2x^2=25$$

$$x=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Prueba de la 1ª Derivada

x	3	$\frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}54$	4
$f'(x)$	+	$\emptyset$	−
Conc.	↗	Máximo	↘

Dimensiones:

→ Ancho $= 2\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2}$ //

$$y = 3\sqrt{1-\frac{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}{25}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

→ Altura $= 2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}$ //

5. Dada la siguiente función, su primera y segunda derivadas, encuentre:

$$f(x) = x\sqrt{4-x} \qquad f'(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} \qquad f''(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3x-16}{\sqrt{(4-x)^3}}\right)$$

a) Dominio, interceptos con los ejes y asíntotas.

$4-x \geq 0$

$x \leq 4$

$D: (-\infty, 4]$

Interceptos

Eje x

$0 = x\sqrt{4-x}$

$x=0 \qquad \sqrt{4-x} = 0$

$4-x=0$

$x=4$

$(4,0) \qquad (0,0)$

Eje y

$f(0) = 0\sqrt{4-0} = 0$

Asíntotas

Verticales → no tiene

→ $\lim_{x\to\infty} x\sqrt{4-x}$ no existe → $D: (-\infty, 4]$

→ $\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{4-x} = -\infty$ no existe

Horizontales → no hay

b) Extremos relativos (indicando si son máximos o mínimos) y los intervalos donde la función crece y decrece.

c) Posibles puntos de inflexión y los intervalos de concavidad.

$f'(x) = \dfrac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = 0$

$x = 8/3$

$x = 4$

Números críticos

Fuera del dominio

$f''(x) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3x-16}{(\sqrt{4-x})^3}\right)$

$x = 16/3$

$x = 4$

Posibles puntos de inflexión (No hay)

Intervalo	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$(-\infty, 8/3)$		$+$	$-$	$\nearrow$ $\cap$
$x = 8/3$	$\frac{16\sqrt{3}}{9} \simeq 3.08$	$\emptyset$	$-$	Máximo
$(8/3, 4)$		$-$	$-$	$\searrow$ $\cap$

d) Trace la gráfica