Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

Denotaremos por E_{ij} a la transformación elemental que consiste en intercambiar entre sí las filas i-ésima y j-ésima.

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

Denotaremos por E_{ij} a la transformación elemental que consiste en intercambiar entre sí las filas i-ésima y j-ésima.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

Denotaremos por E_{ij} a la transformación elemental que consiste en intercambiar entre sí las filas i-ésima y j-ésima.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}}$$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

Denotaremos por E_{ij} a la transformación elemental que consiste en intercambiar entre sí las filas i-ésima y j-ésima.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 8 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

Denotaremos por $E_i(k)$ a la transformación elemental que consiste en multiplicar la fila i-ésima por el escalar k.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

Denotaremos por $E_i(k)$ a la transformación elemental que consiste en multiplicar la fila i-ésima por el escalar k.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(5)}$$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

Denotaremos por $E_i(k)$ a la transformación elemental que consiste en multiplicar la fila i-ésima por el escalar k.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(5)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 10 & 6 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

$E_{ij}(k)$ denotará la transformación elemental que consiste en sumarle a la fila i-ésima la fila j-ésima multiplicada por el escalar k.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

$E_{ij}(k)$ denotará la transformación elemental que consiste en sumarle a la fila i-ésima la fila j-ésima multiplicada por el escalar k.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(3)}$$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

$E_{ij}(k)$ denotará la transformación elemental que consiste en sumarle a la fila i-ésima la fila j-ésima multiplicada por el escalar k.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(3)}$$

$7 + 3 \cdot 1 = 10;$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

$E_{ij}(k)$ denotará la transformación elemental que consiste en sumarle a la fila i-ésima la fila j-ésima multiplicada por el escalar k.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(3)}$$

$7 + 3 \cdot 1 = 10; \quad 0 + 3 \cdot 5 = 4;$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

$E_{ij}(k)$ denotará la transformación elemental que consiste en sumarle a la fila i-ésima la fila j-ésima multiplicada por el escalar k.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(3)}$$

$7 + 3\cdot 1 = 10; \quad 0 + 3\cdot 5 = 4; \quad 2 + 3\cdot 3 = 0;$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

$E_{ij}(k)$ denotará la transformación elemental que consiste en sumarle a la fila i-ésima la fila j-ésima multiplicada por el escalar k.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(3)}$$

$7 + 3\cdot 1 = 10;\quad 0 + 3\cdot 5 = 4;\quad 2 + 3\cdot 3 = 0;\quad 10 + 3\cdot 9 = 4.$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

$E_{ij}(k)$ denotará la transformación elemental que consiste en sumarle a la fila i-ésima la fila j-ésima multiplicada por el escalar k.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 10 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$7 + 3\cdot 1 = 10; \quad 0 + 3\cdot 5 = 4; \quad 2 + 3\cdot 3 = 0; \quad 10 + 3\cdot 9 = 4.$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Vamos a tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

$E_{ij}(k)$ denotará la transformación elemental que consiste en sumarle a la fila i-ésima la fila j-ésima multiplicada por el escalar k.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 10 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

El cambio que se realiza en una matriz mediante una transformación elemental, se puede deshacer con otra transformación elemental.

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

El cambio que se realiza en una matriz mediante una transformación elemental, se puede deshacer con otra transformación elemental.
Si E es una transformación elemental, denotaremos por E^{-1} a la transformación elemental que deshace el cambio efectuado por E.

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

El cambio que se realiza en una matriz mediante una transformación elemental, se puede deshacer con otra transformación elemental.
Si E es una transformación elemental, denotaremos por E^{-1} a la transformación elemental que deshace el cambio efectuado por E.
Se tiene entonces que:

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

El cambio que se realiza en una matriz mediante una transformación elemental, se puede deshacer con otra transformación elemental.
Si E es una transformación elemental, denotaremos por E^{-1} a la transformación elemental que deshace el cambio efectuado por E.
Se tiene entonces que:

- $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$.

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

El cambio que se realiza en una matriz mediante una transformación elemental, se puede deshacer con otra transformación elemental.
Si E es una transformación elemental, denotaremos por E^{-1} a la transformación elemental que deshace el cambio efectuado por E.
Se tiene entonces que:

- $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$.
- $E_i(k)^{-1} = E_i(k^{-1})$.

Forma normal de Hermite. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Por una transformación elemental por filas en A entendemos cualquiera de las operaciones siguientes:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

El cambio que se realiza en una matriz mediante una transformación elemental, se puede deshacer con otra transformación elemental.
Si E es una transformación elemental, denotaremos por E^{-1} a la transformación elemental que deshace el cambio efectuado por E.
Se tiene entonces que:

- $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$.
- $E_i(k)^{-1} = E_i(k^{-1})$.
- $E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$.

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}}$$

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, llamamos E_{13} a la matriz $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(5)}$$

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego $E_2(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(3)}$$

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego $E_{32}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.
Esta notación puede ser ambigua.

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.
Esta notación puede ser ambigua.

Por ejemplo, con E_{23} podemos estar denotando tanto a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.
Esta notación puede ser ambigua.

Por ejemplo, con E_{23} podemos estar denotando tanto a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, como a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.
Esta notación puede ser ambigua.

Por ejemplo, con E_{23} podemos estar denotando tanto a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, como a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dependiendo si aplicamos la transformación E_{23} a la matriz identidad 4×4 o a la matriz identidad 3×3.

Forma normal de Hermite. Matrices elementales.

Sea $A \in M_n(K)$.
Decimos que A es una matriz elemental si A es el resultado de aplicarle una transformación elemental a la matriz identidad.
Tenemos entonces tres tipos de matrices elementales: uno por cada tipo de transformación elemental.
Vamos a denotar a las matrices elementales igual que a las transformaciones elementales de las que proceden.
Esta notación puede ser ambigua.

Por ejemplo, con E_{23} podemos estar denotando tanto a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, como a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dependiendo si aplicamos la transformación E_{23} a la matriz identidad 4×4 o a la matriz identidad 3×3.

Por tanto, cuando nombremos a una matriz elemental, debe quedar claro de que tamaño es la matriz.

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. Tomamos como matriz E la matriz E_{12}. Entonces:

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. Tomamos como matriz E la matriz E_{12}. Entonces:

$$E_{12} \cdot A \quad =$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. Tomamos como matriz E la matriz E_{12}. Entonces:

$$E_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. Tomamos como matriz E la matriz E_{12}. Entonces:

$$\begin{aligned} E_{12}\cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\cdot a_{11}+1\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 0\cdot a_{12}+1\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 0\cdot a_{13}+1\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 0\cdot a_{14}+1\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 1\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 1\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 1\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 1\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 0\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+1\cdot a_{31} & 0\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+1\cdot a_{32} & 0\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+1\cdot a_{33} & 0\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+1\cdot a_{34} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. Tomamos como matriz E la matriz E_{12}. Entonces:

$$\begin{aligned} E_{12}\cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\cdot a_{11}+1\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 0\cdot a_{12}+1\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 0\cdot a_{13}+1\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 0\cdot a_{14}+1\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 1\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 1\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 1\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 1\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 0\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+1\cdot a_{31} & 0\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+1\cdot a_{32} & 0\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+1\cdot a_{33} & 0\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+1\cdot a_{34} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. Tomamos como matriz E la matriz E_{12}. Entonces:

$$E_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. Tomamos como matriz E la matriz E_{12}. Entonces:

$$E_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. Tomamos como matriz E la matriz E_{12}. Entonces:

$$E_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. Tomamos como matriz E la matriz E_{12}. Entonces:

$$E_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E\cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. Tomamos como matriz E la matriz E_{12}. Entonces:

$$E_{12}\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Como vemos, la matriz $E_{12}\cdot A$ coincide con la matriz que resulta de aplicarle a la matriz A la transformación elemental por filas E_{12} (intercambiar las filas 1 y 2).

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Ahora tomamos como matriz elemental $E_3(4)$.

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Ahora tomamos como matriz elemental $E_3(4)$.

$$E_3(4) \cdot A \quad =$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Ahora tomamos como matriz elemental $E_3(4)$.

$$E_3(4) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Ahora tomamos como matriz elemental $E_3(4)$.

$$\begin{aligned} E_3(4)\cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 1\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 1\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 1\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 0\cdot a_{11}+1\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 0\cdot a_{12}+1\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 0\cdot a_{13}+1\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 0\cdot a_{14}+1\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 0\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+4\cdot a_{31} & 0\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+4\cdot a_{32} & 0\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+4\cdot a_{33} & 0\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+4\cdot a_{34} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

*Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.*

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Ahora tomamos como matriz elemental $E_3(4)$.

$$\begin{aligned} E_3(4)\cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 1\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 1\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 1\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 0\cdot a_{11}+1\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 0\cdot a_{12}+1\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 0\cdot a_{13}+1\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 0\cdot a_{14}+1\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 0\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+4\cdot a_{31} & 0\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+4\cdot a_{32} & 0\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+4\cdot a_{33} & 0\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+4\cdot a_{34} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 4\cdot a_{31} & 4\cdot a_{32} & 4\cdot a_{33} & 4\cdot a_{34} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Ahora tomamos como matriz elemental $E_3(4)$.

$$E_3(4) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 4 \cdot a_{31} & 4 \cdot a_{32} & 4 \cdot a_{33} & 4 \cdot a_{34} \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Ahora tomamos como matriz elemental $E_3(4)$.

$$E_3(4) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 4\cdot a_{31} & 4\cdot a_{32} & 4\cdot a_{33} & 4\cdot a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Ahora tomamos como matriz elemental $E_3(4)$.

$$E_3(4)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 4\cdot a_{31} & 4\cdot a_{32} & 4\cdot a_{33} & 4\cdot a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(4)}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Ahora tomamos como matriz elemental $E_3(4)$.

$$E_3(4)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 4\cdot a_{31} & 4\cdot a_{32} & 4\cdot a_{33} & 4\cdot a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(4)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 4\cdot a_{31} & 4\cdot a_{32} & 4\cdot a_{33} & 4\cdot a_{34} \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Ahora tomamos como matriz elemental $E_3(4)$.

$$E_3(4)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 4\cdot a_{31} & 4\cdot a_{32} & 4\cdot a_{33} & 4\cdot a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(4)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 4\cdot a_{31} & 4\cdot a_{32} & 4\cdot a_{33} & 4\cdot a_{34} \end{pmatrix}$$

Y vemos ahora cómo la matriz $E_3(4)\cdot A$ coincide con la matriz que resulta de aplicarle a la matriz A la transformación elemental por filas $E_3(4)$ (multiplicar la fila tercera por 4).

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Por último tomamos como matriz elemental $E_{31}(3)$.

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Por último tomamos como matriz elemental $E_{31}(3)$.

$$E_{31}(3) \cdot A \quad =$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Por último tomamos como matriz elemental $E_{31}(3)$.

$$E_{31}(3) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental. Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Por último tomamos como matriz elemental $E_{31}(3)$.

$$\begin{aligned} E_{31}(3)\cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 1\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 1\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 1\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 0\cdot a_{11}+1\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 0\cdot a_{12}+1\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 0\cdot a_{13}+1\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 0\cdot a_{14}+1\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 3\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+1\cdot a_{31} & 3\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+1\cdot a_{32} & 3\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+1\cdot a_{33} & 3\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+1\cdot a_{34} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Por último tomamos como matriz elemental $E_{31}(3)$.

$$\begin{aligned} E_{31}(3)\cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 1\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 1\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 1\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 0\cdot a_{11}+1\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 0\cdot a_{12}+1\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 0\cdot a_{13}+1\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 0\cdot a_{14}+1\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 3\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+1\cdot a_{31} & 3\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+1\cdot a_{32} & 3\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+1\cdot a_{33} & 3\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+1\cdot a_{34} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 3\cdot a_{11}+a_{31} & 3\cdot a_{12}+a_{32} & 3\cdot a_{13}a_{33} & 3\cdot a_{14}+a_{34} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Por último tomamos como matriz elemental $E_{31}(3)$.

$$
\begin{aligned}
E_{31}(3) \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 1\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 1\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 1\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 0\cdot a_{11}+1\cdot a_{21}+0\cdot a_{31} & 0\cdot a_{12}+1\cdot a_{22}+0\cdot a_{32} & 0\cdot a_{13}+1\cdot a_{23}+0\cdot a_{33} & 0\cdot a_{14}+{}^{o}\cdot a_{24}+0\cdot a_{34} \\ 3\cdot a_{11}+0\cdot a_{21}+1\cdot a_{31} & 3\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+1\cdot a_{32} & 3\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+1\cdot a_{33} & 3\cdot a_{14}+0\cdot a_{24}+1\cdot a_{34} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 3\cdot a_{11}+a_{31} & 3\cdot a_{12}+a_{32} & 3\cdot a_{13}a_{33} & 3\cdot a_{14}+a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}+3\cdot a_{11} & a_{32}+3\cdot a_{12} & a_{33}+3\cdot a_{13} & a_{34}+3\cdot a_{14} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Por último tomamos como matriz elemental $E_{31}(3)$.

$$E_{31}(3) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}+3\cdot a_{11} & a_{32}+3\cdot a_{12} & a_{33}+3\cdot a_{13} & a_{34}+3\cdot a_{14} \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Por último tomamos como matriz elemental $E_{31}(3)$.

$$E_{31}(3) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + 3 \cdot a_{11} & a_{32} + 3 \cdot a_{12} & a_{33} + 3 \cdot a_{13} & a_{34} + 3 \cdot a_{14} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

*Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.*

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Por último tomamos como matriz elemental $E_{31}(3)$.

$$E_{31}(3) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + 3 \cdot a_{11} & a_{32} + 3 \cdot a_{12} & a_{33} + 3 \cdot a_{13} & a_{34} + 3 \cdot a_{14} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(3)}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Por último tomamos como matriz elemental $E_{31}(3)$.

$$E_{31}(3) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}+3\cdot a_{11} & a_{32}+3\cdot a_{12} & a_{33}+3\cdot a_{13} & a_{34}+3\cdot a_{14} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(3)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}+3\cdot a_{11} & a_{32}+3\cdot a_{12} & a_{33}+3\cdot a_{13} & a_{34}+3\cdot a_{14} \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Por último tomamos como matriz elemental $E_{31}(3)$.

$$E_{31}(3) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}+3\cdot a_{11} & a_{32}+3\cdot a_{12} & a_{33}+3\cdot a_{13} & a_{34}+3\cdot a_{14} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(3)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}+3\cdot a_{11} & a_{32}+3\cdot a_{12} & a_{33}+3\cdot a_{13} & a_{34}+3\cdot a_{14} \end{pmatrix}$$

Y aquí también, la matriz $E_{31}(3) \cdot A$ coincide con la matriz que resulta de aplicarle a la matriz A la transformación elemental por filas $E_{31}(3)$ (a la tercera fila le sumamos la primera multiplicada por 3).

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ *y sea* $E \in M_m(K)$ *una matriz elemental.*
Entonces, la matriz $E \cdot A$ *es la matriz que resulta de aplicar en* A *la transformación elemental por filas* E.

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Si en lugar de multiplicar A por una matriz elemental a la izquierda multiplicamos por una matriz elemental a la derecha, el resultado es el mismo que si le aplicamos a A una transformación elemental por columnas.

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Si en lugar de multiplicar A por una matriz elemental a la izquierda multiplicamos por una matriz elemental a la derecha, el resultado es el mismo que si le aplicamos a A una transformación elemental por columnas.
Así, la matriz $A \cdot E_{ij}$ es la matriz que resulta de intercambiar en la matriz A las columnas i-ésima y j-ésima.

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Si en lugar de multiplicar A por una matriz elemental a la izquierda multiplicamos por una matriz elemental a la derecha, el resultado es el mismo que si le aplicamos a A una transformación elemental por columnas.
Así, la matriz $A \cdot E_{ij}$ es la matriz que resulta de intercambiar en la matriz A las columnas i-ésima y j-ésima.
La matriz $A \cdot E_i(k)$ es la matriz que resulta de multiplicar en A la columna i-ésima por el escalar k.

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Si en lugar de multiplicar A por una matriz elemental a la izquierda multiplicamos por una matriz elemental a la derecha, el resultado es el mismo que si le aplicamos a A una transformación elemental por columnas.
Así, la matriz $A \cdot E_{ij}$ es la matriz que resulta de intercambiar en la matriz A las columnas i-ésima y j-ésima.
La matriz $A \cdot E_i(k)$ es la matriz que resulta de multiplicar en A la columna i-ésima por el escalar k.
Y la matriz $A \cdot E_{ij}(k)$ es la matriz que resulta de sumarle a la columna j-ésima, la columna i-ésima previamente multiplicada por k.

Forma normal de Hermite. Multiplicación por matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y sea $E \in M_m(K)$ una matriz elemental.
Entonces, la matriz $E \cdot A$ es la matriz que resulta de aplicar en A la transformación elemental por filas E.

Si en lugar de multiplicar A por una matriz elemental a la izquierda multiplicamos por una matriz elemental a la derecha, el resultado es el mismo que si le aplicamos a A una transformación elemental por columnas.
Así, la matriz $A \cdot E_{ij}$ es la matriz que resulta de intercambiar en la matriz A las columnas i-ésima y j-ésima.
La matriz $A \cdot E_i(k)$ es la matriz que resulta de multiplicar en A la columna i-ésima por el escalar k.
Y la matriz $A \cdot E_{ij}(k)$ es la matriz que resulta de sumarle a la columna j-ésima, la columna i-ésima previamente multiplicada por k.
Notemos que $E_{ij}(k) \cdot A$ es la matriz que resulta de sumarle ala fila i-ésima, la columna j-ésima multiplicada por k.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote de cada fila no nula vale 1.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es escalonada reducida por filas.

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es escalonada reducida por filas.

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No es escalonada reducida por filas.

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No es escalonada reducida por filas. Debajo de una fila nula (la tercera) hay una fila que es distinta de cero.

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

No es escalonada reducida por filas.

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

No es escalonada reducida por filas. En la columna tercera hay un pivote, y el resto de elementos de la columna no son todos nulos.

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

No es escalonada reducida por filas.

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

No es escalonada reducida por filas. El pivote de la última fila no vale 1 *(vale* 2*).*

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite. Matriz escalonada reducida.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Se dice que A es escalonada reducida por filas si:

- Debajo de una fila nula no hay filas distintas de cero.
- El pivote[1] de cada fila no nula vale 1.
- El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila que la precede.
- En las columnas en que haya un pivote, el resto de elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es escalonada reducida por filas.

[1] El pivote de una fila es el primer elemento de la fila que es distinto de cero.

Forma normal de Hermite.

Teorema

Forma normal de Hermite.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.

Forma normal de Hermite.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Existe una única matriz escalonada reducida por filas a la que podemos llegar a partir de A *realizando transformaciones elementales por filas.*

Forma normal de Hermite.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Existe una única matriz escalonada reducida por filas a la que podemos llegar a partir de A realizando transformaciones elementales por filas.

Dada $A \in M_{m\times n}(K)$, a la única matriz escalonada reducida por filas que se puede obtener a partir de A realizando transformaciones elementales por filas la llamaremos la **Forma normal de Hermite de A**.

Forma normal de Hermite.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Existe una única matriz escalonada reducida por filas a la que podemos llegar a partir de A realizando transformaciones elementales por filas.

Dada $A \in M_{m\times n}(K)$, a la única matriz escalonada reducida por filas que se puede obtener a partir de A realizando transformaciones elementales por filas la llamaremos la **Forma normal de Hermite de A**. Denotaremos a esta matriz como H_A.

Forma normal de Hermite.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Existe una única matriz escalonada reducida por filas a la que podemos llegar a partir de A realizando transformaciones elementales por filas.

Dada $A \in M_{m\times n}(K)$, a la única matriz escalonada reducida por filas que se puede obtener a partir de A realizando transformaciones elementales por filas la llamaremos la **Forma normal de Hermite de A**. Denotaremos a esta matriz como H_A.

El **rango de A** es el número de filas distintas de cero de la forma normal de Hermite de A.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tratamos de que el pivote de la primera fila sea 1.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tratamos de que el pivote de la primera fila sea 1.
Podemos, para eso, multiplicar la primera fila por $3^{-1} = 5$ o a la primera fila restarle la segunda.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tratamos de que el pivote de la primera fila sea 1.
Podemos, para eso, multiplicar la primera fila por $3^{-1} = 5$ o a la primera fila restarle la segunda.
Elegimos la primera opción.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tratamos de que el pivote de la primera fila sea 1.
Podemos, para eso, multiplicar la primera fila por $3^{-1} = 5$ o a la primera fila restarle la segunda.
Elegimos la primera opción.
$5(3\ 5\ 2) = (15\ 25\ 10) = (1\ 4\ 3)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tratamos de que el pivote de la primera fila sea 1.
Podemos, para eso, multiplicar la primera fila por $3^{-1} = 5$ o a la primera fila restarle la segunda.
Elegimos la primera opción.
$5(3\ 5\ 2) = (15\ 25\ 10) = (1\ 4\ 3)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora buscamos que el primer elemento de la segunda fila sea 0.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora buscamos que el primer elemento de la segunda fila sea 0.
A la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por 5.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora buscamos que el primer elemento de la segunda fila sea 0.
A la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por 5.
$(2\ 1\ 4) + 5(1\ 4\ 3)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora buscamos que el primer elemento de la segunda fila sea 0.
A la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por 5.
$(2\ 1\ 4) + 5(1\ 4\ 3) = (2+5\cdot 1\ \ 1+5\cdot 4\ \ 4+5\cdot 3) = (7\ 21\ 19)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora buscamos que el primer elemento de la segunda fila sea 0.
A la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por 5.
$(2\ 1\ 4) + 5(1\ 4\ 3) = (2+5\cdot 1\ \ 1+5\cdot 4\ \ 4+5\cdot 3) = (7\ 21\ 19) = (0\ 0\ 5)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora buscamos que el primer elemento de la segunda fila sea 0.
A la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por 5.
$(2\ 1\ 4) + 5(1\ 4\ 3) = (2 + 5\cdot 1\ \ 1 + 5\cdot 4\ \ 4 + 5\cdot 3) = (7\ 21\ 19) = (0\ 0\ 5)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

El pivote de la segunda fila debe valer 1.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

El pivote de la segunda fila debe valer 1.
Para conseguirlo, no podemos hacer intervenir a la primera fila, pues en tal caso, desharíamos lo que ya tenemos.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

El pivote de la segunda fila debe valer 1.
Para conseguirlo, no podemos hacer intervenir a la primera fila, pues en tal caso, desharíamos lo que ya tenemos.
Multiplicamos, entonces, la segunda fila por $5^{-1} = 3$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

El pivote de la segunda fila debe valer 1.
Para conseguirlo, no podemos hacer intervenir a la primera fila, pues en tal caso, desharíamos lo que ya tenemos.
Multiplicamos, entonces, la segunda fila por $5^{-1} = 3$.
$3 \cdot (0\ 0\ 5) = (0\ 0\ 1)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El pivote de la segunda fila debe valer 1.
Para conseguirlo, no podemos hacer intervenir a la primera fila, pues en tal caso, desharíamos lo que ya tenemos.
Multiplicamos, entonces, la segunda fila por $5^{-1} = 3$.
$3 \cdot (0\ 0\ 5) = (0\ 0\ 1)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último, en la tercera columna, en la que hay un pivote, el resto de elementos deben ser 0.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último, en la tercera columna, en la que hay un pivote, el resto de elementos deben ser 0. Entonces, a la primera fila le sumamos la segunda multiplicada por 4.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último, en la tercera columna, en la que hay un pivote, el resto de elementos deben ser 0.
Entonces, a la primera fila le sumamos la segunda multiplicada por 4.
$(1\ 4\ 3) + 4 \cdot (0\ 0\ 1) = (1\ 4\ 0)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último, en la tercera columna, en la que hay un pivote, el resto de elementos deben ser 0.
Entonces, a la primera fila le sumamos la segunda multiplicada por 4.
$(1\ 4\ 3) + 4 \cdot (0\ 0\ 1) = (1\ 4\ 0)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último, en la tercera columna, en la que hay un pivote, el resto de elementos deben ser 0.
Entonces, a la primera fila le sumamos la segunda multiplicada por 4.
$(1\ 4\ 3) + 4 \cdot (0\ 0\ 1) = (1\ 4\ 0)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada vez que hemos realizado una transformación elemental, y de acuerdo con lo que vimos en una diapositiva anterior, hemos multiplicado por una matriz elemental a la izquierda.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada vez que hemos realizado una transformación elemental, y de acuerdo con lo que vimos en una diapositiva anterior, hemos multiplicado por una matriz elemental a la izquierda.
Tenemos, por tanto que:

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada vez que hemos realizado una transformación elemental, y de acuerdo con lo que vimos en una diapositiva anterior, hemos multiplicado por una matriz elemental a la izquierda.
Tenemos, por tanto que:

$$E_1(5) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada vez que hemos realizado una transformación elemental, y de acuerdo con lo que vimos en una diapositiva anterior, hemos multiplicado por una matriz elemental a la izquierda.
Tenemos, por tanto que:

$$E_1(5) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad E_{21}(5) \cdot (E_1(5) \cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada vez que hemos realizado una transformación elemental, y de acuerdo con lo que vimos en una diapositiva anterior, hemos multiplicado por una matriz elemental a la izquierda.
Tenemos, por tanto que:

$$E_1(5)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad E_{21}(5)\cdot (E_1(5)\cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E_3(3)\cdot (E_{21}(5)\cdot E_1(5)\cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada vez que hemos realizado una transformación elemental, y de acuerdo con lo que vimos en una diapositiva anterior, hemos multiplicado por una matriz elemental a la izquierda.
Tenemos, por tanto que:

$$E_1(5)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad E_{21}(5)\cdot(E_1(5)\cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E_3(3)\cdot(E_{21}(5)\cdot E_1(5)\cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{12}(4)\cdot(E_2(3)\cdot E_{21}(5)\cdot E_1(5)\cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea P la matriz $E_{12}(4) \cdot E_2(3) \cdot E_{21}(5) \cdot E_1(5)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea P la matriz $E_{12}(4) \cdot E_2(3) \cdot E_{21}(5) \cdot E_1(5)$.
Acabamos de ver que $P \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea P la matriz $E_{12}(4) \cdot E_2(3) \cdot E_{21}(5) \cdot E_1(5)$.
Acabamos de ver que $P \cdot A = H_A$.
Además, puesto que $P = (E_{12}(4)E_2(3)E_{21}(5)E_1(5)) \cdot Id$, podemos obtener P multiplicando la identidad por matrices elementales a la izquierda.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea P la matriz $E_{12}(4) \cdot E_2(3) \cdot E_{21}(5) \cdot E_1(5)$.
Acabamos de ver que $P \cdot A = H_A$.
Además, puesto que $P = (E_{12}(4)E_2(3)E_{21}(5)E_1(5)) \cdot Id$, podemos obtener P multiplicando la identidad por matrices elementales a la izquierda.
O lo que es lo mismo, realizando transformaciones elementales por filas a partir de la identidad.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea P la matriz $E_{12}(4) \cdot E_2(3) \cdot E_{21}(5) \cdot E_1(5)$.
Acabamos de ver que $P \cdot A = H_A$.
Además, puesto que $P = (E_{12}(4)E_2(3)E_{21}(5)E_1(5)) \cdot Id$, podemos obtener P multiplicando la identidad por matrices elementales a la izquierda.
O lo que es lo mismo, realizando transformaciones elementales por filas a partir de la identidad.
Concretamente, las mismas transformaciones que hemos realizado en A para obtener H_A.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)}$$

$5(1\ 0) = (5\ 0)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)}$$

$$(0\ 1) + 5(5\ 0) = (0\ 1) + (25\ 0) = (25\ 1) = (4\ 1)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)}$$

$3(4\ 1) = (12\ 3) = (5\ 3)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)}$$

$$(5\ 0) + 4(5\ 3) = (5\ 0) + (20\ 3) = (25\ 3) = (4\ 3)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(5)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $P \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

En resumen:

Forma normal de Hermite. Ejemplo

En resumen:
Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite es $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y
$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

En resumen:
Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite es $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = H_A$.

La matriz $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ se ha obtenido realizando en la matriz Id las mismas transformaciones elementales que hemos realizado en A para obtener H_A.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

En resumen:
Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite es $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = H_A$.

La matriz $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ se ha obtenido realizando en la matriz Id las mismas transformaciones elementales que hemos realizado en A para obtener H_A.
Además, si en P realizamos las inversas de estas transformaciones elementales llegaremos al punto de partida, es decir, a la matriz identidad.

Forma normal de Hermite. Ejemplo

En resumen:
Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite es $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y
$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = H_A$.

La matriz $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ se ha obtenido realizando en la matriz Id las mismas transformaciones elementales que hemos realizado en A para obtener H_A.
Además, si en P realizamos las inversas de estas transformaciones elementales llegaremos al punto de partida, es decir, a la matriz identidad. Teniendo en cuenta cuáles son las inversas de cada una de las transformaciones elementales, lo que tenemos es que:

Forma normal de Hermite. Ejemplo

En resumen:
Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite es $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = H_A$.

La matriz $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ se ha obtenido realizando en la matriz Id las mismas transformaciones elementales que hemos realizado en A para obtener H_A.
Además, si en P realizamos las inversas de estas transformaciones elementales llegaremos al punto de partida, es decir, a la matriz identidad. Teniendo en cuenta cuáles son las inversas de cada una de las transformaciones elementales, lo que tenemos es que:

$$[E_1(5^{-1}) \cdot E_{21}(-5) \cdot E_2(3^{-1}) \cdot E_{12}(-4)] \cdot P = Id.$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo

En resumen:
Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite es $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = H_A$.

La matriz $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ se ha obtenido realizando en la matriz Id las mismas transformaciones elementales que hemos realizado en A para obtener H_A.
Además, si en P realizamos las inversas de estas transformaciones elementales llegaremos al punto de partida, es decir, a la matriz identidad. Teniendo en cuenta cuáles son las inversas de cada una de las transformaciones elementales, lo que tenemos es que:

$$[E_1(5^{-1}) \cdot E_{21}(-5) \cdot E_2(3^{-1}) \cdot E_{12}(-4)] \cdot P = Id.$$

Y por tanto, la matriz P es regular (tiene inversa).

Forma normal de Hermite. Ejemplo

En resumen:
Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite es $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = H_A$.

La matriz $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ se ha obtenido realizando en la matriz Id las mismas transformaciones elementales que hemos realizado en A para obtener H_A.
Además, si en P realizamos las inversas de estas transformaciones elementales llegaremos al punto de partida, es decir, a la matriz identidad. Teniendo en cuenta cuáles son las inversas de cada una de las transformaciones elementales, lo que tenemos es que:

$$[E_1(5^{-1}) \cdot E_{21}(-5) \cdot E_2(3^{-1}) \cdot E_{12}(-4)] \cdot P = Id.$$

Y por tanto, la matriz P es regular (tiene inversa).
Todo esto que hemos visto en este ejemplo, se puede hacer en general.

Forma normal de Hermite.

Teorema

Forma normal de Hermite.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$, y sea H_A su forma normal de Hermite.

Forma normal de Hermite.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$, *y sea* H_A *su forma normal de Hermite.*
Existe una matriz $P \in M_m(K)$, *regular, tal que* $P \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$, y sea H_A su forma normal de Hermite.
Existe una matriz $P \in M_m(K)$, regular, tal que $P \cdot A = H_A$.

Esta matriz, como hemos visto en el ejemplo anterior, puede calcularse si realizamos en la matriz Id_m las mismas transformaciones que realizamos en A para calcular H_A.

Forma normal de Hermite.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$, y sea H_A su forma normal de Hermite.
Existe una matriz $P \in M_m(K)$, regular, tal que $P \cdot A = H_A$.

Esta matriz, como hemos visto en el ejemplo anterior, puede calcularse si realizamos en la matriz Id_m las mismas transformaciones que realizamos en A para calcular H_A.
Aunque la forma de Hermite de una matriz sea única, la matriz P cuya existencia nos asegura el teorema no tiene porqué serlo.

Forma normal de Hermite.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$, y sea H_A su forma normal de Hermite.
Existe una matriz $P \in M_m(K)$, regular, tal que $P \cdot A = H_A$.

Esta matriz, como hemos visto en el ejemplo anterior, puede calcularse si realizamos en la matriz Id_m las mismas transformaciones que realizamos en A para calcular H_A.
Aunque la forma de Hermite de una matriz sea única, la matriz P cuya existencia nos asegura el teorema no tiene porqué serlo.
La unicidad se tiene únicamente en el caso de que el rango de A sea igual al número de filas de A.

Forma normal de Hermite.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$, y sea H_A su forma normal de Hermite.
Existe una matriz $P \in M_m(K)$, regular, tal que $P \cdot A = H_A$.

Esta matriz, como hemos visto en el ejemplo anterior, puede calcularse si realizamos en la matriz Id_m las mismas transformaciones que realizamos en A para calcular H_A.
Aunque la forma de Hermite de una matriz sea única, la matriz P cuya existencia nos asegura el teorema no tiene porqué serlo.
La unicidad se tiene únicamente en el caso de que el rango de A sea igual al número de filas de A.
A continuación vamos a ver varios ejemplos de cálculo de la forma normal de Hermite, y de la matriz P.

Forma normal de Hermite.

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$, y sea H_A su forma normal de Hermite.
Existe una matriz $P \in M_m(K)$, regular, tal que $P \cdot A = H_A$.

Esta matriz, como hemos visto en el ejemplo anterior, puede calcularse si realizamos en la matriz Id_m las mismas transformaciones que realizamos en A para calcular H_A.
Aunque la forma de Hermite de una matriz sea única, la matriz P cuya existencia nos asegura el teorema no tiene porqué serlo.
La unicidad se tiene únicamente en el caso de que el rango de A sea igual al número de filas de A.
A continuación vamos a ver varios ejemplos de cálculo de la forma normal de Hermite, y de la matriz P.
El cálculo de la forma normal de Hermite lo haremos de izquierda a derecha.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Nos fijamos en la primera columna, y tratamos de colocar un 1 en la posición superior.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Nos fijamos en la primera columna, y tratamos de colocar un 1 en la posición superior.
Podemos hacerlo, multiplicando la primera fila por 2, o bien restándole a la primera fila la segunda (o lo que es lo mismo, sumándole a la primera fila la segunda multiplicada por 6).

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Nos fijamos en la primera columna, y tratamos de colocar un 1 en la posición superior.
Podemos hacerlo, multiplicando la primera fila por 2, o bien restándole a la primera fila la segunda (o lo que es lo mismo, sumándole a la primera fila la segunda multiplicada por 6).
Ahora elegimos la segunda opción.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)}$$

Nos fijamos en la primera columna, y tratamos de colocar un 1 en la posición superior.
Podemos hacerlo, multiplicando la primera fila por 2, o bien restándole a la primera fila la segunda (o lo que es lo mismo, sumándole a la primera fila la segunda multiplicada por 6).
Ahora elegimos la segunda opción.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)}$$

Nos fijamos en la primera columna, y tratamos de colocar un 1 en la posición superior.
Podemos hacerlo, multiplicando la primera fila por 2, o bien restándole a la primera fila la segunda (o lo que es lo mismo, sumándole a la primera fila la segunda multiplicada por 6).
Ahora elegimos la segunda opción.
$(4\ 1) + 6(3\ 2) = (4\ 1) + (18\ 12) = (22\ 13) = (1\ 6)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Nos fijamos en la primera columna, y tratamos de colocar un 1 en la posición superior.
Podemos hacerlo, multiplicando la primera fila por 2, o bien restándole a la primera fila la segunda (o lo que es lo mismo, sumándole a la primera fila la segunda multiplicada por 6).
Ahora elegimos la segunda opción.
$(4\ 1) + 6(3\ 2) = (4\ 1) + (18\ 12) = (22\ 13) = (1\ 6)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos cero en el resto de la columna.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos cero en el resto de la columna.
Para eso, a la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por 4.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)}$$

Ahora hacemos cero en el resto de la columna.
Para eso, a la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por 4.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)}$$

Ahora hacemos cero en el resto de la columna.
Para eso, a la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por 4.
$(3\ 2) + 4\ (1\ 6) = (3\ 2) + (4\ 24) = (0\ 5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos cero en el resto de la columna.
Para eso, a la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por 4.
$(3\ 2) + 4\ (1\ 6) = (3\ 2) + (4\ 24) = (0\ 5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

El segundo pivote debe valer 1.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

El segundo pivote debe valer 1.
Multiplicamos la segunda fila por 3.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)}$$

El segundo pivote debe valer 1.
Multiplicamos la segunda fila por 3.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El segundo pivote debe valer 1.
Multiplicamos la segunda fila por 3.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y ahora, hacemos cero el resto de elementos de la segunda columna.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y ahora, hacemos cero el resto de elementos de la segunda columna.
A la primera fila, le sumamos la segunda (multiplicada por 1).

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)}$$

Y ahora, hacemos cero el resto de elementos de la segunda columna.
A la primera fila, le sumamos la segunda (multiplicada por 1).

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y ahora, hacemos cero el resto de elementos de la segunda columna.
A la primera fila, le sumamos la segunda (multiplicada por 1).

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La forma normal de Hermite de A es

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La forma normal de Hermite de A es

$$\mathbf{H_A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos en la identidad las mismas operaciones elementales que hemos hecho en A.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos en la identidad las mismas operaciones elementales que hemos hecho en A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos en la identidad las mismas operaciones elementales que hemos hecho en A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos en la identidad las mismas operaciones elementales que hemos hecho en A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos en la identidad las mismas operaciones elementales que hemos hecho en A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos en la identidad las mismas operaciones elementales que hemos hecho en A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos en la identidad las mismas operaciones elementales que hemos hecho en A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos en la identidad las mismas operaciones elementales que hemos hecho en A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos en la identidad las mismas operaciones elementales que hemos hecho en A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos en la identidad las mismas operaciones elementales que hemos hecho en A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos en la identidad las mismas operaciones elementales que hemos hecho en A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Y hemos obtenido una matriz $P = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos en la identidad las mismas operaciones elementales que hemos hecho en A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Y hemos obtenido una matriz $P = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Podemos comprobar que $P \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos en la identidad las mismas operaciones elementales que hemos hecho en A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Y hemos obtenido una matriz $P = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Podemos comprobar que $P \cdot A = H_A$.

En este caso, y puesto que $H_A = Id$, tenemos que $P = A^{-1}$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

La forma de Hermite de A hemos visto que es $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

La forma de Hermite de A hemos visto que es $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puesto que H_A tiene dos filas distintas de cero, tenemos que $rg(A) = 2$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

La forma de Hermite de A hemos visto que es $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puesto que H_A tiene dos filas distintas de cero, tenemos que $rg(A) = 2$.
Además, como el rango de A coincide con el número de filas, entonces hay una única matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo I.

Comenzamos con un ejemplo sencillo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$

La forma de Hermite de A hemos visto que es $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puesto que H_A tiene dos filas distintas de cero, tenemos que $rg(A) = 2$.
Además, como el rango de A coincide con el número de filas, entonces hay una única matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.

Esta matriz ya la hemos calculado y vale $P = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ponemos un 1 en la primera posición de la primera columna.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ponemos un 1 en la primera posición de la primera columna. Esto lo conseguimos sumando las dos primeras filas.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)}$$

$E_{12}(1)$

Ponemos un 1 en la primera posición de la primera columna. Esto lo conseguimos sumando las dos primeras filas.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E_{12}(1)$$

Ponemos un 1 en la primera posición de la primera columna. Esto lo conseguimos sumando las dos primeras filas.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E_{12}(1)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E_{12}(1)$$

Hacemos cero el resto de elementos de la primera columna.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E_{12}(1)$$

Hacemos cero el resto de elementos de la primera columna.
Para esto, a la segunda fila le sumamos la primera, y a la tercera se la restamos.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_{21}(1)\\E_{31}(-1)}]{}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$

Hacemos cero el resto de elementos de la primera columna.
Para esto, a la segunda fila le sumamos la primera, y a la tercera se la restamos.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{E_{21}(1) \\ E_{31}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$

Hacemos cero el resto de elementos de la primera columna.
Para esto, a la segunda fila le sumamos la primera, y a la tercera se la restamos.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} E_{12}(1) \\ E_{21}(1) \\ E_{31}(-1) \end{matrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} E_{12}(1) \\ E_{21}(1) \\ E_{31}(-1) \end{array}$$

Ahora hay que hacer uno el segundo pivote.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$

Ahora hay que hacer uno el segundo pivote.

A la segunda fila, le sumamos la tercera multiplicada por 2.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(2)}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$

Ahora hay que hacer uno el segundo pivote.
A la segunda fila, le sumamos la tercera multiplicada por 2.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$

Ahora hay que hacer uno el segundo pivote.
A la segunda fila, le sumamos la tercera multiplicada por 2.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$

A la primera, le restamos la segunda multiplicada por 3, y a la tercera, le sumamos la segunda multiplicada por 2.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{12}(-3)}{\xrightarrow{E_{32}(2)}}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$

A la primera, le restamos la segunda multiplicada por 3, y a la tercera, le sumamos la segunda multiplicada por 2.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(2)]{E_{12}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$

A la primera, le restamos la segunda multiplicada por 3, y a la tercera, le sumamos la segunda multiplicada por 2.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$

Dividimos la última fila por 11.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/11)}$$

Dividimos la última fila por 11.

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/11)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$

Dividimos la última fila por 11.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

A la primera fila, le sumamos la tercera multiplicada por 13 y a la segunda le restamos la tercera multiplicada por 5.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(-5)]{E_{13}(13)}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

A la primera fila, le sumamos la tercera multiplicada por 13 y a la segunda le restamos la tercera multiplicada por 5.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{E_{13}(13) \\ E_{23}(-5)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

A la primera fila, le sumamos la tercera multiplicada por 13 y a la segunda le restamos la tercera multiplicada por 5.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Calculamos una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.
Para esto, realizamos en la identidad las mismas transformaciones que hemos hecho en A, y que tenemos anotadas a la derecha.

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 0\ 0) + 1 \cdot (0\ 1\ 0) = (1\ 1\ 0)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 0\ 0) + 1 \cdot (0\ 1\ 0) = (1\ 1\ 0)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(0\ 1\ 0) + 1 \cdot (1\ 1\ 0) = (1\ 2\ 0)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(0\ 1\ 0) + 1 \cdot (1\ 1\ 0) = (1\ 2\ 0)$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(0\ 0\ 1) - 1\cdot(1\ 1\ 0) = (-1\ \ -1\ 1)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(0\ 0\ 1) - 1 \cdot (1\ 1\ 0) = (-1\ \ -1\ 1)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 2\ 0) + 2\cdot(-1\ \ -1\ 1) = (-1\ 0\ 2)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 2\ 0) + 2\cdot(-1\ \ -1\ 1) = (-1\ 0\ 2)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 1\ 0) - 3\cdot(-1\ 0\ 2) = (4\ 1\ \ -6)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 1\ 0) - 3 \cdot (-1\ 0\ 2) = (4\ 1\ \ -6)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(-1 \ \ -1 \ 1) + 2\cdot(-1 \ 0 \ 2) = (-3 \ \ -1 \ 5)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(-1\ \ -1\ 1) + 2\cdot(-1\ 0\ 2) = (-3\ \ -1\ 5)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{11}(-3 \ \ -1 \ \ 5) = \left(\tfrac{-3}{11} \ \ \tfrac{-1}{11} \ \ \tfrac{5}{11}\right)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{-3}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{11}(-3 \quad -1 \; 5) = (\tfrac{-3}{11} \;\; \tfrac{-1}{11} \;\; \tfrac{5}{11})$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{-3}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{-3}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

$$(4\ 1\ -6) + 13 \cdot \left(\tfrac{-3}{11}\ \ \tfrac{-1}{11}\ \ \tfrac{5}{11}\right) = \left(\tfrac{5}{11}\ \ \tfrac{-2}{11}\ \ \tfrac{-1}{11}\right)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-1}{11} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{-3}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

$$(4\ 1\ \ -6) + 13 \cdot \left(\tfrac{-3}{11}\ \ \tfrac{-1}{11}\ \ \tfrac{5}{11}\right) = \left(\tfrac{5}{11}\ \ \tfrac{-2}{11}\ \ \tfrac{-1}{11}\right)$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-1}{11} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{-3}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_3(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-1}{11} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{-3}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

$$(-1\ 0\ 2) - 5 \cdot \left(\tfrac{-3}{11}\ \tfrac{-1}{11}\ \tfrac{5}{11}\right) = \left(\tfrac{4}{11}\ \tfrac{5}{11}\ \tfrac{-3}{11}\right)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{-3}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

$$(-1\ 0\ 2) - 5 \cdot \left(\tfrac{-3}{11}\ \ \tfrac{-1}{11}\ \ \tfrac{5}{11}\right) = \left(\tfrac{4}{11}\ \ \tfrac{5}{11}\ \ \tfrac{-3}{11}\right)$$

$E_{12}(1)$
$E_{21}(1)$
$E_{31}(-1)$
$E_{23}(2)$
$E_{12}(-3)$
$E_{32}(2)$
$E_{3}(1/11)$
$E_{13}(13)$
$E_{23}(-5)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.
Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{-3}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo II.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite.

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{-3}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Forma normal de Hermite.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.

Forma normal de Hermite.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Supongamos que queremos calcular su forma normal de Hermite, H_A, y una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Supongamos que queremos calcular su forma normal de Hermite, H_A, y una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.
En lugar de calcular primero H_A, y después la matriz P, como hemos hecho hasta ahora, realizaremos los cálculos a la vez.

Forma normal de Hermite.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Supongamos que queremos calcular su forma normal de Hermite, H_A, y una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.
En lugar de calcular primero H_A, y después la matriz P, como hemos hecho hasta ahora, realizaremos los cálculos a la vez.
Para esto, formamos la matriz $B = (A|Id) \in M_{m\times(n+m)}(K)$.

Forma normal de Hermite.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Supongamos que queremos calcular su forma normal de Hermite, H_A, y una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.
En lugar de calcular primero H_A, y después la matriz P, como hemos hecho hasta ahora, realizaremos los cálculos a la vez.
Para esto, formamos la matriz $B = (A|Id) \in M_{m\times(n+m)}(K)$.
Es decir, las primeras n columnas de B son las columnas de A y las últimas m columnas de B son las columnas de la matriz identidad $m \times m$.

Forma normal de Hermite.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Supongamos que queremos calcular su forma normal de Hermite, H_A, y una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.
En lugar de calcular primero H_A, y después la matriz P, como hemos hecho hasta ahora, realizaremos los cálculos a la vez.
Para esto, formamos la matriz $B = (A|Id) \in M_{m\times(n+m)}(K)$.
Es decir, las primeras n columnas de B son las columnas de A y las últimas m columnas de B son las columnas de la matriz identidad $m \times m$.
Calculamos H_B, la forma normal de Hermite de B.

Forma normal de Hermite.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Supongamos que queremos calcular su forma normal de Hermite, H_A, y una matriz P tal que $P\cdot A = H_A$.
En lugar de calcular primero H_A, y después la matriz P, como hemos hecho hasta ahora, realizaremos los cálculos a la vez.
Para esto, formamos la matriz $B = (A|Id) \in M_{m\times(n+m)}(K)$.
Es decir, las primeras n columnas de B son las columnas de A y las últimas m columnas de B son las columnas de la matriz identidad $m\times m$.
Calculamos H_B, la forma normal de Hermite de B.
Las primeras n columnas de H_B son las columnas de H_A.

Forma normal de Hermite.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Supongamos que queremos calcular su forma normal de Hermite, H_A, y una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.
En lugar de calcular primero H_A, y después la matriz P, como hemos hecho hasta ahora, realizaremos los cálculos a la vez.
Para esto, formamos la matriz $B = (A|Id) \in M_{m\times(n+m)}(K)$.
Es decir, las primeras n columnas de B son las columnas de A y las últimas m columnas de B son las columnas de la matriz identidad $m \times m$.
Calculamos H_B, la forma normal de Hermite de B.
Las primeras n columnas de H_B son las columnas de H_A.
Las últimas m columnas de H_B son las columnas de P.

Forma normal de Hermite.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Supongamos que queremos calcular su forma normal de Hermite, H_A, y una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.
En lugar de calcular primero H_A, y después la matriz P, como hemos hecho hasta ahora, realizaremos los cálculos a la vez.
Para esto, formamos la matriz $B = (A|Id) \in M_{m\times(n+m)}(K)$.
Es decir, las primeras n columnas de B son las columnas de A y las últimas m columnas de B son las columnas de la matriz identidad $m \times m$.
Calculamos H_B, la forma normal de Hermite de B.
Las primeras n columnas de H_B son las columnas de H_A.
Las últimas m columnas de H_B son las columnas de P.
Es decir, $H_B = (H_A|P)$.

Forma normal de Hermite.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Supongamos que queremos calcular su forma normal de Hermite, H_A, y una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.
En lugar de calcular primero H_A, y después la matriz P, como hemos hecho hasta ahora, realizaremos los cálculos a la vez.
Para esto, formamos la matriz $B = (A|Id) \in M_{m\times(n+m)}(K)$.
Es decir, las primeras n columnas de B son las columnas de A y las últimas m columnas de B son las columnas de la matriz identidad $m \times m$.
Calculamos H_B, la forma normal de Hermite de B.
Las primeras n columnas de H_B son las columnas de H_A.
Las últimas m columnas de H_B son las columnas de P.
Es decir, $H_B = (H_A|P)$.
Realmente, no es necesario obtener la forma normal de Hermite de B.

Forma normal de Hermite.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.
Supongamos que queremos calcular su forma normal de Hermite, H_A, y una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.
En lugar de calcular primero H_A, y después la matriz P, como hemos hecho hasta ahora, realizaremos los cálculos a la vez.
Para esto, formamos la matriz $B = (A|Id) \in M_{m\times(n+m)}(K)$.
Es decir, las primeras n columnas de B son las columnas de A y las últimas m columnas de B son las columnas de la matriz identidad $m \times m$.
Calculamos H_B, la forma normal de Hermite de B.
Las primeras n columnas de H_B son las columnas de H_A.
Las últimas m columnas de H_B son las columnas de P.
Es decir, $H_B = (H_A|P)$.
Realmente, no es necesario obtener la forma normal de Hermite de B.
Basta llegar a una matriz cuyas primeras n columnas formen una matriz escalonada reducida por filas.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_1(3)$: $\quad 3 \cdot (2\ 1\ 3\ 4\ 1\ 0\ 0) = (1\ 3\ 4\ 2\ 3\ 0\ 0)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_1(3)$: $\qquad 3 \cdot (2\ 1\ 3\ 4\ 1\ 0\ 0) = (1\ 3\ 4\ 2\ 3\ 0\ 0)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{21}(1):\qquad (4\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0) + (1\ 3\ 4\ 2\ 3\ 0\ 0) = (0\ 0\ 0\ 3\ 3\ 1\ 0)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{21}(1):\qquad (4\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0) + (1\ 3\ 4\ 2\ 3\ 0\ 0) = (0\ 0\ 0\ 3\ 3\ 1\ 0)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{31}(1):\qquad (4\ 0\ 2\ 2\ 0\ 0\ 1) + (1\ 3\ 4\ 2\ 3\ 0\ 0) = (0\ 3\ 1\ 4\ 3\ 0\ 1)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{31}(1):$ $\qquad (4\ 0\ 2\ 2\ 0\ 0\ 1) + (1\ 3\ 4\ 2\ 3\ 0\ 0) = (0\ 3\ 1\ 4\ 3\ 0\ 1)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{23}(2): \qquad (0\ 0\ 0\ 3\ 3\ 1\ 0) + 2\cdot(0\ 3\ 1\ 4\ 3\ 0\ 1) = (0\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 2)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{23}(2):\qquad (0\ 0\ 0\ 3\ 3\ 1\ 0) + 2\cdot(0\ 3\ 1\ 4\ 3\ 0\ 1) = (0\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 2)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} E_{12}(2): & (1\ 3\ 4\ 2\ 3\ 0\ 0) + 2\cdot(0\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 2) = (1\ 0\ 3\ 4\ 1\ 2\ 4) \\ E_{32}(2): & (0\ 3\ 1\ 4\ 3\ 0\ 1) + 2\cdot(0\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 2) = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0) \end{array}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(2)$: $(1\ 3\ 4\ 2\ 3\ 0\ 0) + 2 \cdot (0\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 2) = (1\ 0\ 3\ 4\ 1\ 2\ 4)$

$E_{32}(2)$: $(0\ 3\ 1\ 4\ 3\ 0\ 1) + 2 \cdot (0\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 2) = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{13}(1): \quad (1\ 0\ 3\ 4\ 1\ 2\ 4) + (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0) = (1\ 0\ 3\ 0\ 2\ 4\ 4)$

$E_{23}(4): \quad (0\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 2) + 4\cdot(0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0) = (0\ 1\ 2\ 0\ 3\ 4\ 2)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} E_{13}(1): & (1\ 0\ 3\ 4\ 1\ 2\ 4) + (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0) = (1\ 0\ 3\ 0\ 2\ 4\ 4) \\ E_{23}(4): & (0\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 2) + 4\cdot(0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0) = (0\ 1\ 2\ 0\ 3\ 4\ 2) \end{array}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Con esto, tenemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P tal y como hemos explicado en la diapositiva anterior.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Con esto, tenemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y la matriz P para la que $P \cdot A = H_A$ es

$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1): \qquad (2\ 1\ 3\ 4\ 1\ 0\ 0) + (4\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0) = (1\ 3\ 4\ 0\ 1\ 1\ 0)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(1):\qquad (2\ 1\ 3\ 4\ 1\ 0\ 0) + (4\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0) = (1\ 3\ 4\ 0\ 1\ 1\ 0)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} E_{21}(1): & (4\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0) + (1\ 3\ 4\ 0\ 1\ 1\ 0) = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0) \\ E_{31}(1): & (4\ 0\ 2\ 2\ 0\ 0\ 1) + (1\ 3\ 4\ 0\ 1\ 1\ 0) = (0\ 3\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1) \end{array}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} E_{21}(1): & (4\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0) + (1\ 3\ 4\ 0\ 1\ 1\ 0) = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0) \\ E_{31}(1): & (4\ 0\ 2\ 2\ 0\ 0\ 1) + (1\ 3\ 4\ 0\ 1\ 1\ 0) = (0\ 3\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1) \end{array}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

E_{23}

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

E_{23}

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(-1)$: $\qquad (1\ 3\ 4\ 0\ 1\ 1\ 0) - (0\ 3\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1) = (1\ 0\ 3\ \ -2\ 0\ 0\ \ -1) = (1\ 0\ 3\ 3\ 0\ 0\ 4)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(-1):$ $\quad (1\ 3\ 4\ 0\ 1\ 1\ 0) - (0\ 3\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1) = (1\ 0\ 3\ \ -2\ 0\ 0\ \ -1) = (1\ 0\ 3\ 3\ 0\ 0\ 4)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_2(2)$: $\qquad 2 \cdot (0\ 3\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1) = (0\ 1\ 2\ 4\ 2\ 2\ 2)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_2(2)$: $\qquad 2 \cdot (0\ 3\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1) = (0\ 1\ 2\ 4\ 2\ 2\ 2)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{13}(2)$: $\quad (1\ 0\ 3\ 3\ 0\ 0\ 4) + 2 \cdot (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0) = (1\ 0\ 3\ 0\ 2\ 4\ 4)$
$E_{23}(1)$: $\quad (0\ 1\ 2\ 4\ 2\ 2\ 2) + (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0) = (0\ 1\ 2\ 0\ 3\ 4\ 2)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{13}(2)$: $(1\ 0\ 3\ 3\ 0\ 0\ 4) + 2 \cdot (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0) = (1\ 0\ 3\ 0\ 2\ 4\ 4)$

$E_{23}(1)$: $(0\ 1\ 2\ 4\ 2\ 2\ 2) + (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0) = (0\ 1\ 2\ 0\ 3\ 4\ 2)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo III.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sabemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y que para la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $P \cdot A = H_A$.

Vamos a calcular otra vez H_A y la matriz P, pero realizando otras transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Y vemos como en ambos casos llegamos al mismo resultado.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_1(2)$: $\qquad 2 \cdot (3\ 4\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0) = (1\ 3\ 2\ 0\ 2\ 0\ 0)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_1(2)$: $\qquad 2 \cdot (3\ 4\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0) = (1\ 3\ 2\ 0\ 2\ 0\ 0)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{21}(3)$: $\quad (2\ 1\ 3\ 2\ 0\ 1\ 0) + 3 \cdot (1\ 3\ 2\ 0\ 2\ 0\ 0) = (0\ 0\ 4\ 2\ 1\ 1\ 0)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{21}(3): \qquad (2\ 1\ 3\ 2\ 0\ 1\ 0) + 3 \cdot (1\ 3\ 2\ 0\ 2\ 0\ 0) = (0\ 0\ 4\ 2\ 1\ 1\ 0)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{31}(1)$: $\qquad (4\ 2\ 4\ 3\ 0\ 0\ 1) + 1 \cdot (1\ 3\ 2\ 0\ 2\ 0\ 0) = (0\ 0\ 1\ 3\ 2\ 0\ 1)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}(1): \qquad (4\ 2\ 4\ 3\ 0\ 0\ 1) + 1 \cdot (1\ 3\ 2\ 0\ 2\ 0\ 0) = (0\ 0\ 1\ 3\ 2\ 0\ 1)$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E_{23}

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.
Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.
Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E_{23}

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(3)$: $\qquad (1\ 3\ 2\ 0\ 2\ 0\ 0) + 3 \cdot (0\ 0\ 1\ 3\ 2\ 0\ 1) = (1\ 3\ 0\ 4\ 3\ 0\ 3)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(3)$: $\qquad (1\ 3\ 2\ 0\ 2\ 0\ 0) + 3 \cdot (0\ 0\ 1\ 3\ 2\ 0\ 1) = (1\ 3\ 0\ 4\ 3\ 0\ 3)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{32}(1):\qquad (0\ 0\ 4\ 2\ 1\ 1\ 0) + 1\cdot(0\ 0\ 1\ 3\ 2\ 0\ 1) = (0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 1\ 1)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{32}(1):$ $\quad (0\ 0\ 4\ 2\ 1\ 1\ 0) + 1 \cdot (0\ 0\ 1\ 3\ 2\ 0\ 1) = (0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 1\ 1)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} E_{13}(4): & (1\ 3\ 0\ 4\ 3\ 0\ 3) + 4 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 1\ 1) = (1\ 3\ 0\ 4\ 0\ 4\ 2) \\ E_{23}(1): & (0\ 0\ 1\ 3\ 2\ 0\ 1) + 1 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 1\ 1) = (0\ 0\ 1\ 3\ 0\ 1\ 2) \end{array}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{13}(4)$: $\quad (1\ 3\ 0\ 4\ 3\ 0\ 3) + 4 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 1\ 1) = (1\ 3\ 0\ 4\ 0\ 4\ 2)$

$E_{23}(1)$: $\quad (0\ 0\ 1\ 3\ 2\ 0\ 1) + 1 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 1\ 1) = (0\ 0\ 1\ 3\ 0\ 1\ 2)$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_3(2)$: $\qquad 2 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 1\ 1) = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$E_3(2)$: $\qquad 2 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 1\ 1) = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2)$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Al igual que en el ejemplo precedente, vamos a calcular su forma normal de Hermite H_A y una matriz P para la que $P \cdot A = H_A$.

Formamos la matriz $B = (A|Id)$, y sobre ella realizamos operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Tenemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Tenemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y si $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $P \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Tenemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y si $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $P \cdot A = H_A$.

Notemos que en las últimas transformaciones, las cuatro primeras columnas no se han modificado.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Tenemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y si $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $P \cdot A = H_A$.

Notemos que en las últimas transformaciones, las cuatro primeras columnas no se han modificado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{13}(4) \\ E_{23}(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Tenemos que $H_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y si $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $P \cdot A = H_A$.

Notemos que en las últimas transformaciones, las cuatro primeras columnas no se han modificado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(1)]{E_{13}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Podríamos entonces haber tomado $P_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ o $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, y tendríamos que

$P_1 \cdot A = P_2 \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Para las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ o $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, hemos visto que $P \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Para las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ o $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, hemos visto que

$P \cdot A = H_A$.

Esto ocurre por que al ser el rango de A menor que el número de filas de A ($\mathrm{rg}(A) = 2$), hay varias matrices P para las que $P \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Para las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ o $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, hemos visto que $P \cdot A = H_A$.

Esto ocurre por que al ser el rango de A menor que el número de filas de A ($\mathrm{rg}(A) = 2$), hay varias matrices P para las que $P \cdot A = H_A$.

Concretamente, para esta matriz A hay 125 matrices P. Son todas las matrices de la forma:

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Para las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ o $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, hemos visto que $P \cdot A = H_A$.

Esto ocurre por que al ser el rango de A menor que el número de filas de A ($\mathrm{rg}(A) = 2$), hay varias matrices P para las que $P \cdot A = H_A$.

Concretamente, para esta matriz A hay 125 matrices P. Son todas las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & 4+2a & 2+2a \\ b & 1+2b & 2+2b \\ c & 2c & 2c \end{pmatrix}; \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_5.$$

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Para las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ o $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, hemos visto que $P \cdot A = H_A$.

Esto ocurre por que al ser el rango de A menor que el número de filas de A ($\mathrm{rg}(A) = 2$), hay varias matrices P para las que $P \cdot A = H_A$.

Concretamente, para esta matriz A hay 125 matrices P. Son todas las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & 4+2a & 2+2a \\ b & 1+2b & 2+2b \\ c & 2c & 2c \end{pmatrix}; \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_5.$$

De estas 125 matrices, hay 100 que son regulares (aquellas para las que $c \neq 0$), y 25 que no lo son (aquellas en las que $c = 0$).

Forma normal de Hermite. Ejemplo de cálculo IV.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

Para las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ o $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, hemos visto que $P \cdot A = H_A$.

Esto ocurre por que al ser el rango de A menor que el número de filas de A ($\mathrm{rg}(A) = 2$), hay varias matrices P para las que $P \cdot A = H_A$.

Concretamente, para esta matriz A hay 125 matrices P. Son todas las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & 4+2a & 2+2a \\ b & 1+2b & 2+2b \\ c & 2c & 2c \end{pmatrix}; \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_5.$$

De estas 125 matrices, hay 100 que son regulares (aquellas para las que $c \neq 0$), y 25 que no lo son (aquellas en las que $c = 0$). Para $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$ obtenemos la primera matriz, para $a = 3$, $b = 2$, $c = 3$ la segunda y para $a = 0$, $b = 0$, $c = 3$ la tercera.

Forma normal de Hermite: Matrices regulares.

Teorema

Forma normal de Hermite: Matrices regulares.

Teorema

Sea $A \in M_n(K)$. Son equivalentes:

Forma normal de Hermite: Matrices regulares.

Teorema

Sea $A \in M_n(K)$. Son equivalentes:

- *A es regular (es decir, A es invertible).*

Forma normal de Hermite: Matrices regulares.

Teorema

Sea $A \in M_n(K)$. Son equivalentes:

- *A es regular (es decir, A es invertible).*
- *La forma de Hermite de A es la identidad ($H_A = Id$).*

Forma normal de Hermite: Matrices regulares.

Teorema

Sea $A \in M_n(K)$. Son equivalentes:

- *A es regular (es decir, A es invertible).*
- *La forma de Hermite de A es la identidad ($H_A = Id$).*
- *$rg(A) = n$.*

Forma normal de Hermite: Matrices regulares.

Teorema

Sea $A \in M_n(K)$. Son equivalentes:

- *A es regular (es decir, A es invertible).*
- *La forma de Hermite de A es la identidad ($H_A = Id$).*
- *$rg(A) = n$.*

Este teorema nos proporciona un criterio para saber si una matriz tiene o no inversa.

Forma normal de Hermite: Matrices regulares.

Teorema

Sea $A \in M_n(K)$. Son equivalentes:

- *A es regular (es decir, A es invertible).*
- *La forma de Hermite de A es la identidad ($H_A = Id$).*
- *$rg(A) = n$.*

Este teorema nos proporciona un criterio para saber si una matriz tiene o no inversa.
Además, en el caso de que una matriz tenga inversa, sabemos encontrar una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.

Forma normal de Hermite: Matrices regulares.

Teorema

Sea $A \in M_n(K)$. Son equivalentes:

- *A es regular (es decir, A es invertible).*
- *La forma de Hermite de A es la identidad ($H_A = Id$).*
- *$rg(A) = n$.*

Este teorema nos proporciona un criterio para saber si una matriz tiene o no inversa.
Además, en el caso de que una matriz tenga inversa, sabemos encontrar una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.
Y como $H_A = Id$, lo que conseguimos es una matriz P tal que $P \cdot A = Id$.

Forma normal de Hermite: Matrices regulares.

Teorema

Sea $A \in M_n(K)$. Son equivalentes:

- *A es regular (es decir, A es invertible).*
- *La forma de Hermite de A es la identidad ($H_A = Id$).*
- *$rg(A) = n$.*

Este teorema nos proporciona un criterio para saber si una matriz tiene o no inversa.
Además, en el caso de que una matriz tenga inversa, sabemos encontrar una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.
Y como $H_A = Id$, lo que conseguimos es una matriz P tal que $P \cdot A = Id$.
Por tanto, $P = A^{-1}$.

Forma normal de Hermite: Matrices regulares.

Teorema

Sea $A \in M_n(K)$. Son equivalentes:

- *A es regular (es decir, A es invertible).*
- *La forma de Hermite de A es la identidad ($H_A = Id$).*
- *$rg(A) = n$.*

Este teorema nos proporciona un criterio para saber si una matriz tiene o no inversa.
Además, en el caso de que una matriz tenga inversa, sabemos encontrar una matriz P tal que
$P \cdot A = H_A$.
Y como $H_A = Id$, lo que conseguimos es una matriz P tal que $P \cdot A = Id$.
Por tanto, $P = A^{-1}$.
Dicho de otra forma, sea $A \in M_n(K)$ y $B = (A|Id) \in M_{n\times 2n}(K)$.

Forma normal de Hermite: Matrices regulares.

Teorema

Sea $A \in M_n(K)$. Son equivalentes:

- *A es regular (es decir, A es invertible).*
- *La forma de Hermite de A es la identidad ($H_A = Id$).*
- *$rg(A) = n$.*

Este teorema nos proporciona un criterio para saber si una matriz tiene o no inversa.
Además, en el caso de que una matriz tenga inversa, sabemos encontrar una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.
Y como $H_A = Id$, lo que conseguimos es una matriz P tal que $P \cdot A = Id$.
Por tanto, $P = A^{-1}$.
Dicho de otra forma, sea $A \in M_n(K)$ y $B = (A|Id) \in M_{n\times 2n}(K)$.
Si $H_B = (Id|P)$ entonces A es regular y $A^{-1} = P$.

Forma normal de Hermite: Matrices regulares.

Teorema

Sea $A \in M_n(K)$. Son equivalentes:

- *A es regular (es decir, A es invertible).*
- *La forma de Hermite de A es la identidad ($H_A = Id$).*
- *$rg(A) = n$.*

Este teorema nos proporciona un criterio para saber si una matriz tiene o no inversa.
Además, en el caso de que una matriz tenga inversa, sabemos encontrar una matriz P tal que $P \cdot A = H_A$.
Y como $H_A = Id$, lo que conseguimos es una matriz P tal que $P \cdot A = Id$.
Por tanto, $P = A^{-1}$.
Dicho de otra forma, sea $A \in M_n(K)$ y $B = (A|Id) \in M_{n\times 2n}(K)$.
Si $H_B = (Id|P)$ entonces A es regular y $A^{-1} = P$.
Vamos a hacer un ejemplo de cálculo de la matriz inversa.

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.

Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E_{12}

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{21}(3): \quad (4\ 2\ 6\ 5\ 1\ 0\ 0\ 0) + 3 \cdot (1\ 5\ 6\ 3\ 0\ 1\ 0\ 0) = (0\ 3\ 3\ 0\ 1\ 3\ 0\ 0)$
$E_{41}(4): \quad (3\ 6\ 4\ 5\ 0\ 0\ 0\ 1) + 4 \cdot (1\ 5\ 6\ 3\ 0\ 1\ 0\ 0) = (0\ 5\ 0\ 3\ 0\ 4\ 0\ 1)$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{21}(3)$: $\quad (4\ 2\ 6\ 5\ 1\ 0\ 0\ 0) + 3 \cdot (1\ 5\ 6\ 3\ 0\ 1\ 0\ 0) = (0\ 3\ 3\ 0\ 1\ 3\ 0\ 0)$
$E_{41}(4)$: $\quad (3\ 6\ 4\ 5\ 0\ 0\ 0\ 1) + 4 \cdot (1\ 5\ 6\ 3\ 0\ 1\ 0\ 0) = (0\ 5\ 0\ 3\ 0\ 4\ 0\ 1)$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_2(5): \quad 5 \cdot (0\ 3\ 3\ 0\ 1\ 3\ 0\ 0) = (0\ 1\ 1\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0)$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.

Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_2(5): \quad 5 \cdot (0\ 3\ 3\ 0\ 1\ 3\ 0\ 0) = (0\ 1\ 1\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0)$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} E_{12}(2): & (1\ 5\ 6\ 3\ 0\ 1\ 0\ 0) + 2\cdot(0\ 1\ 1\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0) = (1\ 0\ 1\ 3\ 3\ 3\ 0\ 0) \\ E_{32}(3): & (0\ 4\ 2\ 5\ 0\ 0\ 1\ 0) + 3\cdot(0\ 1\ 1\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0) = (0\ 0\ 5\ 5\ 1\ 3\ 1\ 0) \\ E_{42}(2): & (0\ 5\ 0\ 3\ 0\ 4\ 0\ 1) + 2\cdot(0\ 1\ 1\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0) = (0\ 0\ 2\ 3\ 3\ 6\ 0\ 1) \end{array}$$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{12}(2): \quad (1\ 5\ 6\ 3\ 0\ 1\ 0\ 0) + 2 \cdot (0\ 1\ 1\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0) = (1\ 0\ 1\ 3\ 3\ 3\ 0\ 0)$
$E_{32}(3): \quad (0\ 4\ 2\ 5\ 0\ 0\ 1\ 0) + 3 \cdot (0\ 1\ 1\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0) = (0\ 0\ 5\ 5\ 1\ 3\ 1\ 0)$
$E_{42}(2): \quad (0\ 5\ 0\ 3\ 0\ 4\ 0\ 1) + 2 \cdot (0\ 1\ 1\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0) = (0\ 0\ 2\ 3\ 3\ 6\ 0\ 1)$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_3(3): \quad 3 \cdot (0\ 0\ 5\ 5\ 1\ 3\ 1\ 0) = (0\ 0\ 1\ 1\ 3\ 2\ 1\ 0)$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_3(3): \quad 3 \cdot (0\ 0\ 5\ 5\ 1\ 3\ 1\ 0) = (0\ 0\ 1\ 1\ 3\ 2\ 1\ 0)$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} E_{13}(6): & (1\ 0\ 1\ 3\ 3\ 3\ 0\ 0) + 6\cdot(0\ 0\ 1\ 1\ 3\ 2\ 3\ 0) = (1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 1\ 4\ 0) \\ E_{23}(6): & (0\ 1\ 1\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0) + 6\cdot(0\ 0\ 1\ 1\ 3\ 2\ 3\ 0) = (0\ 1\ 0\ 6\ 2\ 6\ 4\ 0) \\ E_{43}(5): & (0\ 0\ 2\ 3\ 3\ 6\ 0\ 1) + 5\cdot(0\ 0\ 1\ 1\ 3\ 2\ 3\ 0) = (0\ 0\ 0\ 1\ 4\ 2\ 1\ 1) \end{array}$$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{13}(6)$: $(1\ 0\ 1\ 3\ 3\ 3\ 0\ 0) + 6 \cdot (0\ 0\ 1\ 1\ 3\ 2\ 3\ 0) = (1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 1\ 4\ 0)$
$E_{23}(6)$: $(0\ 1\ 1\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0) + 6 \cdot (0\ 0\ 1\ 1\ 3\ 2\ 3\ 0) = (0\ 1\ 0\ 6\ 2\ 6\ 4\ 0)$
$E_{43}(5)$: $(0\ 0\ 2\ 3\ 3\ 6\ 0\ 1) + 5 \cdot (0\ 0\ 1\ 1\ 3\ 2\ 3\ 0) = (0\ 0\ 0\ 1\ 4\ 2\ 1\ 1)$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{14}(5)$: $(1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 1\ 4\ 0) + 5 \cdot (0\ 0\ 0\ 1\ 4\ 2\ 1\ 1) = (1\ 0\ 0\ 0\ 6\ 4\ 2\ 5)$
$E_{24}(1)$: $(0\ 1\ 0\ 6\ 2\ 6\ 4\ 0) + 1 \cdot (0\ 0\ 0\ 1\ 4\ 2\ 1\ 1) = (0\ 1\ 0\ 0\ 6\ 1\ 5\ 1)$
$E_{34}(6)$: $(0\ 0\ 1\ 1\ 3\ 2\ 3\ 0) + 6 \cdot (0\ 0\ 0\ 1\ 4\ 2\ 1\ 1) = (0\ 0\ 1\ 0\ 6\ 0\ 2\ 6)$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.
Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.
Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{14}(5): \quad (1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 1\ 4\ 0) + 5 \cdot (0\ 0\ 0\ 1\ 4\ 2\ 1\ 1) = (1\ 0\ 0\ 0\ 6\ 4\ 2\ 5)$
$E_{24}(1): \quad (0\ 1\ 0\ 6\ 2\ 6\ 4\ 0) + 1 \cdot (0\ 0\ 0\ 1\ 4\ 2\ 1\ 1) = (0\ 1\ 0\ 0\ 6\ 1\ 5\ 1)$
$E_{34}(6): \quad (0\ 0\ 1\ 1\ 3\ 2\ 3\ 0) + 6 \cdot (0\ 0\ 0\ 1\ 4\ 2\ 1\ 1) = (0\ 0\ 1\ 0\ 6\ 0\ 2\ 6)$

Forma normal de Hermite. Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Vamos a ver si A es regular, y en caso afirmativo, vamos a calcular su inversa.

Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz $B = (A|Id)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego A es regular y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones.

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones.

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$.
Si realizamos operaciones elementales en esta matriz, obtenemos una nueva matriz.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones.

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$.
Si realizamos operaciones elementales en esta matriz, obtenemos una nueva matriz.
Esta nueva matriz es la matriz ampliada de un nuevo sistema de ecuaciones.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones.

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$.
Si realizamos operaciones elementales en esta matriz, obtenemos una nueva matriz.
Esta nueva matriz es la matriz ampliada de un nuevo sistema de ecuaciones.
Ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes, es decir, tienen las mismas soluciones.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones.

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$.
Si realizamos operaciones elementales en esta matriz, obtenemos una nueva matriz.
Esta nueva matriz es la matriz ampliada de un nuevo sistema de ecuaciones.
Ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes, es decir, tienen las mismas soluciones.
Para resolver un sistema de ecuaciones:

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones.

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$.
Si realizamos operaciones elementales en esta matriz, obtenemos una nueva matriz.
Esta nueva matriz es la matriz ampliada de un nuevo sistema de ecuaciones.
Ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes, es decir, tienen las mismas soluciones.
Para resolver un sistema de ecuaciones:

Escribiremos la matriz ampliada del sistema.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones.

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$.
Si realizamos operaciones elementales en esta matriz, obtenemos una nueva matriz.
Esta nueva matriz es la matriz ampliada de un nuevo sistema de ecuaciones.
Ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes, es decir, tienen las mismas soluciones.
Para resolver un sistema de ecuaciones:

Escribiremos la matriz ampliada del sistema.

Calcularemos su forma normal de Hermite.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones.

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$.
Si realizamos operaciones elementales en esta matriz, obtenemos una nueva matriz.
Esta nueva matriz es la matriz ampliada de un nuevo sistema de ecuaciones.
Ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes, es decir, tienen las mismas soluciones.
Para resolver un sistema de ecuaciones:

Escribiremos la matriz ampliada del sistema.

Calcularemos su forma normal de Hermite.

Volveremos a un nuevo sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada sea la obtenida.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones.

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$.
Si realizamos operaciones elementales en esta matriz, obtenemos una nueva matriz.
Esta nueva matriz es la matriz ampliada de un nuevo sistema de ecuaciones.
Ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes, es decir, tienen las mismas soluciones.
Para resolver un sistema de ecuaciones:

Escribiremos la matriz ampliada del sistema.
Calcularemos su forma normal de Hermite.
Volveremos a un nuevo sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada sea la obtenida.
De ese sistema de ecuaciones, sacaremos las soluciones (si las tiene).

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones.

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$.
Si realizamos operaciones elementales en esta matriz, obtenemos una nueva matriz.
Esta nueva matriz es la matriz ampliada de un nuevo sistema de ecuaciones.
Ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes, es decir, tienen las mismas soluciones.
Para resolver un sistema de ecuaciones:

Escribiremos la matriz ampliada del sistema.
Calcularemos su forma normal de Hermite.
Volveremos a un nuevo sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada sea la obtenida.
De ese sistema de ecuaciones, sacaremos las soluciones (si las tiene).

Esta forma de resolver un sistema se conoce como método de Gauss-Jordan.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones.

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$.
Si realizamos operaciones elementales en esta matriz, obtenemos una nueva matriz.
Esta nueva matriz es la matriz ampliada de un nuevo sistema de ecuaciones.
Ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes, es decir, tienen las mismas soluciones.
Para resolver un sistema de ecuaciones:

Escribiremos la matriz ampliada del sistema.
Calcularemos su forma normal de Hermite.
Volveremos a un nuevo sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada sea la obtenida.
De ese sistema de ecuaciones, sacaremos las soluciones (si las tiene).

Esta forma de resolver un sistema se conoce como método de Gauss-Jordan.
Veamos algunos ejemplos.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones II.

Consideramos el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones II.

Consideramos el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & y & + & 3z & = & 2 \end{array}\right.$$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones II.

Consideramos el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & y & + & 3z & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones II.

Consideramos el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & y & + & 3z & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones II.

Consideramos el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & y & + & 3z & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

El sistema inicial es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccl} x & & & = & 4 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones II.

Consideramos el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & y & + & 3z & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

El sistema inicial es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 4 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

El sistema es entonces compatible determinado, y la solución es $x = 4$, $y = 0$, $z = 1$.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones III.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones III.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 4x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones III.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 4x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones III.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 4x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones III.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 4x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
El sistema inicial es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & & & = & 3 \\ & & & & z & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{es decir,} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2y \\ z = 4 \end{array}\right.$$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones III.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 4x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El sistema inicial es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 3y & & = & 3 \\ & & & z & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{es decir,} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2y \\ z = 4 \end{array}\right.$$

Para cada valor de y tenemos una solución, luego el sistema es compatible indeterminado, y tiene 5 soluciones.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones III.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 4x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El sistema inicial es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & & & = & 3 \\ & & & & z & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{es decir,} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2y \\ z = 4 \end{array}\right.$$

Para cada valor de y tenemos una solución, luego el sistema es compatible indeterminado, y tiene 5 soluciones. Éstas son:

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones III.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 4x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El sistema inicial es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & & & = & 3 \\ & & & & z & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{es decir,} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2y \\ z = 4 \end{array}\right.$$

Para cada valor de y tenemos una solución, luego el sistema es compatible indeterminado, y tiene 5 soluciones. Éstas son:

$x = 3,\ \ y = 0,\ \ z = 4;$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones III.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 4x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
El sistema inicial es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 3y & & = & 3 \\ & & & z & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{es decir,} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2y \\ z = 4 \end{array}\right.$$

Para cada valor de y tenemos una solución, luego el sistema es compatible indeterminado, y tiene 5 soluciones. Éstas son:
$x = 3,\ y = 0,\ z = 4; \qquad x = 0,\ y = 1,\ z = 4;$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones III.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 4x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El sistema inicial es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 3y & & = & 3 \\ & & & z & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{es decir,} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2y \\ z = 4 \end{array}\right.$$

Para cada valor de y tenemos una solución, luego el sistema es compatible indeterminado, y tiene 5 soluciones. Éstas son:

$x = 3,\ y = 0,\ z = 4;\qquad x = 0,\ y = 1,\ z = 4;\qquad x = 2,\ y = 2,\ z = 4;$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones III.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 4x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El sistema inicial es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & & & = & 3 \\ & & & & z & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{es decir,} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2y \\ z = 4 \end{array}\right.$$

Para cada valor de y tenemos una solución, luego el sistema es compatible indeterminado, y tiene 5 soluciones. Éstas son:

$x = 3,\ y = 0,\ z = 4;\quad x = 0,\ y = 1,\ z = 4;\quad x = 2,\ y = 2,\ z = 4;$
$x = 4,\ y = 3,\ z = 4;$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones III.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 4x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El sistema inicial es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & & & = & 3 \\ & & & & z & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{es decir,} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2y \\ z = 4 \end{array}\right.$$

Para cada valor de y tenemos una solución, luego el sistema es compatible indeterminado, y tiene 5 soluciones. Éstas son:

$x = 3,\ y = 0,\ z = 4;\quad x = 0,\ y = 1,\ z = 4;\quad x = 2,\ y = 2,\ z = 4;$
$x = 4,\ y = 3,\ z = 4;\quad x = 1,\ y = 4,\ z = 4.$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones IV.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones IV.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & 4z & = & 2 \\ x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones IV.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & 4z & = & 2 \\ x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones IV.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & 4z & = & 2 \\ x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones IV.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & 4z & = & 2 \\ x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

El sistema inicial es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 1 \end{array}\right.$$

Forma normal de Hermite. Sistemas de ecuaciones IV.

Sea ahora el siguiente sistema, también con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & 4z & = & 2 \\ x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y su forma normal de Hermite es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
El sistema inicial es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 1 \end{array}\right.$$

Es claro que el sistema no tiene solución, pues ningún valor de x, y, z puede hacer cierta la última ecuación.

Forma normal de Hermite. Teorema de Rouché-Frobenius.

Dado un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$, y la forma normal de Hermite de esta matriz es H.

Forma normal de Hermite. Teorema de Rouché-Frobenius.

Dado un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$, y la forma normal de Hermite de esta matriz es H.
Si al final tenemos una ecuación de la forma $0 = 1$, el sistema es incompatible.

Forma normal de Hermite. Teorema de Rouché-Frobenius.

Dado un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$, y la forma normal de Hermite de esta matriz es H.
Si al final tenemos una ecuación de la forma $0 = 1$, el sistema es incompatible.
Esto ocurre si $rg(A) < rg(A|b)$.

Forma normal de Hermite. Teorema de Rouché-Frobenius.

Dado un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$, y la forma normal de Hermite de esta matriz es H.
Si al final tenemos una ecuación de la forma $0 = 1$, el sistema es incompatible.
Esto ocurre si $rg(A) < rg(A|b)$.
Cuando $rg(A) = rg(A|b)$, el sistema es compatible pues no tenemos la ecuación $0 = 1$.

Forma normal de Hermite. Teorema de Rouché-Frobenius.

Dado un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$, y la forma normal de Hermite de esta matriz es H.
Si al final tenemos una ecuación de la forma $0 = 1$, el sistema es incompatible.
Esto ocurre si $rg(A) < rg(A|b)$.
Cuando $rg(A) = rg(A|b)$, el sistema es compatible pues no tenemos la ecuación $0 = 1$.
En tal caso, llamaremos **incógnitas principales** a las que se corresponden con algún pivote de la matriz H,

Forma normal de Hermite. Teorema de Rouché-Frobenius.

Dado un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$, y la forma normal de Hermite de esta matriz es H.
Si al final tenemos una ecuación de la forma $0 = 1$, el sistema es incompatible.
Esto ocurre si $rg(A) < rg(A|b)$.
Cuando $rg(A) = rg(A|b)$, el sistema es compatible pues no tenemos la ecuación $0 = 1$.
En tal caso, llamaremos **incógnitas principales** a las que se corresponden con algún pivote de la matriz H, e **incógnicas libres** al resto.

Forma normal de Hermite. Teorema de Rouché-Frobenius.

Dado un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$, y la forma normal de Hermite de esta matriz es H.
Si al final tenemos una ecuación de la forma $0 = 1$, el sistema es incompatible.
Esto ocurre si $rg(A) < rg(A|b)$.
Cuando $rg(A) = rg(A|b)$, el sistema es compatible pues no tenemos la ecuación $0 = 1$.
En tal caso, llamaremos **incógnitas principales** a las que se corresponden con algún pivote de la matriz H, e **incógnicas libres** al resto.
Si no hay incógnitas libres (en cuyo caso el rango de A coincide con el número de incógnitas), el sistema es compatible determinado.

Forma normal de Hermite. Teorema de Rouché-Frobenius.

Dado un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$, y la forma normal de Hermite de esta matriz es H.
Si al final tenemos una ecuación de la forma $0 = 1$, el sistema es incompatible.
Esto ocurre si $rg(A) < rg(A|b)$.
Cuando $rg(A) = rg(A|b)$, el sistema es compatible pues no tenemos la ecuación $0 = 1$.
En tal caso, llamaremos **incógnitas principales** a las que se corresponden con algún pivote de la matriz H, e **incógnicas libres** al resto.
Si no hay incógnitas libres (en cuyo caso el rango de A coincide con el número de incógnitas), el sistema es compatible determinado.
Si hay incógnitas libres (en cuyo caso el rango de A es menor que el número de incógnitas), el sistema es compatible indeterminado.

Forma normal de Hermite. Teorema de Rouché-Frobenius.

Dado un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $(A|b)$, y la forma normal de Hermite de esta matriz es H.

Si al final tenemos una ecuación de la forma $0 = 1$, el sistema es incompatible.

Esto ocurre si $rg(A) < rg(A|b)$.

Cuando $rg(A) = rg(A|b)$, el sistema es compatible pues no tenemos la ecuación $0 = 1$.

En tal caso, llamaremos **incógnitas principales** a las que se corresponden con algún pivote de la matriz H, e **incógnicas libres** al resto.

Si no hay incógnitas libres (en cuyo caso el rango de A coincide con el número de incógnitas), el sistema es compatible determinado.

Si hay incógnitas libres (en cuyo caso el rango de A es menor que el número de incógnitas), el sistema es compatible indeterminado.

En resumen, tenemos:

Forma normal de Hermite. Teorema de Rouché-Frobenius.

Teorema (Teorema de Rouché-Frobenius)

Dado un sistema de ecuaciones con coeficientes en K, de m ecuaciones y n incógnitas, cuya matriz ampliada es $(A|b) \in M_{m\times(n+1)}(K)$

Forma normal de Hermite. Teorema de Rouché-Frobenius.

Teorema (Teorema de Rouché-Frobenius)

Dado un sistema de ecuaciones con coeficientes en K, de m ecuaciones y n incógnitas, cuya matriz ampliada es $(A|b) \in M_{m\times(n+1)}(K)$

$$\begin{cases} rg(A) = rg(A|b) : & \textit{Sistema compatible} \\ rg(A) < rg(A|b) : & \textit{Sistema incompatible.} \end{cases}$$

Forma normal de Hermite. Teorema de Rouché-Frobenius.

Teorema (Teorema de Rouché-Frobenius)

Dado un sistema de ecuaciones con coeficientes en K, de m ecuaciones y n incógnitas, cuya matriz ampliada es $(A|b) \in M_{m\times(n+1)}(K)$

$$\begin{cases} rg(A) = rg(A|b): & \textit{Sistema compatible} \quad \begin{cases} rg(A) < n: & \textit{Sistema compatible indeterminado.} \\ rg(A) = n: & \textit{Sistema compatible determinado.} \end{cases} \\ rg(A) < rg(A|b): & \textit{Sistema incompatible.} \end{cases}$$