TEMA 7

Aplicaciones lineales

Vamos a explicar algunos conceptos sobre aplicaciones lineales. Para eso, nos basaremos en algunos ejemplos.

Imaginemos que vamos a un supermercado donde queremos comprar aceite de oliva y azúcar blanca.

Para cada cantidad de aceite y de azúcar que compremos, tendremos un precio. Si x es la cantidad de aceite en litros, e y es la cantidad de azúcar (en kilogramos), denotaremos como $p(x, y)$ al precio de la compra de dichas cantidades.

Esto nos define una aplicación $p : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$. Esta aplicación fácilmente puede verse como una aplicación $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Aunque sólo vamos a comprar cantidades positivas, podemos entender que comprar una cantidad negativa sería como si vamos a devolver esa cantidad y nos dan el dinero correspondiente por eso).

Si voy a comprar una cantidad (x, y) de aceite-azúcar, el número de euros a pagar será $p(x, y)$. Supongamos que encuentro a un amigo que compra una cantidad (x', y') de aceite-azúcar por el que deberá pagar $p(x', y')$ euros, y decido regalarle su compra.

En tal caso, el precio que deberé pagar por la compra de $(x, y) + (x', y')$ litros-kilos de aceite-azúcar será la suma de los precios que debíamos pagar por separado. Es decir:

$$p((x, y) + (x', y')) = p(x, y) + p(x', y').$$

De la misma forma, si voy 5 veces a comprar, compro siempre la misma cantidad, y lo pago todo al final, el precio que deberé pagar es 5 veces el precio de una compra. Es decir:

$$p(5 \cdot (x, y)) = 5 \cdot p(x, y).$$

Estamos suponiendo en todo esto que no hay ofertas del tipo *compra tres y paga dos*, etc.

Todo lo anterior es para ver que la aplicación *precio* es lineal, es decir, si $u, u' \in \mathbb{R}^2$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces $p(u + u') = p(u) + p(u')$ y $p(a \cdot u) = a \cdot p(u)$.

Vamos a ir analizando distintos problemas sencillos.

- Para comenzar, si nos dicen que el litro de aceite cuesta $4'6$ € y el kilo de azúcar cuesta $0'7$ €, y queremos comprar 5 litros de aceite y 3 kilos de azúcar, ¿cuánto nos costaría?

  Fácilmente hacemos el cálculo que sería $4'6 \cdot 5 + 0'7 \cdot 3 = 23 + 2'1 = 25'1$ euros.

  Los datos de los que disponemos en este caso son $p(1, 0)$ y $p(0, 1)$, y para calcular $p(5, 3)$ hemos hecho $5 \cdot p(1, 0) + 3 \cdot p(0, 1)$.

  En general, tenemos que $p(x, y) = x \cdot p(1, 0) + y \cdot p(0, 1) = 4'6x + 0'7y$.
- Imaginemos que no sabemos el precio del litro de aceite ni del kilo de azúcar. Pero recordamos que el otro día, al comprar 1 litro de aceite y dos de azúcar nos costó 6 euros, y en otra ocasión, la compra de 3 litros de aceite y 4 de azúcar nos costó $16'6$ euros.

  ¿Cuánto nos costaría un litro de aceite y 4 de azúcar?

  Los datos del ejercicio nos dicen que $p(1, 2) = 6$ y $p(3, 4) = 16'6$. Para resolver este ejercicio podemos proceder de dos formas:

  1. Escribimos $(1, 4)$ en función de (como combinación lineal de) $(1, 2)$ y $(3, 4)$. Tendríamos $(1, 4) = a(1, 2) + b(3, 4)$. Esto nos da el sistema de ecuaciones:

     $$\begin{array}{rcrcl} a & + & 3b & = & 1 \\ 2a & + & 4b & = & 4 \end{array}$$

     cuya solución es $a = 4$, $b = -1$.

     Y una vez que lo tenemos, calculamos $p(1, 4)$, utilizando que p es lineal.

     $$p(1, 4) = p(4 \cdot (1, 2) - (3, 4)) = 4 \cdot p(1, 2) - p(3, 4) = 4 \cdot 6 - 16'6 = 24 - 16'6 = 7'4.$$

2. Calculamos el precio del litro de aceite y del kilo de azúcar. Llamémoslos a y b respectivamente. Entonces, sabemos que:

$$\begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & 6 \\ 3a & + & 4b & = & 16'6 \end{array}$$

Este sistema puede verse, en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16'6 \end{pmatrix} \qquad \text{o, si preferimos,} \qquad (a\ \ b)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (6\ \ 16'6).$$

cuya solución es

$$(a\ \ b) = (6\ \ 16'6)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}(6\ \ 16'6)\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(9'2\ \ 1'4) = (4'6\ \ 0'7).$$

Una vez que tenemos el precio del aceite y el azúcar, calculamos el que nos piden.

$$p(1,4) = 4'6 + 4\cdot 0'7 = 4'6 + 2'8 = 7'4.$$

que coincide con el calculado anteriormente.

3. También podríamos haber hecho:
Puesto que 1 litro de aceite y 2 kilos de azúcar cuestan 6 euros, el doble, es decir, 2 litros de aceite y 4 kilos de azúcar cuestan 12 euros. Esto, junto con que 3 litros de aceite y 4 kilos de azúcar cuestan $16'6$ euros nos dicen que el litro de aceite cuesta $16'6 - 12 = 4'6$ euros. Una vez sacado el precio del aceite es fácil obtener el del azúcar.

- Ahora estamos interesados en comprar nueces, además de aceite y azúcar. Vamos a representar por $p(x,y,z)$ al precio de x litros de aceite, y kilos de azúcar y z kilos de nueces. Tenemos entonces una aplicación lineal $p:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

  Por supuesto que si conocemos lo que cuesta 1 litro de aceite, 1 kilo de azúcar y 1 kilo de nueces podemos calcular fácilmente el precio de cualquier cantidad de estos productos.

  Imaginemos que 2 litros de aceite, 1 kilo de azúcar y 1 kilo de nueces nos ha costado $17'9$ euros, mientras que 3 litros de aceite, 2 kilos de azúcar y un kilo de nueces nos ha costado $23'2$ euros.

  En este caso, no podemos determinar cuánto vale el litro de aceite, el kilo de azúcar y el kilo de nueces, pues nos faltan datos.

  Por ejemplo, podría ser 4 € el litro de aceite, $1'3$ € el kilo de azúcar y $8'6$ € el kilo de nueces (comprueba que estos precios con compatibles con los datos que hemos dado). Pero también podría ser el litro de aceite a 3 €, el kilo de azúcar a $2'3$ € y el kilo de nueces a $9'6$ €.

  El sistema que habría que plantear para calcular los precios del litro de aceite y el kilo de azúcar y de nueces sería:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2a & + & b & + & c & = & 17'9 \\ 3a & + & 2b & + & c & = & 23'2 \end{array}$$

  que es compatible indeterminado.

  Sí podríamos calcular, por ejemplo, cuanto nos costaría 7 litros de aceite, 3 kilos de azúcar y 4 kilos de nueces, ya que $(7,3,4) = 5\cdot(2,1,1) - (3,2,1)$, luego $p(7,3,4) = 5\cdot p(2,1,1) - p(3,2,1) = 5\cdot 17'9 - 23'2 = 66'3$.

  De hecho, se puede comprobar que si elegimos como precios 4 euros para el aceite, $1'3$ para el azúcar y $8'6$ para las nueces, el precio de esta compra es $66'3$. Y si elegimos como precios 3 euros para el aceite, $2'3$ euros para el azúcar y $8'6$ euros para las nueces, el precio es también $66'3$. Y así para cualquier elección que sea compatible con los datos del problema.

  Pero no podemos calcular el precio de 3 litros de aceite, 4 kilos de azúcar y 2 kilos de nueces, pues $(3,4,2)$ no podemos escribirlo como combinación lineal de $(2,1,1)$ y $(3,2,1)$.

  Puedes comprobar que con las dos elecciones de precios que hemos hecho antes, el precio de estas cantidades es diferente en cada uno de los casos.

- Si los datos de que disponemos son:

  - 2 litros de aceite, 1 kilo de azúcar y 1 kilo de nueces nos ha costado $17'9$ euros.
  - 3 litros de aceite, 2 kilos de azúcar y un kilo de nueces nos ha costado $23'2$ euros.
  - 1 litro de aceite, 2 kilos de azúcar y 3 kilos de nueces nos ha costado 30 euros.

Y queremos calcular el precio de 7 litros de aceite, 3 kilos de azúcar y 4 kilos de nueces podemos proceder como en un ejemplo precedente:

Llamamos a al precio del litro de aceite, b al precio del kilo de azúcar y c al precio del kilo de nueces. Calculamos a, b y c, para lo cual planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2a & + & b & + & c & = & 17'9 \\ 3a & + & 2b & + & c & = & 23'2 \\ a & + & 2b & + & 3c & = & 30 \end{array}$$

que podemos escribir en forma matricial como:

$$(a\ \ b\ \ c)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (17'9\ \ \ 23'2\ \ \ 30).$$

y cuya solución es:

$$(a\ \ b\ \ c) = (17'9\ \ \ 23'2\ \ \ 30)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}(17'9\ \ \ 23'2\ \ \ 30)\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a\ \ b\ \ c) = \frac{1}{4}(18'4\ \ \ 2'8\ \ \ 32) = (4'6\ \ \ 0'7\ \ \ 8).$$

- Por último, supongamos que podemos comprar en dos supermercados. Entonces, para cada cantidad de aceite, azúcar y nueces tendremos dos precios. Esto se traduce en que tendremos una aplicación $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, donde las dos coordenadas de $p(x, y, z)$ representan los precios en cada uno de los dos supermercados.

  Los datos que conocemos ahora son:

  - 2 litros de aceite, 1 kilo de azúcar y 1 kilo de nueces cuesta $17'9$ euros en el supermercado 1 y $17'6$ en el supermercado 2.
  - 3 litros de aceite, 2 kilos de azúcar y un kilo de nueces cuesta $23'2$ euros en el supermercado 1 y $22'7$ en el supermercado 2.
  - 1 litro de aceite, 2 kilos de azúcar y 3 kilos de nueces cuesta 30 euros en el supermercado 1 y $30'5$ en el supermercado 2.

  Para poder calcular el precio de cualquier cantidad en los dos supermercados vamos a calcular los precios del litro de aceite, del kilo de azúcar y del kilo de nueces en ambos supermercados. Llamemos a_i, b_i, c_i al precio del litro de aceite, del kilo de azúcar y del kilo de nueces en el supermercado i $(i = 1, 2)$. Sabemos que $a_1,\ b_1,\ c_1$ y $a_2,\ b_2, c_2$ los podemos obtener como soluciones a los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2a_1 & + & b_1 & + & c_1 & = & 17'9 \\ 3a_1 & + & 2b_1 & + & c_1 & = & 23'2 \\ a_1 & + & 2b_1 & + & 3c_1 & = & 30 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} 2a_2 & + & b_2 & + & c_2 & = & 17'6 \\ 3a_2 & + & 2b_2 & + & c_2 & = & 22'7 \\ a_2 & + & 2b_2 & + & 3c_2 & = & 30'5 \end{array}$$

  Que podemos escribir en forma matricial:

$$(a_1\ \ b_1\ \ c_1)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (17'9\ \ 23'2\ \ 30) \qquad (a_2\ \ b_2\ \ c_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (17'6\ \ 22'7\ \ 30'5).$$

  o juntando ambos sistemas:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17'9 & 23'2 & 30 \\ 17'6 & 22'7 & 30'5 \end{pmatrix}.$$

  y cuya solución es

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 17'9 & 23'2 & 30 \\ 17'6 & 22'7 & 30'5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4'6 & 0'7 & 8 \\ 4'3 & 0'8 & 8'2 \end{pmatrix}$$

Terminamos aquí estos ejemplo y recordamos ahora algunos hechos que tenemos en relación a las aplicaciones lineales.

Recordemos en primer lugar que una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y V' es una aplicación $f : V \to V'$ que cumple dos condiciones:

Para cualesquiera $u, v \in V$ se tiene que $f(u + v) = f(u) + f(v)$.

Para cualquier $u \in V$ y $a \in K$ se tiene que $f(a \cdot u) = a \cdot f(u)$.

Para dar una aplicación lineal $f : V \to V'$ podemos, bien dar explícitamente cuánto vale $f(u)$ para cualquier $u \in V$, o dar los datos suficientes que nos determinen de forma única cuánto vale $f(u)$.

En el primer ejemplo, donde tenemos la aplicación $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ (está claro que $\mathbb{R}^1$ se identifica con $\mathbb{R}$), podríamos haber dicho que $p(x, y) = 4'6x + 0'7y$ (hemos dado explícitamente el valor de $f(x, y)$) o podríamos haber dicho que $p(1, 0) = 4'6$ y $p(0, 1) = 0'7$. Es decir, dando únicamente el valor de p para dos vectores podemos calcular el valor de p para todos los vectores.

¿Cuáles son esos datos suficientes que nos determinan de forma única cuánto vale $f(u)$?

Hay un teorema que afirma:

Sean V y V' dos espacios vectoriales. Sea $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ una base de V y sean $v_1, v_2, \cdots v_n$ vectores de V'. Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que $f(u_i) = v_i$.

Es decir, los datos que necesitamos para determinar f es el valor que toma f sobre los vectores de una base.

Hemos visto que conociendo el valor de p sobre los vectores de la base canónica $B_c = \{(1, 0),\ (0, 1)\}$ podemos determinar completamente p.

Pero también hemos visto que si tomamos como base $B = \{(1, 2),\ (3, 4)\}$, el conocimiento de p sobre estos dos vectores (es decir, si sabemos cuánto vale $p(1, 2)$ y $p(3, 4)$) nos permite calcular cuánto vale $p(x, y)$ para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Vamos a explicar cómo se puede realizar este cálculo.

Tenemos una aplicación lineal $f : V \to V'$ (en nuestro ejemplo $V = \mathbb{R}^2$, $V' = \mathbb{R}^1$ y f es la aplicación *precio*). Sabemos cuanto vale $f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)$ para una base $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de V (en nuestro ejemplo $B = \{(1, 2), (3, 4)\}$). Tomamos una base $B' = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ de V' (en nuestro ejemplo $B' = \{1\}$).

La información que tenemos (es decir, $f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)$) la organizamos en una matriz $m \times n$. En esta matriz, cada columna representará la imagen de cada uno de estos vectores. Para esto, calculamos las coordenadas de $f(u_1), \cdots, f(u_n)$ en la base B'.

A la matriz resultante se le denomina $M_{B,B'}(f)$. Es una matriz cuyas columnas son las coordenadas en B' de las imágenes de los vectores de B.

En el ejemplo en el que estamos trabajando, tendremos que $M_{B,B'}(p) \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$, ya que B tiene dos elementos y B' tienen uno. Esta matriz es:

$$M_{B,B'}(p) = (6 \quad 16'6).$$

pues $p(1, 2) = 6 = 6 \cdot v_1$ (recordemos que $v_1 = 1$) y $p(3, 4) = 16'6 \cdot v_1$. Esta matriz tiene toda la información referente a la aplicación lineal p.

Y ahora tenemos que si $v \in V$, y $(v)_B$ son sus coordenadas en la base B, entonces $(f(v))_{B'} = M_{B,B'}(f) \cdot (v)_B$.

De esta forma, hemos calculado cuanto vale $f(v)$, que es lo que queríamos (en realidad hemos calculado sus coordenadas en la base B').

Por ejemplo, si $v = (1, 4)$, para calcular $p(v)$ primero calculamos las coordenadas de v en la base B. Puesto que $(1, 4) = 4 \cdot (1, 2) - 1 \cdot (3, 4)$, tenemos que $(v)_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ (las coordenadas de un vector en una base las representamos como una matriz columna).

En cuyo caso:

$$(p(v))_{B'} = M_{B,B'}(p) \cdot (v)_B = (6 \quad 16'6) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = (6 \cdot 4 - 16'6) = (7'4).$$

Luego $p(1, 4) = 7'4$.

Compara estos cálculos con los que hicimos previamente para obtener $p(1,4)$.

Visto el cálculo realizado, vemos que cada vez que haya que calcular la imagen de un vector tenemos que hallar previamente las coordenadas de este vector en la base B. Sería conveniente, en lugar de la base B, tener otra base en la que el cálculo de las coordenadas en esa base sea más sencillo. En nuestro ejemplo esa base sería la base canónica $B_c = \{(1,0),\ (0,1)\}$.

En general, dada $f : V \to V'$, dos bases B y B_1 de V, y una base B' de V', queremos saber que relación hay entre $M_{B,B'}(f)$ y $M_{B_1,B'}(f)$. Esta relación viene dada por

$$M_{B_1,B'}(f) = M_{B,B'}(f) \cdot M_{B_1 \to B}.$$

El siguiente diagrama puede ayudarnos a recordar esta relación.

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, "\mathbf{A}", "f"'] \arrow[d, "\mathbf{P}"'] & & B' \\ B \arrow[urr, "\mathbf{C}", "f"'] & & \end{tikzcd} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{P} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{A} = M_{B_1,B'}(f) \\ \mathbf{C} = M_{B,B'}(f) \\ \mathbf{P} = M_{B_1 \to B} \end{array}$$

En el ejemplo nuestro, lo que queremos calcular es $M_{B_c,B'}(p)$, y por lo que acabamos de ver, esta matriz es $M_{B,B'}(p) \cdot M_{B_c \to B}$. La primera matriz la tenemos. En cuanto a la segunda, sabemos que $M_{B_c \to B} = (M_{B \to B_c})^{-1}$, y calcular una matriz del cambio de base cuando la segunda base es la base canónica es muy fácil, pues las columnas de esta matriz son las coordenadas de los vectores de B en la base canónica. Entonces:

$$M_{B_c \to B} = (M_{B \to B_c})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Y con esto, tenemos:

$$M_{B_c,B'}(p) = M_{B,B'}(p) \cdot M_{B_c \to B} = \frac{1}{2}(6 \quad 16'6) \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (4'6 \quad 0'7).$$

Y por último, si $v = (x,y)$, para calcular $p(v)$ y puesto que las coordenadas del vector (x,y) en la base canónica son $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tenemos:

$$(p(v))_{B'} = M_{B_c,B'}(p) \cdot (v)_{B_c} = (4'6 \quad 0'7) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (4'6x + 0'7y).$$

El último ejemplo que hicimos es similar a este, sólo que ahí tenemos una aplicación $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

De esa aplicación, los datos que nos dan son:

$$\begin{array}{rcl} p(2,1,1) & = & (17'9, 17'6) \\ p(3,2,1) & = & (23'2, 22'7) \\ p(1,2,3) & = & (30, 30'5). \end{array}$$

Puesto que $B = \{(2,1,1),\ (3,2,1),\ (1,2,3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, con estos datos tenemos totalmente determinada a p. Además, si B'_c es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ (es decir, $B'_c = \{(1,0),(0,1)\}$), la información que tenemos es:

$$M_{B,B'_c}(p) = \begin{pmatrix} 17'9 & 23'2 & 30 \\ 17'6 & 22'7 & 30'5 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, $M_{B \to B_c} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, luego

$$M_{B_c \to B} = (M_{B \to B_c})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y por tanto:

$$M_{B_c,B'_c}(p) = M_{B,B'_c}(p) \cdot M_{B_c \to B} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 17'9 & 23'2 & 30 \\ 17'6 & 22'7 & 30'5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4'6 & 0'7 & 8 \\ 4'3 & 0'8 & 8'2 \end{pmatrix}.$$

luego $p(x,y,z) = (4'6 \cdot x + 0'7 \cdot y + 8 \cdot z, 4'3 \cdot x + 0'8 \cdot y + 8'2 \cdot z)$.

En estos ejemplos hemos visto como representar una aplicación lineal mediante una matriz (para lo cual hay que elegir una base en cada uno de los dos espacios vectoriales), y como afecta a esa matriz un cambio de base en el primer espacio.

También se puede realizar un cambio de base en el segundo espacio. La expresión general es:

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B'_1 \\ B_2 \arrow[r, "f"] & B'_2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$M_{B_1,B'_1}(f) = M_{B'_2 \to B'_1} \cdot M_{B_2,B'_2}(f) \cdot M_{B_1 \to B_2}$$