TEMA 4

Combinatoria

Ejercicio 1. Una apuesta de la Lotería Primitiva consiste en marcar seis números entre 1 y 49. El sorteo se realiza extrayendo 6 de los 49 números, y un séptimo número llamado complementario.

1. ¿Cuántas apuestas distintas pueden realizarse?.
2. ¿De cuántas maneras pueden acertarse los seis números de la combinación ganadora?.
3. ¿De cuántas maneras pueden acertarse cinco números más el complementario de la combinación ganadora?.
4. ¿De cuántas maneras pueden acertarse cinco números de la combinación ganadora (sin el complementario)?.
5. ¿De cuántas maneras pueden acertarse cuatro números de la combinación ganadora?.
6. ¿De cuántas maneras pueden acertarse tres números de la combinación ganadora?.
7. ¿De cuántas maneras pueden acertarse dos números de la combinación ganadora?.
8. ¿De cuántas maneras puede acertarse un número de la combinación ganadora?.
9. ¿De cuántas maneras puede no acertarse ningún número de la combinación ganadora?.

Ejercicio 2. Sea p un número primo. Prueba que si $a, b \in \mathbb{Z}_p$ entonces $(a+b)^p = a^p + b^p$. Comprueba que si m no es primo, entonces $(a+b)^m$ y $a^m + b^m$ son generalmente distintos en $\mathbb{Z}_m$.

Ejercicio 3. Ocho miembros de un equipo de baloncesto deben alojarse en un hotel. El hotel dispone de una habitacion triple, dos dobles y una individual. ¿De cuántas formas pueden repartirse en las distintas habitaciones?.

Supongamos además que de los ocho miembros hay dos que son hermanos y se alojan siempre juntos. ¿De cuántas formas pueden entonces repartirse?.

Ejercicio 4. Demuestra que si elegimos 501 números del conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, 1000\}$, debe haber al menos dos que sean primos relativos.

Ejercicio 5. Se eligen 10 números distintos del conjunto $\{1, 2, \cdots, 100\}$. Comprueba que existen al menos 2 tales que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq 1$.

Ejercicio 6. (septiembre 2015)

Para el sorteo del euromillón se dispone de dos bombos: uno con 50 bolas (numeradas de 1 a 50) y otro con 11 bolas (numeradas de 1 a 11). El sorteo consiste en extraer 5 bolas del primer bombo y 2 bolas del segundo (cuyos números se denominan números estrella).

Una apuesta sencilla consiste en marcar 5 números de una tabla de 50 y 2 estrellas de una tabla de 11.

Según el número de aciertos que se obtengan hay distintas categorías de premios.

1. ¿Cuántas apuestas diferentes se pueden realizar?

2. Dada una combinación ganadora:
   - ¿cuántas apuestas podrían conseguir un premio de quinta categoría (que supone acertar 4 números y una estrella)?
   - ¿cuántas apuestas podrían conseguir un premio de décima categoría (acertar 3 números y cero estrellas)?
   - ¿cuántas apuestas distintas quedarían sin premio[1]?

Ejercicio 7. Tenemos tres cajas, y 24 bolas, 10 de las cuales son rojas, 8 son azules y 6 verdes. ¿De cuántas formas diferentes podemos repartir las bolas en las cajas?.

Ejercicio 8. ¿Cuántos números binarios de 6 cifras no contienen la secuencia 101?

Ejercicio 9. Consideramos todos los números naturales menores que $2048 = 2^{11}$.

1. ¿Cuántos de ellos tienen exactamente seis unos en su representación binaria?
2. ¿Cuántos tienen un número impar de unos en su representación binaria?
3. ¿Cuántos tienen más unos que ceros en su representación binaria?

Ejercicio 10. Comprueba las siguientes identidades con números combinatorios:

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
3. $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$
4. $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$
5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
6. $\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ (Indicación: $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$).

Demuestra que dado un conjunto con n elementos, entonces tiene el mismo número de subconjuntos con cardinal par que subconjuntos con cardinal impar.

Ejercicio 11. Calcula el coeficiente con el que aparece x^6y^8 en el desarrollo de cada una de las siguientes expresiones:

$$(x+y)^{14}; \qquad (2x-3y)^{14}; \qquad (x+3y)^{15}; \qquad (x^2+y)^{11}; \qquad (3x^3-2y^2)^6$$

Ejercicio 12. Se lanzan tres dados indistinguibles. ¿Cuántos posibles resultados pueden salir?. ¿Y si se lanzan n dados?.

Ejercicio 13. ¿Cuántos números de matrícula (números entre 0 y 9999 escritos con cuatro cifras) hay en los que la suma de las dos cifras de la izquierda es igual a la suma de las dos cifras de la derecha?

[1] Las apuestas que se quedan sin premio son las que, o bien no aciertan ningún número de la tabla de 50, o bien aciertan sólo uno de esta tabla y un máximo de una estrella

Ejercicio 14. En una bocadillería, cada bocadillo debe incluir al menos uno de los siguientes ingredientes: jamón, queso, tomate, lomo, lechuga y salmón. ¿Cuántos bocadillos distintos podemos elegir?.

Ejercicio 15. ¿De cuántas formas se pueden sentar 10 personas en una mesa redonda?

Ejercicio 16. Queremos desplazarnos por el plano XY desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(8, 10)$. Los únicos movimientos permitidos son, desplazarnos una unidad hacia la derecha (es decir, pasar desde el punto (x, y) al punto $(x + 1, y)$ o una unidad hacia arriba (desde el punto (x, y) al punto $(x, y + 1)$). ¿Cuántos caminos posibles hay para llegar al punto $(8, 10)$?

Supongamos que añadimos la posibilidad de un desplazamiento desde un punto (x, y) hasta el punto $(x+1, y+1)$. ¿De cuántas formas distintas podemos ir desde el $(0, 0)$ hasta el $(8, 10)$ en 15 movimientos? ¿Y en 10 movimientos?. En total, ¿cuántas formas diferentes hay para llegar hasta el punto $(8, 10)$?

Ejercicio 17. Calcula cuantos números con tres cifras significativas:

1. no son divisibles por 3,7 ni 11.
2. son divisibles por 3 y 7.
3. son divisibles por 3 y 11.
4. son divisibles por 7 y 11.
5. son divisibles por 3, 7 y 11.

Ejercicio 18. Consideramos todos los números de 0 a 9999 tal y como aparecen en las matrículas de los automóviles matriculados en España.

1. ¿En cuántos de ellos aparecen 4 dígitos distintos?
2. ¿En cuántos de ellos aparecen exactamente 3 dígitos distintos?
3. ¿En cuántos de ellos aparecen exactamente dos dígitos distintos?

Ejercicio 19. Tenemos 4 libros de matemáticas, 6 de informática y dos de física. Los colocamos en un estante. ¿De cuántas formas los podemos ordenar si los libros de cada materia deben estar juntos? ¿Y si solo exigimos que estén juntos los libros de matemáticas?

Ejercicio 20. ¿Cuántos números capicúas de 10 cifras hay? ¿Y de 11 cifras?

Ejercicio 21. Un número se dice *aburrido* si todas sus cifras, salvo una a lo sumo, son iguales. ¿Cuántos números de cuatro cifras aburridos existen?

Ejercicio 22. ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra CANCAN? ¿Y si no queremos que haya dos letras iguales consecutivas?.

Ejercicio 23. ¿De cuántas formas podemos agrupar a 20 personas en parejas?. Y si esas 20 personas son 10 hombres y 10 mujeres, ¿de cuántas formas podemos agruparos en parejas *hombre-mujer*?

Ejercicio 24. Sean $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $Z = \{1, 2\}$. ¿Cuántas aplicaciones hay de X en Y? ¿Cuántas de esas son inyectivas? ¿Cuántas hay de X en Z? ¿Cuántas son sobreyectivas?

Ejercicio 25. ¿De cuántas formas podemos ordenar los números del 1 al 10 de forma que ninguno aparezca en su posición natural?

Ejercicio 26. (problema del sombrero) En un establecimiento, la persona encargada del guardarropa olvidó colocar la etiquete identificativa de los 10 sombreros que dejaron bajo su cuidado, por lo que posteriormente los distribuyó al azar entre sus propietarios. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna persona reciba su sombrero?

Ejercicio 27. Sea X un conjunto de 17 números naturales (mayores que uno), ninguno de los cuales es divisible por un número primo mayor que 10. Demuestra que hay al menos dos elementos $x, y \in X$ tales que $x \cdot y$ es un cuadrado perfecto.

Ejercicio 28. Calcula el número de soluciones enteras de la ecuación $x + y + z + t = 25$ si:

1. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, t \geq 0$.
2. $x \geq 2, y \geq 3, z \geq 4, t > 3$.
3. $x \geq -2, y \geq -4, z \geq 1, t \geq -1$.
4. $1 \leq x \leq 7, y \geq 2, z \geq 1, t \geq 0$.
5. $2 \leq x \leq 7, -1 \leq y \leq 5, z \leq 0, t \geq 1$.
6. $2 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq 6, -2 \leq z \leq 7$.

Ejercicio 29. Sea $s(n, k)$ el número de subconjuntos del conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ que tienen cardinal k y que no contienen dos números consecutivos. Demuestra que:

1. $s(n, k) = s(n-2, k-1) + s(n-1, k)$
2. $s(n, k) = \binom{n-k+1}{k}$.

Ejercicio 30. ¿Cuántos números positivos hay con las cifras en orden estrictamente decreciente?.

Ejercicio 31. Si queremos hacer un dominó que vaya desde 0 hasta n, ¿cuántas fichas necesitaremos?.

Ejercicio 32. Queremos formar un comité de 12 personas a escoger entre 10 hombres y 10 mujeres.

1. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?
2. ¿Y si queremos que haya igual número de hombres que de mujeres?.
3. ¿Y si queremos que haya un número par de hombres?
4. ¿Y si queremos que haya más mujeres que hombres?.

Ejercicio 33. ¿Cuántos números de cuatro cifras contienen exactamente dos "cincos"?

Ejercicio 34. ¿Cuántos números menores que 10000 hay cuyas cifras sumen 9? ¿Y que sumen 15? ¿Y que sumen 28?

Ejercicio 35. De los números menores que 10000 cuyas cifras sumen 14. ¿Cuántos hay que sean múltiplos de 2? ¿Y de 3? ¿Y de 5?

Ejercicio 36. Tenemos un grupo con 12 hombres y 9 mujeres, y formamos cuatro parejas (una pareja está formada por un hombre y una mujer).

¿De cuántas maneras podemos formas esas 4 parejas?

Si en el grupo hay un hombre y una mujer que no pueden ir juntos, ¿de cuántas formas podemos entonces formas las cuatro parejas?

Ejercicio 37. ¿Cuántos números de cinco dígitos (en base 10) empiezan por 4, terminan en 5 y sus cifras suman 18?

Ejercicio 38. Considerando los números que escritos en base 3 tienen seis dígitos ¿Cuántos de ellos tienen exactamente dos dígitos iguales a 0?

Ejercicio 39. ¿Cuántos números en binario hay con seis cifras, que no contengan la secuencia 10? ¿Y que no contengan la secuencia 01?

Ejercicio 40. Sea X el conjunto de todos los números naturales menores que 10000 tal y como aparecen en las matrículas de los coches españoles.

1. ¿Cuántos elementos de X tienen todas sus cifras distintas?
2. ¿Cuántos elementos de X tienen a lo sumo dos cifras distintas?
3. ¿Cuántos elementos de X hay cuyas cifras sumen 12? ¿y 24?

Ejercicio 41. Tenemos 7 velas. Tres con forma de 1, dos con forma de 2 una con forma de 5 y una con forma de 8.

1. ¿Cuántos números podemos formar con las 7 velas?.
2. ¿Cuántos de ellos tienen juntos el 5 y el 8?.
3. ¿Cuántos hay que tengan juntos un 1 y un 5?.
4. ¿Cuántos números hay que sean mayores que 5000000?.
5. ¿Cuántos hay en los que se alternan cifras pares con cifras impares?.

En todos los apartados de este ejercicio, en cada número hay que usar las 7 velas.

Ejercicio 42. Consideramos las letras de la palabra SOCIOLOGIA

1. ¿De cuántas formas distintas podemos ordenarlas?
2. ¿En cuántas ordenaciones aparecen la "A" y la "G" juntos (bien de la forma AG, bien de la forma GA)?
3. ¿En cuántas ordenaciones aparecen las tres letras "O" juntas?
4. ¿Cuántas ordenaciones hay en las que las dos letras "I" no estén juntas?.
5. ¿En cuántas ordenaciones están todas las vocales juntas?
6. ¿En cuántas aparecen juntas una "I" y una "A"?
7. Y de estas últimas, ¿cuántas tienen además las tres letras "O" juntas?

Ejercicio 43. Disponemos de una partida de 100 discos compactos, entre los que hay 5 defectuosos. ¿De cuantas formas pueden elegirse cuatro de forma que haya más defectuosos que no defectuosos?.

Ejercicio 44. Tenemos 18 balones que queremos repartir a 6 menores: José, Javier, Julia, Jacinto, Juana y Jorge.

1. ¿De cuántas formas podemos repartirlos? ¿Y si queremos que todos se lleven al menos un balón?
2. De los 18 balones, hay 9 con el escudo del R. Madrid y otros 9 con el escudo del F.C. Barcelona. Jacinto, Jorge y Juana sólo los quieren del Barcelona, mientras que Julia, José y Javier los quieren del R. Madrid. ¿De cuántas formas puede hacerse el reparto, de forma que cada niño se lleve al menos un balón?
3. Ahora, la única restricción es que Jorge no quiere ninguno del R. Madrid. El resto puede recibir balones de cualquiera de los dos equipos. ¿De cuántas formas se pueden repartir?

Ejercicio 45. Sea $n = 62233920$.

1. ¿Cuántos divisores positivos tiene n?

2. ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 12 ó 21?
3. ¿Cuántos números podemos formar reordenando las cifras del número n? ¿Cuántos de ellos tienen 8 cifras?

Ejercicio 46. Tenemos tres cajas numeradas y 31 bolas indistinguibles.

1. ¿De cuántas formas podemos distribuir las 31 bolas en las 3 cajas?
2. ¿En cuántas de ellas la primera caja tiene menos bolas que la suma de las bolas que tienen las cajas 2 y 3?
3. ¿De cuántas formas podemos repartir las bolas de forma que ninguna caja tenga más bolas que las otras dos juntas?

Ejercicio 47. Las formas distintas en las que 12 bolas iguales pueden repartirse entre tres cajas numeradas son

a) $\binom{12}{3}$ b) $\binom{14}{2}$ c) $\binom{12}{3} \cdot 3!$ d) $\binom{15}{3}$

Ejercicio 48. ¿Cuántos números en base 3 tienen exactamente cinco cifras?

a) 3^4 b) 3^5 c) $2 \cdot 3^4$ d) $5 \cdot 3$

Ejercicio 49. Disponemos de 6 bolas azules, 6 bolas rojas y 6 bolas blancas. ¿De cuántas formas es posible elegir 9 bolas? ¿Y 12?

Ejercicio 50. En todos los apartados de este ejercicio se supone que todos los objetos mencionados caben en cualquiera de las cajas mencionadas.

1. ¿De cuántas formas podemos colocar 20 objetos idénticos en 10 cajas distintas, si permitimos que algunas cajas puedan quedar vacías?
2. ¿De cuántas formas podemos colocar 20 objetos idénticos en 10 cajas idénticas, si permitimos que algunas cajas puedan quedar vacías?
3. ¿De cuántas formas podemos colocar 20 objetos idénticos en 10 cajas idénticas, si no permitimos que queden cajas vacías?
4. ¿De cuántas formas podemos colocar 20 objetos idénticos en 10 cajas distintas, si no permitimos que queden cajas vacías?
5. ¿De cuántas formas podemos colocar 20 objetos distintos en 10 cajas idénticas, si ninguna caja puede quedar vacía?
6. ¿De cuántas formas podemos colocar 20 objetos distintos en 10 cajas idénticas, si permitimos que algunas cajas puedan quedar vacías?
7. ¿De cuántas formas podemos colocar 20 objetos distintos en 10 cajas distintas, si permitimos que algunas cajas puedan quedar vacías?
8. ¿De cuántas formas podemos colocar 20 objetos distintos en 10 cajas distintas, si ninguna caja puede quedar vacía?