Sea $V = (\mathbb{Z}_3)^4$,y sean los subespacios vectoriales:

$$U = \left\{ (x, y, z, t) \in V : \begin{array}{r} x + 2y + 2z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right\}; \qquad W = L[(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 2)].$$

1. Calcula la dimensión y cuántos elementos tienen $U$ y $W$.
2. Calcula bases de $U \cap W$ y $U + W$.
3. Calcula unas ecuaciones cartesianas de $U \cap W$ y de $U + W$.

**Solución:**

1. Vemos que $U$ está definido por dos ecuaciones, y que las dos ecuaciones son independientes. Por tanto, $\dim(U) = 4 - 2 = 2$.

   Vemos también que $W$ está generado por dos vectores, ($(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 1, 2)$) y estos dos vectores son linealmente independientes (pues ninguno es múltiplo del otro). Por tanto, estos dos vectores forman una base de $W$, luego $\dim(W) = 2$.

   Puesto que $\dim(W) = 2$, el número de elementos de $W$ es $3^2 = 9$. Estos 9 elementos se obtienen formando todas las combinaciones lineales de los vectores $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 1, 2)$. Por tanto, los 9 elementos de $W$ son:

   - $0 \cdot (1, 1, 1, 1) + 0 \cdot (1, 2, 1, 2) = (0, 0, 0, 0)$.
   - $0 \cdot (1, 1, 1, 1) + 1 \cdot (1, 2, 1, 2) = (1, 2, 1, 2)$.
   - $0 \cdot (1, 1, 1, 1) + 2 \cdot (1, 2, 1, 2) = (2, 1, 2, 1)$.
   - $1 \cdot (1, 1, 1, 1) + 0 \cdot (1, 2, 1, 2) = (1, 1, 1, 1)$.
   - $1 \cdot (1, 1, 1, 1) + 1 \cdot (1, 2, 1, 2) = (2, 0, 2, 0)$.
   - $1 \cdot (1, 1, 1, 1) + 2 \cdot (1, 2, 1, 2) = (0, 2, 0, 2)$.
   - $2 \cdot (1, 1, 1, 1) + 0 \cdot (1, 2, 1, 2) = (2, 2, 2, 2)$.
   - $2 \cdot (1, 1, 1, 1) + 1 \cdot (1, 2, 1, 2) = (0, 1, 0, 1)$.
   - $2 \cdot (1, 1, 1, 1) + 2 \cdot (1, 2, 1, 2) = (1, 0, 1, 0)$.

   Es decir:

   $W = \{(0, 0, 0, 0),\ (1, 2, 1, 2),\ (2, 1, 2, 1),\ (1, 1, 1, 1),\ (2, 0, 2, 0),\ (0, 2, 0, 2),\ (2, 2, 2, 2),\ (0, 1, 0, 1),\ (1, 0, 1, 0)\}$.

   Por otra parte, al ser la dimensión de $U$ también igual a 2, el subespacio $U$ tiene también 9 elementos. Para enumerar estos elementos, notemos que los elementos de $U$ vienen dados como las soluciones de l sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{r} x + 2y + 2z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right.$, o lo que es lo mismo, $\left\{ \begin{array}{l} x = y + z \\ t = 0 \end{array} \right.$ Por tanto, podemos elegir libremente los valores de $y$ y $z$ (en $\mathbb{Z}_3$), en cuyo caso el valor de $x$ viene dado por la suma de estos valores (y $t = 0$). Teniendo esto en cuenta, los elementos de $U$ son:

   $$(0, 0, 0, 0);\ (1, 0, 1, 0);\ (2, 0, 2, 0);\ (1, 1, 0, 0);\ (2, 1, 1, 0);\ (0, 1, 2, 0);\ (2, 2, 0, 0);\ (0, 2, 1, 0);\ (1, 2, 2, 0).$$

2. Vamos a comenzar calculando una base de $U \cap W$. En esta ocasión, y puesto que tenemos cuáles son todos los elementos de $U$ y todos los elementos de $W$, podríamos directamente elegir los elementos comunes. Eso lo haremos más adelante.

   Para calcular $U \cap W$, necesitamos las ecuaciones de $U$ y las ecuaciones de $W$.

   Las de $U$ las tenemos, puesto que nos las han dado. Las de $W$ tenemos que calcularlas.

   Notemos en primer lugar que $W$ vendrá dado por $4 - 2 = 2$ ecuaciones cartesianas. Para calcularlas vamos a tomar una base de $W$, a partir de ella escribiremos las ecuaciones paramétricas, y después eliminaremos los parámetros.

   Como base podríamos elegir la que ya tenemos, es decir, $\{(1, 1, 1, 1),\ (1, 2, 1, 2)\}$, pero en lugar de ello vamos a buscar otra base de forma que los cálculos posteriores sean más sencillos:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y tenemos como base de $W$ a $B_W = \{(1,0,1,0),\ (0,1,0,1)\}$.

Un vector $(x,y,z,t)$, pertenecerá a $W$ si es combinación lineal de estos dos, es decir, si $(x,y,z,t) = a\cdot(1,0,1,0)+b\cdot(0,1,0,1)$.

Esto nos da las siguientes ecuaciones paramétricas de $W$:

$$\begin{array}{rcll} x & = & a & \\ y & = & & b \\ z & = & a & \\ t & = & & b \end{array}$$

Y vemos que si $(x,y,z,t)\in W$ entonces $z = x$ y $t = y$. Las ecuaciones cartesianas de $W$ son entonces:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} x & & +\ 2z & & = & 0 \\ & y & & +\ 2t & = & 0 \end{array}\right.$$

Puesto que las ecuaciones de $U$ nos dicen las condiciones que debe cumplir un vector para pertenecer a $U$, y las ecuaciones de $W$ lo mismo, pero con $W$, para que un vector pertenezca a $U\cap W$, debe pertenecer tanto a $U$ como a $W$, luego deberá satisfacer, tanto las condiciones para pertenecer a $U$ como las condiciones para pertenecer a $W$. Tenemos entonces:

$$U\cap W \equiv \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +\ 2y & +\ 2z & & = & 0 \\ & & & t & = & 0 \\ x & & +\ 2z & & = & 0 \\ & y & & +\ 2t & = & 0 \end{array}\right.$$

Y ahora, para sacar una base, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1&2&2&0\\0&0&0&1\\1&0&2&0\\0&1&0&2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1&2&2&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1&2&2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(2)]{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(1)} \begin{pmatrix} 1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$U\cap W \equiv \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & & +\ 2z & & = & 0 \\ & y & & & = & 0 \\ & & & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Y vemos como $U\cap W$ viene dado por tres ecuaciones, luego $\dim(U\cap W) = 4-3 = 1$. Una base de $U\cap W$ está formada por un vector no nulo que sea solución del sistema. Por ejemplo, $B_{U\cap W} = \{(1,0,1,0)\}$.

Si ahora volvemos al apartado anterior, y nos fijamos en los vectores que son comunes a $U$ y a $W$, podemos ver que

$$U\cap W = \{(0,0,0,0),\ (1,0,1,0),\ (2,0,2,0)\}.$$

Que son justamente los vectores $0\cdot(1,0,1,0)$, $1\cdot(1,0,1,0)$ y $2\cdot(1,0,1,0)$.

Vamos a continuación a calcular una base del subespacio $U+W$.

Para esto, necesitamos, en primer lugar, un sistema de generadores de cada uno de los subespacios. La unión de ambos será un sistema de generadores de $U+W$.

Sabemos que $\dim(U) = 2$. Un sistema de generadores de $U$ está formado entonces por dos vectores linealmente independientes de $U$. Podemos tomar, por ejemplo, $(1,1,0,0)$ y $(1,0,1,0)$.

Como sistema de generadores de $W$ vamos a tomar el que nos da el enunciado (aunque podríamos tomar la base que obtuvimos en el apartado anterior). Con esto, tenemos que

$$U+W = L[(1,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (1,1,1,1),\ (1,2,1,2)]$$

A partir de estos vectores obtenemos una base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{41}(2)]{\substack{E_{21}(2)\\E_{31}(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{24}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)]{E_{12}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{43}(1)]{\substack{E_{13}(1)\\E_{23}(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego una base de $U + W$ es $B_{U+W} = \{(1,0,0,2),\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,1)\}$.

Otras formas para haber obtenido una base de $U + W$:

- Partimos de una base de $U \cap W$ ($\{(1,0,1,0)\}$), la ampliamos a una base de $U$ ($\{(1,0,1,0),\ (1,1,0,0)\}$) y a una base de $W$ ($\{(1,0,1,0),\ (1,1,1,1)\}$). La unión de ambas es una base de $U + W$.
- Teniendo en cuenta que $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ podemos saber que $\dim(U + W) = 3$.

  Del sistema de generadores $\{(1,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (1,1,1,1),\ (1,2,1,2)\}$ nos quedamos con tres que sean linealmente independientes (los tres primeros).

Con esto ya hemos terminado el apartado segundo.

3. Este apartado ya lo tenemos casi terminado.

   En el cálculo de la base de $U \cap W$ hemos necesitado unas ecuaciones de $U \cap W$. Estas son:

$$U \cap W \equiv \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & & +\ 2z & & = & 0 \\ & y & & & = & 0 \\ & & & t & = & 0 \end{array} \right.$$

   Para obtener las ecuaciones cartesianas de $U + W$, notemos primero que el número de ecuaciones de $U + W$ es $\dim(V) - \dim(U + W) = 4 - 3 = 1$.

   A partir de la base del apartado anterior escribimos las ecuaciones paramétricas:

   $(x,y,z,t) \in U + W$ si, y sólo si, $(x,y,z,t) = a \cdot (1,0,0,2) + b \cdot (0,1,0,1) + c \cdot (0,0,1,1)$ para algunos valores $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$. Entonces, las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & a & & & & \\ y & = & & & b & & \\ z & = & & & & & c \\ t & = & 2a & + & b & + & c \end{array}$$

   Y de aquí podemos ver que las coordenadas de cualquier vector de $U+W$ cumplen la ecuación $t = 2x+y+z$. Tenemos entonces:

$$U + W \equiv \{x + 2y + 2z + t = 0$$

Por último, vamos a dar una tabla con todos los elementos de $U+W$. Para eso, en el eje horizontal colocaremos cada uno los vectores de $U$, en el eje vertical cada uno de los vectores de $W$, y en la intersección de la fila y la columna de un vector de $U$ y un vector de $W$ colocaremos su suma.

De esta forma, tendremos en la tabla todos los vectores que son suma de un vector de $U$ y un vector de $W$.

| | (0,0,0,0) | (1,0,1,0) | (2,0,2,0) | (1,1,0,0) | (2,1,1,0) | (0,1,2,0) | (2,2,0,0) | (0,2,1,0) | (1,2,2,0) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (0,0,0,0) | (0,0,0,0) | (1,0,1,0) | (2,0,2,0) | (1,1,0,0) | (2,1,1,0) | (0,1,2,0) | (2,2,0,0) | (0,2,1,0) | (1,2,2,0) |
| (1,2,1,2) | (1,2,1,2) | (2,2,2,2) | (0,2,0,2) | (2,0,1,2) | (0,0,2,2) | (1,0,0,2) | (0,1,1,2) | (1,1,2,2) | (2,1,0,2) |
| (2,1,2,1) | (2,1,2,1) | (0,1,0,1) | (1,1,1,1) | (0,2,2,1) | (1,2,0,1) | (2,2,1,1) | (1,0,2,1) | (2,0,0,1) | (0,0,1,1) |
| (1,1,1,1) | (1,1,1,1) | (2,1,2,1) | (0,1,0,1) | (2,2,1,1) | (0,2,2,1) | (1,2,0,1) | (0,0,1,1) | (1,0,2,1) | (2,0,0,1) |
| (2,0,2,0) | (2,0,2,0) | (0,0,0,0) | (1,0,1,0) | (0,1,2,0) | (1,1,0,0) | (2,1,1,0) | (1,2,2,0) | (2,2,0,0) | (0,2,1,0) |
| (0,2,0,2) | (0,2,0,2) | (1,2,1,2) | (2,2,2,2) | (1,0,0,2) | (2,0,0,2) | (0,0,2,2) | (2,1,0,2) | (0,1,1,2) | (1,1,2,2) |
| (2,2,2,2) | (2,2,2,2) | (0,2,0,2) | (1,2,1,2) | (0,0,2,2) | (1,0,0,2) | (2,0,1,2) | (1,1,2,2) | (2,1,0,2) | (0,1,1,2) |
| (0,1,0,1) | (0,1,0,1) | (1,1,1,1) | (2,1,2,1) | (1,2,0,1) | (2,2,1,1) | (0,2,2,1) | (2,0,0,1) | (0,0,1,1) | (1,0,2,1) |
| (1,0,1,0) | (1,0,1,0) | (2,0,2,0) | (0,0,0,0) | (2,1,1,0) | (0,1,2,0) | (1,1,0,0) | (0,2,1,0) | (1,2,2,0) | (2,2,0,0) |

Y aquí tenemos todos los elementos del subespacio $U + W$. Podemos ver cómo para todos se verifica que $x + z = y + t$, que era la ecuación cartesiana de $U + W$.

En total hay 27 elementos distintos ($3^3$). Cada elemento aparece 3 veces. Por ejemplo:

$$(0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) + (0, 0, 0, 0) = (1, 0, 1, 0) + (2, 0, 2, 0) = (2, 0, 2, 0) + (1, 0, 1, 0).$$
$$(1, 1, 2, 2) = (0, 2, 1, 0) + (1, 2, 1, 2) = (1, 2, 2, 0) + (0, 2, 0, 2) = (2, 2, 0, 0) + (2, 2, 2, 2).$$

Y así con todos.

Es decir, cada elemento de $U+W$ se puede escribir de tres formas distintas como suma de un vector de $U$ más un vector de $W$. Esto es así porque $U \cap W$ tiene tres elementos. Por ejemplo, si tomamos $(1, 1, 2, 2) \in U+W$, una vez encontrada una forma de escribirlo como suma de un vector de $U$ más uno de $W$ ($(1, 1, 2, 2) = (0, 2, 1, 0) + (1, 2, 1, 2)$), las tres maneras diferentes de hacerlo son:

- $[(0, 2, 1, 0) + (0, 0, 0, 0)] + [(1, 2, 1, 2) - (0, 0, 0, 0)]$. Esta es obvia.
- $[(0, 2, 1, 0) + (1, 0, 1, 0)] + [(1, 2, 1, 2) - (1, 0, 1, 0)]$. Que nos da $(1, 2, 2, 0) + (0, 2, 0, 2)$.
- $[(0, 2, 1, 0) + (2, 0, 2, 0)] + [(1, 2, 1, 2) - (2, 0, 2, 0)]$. Que nos da $(2, 2, 0, 0) + (2, 2, 2, 2)$.

En los casos en que la intersección de dos subespacios tiene únicamente un vector (el vector cero), entonces todo vector de $U + W$ se escribe de forma única como suma de un vector de $U$ y un vector de $W$. En tal caso, se habla de suma directa de los subespacios $U$ y $W$.