TEMA 5

Matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes.

Ejercicio 1. Da un ejemplo de dos matrices $A, B \in M_2(\mathbb{Z}_2)$, distintas de cero, tales que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

Ejercicio 2. Prueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$ satisface una ecuación de la forma $A^2 + \alpha A + \beta \mathrm{Id} = 0$. Utiliza este hecho para ver que A es regular y calcular su inversa.

Ejercicio 3. Da un ejemplo de tres matrices A, P, Q, con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, de forma que P y Q sean regulares y distintas, A sea distinta de cero y $PA = QA$.

Ejercicio 4. Una matriz se dice idempotente si $A^2 = A$.

1. Prueba que si A es idempotente y regular entonces $A = \mathrm{Id}$.

2. Prueba que si A es idempotente, y $B = \mathrm{Id} - A$ entonces B es idempotente y $AB = 0$.

3. Calcula todas las matrices $A \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ idempotentes.

4. Encuentra $A \in M_3(\mathbb{Z}_2)$, $A \neq 0$, $A \neq \mathrm{Id}$ que sea idempotente.

Ejercicio 5. Dos matrices se dicen equivalentes por filas cuando se puede obtener una a partir de la otra realiando transformaciones elementales por filas, se dicen equivalentes por columnas cuando se puede obtener una a partir de la otra realizando transformaciones elementales por columnas, y se dice que son equivalentes cuando se puede obtener una a partir de la otra realizando transformaciones elementales por filas y por columnas.

Comprueba que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son equivalentes, pero que no son equivalentes por filas ni equivalentes por columnas.

Ejercicio 6. Calcula la inversa, cuando exista, de las siguientes matrices:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(K)$, donde K es un cuerpo cualquiera.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_2),\ M_3(\mathbb{Z}_3),\ M_3(\mathbb{Q})$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_3),\ M_4(\mathbb{Z}_5)$

Ejercicio 7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Determina para que valores de a, b, c, d se verifica que $A \cdot B = B \cdot A$.

Ejercicio 8. Una imagen en blanco y negro se puede almacenar en una matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ con $0 \le a_{ij} \le 1$ donde el valor de a_{ij} determina el tono de gris del pixel i, j. Sea t un divisor común de n y m. Seleccionamos un cuadrado de la imagen de tamaño $t \times t$ al que llamamos C. Calcula el producto

$$\frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{t1} & \cdots & c_{tt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cómo interpretas el resultado? ¿Qué operación matricial podemos realizar sobre A para que cada pixel de la imagen resultante tenga tamaño $t \times t$?

Ejercicio 9. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & a & 2 \\ 3 & 0 & 5 & a+1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$. Estudia para qué valores del parámetro a la matriz A tiene inversa para el producto.

Ejercicio 10. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_p).$$

Encuentra los valores de p para los que la matriz A es singular (es decir, no tiene inversa).

Ejercicio 11. ¿Cómo afecta a un sistema de ecuaciones si en la matriz de coeficientes intercambiamos dos columnas? ¿Y si multiplicamos una columna por un escalar no nulo?

Ejercicio 12. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

1. Encuentra una matriz B tal que $A \cdot B = \mathrm{Id}$.
2. Encuentra todas las matrices B que cumplan la propiedad anterior.
3. ¿Existe una matriz C tal que $C \cdot A = \mathrm{Id}$?

Ejercicio 13. Encuentra, si es posible, $P \in M_4(\mathbb{Z}_3)$, regular, tal que $PA = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - z = -1 \end{cases}$$

discútelo considerando los coeficientes en $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ y $\mathbb{Q}$. En el caso de que sea compatible, encuentra explícitamente todas las soluciones.

Ejercicio 15. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ x + 2y + az = 4 \\ 3x + (a+2)y + 2z = 2 \end{cases}$$

Discútelo según el valor del parámetro a. Si para $a = 4$ es compatible, resuélvelo.

Ejercicio 16. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Q}$

$$\begin{cases} x - ay + (a+1)z = 4 \\ ax + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Discútelo según los valores del parámetro a, y resuélvelo para $a = -1$.

Ejercicio 17. Calcula la forma normal de Hermite por filas y el rango de la siguiente matriz, vista con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$,$\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ y $\mathbb{Q}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 18. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales considerados en $\mathbb{Q}$.

- $$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x - y + z + t + v = 0 \\ x + y + z + t - v = 0 \\ -x - y + z + t - v = 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x + y + t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x + y - z + t - v = 0 \\ x - y + z + t + v = 1 \\ x + t = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 19. Repite el ejercicio anterior considerando los coeficientes de los sistemas en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$. Para los sistemas indeterminados calcula el número de soluciones.

Ejercicio 20. Calcula los siguientes determinantes (considerando las matrices con coeficientes en $\mathbb{Q}$):

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
2. $$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{5} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{11}{5} \end{vmatrix}$$

3.
$$\begin{vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{vmatrix}$$

4.
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

5.
$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

6.
$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

7.
$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 21. Sea K un cuerpo, y $a, b, c, d \in K$. Calcula los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 22. Un sistema de cifrado elemental puede obtenerse asignando a cada letra del alfabeto un valor entero positivo, y enviando un mensaje alfabético como una cadena de enteros[1], aunque este sistema no es difícil de "romper". Sin embargo el sistema puede mejorarse usando multiplicación matricial. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z})$ invertible, tal que $A^{-1} \in M_3(\mathbb{Z})$. Disponemos entonces el mensaje numérico anterior en una matriz B, de orden $3 \times k$, donde k es el menor entero tal que $3k$ es mayor o igual que el número de símbolos del mensaje, y disponemos la cadena numérica rellenando las filas de la matriz B de izquierda a derecha y de arriba a abajo, completando con ceros si fuera necesario. El mensaje cifrado se obtiene leyendo de igual forma los elementos de la matriz AB.

Dada la asignación

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
6	12	16	24	4	19	8	5	20	13	17	7	1
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
21	2	25	10	3	23	14	11	22	15	26	9	18

y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcula el cifrado a enviar correspondiente al mensaje

INTENTALO DE NUEVO

[1] cifrado monoalfabético general

2. Hallar A^{-1} y descifrar la cadena:

$$19, -18, 0, 33, -5, 20, 22, 11, 24, 36, 41, 45, 45, 151,$$
$$128, 119, 7, 96, -14, 8, -3, -22, -8, -22, -21, -7, -22$$

3. ¿Cómo puede obtenerse una matriz distinta, C, con entradas enteras, que pueda sustituir a A?.

Ejercicio 23. En este ejercicio presentamos otro sistema de cifrado elemental derivado del conocido como cifrado de Hill. Comenzamos codificando los caracteres según la tabla siguiente

0	0	8	8	G	16	Ñ	24	V	32
1	1	9	9	H	17	O	25	W	33
2	2	A	10	I	18	P	26	X	34
3	3	B	11	J	19	Q	27	Y	35
4	4	C	12	K	20	R	28	Z	36
5	5	D	13	L	21	S	29		
6	6	E	14	M	22	T	30		
7	7	F	15	N	23	U	31		

Con lo que nuestro texto será una sucesión de valores en $\mathbb{Z}_{37}$, un cuerpo ya que 37 es primo. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 36 & 2 & 34 & 17 & 16 & 4 \\ 17 & 8 & 7 & 27 & 2 & 18 \\ 35 & 25 & 7 & 34 & 6 & 4 \\ 2 & 28 & 3 & 9 & 29 & 27 \\ 9 & 18 & 5 & 14 & 23 & 2 \\ 33 & 9 & 7 & 22 & 8 & 30 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{Z}_{37}).$$

La matriz A se emplea como clave de cifrado en un sistema similar al ejercicio 22. Por ejemplo, para cifrar la cadena `ALGEBRA`, convertimos la cadena a una sucesión de elementos en $\mathbb{Z}_{37}$, lo que nos da $10, 21, 16, 14, 11, 28, 10$. Añadimos a esa cadena un 0, y a continuación añadimos tantos valores aleatorios no nulos hasta obtener una longitud múltiplo de 6, con lo que obtenemos la cadena $10, 21, 16, 14, 11, 28, 10, 0, 12, 18, 7, 33$. Esta cadena la ordenamos en una matriz de 6 filas y tantas columnas como sea necesario, que rellenamos por filas, por lo que obtenemos

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 21 \\ 16 & 14 \\ 11 & 28 \\ 10 & 0 \\ 12 & 18 \\ 7 & 33 \end{pmatrix} \in M_{6\times 2}(\mathbb{Z}_{37}).$$

El cifrado se produce multiplicando $A \cdot P$, lo que proporciona

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 0 \\ 9 & 4 \\ 18 & 7 \\ 12 & 25 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

que convertido a cadena de caracteres se corresponde con `9AI094I7CO43`.

1. Cifra tu nombre completo.

2. Descifra la cadena

`QRGLYSEEPBL0YH0RJD4I35M1TPBNOGTHLW0AJ6K2DWM9BK1LFWF8TRBW76PO1D5U1AIVÑ6F4`.

Preguntas test

Ejercicio 24. Dadas dos matrices A y B en $M_2(\mathbb{R})$ y tales que

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A-B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces A^2-B^2 es igual a

a) $\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 25. Sea $A \in M_3(\mathbb{Q})$ tal que

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta de A es

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 26. El determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

vale

a) -9 b) -3 c) 0 d) 3

Ejercicio 27. Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sea $X \in M_3(\mathbb{R})$. Entonces

1. $X=B$ es la única solución de la ecuación matricial $AB=AX$.
2. $X=C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial $AB=AX$.
3. Tanto B como C son soluciones de la ecuación matricial $AB=AX$.
4. La ecuación matricial $AB=AX$ no tiene solución.

Ejercicio 28. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 6 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_p)$$

La matriz A es singular (es decir, no tiene inversa para el producto) para el siguiente valor de p

a) $p=2$ b) $p=3$ c) $p=5$ d) $p=7$

Ejercicio 29. Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$. Entonces $(A\cdot B)^{-1}$

a) No existe.

b) vale $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

c) vale $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d) vale $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 30. Señala la afirmación verdadera. La matriz en $M_4(\mathbb{Z}_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) No tiene inversa para ningún valor de a.

b) Tiene inversa para todo valor de a.

c) Sólo tiene inversa para $a = 1$.

d) Tiene inversa sólo cuando $a \neq 0$.

Ejercicio 31. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z}_2)$ tal que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) Los datos del enunciado no permiten calcular A.

Ejercicio 32. Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$. Entonces:

a) La matriz $I - A + A^t$ es simétrica[2].

b) La matriz $I - (A \cdot A^t)$ es simétrica.

c) La matriz $I - A^2$ es simétrica.

d) La matriz $I - 2A$ es simétrica.

Ejercicio 33. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$ es regular para

a) $p = 5$.

b) $p = 7$.

c) $p = 3$.

[2]Una matriz $A \in M_n(K)$ se dice simétrica si $A = A^t$

d) $p = 2$.

Ejercicio 34. En el conjunto $M_2(\mathbb{Z}_2)$ definimos la relación de equivalencia $ARB \iff A^2 = B^2$. Entonces:

(a) La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pertenece a la clase de equivalencia de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) El conjunto cociente está formado por un solo elemento.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$.

(d) La clase $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$ tiene cardinal uno.

Ejercicio 35. Sea $X \in M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

1. $X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-25}{11} & \frac{-2}{11} \\ \frac{-23}{11} & \frac{-3}{11} \end{pmatrix}$.
3. $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
4. La matriz X no es regular.

Ejercicio 36. El determinante de la matriz con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) es 0.

b) es 4!.

c) es congruente con 4^4 módulo 7.

d) es congruente con 3^3 módulo 7.

Ejercicio 37. Si $A \in M_3(\mathbb{R})$ verifica que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces A^{-1} es igual a:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 38. Sea $P \in M_2(\mathbb{Q})$ tal que $P \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -6 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces:

(a) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) La matriz P no tiene inversa.

(d) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 39. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 3 & a+1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Entonces la matriz A es regular:

a) Para cualquier valor de $a \in \mathbb{Z}_7$.

b) Para $a = 1, 3, 4, 5, 6$.

c) Para $a = 3, 4, 5, 6$.

d) Para $a = 0, 2, 3, 5, 6$.

Ejercicio 40. Sean A y B dos matrices cuadradas 2×2 con coeficientes reales tales que

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

(a) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$.

(b) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$.

(c) No existen matrices con las condiciones que nos da el enunciado.

(d) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$.