

Aritmética entera y modular. Polinomios

Ejercicio 1. Sea a tu número de DNI. Resuelve el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{aligned}(a^2 + 1)x &\equiv 5 \pmod{9} \\ 15x &\equiv 11 \pmod{28} \\ 5x &\equiv 13 \pmod{22} \\ 12^{123}x &\equiv 10 \pmod{25}\end{aligned}$$

Ejercicio 2. Un grupo de turistas japoneses que viaja en siete autocares iguales (y todos completos) llega a un hotel. A la hora de ir a cenar, encuentran que en el comedor hay mesas para 7 personas y mesas para 4. Los turistas de los 4 primeros autocares se sientan alrededor de las mesas de 7 personas, y los turistas de los tres restantes, más los 3 que quedan sin acomodar de los autocares anteriores se sientan en las de 4. De esta forma quedan todos acomodados para la cena. Al día siguiente acuden a un museo, donde deben entrar en grupos de un máximo de 15 personas. Al hacer la distribución, el último grupo queda de 10 personas.

¿Cuántos turistas viajaron?

Ejercicio 3. Enviamos por correo dos tipos de paquetes A y B. Por enviar los del tipo A nos cobran 24 céntimos de euro más que por los del tipo B. Sabiendo que hemos enviado más paquetes del tipo B que del tipo A, que en total hemos enviado 14 paquetes y que nos han cobrado un total de 16 euros con 98 céntimos, ¿cuántos hemos enviado de cada tipo y qué nos han cobrado por cada uno?

Ejercicio 4. Sean $x = 2175)_8$, $y = 6D9)_{16}$ y $z = 10110110110)_2$.

1. Expresa x , y , z , $2x$, $-y$ en complemento a 2 (sin realizar cálculos en base 10).
2. Realiza los siguientes cálculos trabajando en complemento a 2: $x + z$, $2x - y$, $z - y$.
3. Expresa los números obtenidos en el apartado anterior en hexadecimal y en decimal.

Ejercicio 5. Sea $p(x) = x^8 + 2x^7 + 2x^6 + x^5 + x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

1. Calcula las raíces de $p(x)$.
2. Calcula $\text{mcd}(p(x), x^6 + 2x + 1)$.
3. Factoriza $p(x)$ como producto de irreducibles.

Ejercicio 6. Sea $A = \mathbb{Z}_5[x]_{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 4}$.

1. ¿Cuántos elementos tiene A ?
2. Realiza en A los siguientes cálculos (si es posible).
 - $(2x^3 + 2x^2 + 1)(x^3 + x^2 + 2) - (x^2 + 2x + 3)^2$.
 - $(x^2 + 1)^3 + x(2x^3 + 4x^2 + 2x + 2)^{-1}$.
 - $(x^2 + x + 2)(x^3 + x^2 + x + 1)^{-1}$.
 - Calcula $a(x) \in A$ tal que

$$a(x)(x^3 + 2x^2 + 3x + 4) + x^2 + 3x + 1 = (a(x) + 2)(x^2 + 2x + 3).$$

3. ¿Es A un cuerpo?