Capítulo 4

Combinatoria

La combinatoria trata del estudio de las posibles agrupaciones de objetos. Contar el número de objetos que verifican ciertas propiedades es uno de los objetivos de la combinatoria. Problemas muy diversos, como determinar el número posible de apuestas diferentes en una quiniela, el número posible de posiciones en que unos corredores pueden terminar una carrera, el número posible de matrículas de los coches de un país o las diferentes formas de distribuir una serie de objetos en cajas son problemas que se abordan mediante las técnicas de conteo que veremos en este capítulo.

Lo que pretendemos es por tanto, contar los elementos de un conjunto, o más precisamente, determinar su cardinal. Dado un conjunto A denotaremos por $|A|$ a su cardinal. Nosotros aquí trataremos únicamente con conjuntos que tienen un número finito de elementos. En la definición 18 decíamos que un conjunto A tiene cardinal n si existe una biyección entre el conjunto A y el conjunto $\{0, 1, \cdots, n-1\}$. Es claro que si dos conjuntos son biyectivos tienen el mismo cardinal.

A la hora de contar ciertos objetos, lo que haremos será identificar estos objetos con los elementos de algún conjunto del cual sepamos determinar su cardinal (es decir, estableceremos una biyección entre el conjunto de objetos que queremos contar y otro conjunto del cual hallaremos su cardinal).

Para comenzar, estudiaremos en primer lugar cómo determinar el cardinal de algunos conjuntos.

4.1. Métodos elementales de conteo

4.1.1. Principio de inclusión-exclusión

Proposición 4.1.1 (Principio de la suma)**.** *Sean A_1 y A_2 dos conjuntos disjuntos (es decir, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$). Entonces $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$.*

Intuitivamente está claro lo que significa este principio. Es otra forma de decir lo nos enseñaron de pequeños sobre lo que significaba la suma. No obstante, si quisiéramos una demostración, ésta se basaría en que los conjuntos $\{0, 1, \cdots, m-1\}$ y $\{n, n+1, \cdots, n+m-1\}$ son biyectivos.

El principio puede extenderse a tres o más conjuntos. En tal caso, dice que si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son conjuntos disjuntos dos a dos (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$) entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

El principio de la suma podría enunciarse también como sigue:

Si una primera tarea se puede realizar de n_1 formas, y una segunda tarea se puede realizar de n_2 formas, y las dos tareas son incompatibles, entonces hay $n_1 + n_2$ formas de realizar una de las dos tareas.

Este principio de la suma es muy restrictivo, pues requiere que los conjuntos sean disjuntos, o que las tareas sean incompatibles. Sin embargo, en general, la situación es que los conjuntos no sean disjuntos. En este caso se tiene:

Proposición 4.1.2. *Sean A_1 y A_2 dos conjuntos. Entonces $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.*

La idea de este resultado está clara. Si queremos contar los elementos que están en $A_1 \cup A_2$, contamos por una parte los que están en A_1 y por otra parte los que están en A_2, lo que nos da $|A_1| + |A_2|$. Sin embargo, los que se encuentran en $A_1 \cap A_2$ los hemos contado dos veces, luego hemos de restar $|A_1 \cap A_2|$ a la suma anterior.

Una demostración de esto la tenemos en el primer capítulo.

Ejemplo 4.1.1. *Vamos a determinar cuantos números entre* 1 *y* 100 *son, bien divisibles por* 2*, bien divisibles por* 3*.*

Sean A_1 *y* A_2 *los números que son múltiplos de* 2 *y* 3 *respectivamente.* A_1 *tiene cincuenta elementos (desde* $2 \cdot 1$ *hasta* $2 \cdot 50$*), mientras que* A_3 *tiene* 33 *(desde* $3 \cdot 1$ *hasta* $3 \cdot 33$*). Por otra parte,* $A_1 \cap A_2$ *son los múltiplos de* 6*, luego tiene* 16 *elementos (desde* $6 \cdot 1$ *hasta* $6 \cdot 16$*). Por tanto*

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 50 + 33 - 16 = 67$$

Esta proposición tiene una generalización a la unión de tres o más conjuntos. El resultado se conoce como *principio de inclusión exclusión*

Proposición 4.1.3 (Principio de inclusión-exclusión)**.** *Sean* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *conjuntos. Entonces:*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots \\ &+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|\end{aligned}$$

Esta última suma puede escribirse como:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

La demostración del principio de inclusión-exclusión se haría por inducción. Para $n = 1$ el resultado es trivialmente cierto, y supuesto cierto para n conjuntos se demostraría para $n+1$ conjuntos poniendo $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1} = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}$. La demostración es bastante engorrosa. Veamos aquí como se haría el paso de 2 a 3.

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3| = \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| = \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - \big[|A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)|\big] = \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.2. *Vamos a ver cuantos números entre* 1 *y* 111 *son compuestos (lo que nos dará inmediatamente cuántos números primos hay menores que* 111*.*

Dado que $\sqrt{111} < 11$*, se tiene que si un número menor o igual que* 111 *es compuesto, tiene un divisor primo menor que* 11*. Por tanto, será múltiplo de* 2*, múltiplo de* 3*, múltiplo de* 5 *o múltiplo de* 7*. Consideramos entonces:*

$A_1 = \{$*Números compuestos múltiplos de* $2\} = \{2 \cdot x : \ 2 \leq x \leq 55\}$*. Por tanto* $|A_1| = 54$*.*
$A_2 = \{$*Números compuestos múltiplos de* $3\} = \{3 \cdot x : \ 2 \leq x \leq 37\}$*. Por tanto* $|A_2| = 36$*.*
$A_3 = \{$*Números compuestos múltiplos de* $5\} = \{5 \cdot x : \ 5 \leq x \leq 22\}$*. Por tanto* $|A_3| = 21$*.*
$A_4 = \{$*Números compuestos múltiplos de* $7\} = \{7 \cdot x : \ 2 \leq x \leq 15\}$*. Por tanto* $|A_4| = 14$*.*
Luego $A_1 \cap A_2 = \{6 \cdot x : \ 1 \leq x \leq 18\}$*, que tiene cardinal* 18*. De la misma forma, obtenemos:*
$|A_1 \cap A_3| = 11;\ |A_1 \cap A_4| = 7;\ |A_2 \cap A_3| = 7;\ |A_2 \cap A_4| = 5;\ |A_3 \cap A_4| = 3.$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3;\ |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 2;\ |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 1;\ |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1;\ A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset.$

Por tanto, deducimos que

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = (54+36+21+14)-(18+11+7+7+5+3)+(3+2+1+1)-0 = 125-51+7 = 81$$

Es decir, entre 1 *y* 111 *hay* 81 *números compuestos, de donde deducimos que hay* 29 *números primos (el* 1 *no es ni primo ni compuesto).*

Estos 29 números primos son:

$$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,109\}$$

4.1.2. Principio del producto. Variaciones

Proposición 4.1.4 (Principio del producto). *Sean A_1, A_2 dos conjuntos. Entonces,* $|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$.

Aquí también el principio es intuitivamente muy claro. No obstante, si quisiéramos hacer una demostración de este hecho, deberíamos encontrar una biyección entre $\{0,1,\cdots,mn-1\}$ y $\{0,1,\cdots,m-1\} \times \{0,1,\cdots,n-1\}$. Esta biyección vendría dada por $a \mapsto (a \text{ mód } m, a \text{ div } m)$[1]

Este principio puede generalizarse a tres o más conjuntos, teniéndose en dicho caso:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_m|$$

El principio del producto podría enunciarse también como sigue:

Si una tarea podemos dividirla en dos (o más) tareas consecutivas, de forma que hay n_1 formas de realizar la primera tarea, y n_2 formas de realizar la segunda tarea, entonces hay $n_1 n_2$ formas de completar la tarea.

Ejemplo 4.1.3.

1. *Vamos a ver cuantas apuestas diferentes de una quiniela pueden hacerse. La tarea de elegir una combinación la podemos dividir en catorce pasos. En cada uno de ellos hacemos una elección entre tres posibilidades* (1, X, 2). *Por tanto, el número de apuestas es* $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^{14} = 4782969$.

   Nótese que si $A = \{1, X, 2\}$ *una combinación es simplemente un elemento del conjunto*

   $$A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A$$

   cuyo cardinal es 3^{14}.

2. *En el sistema de matriculación vigente cada matrícula se compone de cuatro dígitos y tres consonantes (salvo la "Ñ"). Si consideramos los conjuntos*

   $$\mathcal{D} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \qquad \mathcal{C} = \{B,C,D,F,G,H,J,K,L,M,N,P,Q,R,S,T,V,W,X,Y,Z\}$$

   cada matrícula puede identificarse entonces con un elemento de $\mathcal{D}\times\mathcal{D}\times\mathcal{D}\times\mathcal{D}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ *cuyo cardinal es* $10^4 \cdot 21^3 = 92610000$ *(existe una biyección entre el conjunto de posibles matrículas y* $\mathcal{D}\times\mathcal{D}\times\mathcal{D}\times\mathcal{D}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C}$*)*

3. *Vamos a calcular cuantos números de* 6 *cifras, escritos en binario, contienen la secuencia* 00. *Los números con estas características pueden adquirir una de las cuatro formas siguientes:*

   100_ _ _   1_00_ _   1_ _00_   1_ _ _00

   Llamemos A_1 *al conjunto de los números de la forma* 100_ _ _, A_2 *al conjunto de los números de la forma* 1_00_ _ *y así hasta* A_4.

[1] a mód n ya explicamos en el capítulo anterior lo que significa. a div m es el cociente entero de la división de a entre m.

Por el principio del producto cada uno de estos conjuntos tiene 8 *elementos, pues para elegir un elemento de uno de estos conjuntos hemos de hacer tres elecciones con dos opciones para cada una. Razonando de forma análoga se tiene que*

$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_3 \cap A_4| = 4$ *(un elemento de* $A_1 \cap A_2$ *es de la forma* 1000_ _*).*

$|A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_4| = 2$ *(un elemento de* $A_1 \cap A_3$ *es de la forma* 10000_*).*

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2.$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1.$

Y ahora, el principio de inclusión-exclusión nos dice que

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = (8+8+8+8) - (4+4+4+2+2+2) + (2+2+1+1) - 1 = 32 - 18 + 6 - 1 = 19$$

de donde deducimos que hay 19 *números de seis cifras en binario que contienen la secuencia* 00.

Estos 19 números son:

100000	100001	100010	100011	100100	100101	100110	100111	101000	101001
101100	110000	110001	110010	110011	110100	111000	111001	111100	

Estos números, escritos en decimal, son 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 44, 48, 49, 50, 51, 52, 56, 57 y 60. En la siguiente tabla, los clasificamos según pertenezcan a A_1*,* A_2*, etc.*

$A_1:$	32	33	34	35	36	37	38	39											
$A_2:$	32	33	34	35								48	49	50	51				
$A_3:$	32	33							40	41		48	49				56	57	
$A_4:$	32				36				40		44	48				52	56		60
$A_1 \cap A_2:$	32	33	34	35															
$A_1 \cap A_3:$	32	33																	
$A_1 \cap A_4:$	32				36														
$A_2 \cap A_3:$	32	33										48	49						
$A_2 \cap A_4:$	32											48							
$A_3 \cap A_4:$	32								40			48					56		
$A_1 \cap A_2 \cap A_3:$	32	33																	
$A_1 \cap A_2 \cap A_4:$	32																		
$A_1 \cap A_3 \cap A_4:$	32																		
$A_2 \cap A_3 \cap A_4:$	32											48							
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4:$	32																		

Como consecuencia del principio del producto se tiene:

Proposición 4.1.5. *Sean* A *y* B *dos conjuntos finitos. Entonces el número de aplicaciones de* A *en* B *es* $|B|^{|A|}$.

Demostración: Supongamos que $|A| = m$ y $|B| = n$. Podría hacerse una demostración a partir de la representación de un número menor que n^m en base n.

Nosotros aquí emplearemos el principio del producto.

La elección de una aplicación $f : A \to B$ podemos dividirla en m etapas. Cada etapa consiste en definir la imagen de cada uno de los elementos de A, para lo cual tenemos n posibilidades (una por cada elemento de B). Por tanto, el número posible de aplicaciones es n^m.

De hecho, si $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, dar una aplicación $f : A \to B$ es equivalente a dar un elemento de $B \times B \times \cdots \times B$ (en concreto, el elemento $(f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_m))$). ■

Notación: En ocasiones se representa al conjunto de aplicaciones de A en B como B^A, es decir:

$$B^A = \{f : A \to B;\ f \text{ es aplicación}\}$$

Con esta notación se tiene que $\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$.

Ejemplo 4.1.4. *Una apuesta quinielística puede ser identificada con una aplicación*

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\} \longrightarrow \{1, X, 2\}$$

por tanto, el número posible de aplicaciones es 3^{14}*, como ya habíamos visto antes.*

Vamos a ver también cuantas aplicaciones inyectivas podemos definir de un conjunto a otro.

Proposición 4.1.6. *Sea A un conjunto con m elementos y B un conjunto con n elementos. El número de aplicaciones inyectivas de A en B es $n(n-1)\cdots(n-m+1)$.*

Demostración: Nótese que si $m < n$ no existe ninguna aplicación inyectiva $f : A \to B$. Por tanto, supondremos que $m \geq n$.

Supongamos que $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. Para dar una aplicación inyectiva $f : A \to B$ necesitamos dar $f(a_1),\ f(a_2), \cdots, f(a_m)$.

Para elegir $f(a_1)$ tenemos un total de n posibilidades. Al ser f inyectiva, para elegir $f(a_2)$ tenemos $n-1$ posibilidades (pues no podemos hacer la misma elección que para $f(a_1)$). De la misma forma, para $f(a_3)$ tenemos $(n-2)$ posibilidades. Continuando con este razonamiento, llegamos a que para elegir $f(a_m)$ tenemos $n-m+1$ posibilidades. Por tanto, el número de aplicaciones inyectivas es $n(n-1)\cdots(n-m+1)$.

Notemos que en el caso de que $m < n$ la expresión anterior es también válida, pues uno de los factores es $n - n = 0$. ■

Definición 56.

1. *Se llaman* variaciones con repetición *de n elementos, tomados de m en m a cada una de las posibles elecciones de m elementos, dentro de un conjunto de n elementos, pudiéndose tomar elementos repetidos. Dos posibles elecciones se diferencian, bien en la naturaleza de los elementos elegidos, bien en el orden en que se han elegido.*

2. *Se llaman* variaciones sin repetición *de n elementos, tomados de m en m a cada una de las posibles elecciones de m elementos, dentro de un conjunto de n elementos, no pudiendo aparecer un elemento más de una vez. Dos posibles elecciones se diferencian, bien en la naturaleza de los elementos elegidos, bien en el orden en que se han elegido.*

El número de variaciones con repetición de n elementos, tomados de m en m es igual a n^m. El número de variaciones sin repetición de n elementos, tomados de m en m es $n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Ejemplo 4.1.5.

1. *Para hacer una quiniela, debemos elegir una lista de* 14 *elementos entre los elementos de un conjunto con* 3 *(*1*,* X*,* 2*). Son por tanto, variaciones con repetición de* 3 *elementos tomados de* 14 *en* 14*. El número total de posibles apuestas es por tanto* 3^{14}*.*

2. *En una carrera participan* 35 *personas. El ganador recibe una medalla de oro, el segundo clasificado una medalla de plata y el tercer clasificado una medalla de bronce.*

   El número de formas diferentes en que se pueden repartir las medallas corresponde al número de variaciones sin repetición de 35 *elementos, tomados de* 3 *en* 3*. Por tanto es* $35 \cdot 34 \cdot 33 = 39270$.

4.1.3. El principio del palomar

Aunque su enunciado pueda parecer trivial, es conveniente recordarlo, pues puede sernos útil para resolver ciertos problemas.

Proposición 4.1.7 (Principio del palomar)**.** *Si queremos repartir n objetos en m cajas, y $n > m$ entonces al menos una caja ha de contener* 2 *o más objetos.*

Nótese que repartir objetos en cajas es equivalente a definir una aplicación del conjunto de objetos en el conjunto de las cajas (la imagen de un elemento nos dice en que caja se coloca). Decir que una caja tiene dos o más objetos se traduce en que la aplicación no es inyectiva (pues esos dos elementos tendrían la misma imagen). El principio del palomar se enunciaría entonces:

Si $n > m$ no existen aplicaciones inyectivas de un conjunto de cardinal n en un conjunto de cardinal m.

Ejemplo 4.1.6.

1. *Si tenemos un grupo de* 500 *personas (bastaría con tener* 367*) debe haber dos que celebren el cumpleaños el mismo día (siempre y cuando todas celebren su cumpleaños).*

   En este caso las cajas serían cada uno de los días del año, mientras que los objetos a repartir son las personas.

2. *Vamos a comprobar que cualquier número natural tiene un múltiplo suyo que escrito en el sistema decimal está formado únicamente por ceros y unos.*

   Para esto, sea $n \in \mathbb{N}$ y consideramos los $n+1$ números naturales siguientes:

   $x_1 = 1,\ x_2 = 10+1,\ x_3 = 10^2+10+1,\ \cdots x_{n+1} = 10^n + \cdots + 10 + 1$

   cuya expresión en base decimal está formada únicamente por unos.

   Reducimos estos elementos módulos n (es decir, consideramos estos números en $\mathbb{Z}_n$). Debe haber al menos dos que coincidan (es decir, $x_k \equiv x_l (\text{mód } m)$) si $k < l$ se tiene que $10^k + 10^{k+1} + \cdots + 10^{l-1}$ es múltiplo de n. La expresión decimal de este número está formada por k ceros y $l-k$ unos.

   Vamos a realizar los cálculos para $n = 6$. Tomamos los números:

   $$1 \quad 11 \quad 111 \quad 1111 \quad 11111 \quad 111111 \quad 1111111$$

   Reducimos módulo 6.

   $$1 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \quad 3 \quad 1$$

   de donde deducimos que $1111 - 1 = 1110$ *es múltiplo de* 6.

   Lo mismo, vamos a hacerlo con $n = 17$. En este caso, la lista de los números $1,\ 11,\ 111, \cdots$ *reducida módulo 17 es:*

   $$1 \quad 11 \quad 9 \quad 6 \quad 10 \quad 16 \quad 8 \quad 13 \quad 12 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 3 \quad 14 \quad 5 \quad 0$$

   Y vemos como el número 1111111111111111 *es múltiplo de 17. De hecho, se tiene que* $1111111111111111 = 17 \cdot 65359477124183$.

   También podemos ver, dado que 16-10+11 es múltiplo de 17, que $111111 - 11111 + 11 = 100011$ *es múltiplo de 17. De la misma forma,* $11111 - 11 + 1$ *también lo es.*

3. *Un razonamiento semejante a este permite probar que dado un conjunto formado por n números enteros, podemos encontrar un subconjunto suyo cuya suma sea múltiplo de n.*

   Sea el conjunto de partida $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, y construimos:

   $y_1 = x_1$
   $y_2 = x_1 + x_2$
   $\cdots\cdots\cdots$
   $y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

   reducimos módulo n, y obtenemos n elementos de $\mathbb{Z}_n$.

   Si alguno de estos elementos es cero, digamos y_k, tenemos que $x_1 + \cdots + x_k$ es múltiplo de n.

Si ninguno de ellos vale cero, entonces n elementos de $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$. Por tanto, dos de estos elementos son iguales. Si estos son y_k e y_l se tiene que $y_l - y_k = x_{k+1} + \cdots + x_l$ es múltiplo de n.

Nótese que en el ejemplo anterior se ha empleado el mismo razonamiento, tomando los elementos $x_1 = 1,\ x_2 = 10, \cdots x_k = 10^{k-1}$.

Proposición 4.1.8 (Principio del palomar generalizado)**.** *Si queremos repartir n objetos en m cajas, al menos una caja ha de contener al menos n/m elementos.*

Obviamente, si n/m no es entero, se toma el número entero inmediatamente superior.

Ejemplo 4.1.7.
Si tenemos un grupo de 200 *personas, dado que hay* 12 *signos zodiacales y* $200/12 = 16,3...$ *sabemos que debe haber al menos* 17 *personas con el mismo signo del Zodíaco.*

4.2. Combinaciones

En secciones anteriores estudiamos cómo, de un conjunto de n elementos podíamos extraer m, de forma que el orden en que se extraían los elementos fuera significativo. En esta trataremos de encontrar cómo extraer m elementos de un conjunto que tiene n, pero ahora no importa el orden en que se elijan, sino únicamente la naturaleza de estos elementos.

En términos de conjuntos, nos preguntamos cuántos subconjuntos de cardinal m tiene un conjunto con n elementos. Vamos a denotar por $\binom{n}{m}$ a tal cantidad.

Por ejemplo, tenemos cinco personas {Ana, Bernardo, Carmen, Daniel, Esther} y repartimos dos viajes a París. En este caso, lo que hacemos es, elegir del conjunto formado por esas cinco personas, dos de ellas. El orden en que las elijamos es indiferente, pues da igual que el viaje le toque a Ana y Bernardo a que le toque a Bernardo y Ana. El número de formas de repartir los viajes sería, en este caso, $\binom{5}{2}$.

Las distintas formas en que podemos repartir los viajes serían:

{Ana, Bernardo};	{Ana, Carmen}	{Ana, Daniel}	{Ana, Esther}	{Bernardo, Carmen}
{Bernardo, Daniel}	{Bernardo, Esther}	{Carmen, Daniel}	{Carmen, Esther}	{Daniel, Esther}

Como vemos, hay 10 formas, lo que nos dice que $\binom{5}{2} = 10$.

Es fácil ver que, en general, $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ pues cada subconjunto de m elementos determina de forma única un subconjunto de $n - m$ elementos (concretamente, el de los elementos que no pertenecen a él) y viceversa. En el ejemplo del viaje, da igual elegir las dos personas que van a ir de viaje que las 3 que no van a ir. Es decir, $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$.

También es fácil ver que $\binom{n}{n} = 1$, pues cada conjunto de cardinal n tiene un único subconjunto con n elementos, a saber, él mismo. En el ejemplo anterior, si en lugar de dos viajes tuviéramos cinco, la única posibilidad es que todos viajaran. De la misma forma se tiene que $\binom{n}{0} = 1$ (pues el único subconjunto de cardinal n de un conjunto de 0 elementos es el conjunto vacío. También puede justificarse de la siguiente forma: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n-0} = \binom{n}{n} = 1$).

Por último, una tercera propiedad referente a estos números nos dice que $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}$.

Volvamos al ejemplo del viaje, y fijémonos en Ana. Para ella, a la hora de repartir el viaje hay dos opciones excluyentes. Que le toque a ella, y que no le toque.

De la primera opción hay $\binom{4}{1}$ posibilidades, pues si contamos con que le toca a ella, sólo hay que elegir un acompañante de los cuatro restantes. Esas $\binom{4}{1}$ posibilidades son:

$$\{\text{Ana, Bernardo}\};\ \{\text{Ana, Carmen}\};\ \{\text{Ana, Daniel}\};\ \{\text{Ana, Esther}\}.$$

Notemos que lo que hemos hecho es elegir un elemento del conjunto {Bernardo, Carmen, Daniel, Esther} (que tiene cardinal cuatro). Vemos entonces que $\binom{4}{1} = 4$.

De la segunda opción hay $\binom{4}{2}$ posibilidades, pues lo que hay que hacer es elegir dos elementos del conjunto {Bernardo, Carmen, Daniel, Esther}. Las $\binom{4}{2}$ posibilidades son:

{Bernardo, Carmen}; {Bernardo, Daniel}; {Bernardo, Esther}; {Carmen, Daniel}; {Carmen, Esther}; {Daniel, Esther}

Entonces, de las $\binom{5}{2}$ formas que teníamos de repartir los viajes, hay $\binom{4}{1}$ formas en las que una de los afortunadas es Ana y $\binom{4}{2}$ formas en las que Ana no viaja.

En general, supongamos que $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$ es un conjunto de cardinal $n+1$, y queremos ver cuántos subconjuntos de m elementos tiene.

Si queremos elegir un subconjunto X de A con m elementos, tenemos dos opciones, mutuamente excluyentes: que $a_{n+1} \in X$ o que $a_{n+1} \notin X$. En el primer caso, está determinado por los $m-1$ elementos de $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ que pertenecen a X. Podemos entonces elegir un total de $\binom{n}{m-1}$ subconjuntos con estas condiciones. En el segundo caso, está determinado por los m elementos que pertenecen a él, y que sabemos con seguridad que están en el conjunto $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Podemos por tanto hacer la elección de $\binom{n}{m}$ formas. El principio de la suma nos asegura entonces que $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}$, como queríamos.

Estas tres propiedades nos permiten demostrar la siguiente proposición.

Proposición 4.2.1. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. Entonces*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Demostración: Haremos la demostración por inducción.

Para $n = 0$, y para $m = n$ el resultado es cierto (lo que nos dice que es cierto para $n = 1$)

Supongamos que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ para cualquier k tal que $0 \leq k \leq n$. Sea m comprendido entre 1 y n. En ese caso se tiene que

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{n!m}{m!(n-m+1)!} + \frac{n!(n-m+1)}{m!(n-m+1)!} \\ &= \frac{n!(m+n-m+1)}{m!(n-m+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}\end{aligned}$$

y para $m = 0$ o $m = n+1$ sabemos que el resultado es cierto. ■

Vamos a ver otra justificación de porqué $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Comenzamos con un ejemplo en el que $n = 5$ y $k = 3$. Supongamos que tenemos cinco objetos a, b, c, d, e. Sabemos que hay $\frac{5!}{(5-3)!} = 60$ variaciones sin repetición de estos 5 elementos tomados de 3 en 3. Vamos a escribir esas 60 variaciones:

abc	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*	*cba*
abd	*adb*	*bad*	*bda*	*dab*	*dba*
abe	*aeb*	*bae*	*bea*	*eab*	*eba*
acd	*adc*	*cad*	*cda*	*dac*	*dca*
ace	*aec*	*cae*	*cea*	*eac*	*eca*
ade	*aed*	*dae*	*dea*	*ead*	*eda*
bcd	*bdc*	*cbd*	*cdb*	*dbc*	*dcb*
bce	*bec*	*cbe*	*ceb*	*ebc*	*ecb*
bde	*bed*	*dbe*	*deb*	*ebd*	*edb*
cde	*ced*	*dce*	*dec*	*ecd*	*edc*

Y podemos ver que esas 60 variaciones las podemos agrupar en grupos de $6 = 3!$ (que hemos colocado en la misma fila), donde todas las variaciones de cada uno de esos grupos está formada por los mismos elementos, pero en orden distinto. Por tanto, todas ellas corresponden con la misma elección de los elementos, es decir, con cada una de las combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3.

Entonces, el número de combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3 es igual a

$$\frac{60}{6} = \frac{\frac{5!}{(5-3)!}}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!}.$$

En general, supongamos que tenemos un conjunto con n elementos $X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ y queremos calcular cuántos subconjuntos tiene con cardinal k. Entonces:

- Calculamos las variaciones sin repetición de esos n elementos tomados de k en k. En total hay $\frac{n!}{(n-k)!}$.
- Agrupamos aquellas que estén formados por los mismos elementos pero en orden distinto. Cada uno de estos grupos tiene $k!$ elementos (ver sección **??** para ver cuántas ordenaciones de k elementos hay).
- Identificamos cada uno de estos grupos con un subconjunto del conjunto X con cardinal k.
- El número de subconjuntos es entonces $\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Los números de la forma $\binom{n}{m}$ se les denomina **Números combinatorios** o **Coeficientes binomiales.**

Lo que sigue es una forma de distribuir los números combinatorios conocida como **Triángulo de Pascal.**

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7} \\
\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}
\end{array}
$$

Puesto que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, sabemos que los lados de este triángulo infinito son todo unos. La propiedad $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}$ nos dice que cada elemento que no está en ninguno de los dos lados, es la suma de los dos que tiene encima suya. Con estas reglas, podemos completar el triángulo:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1 \\
1 \quad 11 \quad 55 \quad 165 \quad 330 \quad 462 \quad 462 \quad 330 \quad 165 \quad 55 \quad 11 \quad 1
\end{array}
$$

Ejemplo 4.2.1.

1. *El número de subconjuntos con* 3 *elementos del conjunto* $\{a, b, c, d, e, f\}$ *es*

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$$

Éstos son:

$$\begin{array}{c}\{a,b,c\}\ \{a,b,d\}\ \{a,b,e\}\ \{a,b,f\}\ \{a,c,d\}\ \{a,c,e\}\ \{a,c,f\}\ \{a,d,e\}\ \{a,d,f\}\ \{a,e,f\} \\ \{b,c,d\}\ \{b,c,e\}\ \{b,c,f\}\ \{b,d,e\}\ \{b,d,f\}\ \{b,e,f\}\ \{c,d,e\}\ \{c,d,f\}\ \{c,e,f\}\ \{d,e,f\}\end{array}$$

Nótese que de estos 20 *sobconjuntos hay* $\binom{5}{2} = 10$ *que contienen al elemento* a *(los 10 primeros) y* $\binom{5}{3} = 10$ *que no lo contienen (los 10 últimos).*

2. *El número de cadenas de* n *bits que contienen exactamente* m *unos (y por tanto* $n-m$ *ceros) es* $\binom{n}{m}$. *Para justificar esta afirmación numeramos los* n *bits desde* 1 *hasta* n. *Elegir una cadena en estas condiciones es equivalente a tomar un subconjunto del conjunto* $\{1, 2, \cdots, n\}$ *con* m *elementos.*

3. *Sabemos que si* X *es un conjunto con* n *elementos, entonces* X *tiene* 2^n *subconjuntos. Deducimos entonces que, para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *se verifica que*

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Podemos comprobar, en el triángulo de Pascal, que la suma de los elementos de la primera fila es $1 = 2^0$*, de la segunda fila es* $1 + 1 = 2^1$.

Si nos vamos, por ejemplo, a la sexta fila, tenemos $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$. *Y la suma de los elementos de la undécima fila es*

$$1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1024 = 2^{10}$$

4. *Supongamos que un departamento está formado por* 7 *mujeres y* 9 *hombres, y se quiere formar una comisión con cinco miembros, de forma que haya al menos un hombre y una mujer en la comisión. Vamos a determinar cuántas posibles comisiones pueden formarse con esas condiciones. Para esto, vemos en primer lugar que pueden formarse* $\binom{16}{5} = 4368$ *posibles comisiones con* 5 *miembros. De ellas,* $\binom{9}{5} = 126$ *no contienen ninguna mujer (están formadas únicamente por hombres), mientras que* $\binom{7}{5} = 21$ *no contienen ningún hombre. Por tanto, el número posible de comisiones es* $4368 - 126 - 21 = 4221$.

Nótese que para realizar esta operación se han considerado los conjuntos:

- Conjunto de todas las comisiones con 5 *miembros:* X.

- Conjunto de las comisiones con al menos un hombre: A.

- Conjunto de las comisiones con al menos una mujer: B.

Lo que queremos calcular es $|A \cap B|$*, y sabemos que:*

$|X| = 4368$, $|\overline{A}| = |X \setminus A| = 21$, $|\overline{B}| = 126$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

Por tanto, se tiene:

$$|A \cap B| = |X| - |\overline{A \cap B}| = |X| - |\overline{A} \cup \overline{B}| = |X| - (|\overline{A}| + |\overline{B}|) = 4368 - (21 + 126) = 4221$$

Teorema 4.2.1 (Teorema del binomio)**.** *Sea* A *un anillo conmutativo, y* $a, b \in A$. *Entonces, para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *se verifica que:*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

Demostración: La demostración la haremos por inducción en n.

Para $n = 0$ o $n = 1$ el resultado es trivialmente cierto.

Supongamos que se verifica que $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = a\cdot(a+b)^n + b\cdot(a+b)^n \\
&= a\left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n\right] \\
&\quad + b\left[\binom{n}{0}a^n + \cdots + \binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\right] \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \cdots + \binom{n}{n}ab^n \\
&\quad + \binom{n}{0}a^n b + \cdots + \binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right]a^n b + \cdots + \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n-k+1}b^k + \cdots + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right]ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}
\end{aligned}
$$

que es la expresión que buscábamos. ∎

Este teorema justifica que a los números combinatorios se les denomine también **coeficientes binomiales.**

Ejemplo 4.2.2.

1. *Sabemos que* $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. *Esta igualdad puede obtenerse a partir del teorema del binomio teniendo en cuenta que* $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$, *mientras que* $\binom{2}{1} = 2$.

2. *Para exponente* 5 *se tiene que:*

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

3. *El coeficiente de* a^7b^3 *en* $(a+b)^{10}$ *es* $\binom{7}{3} = 35$.

4. *Usando el teorema del binomio se tiene que:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

algo que ya habíamos obtenido anteriormente.

Hasta ahora hemos estudiado, como de un conjunto de n elementos podemos elegir m, sin que influya el orden en que se pueden elegir los elementos, y sin que puedan repetirse los elementos. Es lo que se llama *combinaciones (sin repetición) de n elementos tomados de m en m.* Nos planteamos a continuación el caso en el que los elementos puedan repetirse. Por ejemplo, tenemos en una caja bolas rojas, negras y blancas, y extraemos 4 bolas. ¿Cuántas extracciones distintas podemos realizar?.

El problema sería el siguiente. Tenemos tres tipos de objetos diferentes, por ejemplo, bolas de tres colores distintos: rojas, negras y blancas, que representaremos como R, N, B y queremos contar de cuántas formas distintas podemos elegir cuatro objetos, pudiendo elegir varios objetos del mismo tipo, y sin que influya el orden en que los elegimos. Es decir, da igual la elección $RNBN$ que $RNNB$. Lo único que importa es que se han elegido una bola roja, dos bolas negras y una blanca.

En este caso, las posibles extracciones son (suponemos que tenemos al menos cuatro bolas de cada color):

$$RRRR \quad RRRN \quad RRRB \quad RRNN \quad RRNB \quad RRBB \quad RNNN \quad RNNB$$

$$RNBB \quad RBBB \quad NNNN \quad NNNB \quad NNBB \quad NBBB \quad BBBB$$

es decir, un total de 15.

Vamos ahora con el siguiente problema. ¿Cuántas soluciones naturales tiene la ecuación $x+y+z=4$?

Escribimos las soluciones en una columna, y en otra columna colocamos las extracciones que acabamos de hacer:

$$\begin{array}{cl}
4\ 0\ 0 & RRRR \\
3\ 1\ 0 & RRRN \\
3\ 0\ 1 & RRRB \\
2\ 2\ 0 & RRNN \\
2\ 1\ 1 & RRNB \\
2\ 0\ 2 & RRBB \\
1\ 3\ 0 & RNNN \\
1\ 2\ 1 & RNNB \\
1\ 1\ 2 & RNBB \\
1\ 0\ 3 & RBBB \\
0\ 4\ 0 & NNNN \\
0\ 3\ 1 & NNNB \\
0\ 2\ 2 & NNBB \\
0\ 1\ 3 & NBBB \\
0\ 0\ 4 & BBBB
\end{array}$$

Y vemos que para cada solución de esta ecuación podemos identificar x con el número de bolas rojas, y con el´número de bolas negras y z con el número de bolas blancas.

Por tanto, ambos problemas son equivalentes.

A continuación vamos a buscar una forma para contar las soluciones a este tipo de problemas. Para esto, vamos a escribir las quince posibles extracciones como sigue:

$$RRRRxx \quad RRRxNx \quad RRRxxB \quad RRxNNx \quad RRxNxB \quad RRxxBB \quad RxNNNx \quad RxNNxB$$

$$RxNxBB \quad RxxBBB \quad xNNNNx \quad xNNNxB \quad xNNxBB \quad xNxBBB \quad xxBBBB$$

y vemos que cada extracción está determinada por la posición que ocupan las dos x en la cadena _ _ _ _ _ _
El número de posiciones que quedan a la izquierda de las dos equis nos indican la cantidad de bolas rojas; el número de posiciones que quedan entre las dos equis nos indican el número de bolas negras mientras que el número de posiciones a la derecha de las dos equis nos indican la cantidad de bolas blancas. Es decir, las equis actúan como separadores. Para separar en tres partes necesitamos dos separadores. Así, colocando las equis en las posiciones 2 y 4 nos queda _x_x__, lo que nos da una bola roja, una bola negra y dos bolas blancas.

Puesto que entre las seis posiciones podemos colocar las dos equis de $\binom{6}{2}=15$ formas diferentes obtenemos que se pueden hacer un total de 15 extracciones diferentes.

Situémonos en el caso general. Supongamos que tenemos un total de n objetos diferentes, que podrían ser bolas de n colores diferentes, y extraemos k objetos (se supone que de cada tipo de objeto hay al menos k ejemplares). ¿Cuántas extracciones diferentes podemos hacer? Esto es lo que se llama *combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k*. Para determinar cuántas combinaciones con repetición hay, identificamos cada combinación con la elección de la posición de $n-1$ separadores de un total de $n+k-1$ posibles posiciones. El número de combinaciones con repetición de n elementos, tomados de k en k resulta ser entonces $\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k-1}{n-1}$.

Ejemplo 4.2.3.

1. *Vamos a determinar cuantas soluciones naturales tiene la ecuación* $x+y+z+t=13$. *Este problema hemos visto que es equivalente al de la extracción de bolas. El número de soluciones es entonces el número de combinaciones con repetición de 4 elementos tomados de* 13 *en* 13. *Su valor es* $\binom{4+13-1}{4-1}=560$.

   Este problema podría ser enunciado como el número de formas distintas que tenemos de repartir 13 caramelos entre 4 niños. En este caso, x sería el número de caramelos que le corresponden al *primer niño, y el número de caramelos que le corresponden al segundo niño, z al tercero y t al cuarto.*

Supongamos ahora que queremos resolver la misma ecuación, pero queremos que las variables tomen valores mayores o iguales que 1. En ese caso, llamamos $x' = x-1$, $y' = y-1$, $z' = z-1$, $t' = t-1$, con lo que la ecuación se transforma en $x'+y'+z'+t' = 9$, y están permitidas todas las soluciones naturales. El número de soluciones es $\binom{9+4-1}{4-1} = 84$.

Si lo pensamos en términos de repartir caramelos a niños, la que estamos haciendo es hacer un reparto en el que a cada niño le corresponda al menos un caramelo (teniendo caramelos de sobra no vamos a dejar a un niño sin caramelos). Entonces, le damos un caramelo a cada niño y lo que nos queda por hacer es repartir los 9 restantes entre los cuatro niños. Por tanto, lo que hemos de hacer es contar soluciones de la ecuación $x'+y'+z'+t' = 9$.

Hemos visto que de las 560 soluciones de la ecuación $x+y+z+t = 13$ hay 476 ($560-84$) en las que alguna de las variables toma el valor cero. Es decir, en 476 casos se quedaría algún niño sin caramelos.

2. *Vamos a calcular cuantas soluciones naturales tiene la inecuación $x+y+z \leq 9$.*

   Vamos a razonar de varias formas para conseguir la solución:

   - *Lo que tenemos que contar es el número de soluciones de la ecuación $x+y+z = 0$, el número de soluciones de la ecuación $x+y+z = 1$, y así hasta $x+y+z = 9$, y sumar los resultados. El número de soluciones de $x+y+z = 0$ es $\binom{0+3-1}{0} = \binom{2}{0} = 1$; el número de soluciones de la ecuación $x+y+z = 1$ es $\binom{1+3-1}{1} = \binom{3}{1} = 3$; el número de soluciones de la ecuación $x+y+z = 2$ es $\binom{2+3-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$, y así hasta llegar a la ecuación $x+y+z = 9$, que tiene $\binom{9+3-1}{9} = \binom{11}{9} = 55$ soluciones naturales. Entonces, el número de soluciones naturales de la inecuación $x+y+z \leq 9$ son*

   $$\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}+\binom{9}{7}+\binom{10}{8}+\binom{11}{9} =$$

   $$1+3+6+10+15+21+28+36+45+55 = 220$$

   - *Vamonos al problema de los niños y los caramelos. Yo tengo 9 caramelos y los reparto entre 3 niños, pero en esta ocasión no tengo porqué dar todos los caramelos. El problema sería equivalente a repartir los 9 caramelos entre los 3 niños y yo (obviamente yo me quedo con los caramelos que no le doy a los niños), es decir, repartir los 9 caramelos entre 4 personas. El número de formas distintas lo hemos visto antes, y vale*

   $$\binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{9} = \frac{12!}{9!\cdot 3!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{3\cdot 2\cdot 9!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2} = 2\cdot 11\cdot 10 = 220$$

   - *Vamos a llamar t a $9-x-y-z$. Entonces, $t \geq 0$, y cada solución de la inecuación $x+y+z \leq 9$ se corresponde con una solución de la ecuación $x+y+z+t = 9$. Y recíprocamente, cada solución de la ecuación $x+y+z+t = 9$ nos da una solución de la inecuación $x+y+z \leq 9$.*

     Por ejemplo, $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$ es una solución natural de la inecuación $x+y+z \leq 9$, que se corresponde con la solución $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$, $t = 3$, de la ecuación $x+y+z+t = 9$. Recíprocamente, si tomamos una solución de la ecuación $x+y+z+t = 9$ (por ejemplo, $x = 1$, $y = 1$, $z = 5$, $t = 2$), esa solución se corresponde con una de la inecuación $x+y+z \leq 9$ (en este caso, $x = 1$, $y = 1$, $z = 5$).

     Por tanto, lo que tenemos que hacer es contar el número de soluciones naturales de la ecuación $x+y+z+t = 9$, que es lo que acabamos de calcular.

En este ejemplo hemos visto como $\binom{12}{9} = \sum\limits_{k=0}^{9}\binom{k+2}{k}$. Un argumento similar permite demostrar que

$$\binom{n}{m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n-m+k-1}{k}$$

Esto nos dice que cada número combinatorio es la suma de los números que están en la línea paralela al lado derecho del triángulo desde el que está justo encima a la derecha hasta el principio.

Por ejemplo, tomamos $\binom{10}{6}$, que mirando en el triángulo vale 210. Justo encima a la derecha, tiene el 84. Y si nos movemos desde ahí de forma paralela al lado derecho del triángulo, nos encontramos con los números 84, 56, 35, 20, 10, 4, 1. La suma de todos ellos es $1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 = 210$.

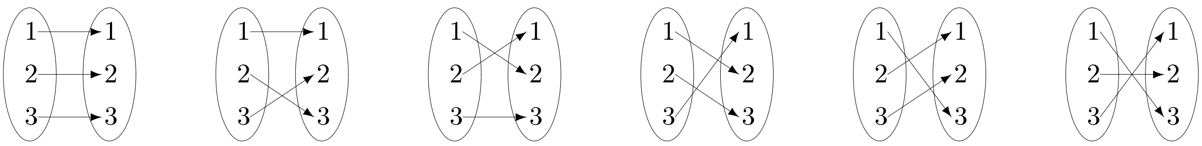
4.3. Permutaciones

En esta sección estudiaremos las formas diferentes de ordenar los elementos de un conjunto. Dado un conjunto X con n elementos, una permutación en X es una ordenación de los elementos de X. Otra forma de definir una permutación en X es como una aplicación biyectiva $X \to X$.

Por ejemplo, si $X = \{1, 2, 3\}$, hay seis permutaciones en X que se corresponden con las seis formas de ordenar los elementos de X. Éstas son:

123 132 213 231 312 321

Las seis biyecciones de X en X son:



1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2 3 2 1

Y vemos como cada biyección se corresponde con una ordenación de los elementos de X y viceversa.

En general, si X es un conjunto con n elementos, el número de permutaciones en X es igual al número de aplicaciones inyectivas $X \to X$, pues toda aplicación inyectiva $X \to X$ es biyectiva. Este número fue calculado en la sección dedicada a las variaciones, y sabemos que vale $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$.

Algo más complicado es ordenar los elementos de un conjunto cuando alguno de sus elementos aparece repetido. Por ejemplo, nos preguntamos de cuántas formas podemos ordenar las letras de la palabra *cara*. Para ordenarlas, supongamos que distinguimos las dos aes que aparecen en la palabra, escribiendo una de ellas en negrita, y realizamos las 24 ordenaciones posibles:

car**a**	ca**a**r	cra**a**	rca**a**	rac**a**	ra**a**c
c**a**ra	c**a**ar	cr**a**a	rc**a**a	r**a**ca	r**a**ac
acr**a**	ac**a**r	arc**a**	ar**a**c	a**a**cr	a**a**rc
acra	**a**car	**a**rca	**a**rac	**a**acr	**a**arc

Vemos que cada 2 ordenaciones de las letras de car**a** da lugar a la misma ordenación de las letras de cara (la que resulta de intercambiar "a" con "**a**"). Por tanto, las letras de cara se pueden ordenar de $\frac{24}{2} = 12$ formas distintas.

Si quisiéramos ahora estudiar de cuantas formas podemos ordenar las letras de la palabra rara, tendríamos, si distinguimos las dos letras "r" un total de 12 ordenaciones diferentes. Sin embargo, cada dos de ellas da lugar a una sola ordenación de las letras de *rara*. Tenemos entonces un total de $\frac{12}{2} = 6$ ordenaciones diferentes.

Otra forma de razonar este resultado es como sigue:

Para ordenar las letras de *cara*, situamos en primer lugar las dos "aes". Esto podemos hacerlo de $\binom{4}{2}$ formas diferentes. Una vez situadas las dos "aes", colocamos la "c", para la que tenemos dos posibilidades. Por tanto, hay $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ formas diferentes de colocarla. La posición de la "r" queda determinada por la de la "c" y las "aes".

Para ordenar las letras de *rara*, situamos en primer lugar las dos "aes", cosa que podemos hacer de $\binom{4}{2}$ formas diferentes. Puesto que esto determina el lugar en que van las letras "r", concluimos que hay seis maneras de ordenar las letras de *rara*.

Situémonos en el caso general.

Proposición 4.3.1. *Supongamos que tenemos una lista de n objetos, de r tipos diferentes. Del tipo 1 hay un total de n_1 objetos, todos ellos indistinguibles. Del tipo 2 hay n_2 objetos, y así hasta el tipo r, del que hay n_r objetos. Entonces el número total de ordenaciones de estos objetos es*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

Demostración: Igual que hemos hecho antes, podemos razonarlo de dos formas diferentes.

1. Supongamos que todos los objetos sean distinguibles. Entonces, podemos ordenarlos de $n!$ formas diferentes. Sin embargo, de todas estas, cada $n_1!$ ordenaciones resulta ser la misma salvo en los n_1 objetos del tipo 1 que están reordenados entre sí. Por tanto, si consideramos los n_1 objetos del tipo 1 indistinguibles tenemos un total de $\frac{n!}{n_1!}$.

   Razonando de la misma forma, cada $n_2!$ ordenaciones de las obtenidas resulta ser la misma salvo en los n_2 objetos del tipo 2 que están intercambiados entre ellos. Por tanto, considerando también los n_2 objetos del tipo 2 indistinguibles tenemos un total de $\frac{n!}{n_1!n_2!}$.

   Repitiendo el razonamiento, llegamos a que el número de ordenaciones diferentes es $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$.

2. Para situar los n objetos, situamos en primer lugar los n_1 objetos del tipo 1. Para esto, únicamente hay que elegir el lugar en que van a situarse estos objetos, y eso puede hacerse de $\binom{n}{n_1}$ formas diferentes.

   Una vez hecho esto, situamos los n_2 objetos del tipo 2. Ahora tenemos únicamente $n-n_1$ lugares donde colocarlos, luego podemos colocarlos de $\binom{n-n_1}{n_2}$.

   Razonando de esta forma, el número total de ordenaciones posibles es:

   $$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots n_{r-1}}{n_r}$$

   Desarrollando se obtiene

   $$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{r-1})!}{n_r!0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

Como vemos, de las dos formas se obtiene el mismo resultado. ■

Este problema es equivalente al de repartir objetos distinguibles en cajas distinguibles. Supongamos que tenemos n objetos, y queremos repartirlos en r cajas, de forma que en la primera caja haya n_1 objetos, en la segunda carta haya n_2 objetos, y así, hasta la r-ésima caja, en la que debe haber n_r objetos.

Los n_1 objetos que van a la primera caja se pueden elegir de $\binom{n}{n_1}$ formas. Nos quedan entonces $n-n_1$ objetos, y de estos elegimos n_2 para la segunda caja, lo cual podemos hacerlo de $\binom{n-n_1}{n_2}$ formas. Repitiendo el razonamiento, y usando el principio del producto llegamos a que las formas distintas en que podemos repartir los objetos en las cajas es

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

Se deja como ejercicio encontrar una biyección entre las distintas ordenaciones de n objetos donde r tipos de objetos, y del tipo k-ésimo hay n_k objetos, y las distribuciones de n objetos distinguibles en r cajas distinguibles, de forma que en la caja k-ésima haya n_k-objetos.

Ejemplo 4.3.1. *Tenemos cuatro jugadores, y repartimos cinco cartas a cada uno de una baraja de 40 cartas. Vamos a calcular de cuantas formas distintas se pueden repartir. Para esto, consideramos las cartas como las bolas, a las que hay que distribuir en 5 cajas: 4 por cada uno de los jugadores, y una quinta por las 20 cartas que quedan sin repartir.*

Se trata entonces de distribuir 40 objetos distinguibles en cinco cajas también distinguibles, de forma que en las cuatro primeras haya 5 objetos y en la última haya 20. El número de formas de hacerlo es

$$\frac{40!}{5!5!5!5!20!}=1617318175088527591680$$

Definición 57. *Sea $n \in \mathbb{N}$, y $n_1, n_2, \cdots, n_r \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Se define el coeficiente multinomial $\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_r}$ como*

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

En el caso $r = 2$ se tiene que $\binom{n}{n_1\ n_2} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}$. Obtenemos así los coeficientes binomiales.

El teorema del binomio tiene ahora una generalización. Para ello, necesitamos el siguiente lema:

Lema 4.3.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$, y $n_1, n_2, \cdots, n_r$ tales que $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n + 1$. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{r} \binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_k - 1\ \cdots\ n_r} = \binom{n+1}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_r}$$

(si para algún i entre 1 y r, n_i fuera igual a cero, el sumando para $k = i$ valdría igualmente cero).

Demostración: Se tiene que

$$\begin{aligned}
& \tbinom{n}{n_1-1\ n_2\ \cdots\ n_r} + \tbinom{n}{n_1\ n_2-1\ \cdots\ n_r} + \cdots + \tbinom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_r-1} = \\
= \ & \tfrac{n!}{(n_1-1)!n_2!\cdots n_r!} + \tfrac{n!}{n_1!(n_2-1)!\cdots n_r!} + \cdots + \tfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots(n_r-1)!} = \\
= \ & \tfrac{n_1 n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} + \tfrac{n_2 n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} + \cdots + \tfrac{n_r n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} = \\
= \ & \tfrac{(n_1+n_2+\cdots+n_r)n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} = \tfrac{(n+1)!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} = \\
= \ & \tbinom{n+1}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_r}
\end{aligned}$$

■

Teorema 4.3.1 (Teorema Multinomial)**.** *Sea A un anillo conmutativo, y $x_1, x_2, \cdots x_r \in A$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que:*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

Demostración: La demostración la haremos por inducción. Para $n = 1$ el resultado es cierto, pues dice simplemente que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

pues las únicas formas de poner 1 como suma de r números naturales es $1 + 0 + \cdots + 0$ (que da lugar al sumando x_1), $0 + 1 + \cdots + 0$ (que da lugar al sumando x_2) y así sucesivamente.

Supongamos que el resultado es cierto para un exponente n y vamos a demostrarlo para $n+1$. Entonces se tiene que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^{n+1} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n (x_1 + x_2 + \cdots + x_r) = a \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_r)$$

donde $a = (x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$.

Dados $n_1, n_2, \cdots n_r \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n + 1$, el coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$ en $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^{n+1}$ se obtendrá sumando los coeficientes de $x_1^{n_1-1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$, $x_1^{n_1} x_2^{n_2-1} \cdots x_r^{n_r}$ y así hasta $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r-1}$ en a. Por hipótesis de inducción, estos coeficientes valen $\binom{n}{n_1-1\ n_2\ \cdots\ n_r}$, $\binom{n}{n_1\ n_2-1\ \cdots\ n_r}$ y $\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_r-1}$, y su suma, según el lema precedente es $\binom{n+1}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_r}$. ■

Ejemplo 4.3.2. *El número 3 se puede expresar de* $\binom{3+3-1}{3-1} = 10$ *formas diferentes como suma de* 3 *números naturales. Éstas son:*

$3+0+0 \quad 2+1+0 \quad 2+0+1 \quad 1+2+0 \quad 1+1+1 \quad 1+0+2 \quad 0+3+0 \quad 0+2+1 \quad 0+1+2 \quad 0+0+3$

Por tanto, en el desarrollo de $(x+y+z)^3$ *aparecen* 10 *sumandos. El desarrollo es:*

$$\frac{3!}{3!0!0!}x^3y^0z^0 + \frac{3!}{2!1!0!}x^2y^1z^0 + \frac{3!}{2!0!1!}x^2y^0z^1 + \frac{3!}{1!2!0!}x^1y^2z^0 + \frac{3!}{1!1!1!}x^1y^1z^1 +$$

$$+\frac{3!}{1!0!2!}x^1y^0z^2 + \frac{3!}{0!3!0!}x^0y^3z^0 + \frac{3!}{0!2!1!}x^0y^2z^1 + \frac{3!}{0!1!2!}x^0y^1z^2 + \frac{3!}{0!0!3!}x^0y^0z^3$$

es decir,

$$(x+y+z)^3 = x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + 3xz^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$$

El teorema multinomial tiene también una demostración combinatoria.

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)}_{c_1}\underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)}_{c_2}\cdots\underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)}_{c_n}$$

Cada término de $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n$ se obtiene multiplicando un sumando de c_1, con un sumando de c_2 y así hasta c_n. El coeficiente de $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$ en $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n$ se obtendrá contando cuantos términos (obtenidos como acabamos de decir) hay en los que ha elegido n_1 veces el sumando x_1, n_2 veces el sumando x_2 y así sucesivamente.

En definitiva, lo que hay que hacer es ver de cuantas maneras diferentes se pueden distribuir los "objetos" $c_1, c_2, \cdots, c_n$ en r cajas distinguibles $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$; y esto sabemos que se puede hacer de $\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_r}$ formas diferentes.