EJERCICIOS PARA ENTREGAR

Espacios vectoriales. Aplicaciones lineales. Diagonalización

Ejercicio 1. Sean $X_1 = \{(1,0,1,1),\ (1,1,-1,1),\ (0,1,2,1)\}$ y $B = \{(1,-1,0,1),\ (-1,2,-1,0),\ (0,3,-2,6),\ (1,-1,0,2)\}$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}^4$.

1. Comprueba que B es una base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calcula en B las coordenadas del vector $(1,1,1,1)$.
3. Comprueba que X_1 es un conjunto de vectores linealmente independientes.
4. Construye una base B_1 que contenga a X_1.
5. Calcula la matriz del cambio de base de B_1 a B.

Ejercicio 2. Sea $f : (\mathbb{Z}_2)^7 \to (\mathbb{Z}_2)^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x,y,z,t,u,v,w) = (t+u+v+w,\ y+z+v+w,\ x+z+u+w).$$

Y sea $B = \{(1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$.

1 Comprueba que B es una base de $(\mathbb{Z}_2)^3$.
2 Calcula la matriz de f en las bases canónicas de $(\mathbb{Z}_2)^7$ y $(\mathbb{Z}_2)^3$. Llama a esta matriz P.
3 Calcula una base de $N(f)$.
4 Calcula $M_{B_c;B}(f)$.
5 Define una aplicación lineal $g : (\mathbb{Z}_2)^4 \to (\mathbb{Z}_2)^7$ de forma que $\mathrm{Im}(g)$ sea igual al suespacio $N(f)$.
6 Calcula la matriz de G en las bases canónicas de $(\mathbb{Z}_2)^4$ y $(\mathbb{Z}_2)^7$. Llama a esta matriz G.
7 Comprueba que $P \cdot G = 0$.
8 Demuestra que $f \circ g : (\mathbb{Z}_2)^4 \to (\mathbb{Z}_2)^3$ es la aplicación constante cero.

Ejercicio 3. Sean $U = L[(1,2,3),(2,3,4),(3,4,0)]$, $W \equiv \left\{ \begin{array}{r} 2x+2y+z=0 \\ 4x+3y+3z=0 \end{array} \right.$ y $V_3 \equiv \left\{ \begin{array}{r} 4x+2y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{array} \right.$ tres subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^3$.

1 Calcula una base de cada uno de ellos.
2 Calcula una base de $V_2 = U \cap W$.

Sea A la matriz 3×3 con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$ que tiene dos valores propios 2 y 3, y cuyos subespacios propios correspondientes son V_2 y V_3.

3 Calcula las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios 2 y 3.
4 Calcula la matriz A.
5 Calcula A^{20}.