Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

José Carlos Rosales González

- Facultad de Ciencias, sección matemáticas, Departamento de álgebra, despacho 37

Tutorías:

Lunes, martes y jueves → 9:00 a 11:00

Apuntes en: www.ugr.es/~pedro/alem

1. Conjuntos, relaciones y aplicaciones
2. Aritmética entera y modular
3. El anillo de los polinomios con coeficiente en un cuerpo
4. Matrices con coeficiente en un cuerpo
5. Espacios vectoriales y aplicaciones lineales
6. Sistemas de ecuaciones lineales
7. Diagonalización de matrices
8. Combinatoria.

La evaluación de las practicas es de 0 a 2

Sacando un 3'9 en TEORIA y teniendo en ~~cuenta~~ prácticas la máxima nota (2) el alumno está aprobado

Apuntes descargados de wuolah.com

NEWS

WUOLAH

LUN 24 SEP

Noticias para el mundo universitario.

nº 3. Semana 24 al 30

Cómo elegir las prácticas profesionales

https://www.cosasdeeducacion.es

Las prácticas profesionales en una empresa forman una parte muy importante de la vida del estudiante universitario. Es la puesta en práctica de la carrera que ha estudiado, y probablemente la primera toma de contacto con el mundo laboral. Su elección debe de realizarse minuciosamente.

Gracias a las prácticas podrás descubrir qué aspectos te gustan más de tu profesión y conocer de cerca el desempeño real de la teoría que has estado estudiando durante mucho tiempo. Forma una parte muy importante de tu experiencia profesional.
Para poder sacar el mejor partido a las prácticas, lo mejor es que escojas aquellas en las que realmente podrás desempeñar las funciones que te interesan. Es un aspecto que debe de aclararse en la entrevista para que puedas decidir si realmente esas prácticas van a servir para mejorar tu aprendizaje. Por tanto, es primordial conocer cual va a ser tu papel en la empresa.

Debes de tener en cuenta que la experiencia que consigas en la empresa va a orientar en gran parte tu futuro laboral. Es una forma de favorecer tu currículum y por tanto, es importante que analices si te interesa orientarte hacia determinada rama.

Es trascendental que te asegures si de verdad tienes posibilidades de desarrollar tu profesión en
la empresa elegida. Muchas empresas tan sólo quieren tener becarios para no tener que contratar empleados y obtener sólo beneficios a nivel fiscal.

Lo ideal es elegir una empresa que se preocupe por tu aprendizaje de la persona que realiza las prácticas. Por eso, es importante conocer cuáles son las funciones, ya que algunas empresas sólo permiten que el becario haga fotocopias.

Debes de asegurarte que no vas a perder el tiempo en la empresa.
Otro punto que debes de tener en cuenta es la estabilidad. Si tienes opción, es mejor que elijas aquellas empresas en las que haya posibilidades de contratación una vez finalizadas las prácticas.

Trucos para retener la información de forma exitosa

1. Focaliza: Haz solo una cosa a la vez, céntrate en lo que estás haciendo y trabaja tu concentración

2. Verbaliza: Tras una lectura meditada y detenida, expresa con tus palabras la información que has comprendido y retenido

3. Escribe resúmenes: Este proceso de plasmar ideas suele ser la más efectiva para mejorar la capacidad de retentiva y repasar la información que has trabajado.

4. Asocia ideas: Crea conexiones mentales que te sirva para memorizar mejor.Puedes jugar con los sentidos o emplear la memoria visual y crear asociaciones.

5. Lee a diario: Ejercita tu mente, mejora tu agilidad comprensiva y tu capacidad para desgranar y trabajar información

Tema 1: Conjuntos, relaciones y aplicaciones.

Un conjunto es una colección de objetos a los que llamaremos elemento del conjunto.

- Cuando x sea un elemento de un conjunto A, escribiremos $x \in A$ y diremos que x pertenece a A.
- Diremos que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B y lo denotaremos $A \subseteq B$ si todo elemento de A pertenece al conjunto B.
- Diremos que dos conjuntos A y B son iguales y lo denotaremos $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$
- Admitiremos la existencia de un conjunto que no tiene elementos, a dicho conjunto lo llamaremos "conjunto vacío" y lo denotaremos $\emptyset$.

⚠ - El vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Ejemplo:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad B = \{2, 4, 6\}$ $\quad C = \{1, 3, 5\}$

$1 \in A$	$B \nsubseteq A$	$\emptyset \notin A$	$\{\{1\}\} \neq \{1\}$
$6 \notin A$	$\{1\} \neq 1$	$\emptyset \notin \emptyset$	$C \subseteq A$
$\emptyset \subseteq A$	$\emptyset \subseteq \emptyset$		

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Operaciones con conjuntos.

Sean A y B dos conjuntos.

1) La intersección de A y B es $A \cap B = \{x \text{ tq } x \in A, x \in B\}$
2) La unión de A y B es $A \cup B = \{x \text{ tq } x \in A \text{ ó } x \in B\}$
3) La diferencia de A y B es $A \setminus B = \{x \in A \text{ tq } x \notin B\}$
4) El conjunto parte del conjunto A (o conjunto potencia de A) es $P(A) = \{X \text{ tq } X \subseteq A\}$
5) El producto cartesiano de A y B es $A \times B = \{(a,b) \text{ tq } a \in A \text{ y } b \in B\}$
A los elementos del producto cartesiano se les llama pares de coordenadas
6) Si $A_1, A_2, \dots A_n$ son conjuntos, entonces el producto cartesiano de todos ellos es $A_1 \times A_2 \times \dots A_n = \{(a_1, a_2, \dots a_n) \text{ tq } a_1 \in A_1, a_n \in A_n\}$
A estos elementos se le llama n-tuplas
7) Al conjunto $A \times A \times \dots A \times \rightarrow A^n$

El cardinal de un conjunto es el nº de elementos de dicho conjunto. Denotaremos $\#A$ al cardinal del conjunto A.

Proposición:

1) El cardinal de parte de A es $\#P(A) = 2^{\#A}$
2) El cardinal del producto cartesiano es $\#(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots A_n \times) = \#A_1 \times \#A_2 \dots \#A_n$

Ejemplo:

$A = \{1,2,3\}$ $B = \{2,3,5,7\}$

$A \cup B = \{1,2,3,5,7\}$ $A \cap B = \{2,3\}$ $A \setminus B = \{1\}$ $B \setminus A = \{5,7\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ $\#P(B) = 2^4 = 16$

$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B = 12$ $\#P(\emptyset) = 2^0 = 1$ $P(\emptyset) \neq \emptyset$ $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$P(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\#P(\{\emptyset\}) = 2^1 = 2$

$A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,5), (1,7), (2,1), (2,3), (2,5), (2,7), (3,1), (3,2), (3,5), (3,7)\}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Relaciones de equivalencia

Sea A un conjunto. Una relación binaria en A es un subconjunto R de $A \times A$. Si (x,y) pertenece a R, $(x,y) \in R$, escribiremos xRy y diremos que x está relacionado con y

• Ejemplo:

$A = \{1,2,3,4,5\}$ $R = \{(1,1),(2,3),(4,5),(3,2),(5,5)\}$

$2R3$ $3R4$ $4R5$ $5 \not R 4$

Una relación binaria R sobre un conjunto A será una relación de equivalencia si verifica las siguientes propiedades:

1) Reflexiva $aRa \ \forall a \in A$
2) Simétrica $aRb \Rightarrow bRa$
3) Transitiva si aRb y $bRc \Rightarrow aRc$

Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A y $a \in A$ entonces la "clase" del elemento a es el conjunto $[a] = \{x \in A \text{ tq } xRa\}$

Proposición:

1) aRb si y sólo si $[a] = [b]$ (la clase de a = la clase de b)
2) aRb sí y sólo si $[a] \cap [b] = \emptyset$

Llamaremos conjunto cociente de A por la relación de equivalencia R al conjunto: $\frac{A}{R} = \{[a] \text{ tq } a \in A\}$

Ejemplo:

Sabiendo que $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$ es una relación de eq. sobre el conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$. Calcular el cardinal del conjunto cociente de A $\left(\frac{A}{R}\right)$

$\frac{A}{R} = \{[a] \text{ tq } a \in A\} = \{[1],[2],[3],[4],[5]\} = {}^{*}\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$

$\Downarrow$

$\boxed{\# \frac{A}{R} = 3}$

* $[1] = \{1,2\} = [2]$
$[3] = \{3,4\} = [4]$
$[5] = \{5\}$

Ejemplos:

① En el conjunto $A = \{1, -1, 2, 3, -3, 5\}$ definimos la siguiente relación binaria: xRy si $x^2 = y^2$

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia

b) Calcular $\# \frac{A}{R}$

a) Reflexiva: si $x \in A$ entonces $x^2 = x^2$ por tanto xRx

Simétrica: si xRy entonces $x^2 = y^2$ por tanto $y^2 = x^2$ $\Rightarrow yRx$

Transitiva: Si xRy y $yRz \Rightarrow x^2 = y^2$ y $y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2 \Rightarrow xRz$.

b) $\frac{A}{R} = \{[a] \text{ tq } a \in A\} = \{[1], [-1], [2], [3], [-3], [5]\} =$

$\overset{*}{=} \{\{1, -1\}, \{2\}, \{3, -3\}, \{5\}\}$

$* \; [1] = \{1, -1\} = [-1]$

$[2] = \{2\}$

$[3] = \{3, -3\}$

$[5] = \{5\}$

$\boxed{\# \frac{A}{R} = 4}$

② Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, en $X \times X$ definimos la siguiente relación binaria $(a, b) R (c, d)$ si $a + b = c + d$

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia

b) $\# \frac{X \times X}{R}$

a) Reflexiva: $a + b = a + b \Rightarrow (a, b) R (a, b)$

Simétrica: si $(a, b) R (c, d) \Rightarrow a + b = c + d \Rightarrow c + d = a + b \Rightarrow (c, d) R (a, b)$

Transitiva: si $(a, b) R (c, d)$ y $(c, d) R (e, f) \Rightarrow a + b = c + d$ y $c + d = e + f \Rightarrow a + b = e + f \Rightarrow (a, b) R (e, f)$

b) $[(3, 4)] = \{(1, 6), (5, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

$\# \frac{X \times X}{R} = 11$

En una clase están todas las parejas que suman 2, en otra están las que suman 3, ... en otra están las que suman 12.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

③ En el conjunto $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ definimos la siguiente relación binaria xRy si $x-y$ es múltiplo de 3

a) Demuestra que R es una relación binaria de equivalencia

b) Calcular $[2]$

c) calcular $\# \frac{\mathbb{Z}}{R}$

a) Reflexiva: $a-a=0$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow aRa$

Simétrica: si $aRb \Rightarrow a-b$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow b-a$ es mult. 3 $\Rightarrow bRa$

Transitiva: Si aRb y $bRc \Rightarrow a-b$ es múlt. 3 y $b-c$ es múlt. 3 $\Rightarrow a-b+b-c$ es múlt. 3 $\Rightarrow a-c$ es mult. 3 $\Rightarrow aRc$

b) $[2] = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tq } xR2\} = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tq } x-2 \text{ es múlt. } 3\} =$
$\{2, 5, 8, 11, 14, -1, -4, -7, -10, \dots\} = \{2+3K \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}$

c) $[1] = \{1, 4, 7, 10, 13\} = \{1+3K \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}$

$[0] = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\} = \{3K \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}$

$\# \frac{\mathbb{Z}}{R} = 3$

Si al añadir un nº da resto, es la clase a la que pertenece dicho nº.

Una partición de un conjunto X es una familia de sus conjuntos de X: $\{A_i \text{ tq } i \in I\}$ verificando la siguiente condición:

1) $A_i \neq \emptyset \ \forall i \in I$

2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i = j$

3) $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ (la unión de todo).

Ejemplo:

$\{\underbrace{\{1,3\}}_{A_1}, \underbrace{\{2,4\}}_{A_2}, \underbrace{\{5\}}_{A_3}\}$ es una partición del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Proposición:

Si R es una relación de equivalencia sobre el conjunto A entonces el conjunto cociente $\frac{A}{R}$ es una partición de A.

Relaciones de orden.

Una relación binaria ($\leq$) ~~dire~~ sobre un conjunto A diremos que es una relación de orden si verifica las siguientes propiedades:

1) Reflexiva: $a \leq a \quad \forall a \in A$
2) Antisimétrica: si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$
3) Transitiva: si $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

~~Ejemplo~~:

- Orden usual de los nº naturales $(\mathbb{N}; \leq u)$
  nº enteros $(\mathbb{Z}; \leq u)$
  nº racionales $(\mathbb{Q}; \leq u)$
  nº reales $(\mathbb{R}; \leq u$

Ejemplo:

① $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ definimos la siguiente relación binaria:

$a \leq_m b$ si b es múltiplo de a. $\quad a \leq_m b \rightarrow$ múltiple

$2 \leq_m 6 \quad 2 \not\leq_m 3$

a) Demostrar que es una relación de orden.

- Reflexiva: a es múltiplo de $a \Rightarrow a \leq_m a$.
- Antisimétrica: $a \leq_m b$ y $b \leq_m a \Rightarrow b$ es múlt. de a y a es múlt. de b.
  $\Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{N}$ tq $b = a \cdot s$ y $a = b \cdot t \Rightarrow b = bt \cdot s \Rightarrow t \cdot s = 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow t = s = 1 \Rightarrow b = a$
- Transitiva:
  si $a \leq_m b$ y $b \leq_m c \Rightarrow b$ es múltiplo de a y c es múlt $b \Rightarrow$
  $\Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{N}$ tq $b = ax$ y $c = by \Rightarrow c = axy \Rightarrow$
  c es múlt. de $a \Rightarrow a \leq_m c$

② Sea X un conjunto, en $P(X)$ definimos la siguiente relación binaria:
$A \leq_i B$ si $A \subseteq B$ (inclusión). Demuestra que es una relación de orden.

- Reflexiva: $A \subseteq A \Rightarrow A \leq_i A$
- Antisimétrica: si $A \leq_i B$ y $B \leq_i A \Rightarrow A \subseteq B$ y $B \subseteq A \Rightarrow A = B$
- Transitiva: si $A \leq_i B$ y $B \leq_i C \Rightarrow A \subseteq B$ y $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \Rightarrow A \leq_i C$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

PRÁCTICAS.

Tutorías → M - J → 16:00 - 19:00

Facultad de ciencias Despacho 33 (Becarios)

María Calvo Sotelo
mariacc@ugr.es

Relaciones de equivalencia:

Ej: $X = \mathbb{Z}$ $\quad xRy \iff x-y$ es múltiplo de 3

$\frac{X}{R}$ → conjunto cociente.

$[x] = \{y \in X,\ xRy\}$ $\qquad \frac{X}{R} = \{[x],\ x \in X\}$

$[0] = \{y \in \mathbb{Z},\ y-0 \text{ múlt. } 3\}$

$[1] = \{y \in \mathbb{Z},\ y-1 = 3K\}$

$[2] = \{y \in \mathbb{Z},\ y-2 = 3K\}$

$\frac{\mathbb{Z}}{R} = \{[0]\ [1],\ [2]\} = \mathbb{Z}_3$

Ej: $X = \mathbb{R}$ $\quad xRy \iff x-y \in \mathbb{Z}$

1) Probar que R es una relación de equivalencia.

- Reflexiva: $\forall x \in \mathbb{R},\ xRx \iff \cancel{x-x \in \mathbb{Z}}\ x-x=0 \in \mathbb{Z}$
- Simétrica: $xRy \iff x-y = z \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-x = -z \in \mathbb{Z}$
- Transitiva: $xRy,\ yRz \iff xRz \iff$

$x-y \in \mathbb{Z},\ y-z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-y+y-z = x-z \in \mathbb{Z}$

2) ¿Qué es el conjunto cociente?

$[0] = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{Z} = \{0 + K \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}$

$[\frac{1}{2}] = \{\frac{1}{2}+0,\ \frac{1}{2}+2,\ \frac{1}{2}+3,\ \frac{1}{2}+4 \dots\} \Rightarrow \{\frac{1}{2} + K \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}$

$[\frac{1}{3}] = \{\frac{1}{3}+0,\ \frac{1}{3}+2,\ \frac{1}{3}-2, \dots\} = \{\frac{1}{3} + K \mid K \in \mathbb{Z}\}$

$\boxed{\frac{R}{R} = [0, 1)}$

$\Downarrow$

$X \in R$

π R 0'14159265

23 R 0

$\frac{7}{5}$ R $\frac{2}{5}$

Una relación de orden ($\leq$) sobre un conjunto A, diremos que es un orden total si dados dos elementos cualesquieran $a, b \in A$ se verifica que $a \leq b$ ó $b \leq a$. Ej: $(\mathbb{N}, \leq u)$ $(\mathbb{Z}, \leq u)$ $(\mathbb{Q} \leq u)$ $(\mathbb{R}, \leq u)$

El orden "si es múltiplo" e "inclusión" No son totales.

Elementos notables de un conjunto ordenado.

Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y sea B un subconjunto de A $(B \subseteq A)$

1) Un elemento $b \in B$ diremos que es un elemento maximal de B si verifica lo siguiente: si $x \in B$ y $b \leq x$ entonces $x = b$. (No hay nadie más grande)
2) Un elemento $b \in B$ diremos que es el máximo de B si $x \leq b, \forall x \in B$
3) Un elemento $b \in B$ diremos que es un elemento minimal de B si verifica lo siguiente: si $x \in B$ y $x \leq b \Rightarrow x = b$
4) Un elemento $b \in B$ diremos que es el mínimo de B si $b \leq x, \forall x \in B$
5) Un elemento $a \in A$ es una cota superior de B si $x \leq a$ $\forall x \in B$
6) El supremo de B es el mínimo del conjunto formado por todas las cotas superiores de B (el supremo es la menor de las cotas superiores)
7) Un elemento $a \in A$ diremos que es una cota inferior de B si $a \leq x$ $\forall x \in B$
8) El ínfimo de B es el máximo del conjunto formado por todas las cotas inferiores de B

Ejemplo:

$(\mathbb{N}, \leq u)$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- maximales $(B) = \{3, 4, 5\}$
- $\nexists$ máximo (B)
- minimales $(B) = \{1\}$
- mínimo $(B) = 1$
- cotas superiores de $B = \{0, 60, 120, 180, \ldots\} = \{60k$ tq $k \in \mathbb{N}\}$
- supremo $(B) = \{60$
- cotas inferiores de $B = \{1\}$
- ínfimo $(B) = 1$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Orden producto cartesiano

Sean $(A_1, \leq_1), (A_2, \leq_2), \ldots (A_n, \leq_n)$ conjuntos ordenados. En el conjunto $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ podemos definir la siguiente relación de orden:

$(a_1, a_2, \ldots a_n) \leq_p (b_1, b_2, \ldots b_n)$ si $a_1 \leq_1 b_1$, $a_2 \leq_2 b_2, \ldots, a_n \leq_n b_n$

A dicho orden lo llamaremos orden producto cartesiano. $(\leq_p)$

Ejemplo:

Consideremos $(\mathbb{Z}, \leq_u)$ y $(\mathbb{N}, \leq_m)$ como conjuntos ordenados y también $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \leq_p)$. $(a_1, b_1) \leq_p (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq_u a_2$ y $b_1 \leq_m b_2 \Leftrightarrow$ $a_1 \leq_u a_2$ y b_2 es múlt. de b_1.

Calcular los elementos notables del conjunto $B = \{(2,3), (3,6), (-1,1), (4,7)\}$

$(-6,2) \leq_p (1,4)$ $\quad (-6,2) \not\leq_p (1,11)$

- maximales $(B) = \{(3,6), (4,7)\}$
- máximo $(B) = \nexists$
- minimales $(B) = \{(-1,1)\}$
- mínimo $(B) = (-1,1)$

- cotas sup. de $B = \{(a,b)$ tq $4 \leq_u a$ tq b es múlt 42
- sup. $(B) = (4, 42)$
- cotas inf. de $B = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tq $a \leq_u -1$ tq $b = 1\}$
- inf. $(B) =$

Cuando hablemos del orden producto cartesiano en $\mathbb{N}^n$ nos referiremos al siguiente orden: $(a_1, a_2, \ldots a_n) \leq_p (b_1, b_2, \ldots b_n)$ si $a_1 \leq_u b_1$, $a_2 \leq_u b_2, \ldots a_n \leq_u b_n$

Este orden NO es total, ya que por ejemplo $(2,3) \not\leq_p (1,4)$ y $(1,4) \not\leq_p (2,3)$

Sin embargo existen órdenes en $\mathbb{N}^n$ que sí son totales como por ejemplo el orden léxico-gráfico que se define de la siguiente forma: ~~Una n-tupla~~ $(a_1, a_2, \ldots a_n) \leq_{lex} (b_1, b_2, \ldots b_n)$ si

$$\begin{cases} a_1 <_u b_1 \\ \text{o} \\ \exists i \in \{1, \ldots n-1\} \text{ tq } a_1 = b_1, \ldots a_i = b_i \text{ y } a_{n-1} <_u b_{i+1} \end{cases}$$

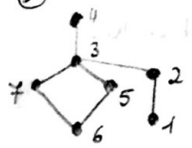
Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejemplo:
Ordena de menor a mayor con el orden léxicográfico los elementos del siguiente conjunto: $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,2),(1,0,4),(2,3,1)\}$

$(0,0,2) <_{lex} (0,1,1) <_{lex} (1,0,4) <_{lex} (1,1,1) <_{lex} (2,3,1)$

Representación gráfica de órdenes

Ejemplo: ①



$6 \leq 3 \quad 2 \nleq 7 \quad 6 \nleq 1$

$1 \leq 4 \quad 1 \nleq 7$

Calcular los elementos notables de $B = \{3,5,7\}$

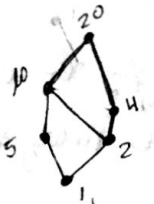
maximales $(B) = \{3\}$ — cotas superiores de $B = \{3,4\}$

máximo $(B) = \nexists 3$ — $\sup(B) = 3$

minimales $(B) = \{5,7\}$ — Cotas inferiores de $B = \{6\}$

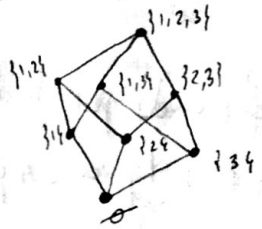
$\nexists$ mínimo (B) — $\inf(B) = 6$

② Representar gráficamente el siguiente orden: $(\{1,2,4,5,10,20\}, \leq_m)$



③ Representar gráficamente $(P(\{1,2,3\}) \leq_i)$

$P(\{1,2,3\}) = \{\{\emptyset\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$



Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

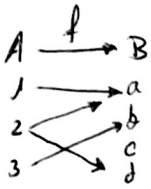
BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Aplicaciones entre conjuntos.

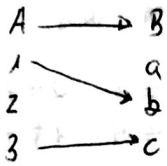
Sean A y B dos conjuntos. Una aplicación f de A en B, que denotaremos como $f: A \to B$, es una correspondencia que a cada elemento del conjunto A le asocia un único elemento del conjunto B.

Ej:

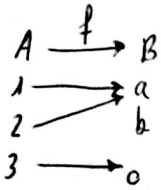
(1)



No es una aplicación



No es una aplicación

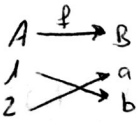


Sí es una aplicación

(2) ¿Es la correspondencia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ una aplicación?

- No, porque el 1 no tiene asociado ningún nº real ($\mathbb{R}$)

Sea $f: A \to B$, si $a \in A$ entonces al elemento que le asocia f en B lo denotaremos como $f(a)$ y diremos que es la imagen de a.



$f(2) = b$ $\quad Im(f) = \{a, b\}$

Llamaremos imagen de f al conjunto formado por todas las imágenes de $Im(f) = \{f(a) \text{ tq } a \in A\}$

Si $f: A \to B$ es una aplicación, entonces a los conjuntos A y B se les llama el dominio y el codominio de f respectivamente. Nótese que la imagen de f es siempre un subconjunto de B

Ejemplo:

Dada la aplicación $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $f(n) = 2n+1$, calcular $Im(f)$.

$Im(f) = \{ f(n) \text{ tq } n \in \mathbb{N} \} = \{ 2n+1 \text{ tq } n \in \mathbb{N} \} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

Son todos los impares positivos

- Tipos especiales de aplicaciones:

Una aplicación $f: A \to B$ diremos que es:

1) Inyectiva si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$
2) Sobreyectiva si $Im(f) = B$ (esto es lo mismo que decir que $B \subseteq Im(f)$)
3) Biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

Ejemplo:

1) Demuestra que la aplicación $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ es inyectiva y no es sobreyectiva

$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{2x+1}{3} = \frac{2y+1}{3} \Rightarrow 2x+1 = 2y+1 \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$

$\pi \notin Im(f)$ ya que π es irracional y todos los elementos que hay en $Im(f)$ son racionales.

2) Demuestra que la aplicación $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = |x|$ NO es inyectiva y sí es sobreyectiva

La aplicación no es inyectiva ya que $f(1) = f(-1)$

Para demostrar que f es sobreyectiva debemos probar que el codominio $\mathbb{N}$ está contenido en la imagen ($Im(f)$) $\mathbb{N} \subseteq Im(f)$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$ y $f(n) = |n| = n \Rightarrow n \in Im(f)$

$Im(f) = \{ f(n) \text{ tq } n \in \mathbb{Z} \}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

③ Demuestra que la aplicación $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ es biyectiva. $Im = \{f(x) \text{ tq } x \in \mathbb{Q}\}$

Inyectiva: $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{2x+1}{3} = \frac{2y+1}{3} \Rightarrow 2x+1 = 2y+1 \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$

Para demostrar que es sobreyectiva debemos probar que el ~~codominio pertenece a la imagen~~. $(\mathbb{Q} \subseteq Im(f))$

$q \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{3q-1}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow y\ f(\frac{3q-1}{2}) = q \Rightarrow q \in Im(f)$.

$\left[f(?) = q = \frac{2?+1}{3} \to ? = \frac{3q-1}{2} \right]$

④ Demostrar que la aplicación $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

- No es inyectiva ya que $f(1) = f(-1)$
- La aplicación no es sobreyectiva ya que $3 \in Im(f)$

- Composiciones de aplicaciones.

Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ dos aplicaciones. Llamaremos aplicación composición de f y g a la aplicación $g \circ f: A \to C$ definida por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Ejemplo:

①
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ 1 \arrow[r] & a \\ 2 \arrow[ur] & b \\ 3 \arrow[r] & c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] & C \\ a \arrow[r] & x \\ b \arrow[r] & y \\ c \arrow[ur] & z \end{tikzcd} \qquad \left\{ \begin{tikzcd} A \arrow[r, "g \circ f"] & C \\ 1 \arrow[r] & x \\ 2 \arrow[ur] & y \\ 3 \arrow[ur] & z \end{tikzcd} \right.$$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = x$

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(a) = x$

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(c) = y$

② Sea $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n^2$ y $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $g(x) = x+1$.
Calcular la composición de f y g

$g \circ f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

$(g \circ f)(n) \Rightarrow g(f(n)) = g(n^2) = n^2+1$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

NOTA: 1) La composición de aplicaciones es asociativa, esto quiere decir que si tenemos 3 aplicaciones $f: A \to B$, $g: B \to C$ y $h: C \to D$ entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

2) La composición de aplicaciones NO es conmutativa, esto quiere decir que aunque en el caso en que $g \circ f$ y $f \circ g$ tengan sentido, en general $g \circ f \neq f \circ g$.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(n) = n^2$ $\quad$ $g(x) = x+1$

$g \circ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

g

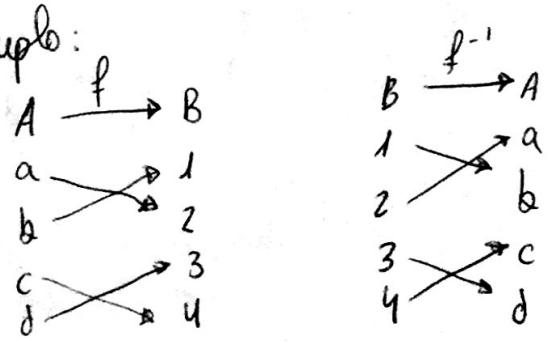
Sea A un conjunto, llamaremos aplicación identidad en A a la siguiente aplicación $1_A: A \to A$, $1_A(a) = a$.

Proposición:

Si $f: A \to B$ es una aplicación biyectiva, entonces existe una única aplicación $g: B \to A$ verificando que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$

A dicha aplicación g la llamaremos "la inversa de f", y la denotaremos f^{-1}

Ejemplo:

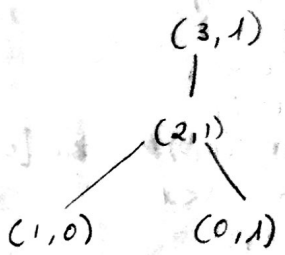


Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

PRÁCTICAS → 6/10/15

- Dado el conjunto ordenado $(\mathbb{N}^2, \leq_p)$ calcula los elementos notables de $\{(1,0),(0,1),(2,1),(3,1)\}$.



- maximales (B): (3,1)
- minimales (B): (1,0), (0,1)
- máximo: (3,1)
- mínimo: ∄
- cota superior $(a,b) \in \mathbb{N}^2 / a \geq 3, b \geq 1$
- cota inferior (0,0)
- supremo (3,1)
- ínfimo. (0,0)

CÁLCULOS:

(1,0) y (0,1) NO están relacionados porque $1 \not\leq 0$ ~~pero~~ $0 \leq 1$

(1,0) y (2,1) SÍ están relacionados porque $1 \leq 2$ y $0 \leq 1$

El supremo siempre será el máximo.

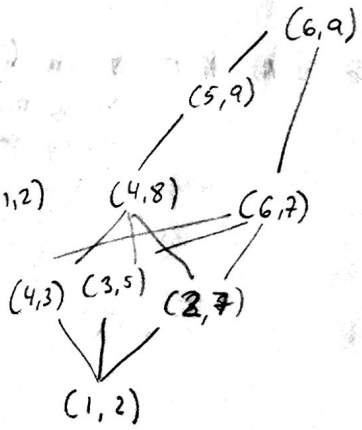
- Sea $A = \{(1,2),(4,3),(3,5),(2,7),(4,8),(6,9),(6,7),(5,9)\} \subseteq \mathbb{N}^2$

Calcular los elementos notables con el orden $\leq_p$

$\leq$ lexicográfico.

$\boxed{\leq_p}$

- maximales: ~~(6,9)~~, (6,9), ~~(6,7)~~
- minimales (1,2)
- máximo (6,9)
- mínimo (1,2)
- C. superior (a,b) $a \leq 6, b \leq 9$
- C. inferior (0,0), (0,1), (1,0) (1,1) (1,2)
- supremo (6,9)
- ínfimo (1,2)



El ínfimo es el más grande de las cotas inferiores

$\boxed{\text{lexicográfico}}$ $(1,2)-(2,7)-(3,5)-(4,3)-(4,8)-(5,9)-(6,7)-(6,9)$

- maximales $(6,9)$
- minimales $(1,2)$
- máximo $(6,9)$
- mínimo $(1,2)$
- c. superiores (a,b) $a \geq 6$ [ó $a=6$ y $b \geq 9$]
- c. inferiores $a<1$
- supremo $(6,9)$
- ínfimo. $(1,2)$

El orden total → maximales = máximo = supremo
minimales = mínimo = ínfimo

- Decir si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

a) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n)=n^2$ sí inyectiva, $f(x)=f(y) \rightarrow x^2=y^2$
NO sobreyectiva $\Rightarrow \sqrt{3} \notin \mathbb{N}$
NO biyectiva.

b) $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=2x$ sí inyectiva, $f(x)=f(y) \Rightarrow 2x=2y$
$\Rightarrow x=y$
NO sobreyectiva, $2\pi \notin \mathbb{Q}$
NO biyectiva.
$\nexists x \in \mathbb{Q}$ tq $2x=\pi$ $\left(\begin{array}{l} 2x \in \mathbb{R} \\ \pi \notin \mathbb{Q} \end{array}\right)$

c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n)=n+1$ sí inyectiva $f(n)=f(m) \Rightarrow n+1=m+1 \Rightarrow n=m$
sí sobreyectiva $n \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow f(n-1)=n-(+1)=n$
sí biyectiva.

Ej:

d) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ $f(x)=\dfrac{3x+2}{4}$

e) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=+\sqrt{x}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Tema 2 "Aritmética entera y modular"

Denotaremos por $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ al conjunto de los nº enteros.

- Propiedades de la suma:
  1) Conmutativa: $a+b = b+a, \forall a,b \in \mathbb{Z}$
  2) asociativa: $a+(b+c) = (a+b)+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$
  3) Elemento neutro: $a+0 = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$ (cero es el elem. neutro de la suma)
  4) Elemento inverso: $\forall a \in \mathbb{Z} \ \exists \ b \in \mathbb{Z}$ tq $a+b=0$ (en cuyo caso $b=-a$)
  5) Cancelativa: $a+b = a+c \Rightarrow b=c$

- Propiedades del producto:
  1) Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a,b \in \mathbb{Z}$
  2) Asociativa: $a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$
  3) Elemento neutro: $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$ (1 es el elem. neutro del producto)
  4) Cancelativa por elemento distinto de cero: $a \cdot c = b \cdot c$ y $c \neq 0 \Rightarrow a = b$
  5) Distributiva: $a(b+c) = ab+ac \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$

- Propiedad de la división:
  - Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0 \Rightarrow \exists$ unos únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tq $a = qb+r$ y $0 \leq r < |b|$

    A q y r los llamaremos el cociente y el resto de dividir $a : b$ y los denotaremos $a \operatorname{div} b$ y $a \bmod b$ respectivamente.

Ej: Calcular $127 \operatorname{div} 9$ y $127 \bmod 9$

$$\begin{array}{r|l} 127 & 9 \\ \hline 37 & 14 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 127 \operatorname{div} 9 = 14 \\ 127 \bmod 9 = 1 \end{array}}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejemplo:

① Calcular $-127 \text{ div } 9$ y $-127 \bmod 9$

$$\begin{array}{r|l} 127 & 9 \\ \hline 37 & 14 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 127 = 14 \cdot 9 + 1$$

$$-127 = (-14) \cdot 9 - 1 =$$
$$= (-14) \cdot 9 - 9 + 9 - 1 =$$
$$= (-15) \cdot 9 + 8$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -127 \text{ div } 9 = -15 \\ -127 \bmod 9 = 8 \end{array}}$$

② Calcular $-135 \bmod 7$

$$\begin{array}{r|l} 135 & 7 \\ \hline 65 & 19 \\ 2 & \end{array} \quad 135 = 19 \cdot 7 + 2$$

$$-135 = (-19) \cdot 7 (-2)$$

$$-2 + 7 = 5$$

$$\boxed{-135 \bmod 7 = 5}$$

③ Calcular $-63 \bmod 10$

$$\begin{array}{r|l} 63 & 10 \\ \hline 03 & 6 \end{array}$$

$$\boxed{-63 \bmod 10 = 7}$$

$$-3 + 10 = 7$$

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, diremos que a divide a b (o b es un múltiplo de a) y lo denotaremos $a|b$ si $\exists\, c \in \mathbb{Z}$ tq $b = c \cdot a$

Ej: $2|6$ $\quad 2 \nmid 7$

Un número entero distinto de 1 y -1 diremos que es primo si los únicos nº enteros que lo dividen son $1, -1$, él y $-$él

Nº primos: $2, -2, 3, -3, 5, -5, 7, -7, 11, -11, \ldots$

Dos nº enteros diremos que son primos relativos si los únicos enteros que dividen a dichos números son el 1 y el -1.

Ej: $6, 10$ NO $\qquad 8, 25$ SÍ

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Teorema de Bezout.

Sea $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a$ y b son primos relativos si y solamente si $\exists\, u, v \in \mathbb{Z}$ tq $a \cdot u + b v = 1$

Ejemplo: 8 y $25 \Rightarrow 8u + 25v = 1 \begin{cases} u = -3 \\ v = 1 \end{cases}$

196 y $121 \Rightarrow 196u + 121v = 1$ (difícil).

Teorema fundamental de la Aritmética.

Todo nº entero ≥ 2 se puede poner de forma única (salvo reordenaciones) como producto de nº primos positivos

Ejercicio: Calcular la descomposición en primos de 360

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

Corolario. (consecuencia del Th fundamental)

Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ es la descomposición en primos de un entero positivo n, entonces $(\alpha_1+1) \cdot (\alpha_2+1) \cdot (\alpha_r+1)$ es el nº de divisores <u>positivos</u> que tiene el nº "n".

Ejemplo: ¿Cuántos divisores tiene el nº 360?

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

$(3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \underline{24}$ divisores positivos.

Por tanto el nº 360 tiene 48 divisores (24^+ y 24^-)

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tq $a \neq 0$ ó $b \neq 0$, un entero d diremos que es un máximo común divisor de a y b si verifica:

1) $d|a$ y $d|b$
2) si $c|a$ y $c|b$ entonces $c|d$

NOTA: Si d es un máximo común divisor de a y b entonces $-d$ es también un máximo común divisor de a y b. Denotaremos $m.c.d\{a,b\}$ al máximo común divisor de a y b positivo.

Ej: $2, -2$ son los m.c.d 6 y 10 $\Rightarrow m.c.d\{6,10\} = 2$

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, un entero m diremos que es un mínimo común múltiplo de a y b si verifica lo siguiente:

1) $a|m$ y $b|m$
2) si $a|c$ y $b|c \Rightarrow m|c$

NOTA: Si m es un mínimo común múltiplo, de a y b, entonces $-m$ es también un mínimo común múltiplo de a y b. Denotaremos $m.c.m\{a,b\}$, al mínimo común múltiplo positivo.

Ej: ~~6, 10 → m.c.~~:

$30, -30$ son las m.c.m 6 y $10 \Rightarrow m.c.m\{6,10\} = 30$

* 1er Método para calcular el "m.c.d" y el "m.c.m"

Sean a, b enteros positivos ≥ 2 y $a = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdots P_r^{\alpha_r}$ y $b = P_1^{\beta_1} \cdot P_2^{\beta_2} \cdots P_r^{\beta_r}$ su descomposición en factores primos.

Entonces:

1) $m.c.d\{a,b\} = P_1^{\text{mínimo}\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot P_2^{\text{mínimo}\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdots P_r^{\text{mínimo}\{\alpha_r,\beta_r\}}$

2) $m.c.m\{a,b\} = P_1^{\text{máximo}\{\alpha_1,\beta_1\}}, P_2^{\text{máximo}\{\alpha_2,\beta_2\}}, \ldots$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

NOTA:

1) $m.c.d\{a,1\} = 1$

2) $m.c.d\{-7,9\} \Rightarrow m.c.d\{a,b\} = m.c.d\{|a|,|b|\}$

3) $m.c.m\{a,1\} = a$

4) $m.c.m\{a,0\} = 0$

5) $m.c.d\{a,0\} = a$

6) $m.c.d\{0,0\} = \nexists$

7) $m.c.m\{a,b\} = m.c.m\{|a|,|b|\}$

Ejemplo: Calcular el $m.c.d\{360,210\}$; $m.c.m\{360,210\}$

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0$

$210 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$

360	2	210
180	2	
90	2	
45	3	
15	5	
5		
1		

$m.c.d\{360,210\} = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 30$

$m.c.m\{360,210\} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 2.520$

Proposición:

Si $a,b \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m.c.d\{a,b\} \cdot m.c.m\{a,b\} = a \cdot b$

$\Rightarrow$ sabiendo por ej: $m.c.d\{a,b\} \rightarrow m.c.m\{a,b\} = \dfrac{a \cdot b}{m.c.d}$

2º Método: Algoritmo de Euclides

Entrada: a,b enteros positivos

Salida: $m.c.d\{a,b\}$

$(a_0, a_1) = (a,b)$

Mientras $a_1 \neq 0 \rightarrow (a_0, a_1) = (a_1, a_0 \bmod a_1)$

Devuelve a_0

Ej: Utilizando el Alg. de Euclides, calcular $m.c.d\{360,210\}$

$(a_0, a_1) = (360, 210) = (210, 150) = (150, 60) = (60, 30)$

$= (30, 0)$ $\quad m.c.d\{360,210\} = 30$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejemplo: Calcula utilizando el Algoritmo de Euclides
m.c.d $\{237, 99\}$

$(a_0, a_1) = (237, 99) = (99, 39) = (39, 21) = (21, 18)$
$= (18, 3) = (3, 0)$ m.c.d $\{237, 99\} = 3$

- Ecuaciones diofánticas lineales:

Una ecuación diofántica lineal es una expresión de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$, donde $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{Z}$ y $x_1, x_2, \dots, x_n$ son incógnitas.

Una solución de dicha ecuación es una n-tupla $\overbrace{(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)}^{\in \mathbb{Z}^n}$ tq $a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n = b$.

- Teorema de Bezout Generalizado:

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ y $b \in \mathbb{Z}$ y $d = $ m.c.d $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ entonces la ecuación diofántica $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ tiene solución si y solamente si $d | b$, además en dicho caso la ecuación tiene las mismas soluciones que la ecuación $\frac{a_1}{d}x_1 + \frac{a_2}{d}x_2 + \dots + \frac{a_n}{d}x_n = \frac{b}{d}$

Ejemplo:

1. La ecuación diofántica $6x - 8y + 10z = 7$ no tiene solución ya que m.c.d $\{6, -8, 10\} = 2$ y $2 \nmid 7$
2. La ec. diofántica $6x - 8y + 10z = 14$ tiene solución ya que m.c.d $\{6, -8, 10\} = 2$ y $2 | 14$, además tiene las mismas soluciones que la ecuación $3x - 4y + 5z = 7$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Resolución de ecuaciones diofánticas con dos incógnitas:

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tq $m.c.d\{a,b\} = 1$. Si (x_0, y_0) es una solución de la ecuación $ax + by = c$ entonces el conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación es

$\{(x_0 + bK, y_0 - aK) \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}$

Ej: Resolver la ecuación $6x - 8y = 4$

$m.c.d\{6, -8\} = 2 \quad 2|4 \Rightarrow 3x - 4y = 2$ (tiene las mismas sol.)

$3x - 4y = 2 \rightarrow m.c.d\{3, -4\} = 1$

$x = 2$, $y = 1$ es una solución $\Rightarrow \boxed{\{(2 - 4K, 1 - 3K) \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}}$

Algoritmo extendido de Euclides

Entrada: a y b enteros ≥ 2

Salida: $s, t, d \in \mathbb{Z}$ tq $d = m.c.d\{a,b\}$ y $as + bt = d$

$(a_0, a_1) = (a, b)$
$(s_0, s_1) = (1, 0)$
$(t_0, t_1) = (0, 1)$

Mientras $a_1 \neq 0$
$q = a_0 \text{ div } a_1$
$(a_0, a_1) = (a_1, a_0 - q \cdot a_1)$
$(s_0, s_1) = (s_1, s_0 - s_1 \cdot q)$
$(t_0, t_1) = (t_1, t_0 - t_1 \cdot q$

Devuelve $d = a_0$, $s = s_0$, $t = t_0$

Ejemplo:

Aplicar el Algoritmo extendido de Euclides a los nº $a = 120$ y $b = 93$

$(a_0, a_1) = (120, 93) = (93, 27) = (27, 12) = (12, 3) = (3, 0)$
$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -3) = (-3, 7) = (7, -)$
$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 4) = (4, -9) = (-9, -)$

$[q = 1]$ $[q = 3]$ $[q = 2]$ $[q = 4]$

$m.c.d\{120, 93\} = 3 \quad // \quad 120 \cdot 7 + 93(-9) = 3$

Ejemplo: Calcular todas las soluciones de la ec. diofántica:

$120x - 93y = 6$

1) m.c.d $\{120, 93\} = 3$

2) Como $3 | 6$, la ec. tiene solución, además tiene las mismas soluciones que la ecuación: $40x - 31y = 2$

3) m.c.d $\{40, 31\} = 1$

4) Aplicamos el alg. Euclides a 40 y 31.

$$(a_0, a_1) = (40, 31) \overset{q=1}{=} (31, 9) \overset{q=3}{=} (9, 4) \overset{q=2}{=} (4, 1) \overset{q=4}{=} (1, 0)$$

$$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -3) = (-3, 7) = (7, -1)$$

$$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 4) = (4, -9) = (-9, -)$$

$40 \cdot 7 + 31(-9) = 1$

$(2\times) \rightarrow 40 \cdot 14 + 31(-18) = 2$

$(-) \rightarrow 40 \cdot 14 - 31(18) = 2$

$x_0 = 14$, $y_0 = 18$ es una solución.

$\Downarrow$

El conjunto de todas las soluciones de la ecuación es:

$$\boxed{\text{Solución}: \{(14 - 31K, 18 - 40K) \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}}$$

a) ¿Cuántas soluciones tiene la ~~solución~~ ec. anterior verificando que $x, y \in [-100, 200]$

$-100 \leq 14 - 31K \leq 200$

$-100 \leq 18 - 40K \leq 200$

$\Downarrow$

$-200 \leq -14 + 31K \leq 100$

$-200 \leq -18 + 40K \leq 100$

Cambiamos de signo y por lo tanto las igualdades.

$-186 \leq 31K \leq 114$

$-182 \leq 40K \leq 118$

$-\frac{186}{31} \leq K \leq \frac{114}{31}$

$-\frac{182}{40} \leq K \leq \frac{118}{40}$

$-6 \leq K \leq 3'67$

$-4'55 \leq K \leq 2'95$

$\rightarrow -4 \leq K \leq 2$

$\downarrow$

$K \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$\downarrow$

NOTA: $2 - (-4) + 1 = 7 \rightarrow$ [7 soluciones]

FORMA DE CALCULAR CUANTAS SOL.

PREGUNTA TÍPICA DE EXAMEN

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

- Ecuaciones en congruencia de grado 1.

Sean $a, b, m \in \mathbb{Z}$, escribiremos $a \equiv b \pmod{m}$ y se lee "a congruente b modulo m" si $m \mid a-b$ (si $a-b$ es múltiplo de m).

Ej: $8 \equiv 2 \pmod{3}$
$8 \not\equiv 4 \pmod{3}$

Una ecuación en congruencia de grado 1 es una expresión de la forma $ax \equiv b \pmod{m}$ donde a, b y $m \in \mathbb{Z}$ y x es una incógnita. Una solución de la ecuación es un $c \in \mathbb{Z}$ tq $a \cdot c \equiv b \pmod{m}$

Ejemplo: Resolver la ecuación:

- $3x \equiv 2 \pmod{5}$
  $x = 4, 9, -1, 14 \Rightarrow \{4+5k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$
- $2x \equiv 1 \pmod{4}$
  $\nexists x \Rightarrow$ No tiene solución.

* Teorema:

1) La ecuación $ax \equiv b \pmod{m}$ tiene solución sí y solamente si el m.c.d $\{a, m\} \mid b$
2) Si $d = \text{m.c.d}\{a, m\}$ y $d \mid b \Rightarrow$ las ecuaciones $ax \equiv b \pmod{m}$ y $\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \left(\text{mod } \frac{m}{d}\right)$ tienen las mismas soluciones.
3) Si m.c.d $\{a, m\} = 1$ y u es una solución de $ax \equiv b \pmod{m}$ entonces el conjunto de todas sus soluciones es $\{u + Km \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}$
4) La ecuación $ax + c \equiv b \pmod{m}$ tiene las mismas soluciones que la ecuación $ax \equiv b - c \pmod{m}$
5) La ecuación $ax \equiv b \pmod{m}$ tiene las mismas soluciones que la ecuación $(a \bmod m)x \equiv b \bmod m \pmod{m}$
6) Si $au + mv = 1$ con $u, v \in \mathbb{Z} \Rightarrow bu \bmod m$ es una solución de la ecuación $ax \equiv b \pmod{m}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

PRÁCTICAS 13/10/15

$\boxed{\text{NOTA: } \sqrt{x^2} = |x|}$

$\mathbb{N} = \{1, \dots$
$\mathbb{Z} = \{-1, 0, 1 \dots\}$
$\mathbb{Q} = \{$
$\mathbb{R} = \{ \dots \}$

Relación ejercicios.

12. Calcula $g \circ f$ y $f \circ g$ cuando sea posible

1. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto n+1$ $\quad g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$

2. $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto \frac{3x+2}{4}$ $\quad g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x^2$

3. $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto +\sqrt{x}$ $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $x \mapsto x^2$

1. $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

$f(a) = a+1$, $\cancel{g(a)} = g(f(a)) = \cancel{g(a^2+1)^2}$

$(g \circ f)(n) = g(n+1) = (n+1)^2 \neq n^2 + 2n + 1$

$(f \circ g)(n) = f(n^2) = n^2 + 1$

2) $(g \circ f)(x) = g\left(\frac{3x+2}{4}\right) = \left(\frac{3x+2}{4}\right)^2$

$(f \circ g)(x) = f(x^2) = \frac{3x^2+2}{4}$

3) $(g \circ f)(x) = g(+\sqrt{x}) = (+\sqrt{x})^2 = x$

$(f \circ g)(x) = f(x^2) = +\sqrt{x^2} = |x|$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

15. Sea $X = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ y $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 : X \to X$ las aplicaciones

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1-x$, $f_3(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_4(x) = \frac{1}{x}$,

$f_5(x) = \frac{x}{x-1}$, $f_6(x) = \frac{x-1}{x}$

1. Comprueba que la composición de cualesquiera de estas aplic. ~~son~~ es una de las seis

$f_1 \circ f_2, f_3, \ldots$; $f_2 \circ f_3$; $f_3 \circ f_6$; $f_2 \circ f_2$; $f_4 \circ f_4$; $f_5 \circ f_5$; $f_1 \circ f_1$

$f_1 \circ f_2 = f_2(f_1(x)) = 1-x \ (f_2)$ $\quad f_1 \circ f_4 = \frac{1}{x}$ $\quad f_1 \circ f_6 = \frac{x-1}{x}$

$f_1 \circ f_3 = \frac{1}{1-x}$ $\quad f_1 \circ f_5 = \frac{x}{x-1}$

$f_2 \circ f_3 = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1}$ $\quad f_3 \circ f_6 = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x$

$f_2 \circ f_2 = 1 - (1-x) = 1 - 1 + x = x \ (f_1)$

$f_4 \circ f_4 = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \ (f_1)$

$f_5 \circ f_5 = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x$

$f_1 \circ f_1 = x \ (f_1)$

2. Comprueba que cada una de estas aplic. es biyectiva.

Para $f_2 : x \to x$ $\exists\, g : x \to x$ tq $g \circ f(x) = x$ y $f \circ g(x) = x$

Todas las aplicaciones son biyectivas porque tienen inversa: $\exists\, g$ tq $f \circ g = x$; $g \circ f = x$

$f_1 \to f_1$ $\quad f_4 \to f_4$

$f_2 \to f_2$ $\quad f_5 \to f_5$

$f_3 \to f_6$ $\quad f_6 \to f_3$

25. En D(90) definimos la relación xRy si $m.c.d\{x, 18\} = m.c.d\{y, 18\}$

$D(90) = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$

1. Comp. que R es una rel. de equivalencia.
2. Calcula [1], [3], [5], [30]
3. Determinar conj. cociente.

~~1) [illegible] $xRy = \{$~~

2) $[1] = \{1, 5\}$

$m.c.d\{1, 18\} = 1 = m.c.d\{5, 18\}$

$[3] = \{3, 15\}$

$m.c.d\{3, 18\} = 3 = m.c.d\{15, 18\}$

$[5] = [1]$

$[6] = \{6, 30\}$

3) $\frac{D(90)}{R} = D(18)$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejemplo:

① Resolver la ecuación $20x \equiv 10 \pmod{50}$

m.c.d $\{20, 50\} = 10$, Como $10 | 10$, la congruencia tiene solución, además tiene las mismas soluciones que la ecuación $2x \equiv 1 \pmod 5$

Como m.c.d $\{2, 5\} = 1$, entonces sabemos por el Teorema anterior, que si conozco una solución, las conozco todas

Como $x = 3$ es una solución de la ecuación, entonces el conjunto de todas sus soluciones es $\{3 + 5K \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}$

② Resolver la ecuación $242x \equiv 4 \pmod{392}$

m.c.d $\{242, 392\} = 2$

Como $2 | 4$, la ecuación tiene solución, además tiene las mismas soluciones que la ecuación $121x \equiv 2 \pmod{196} \rightarrow$ m.c.d $\{121, 196\} = 1$

~~Como~~ Si $a \cdot u + m \cdot v = 1 \Rightarrow b \cdot u \bmod m$ es solución $ax \equiv b \pmod m$

$121u + 196v = 1$

Aplicamos el algoritmo extendido de euclides a 196 y 121:

$(a_0, a_1) = (196, 121) \overset{q=1}{=} (121, 75) \overset{q=1}{=} (75, 46) \overset{q=1}{=} (46, 29) \overset{q=1}{=} (29, 17) \overset{q=1}{=} (17, 12) \overset{q=1}{=} (12, 5)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 2) = (2, -3) = (-3, 5) = (5, -8) =$

$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 2) = (2, -3) = (-3, 5) = (5, -8) = (-8, 13) =$

$\overset{q=2}{=} (5, 2) \overset{q=2}{=} (2, 1) \overset{q=2}{=} (1, 0)$

$= (-8, 21) = (21, -50) = (-50, -)$

$= (13, -34) = (-34, 81) = (81, -)$

$\left\{ 196 \cdot (-50) + 121(81) = 1 \right.$

Por tanto, aplicando el Teorema anterior, sabemos que $b \cdot u \bmod m$ es una solución $\Rightarrow 2 \cdot 81 \bmod 196 = 162 \bmod 196 = 162$ es una solución de la ecuación, por tanto el conjunto de todas sus soluciones es $\{162 + 196K \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

- Sistemas de ecuaciones en congruencia

Resolver el sistema:

$$\left.\begin{cases} 4x \equiv 6 \pmod{10} \rightarrow \text{tiene solución} \rightarrow = 2x \equiv 3 \pmod 5 \\ 3x \equiv 1 \pmod 4 \rightarrow \text{tiene solución} \rightarrow = 3x \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}\right\} x = 4 \text{ es sol.} \Rightarrow 4+5K$$

$$2x \equiv 3 \pmod 5 \rightarrow x = 4+5K$$

$$3x \equiv 1 \pmod 4 \rightarrow 3(4+5K) \equiv 1 \pmod 4$$

$$12 + 15K \equiv 1 \pmod 4$$

$$15K \equiv -11 \pmod 4$$

$$15 \bmod 4 \leftarrow 3K \equiv \boxed{1} \pmod 4 \rightarrow \boxed{K} = 3 + 4\bar{K}$$

$$\rightarrow 11 \bmod 4$$

$$x = 4+5K = 4+5(3+4\bar{K}) = 19+20\bar{K}$$

$$\{19+20\bar{K} \text{ tq } \bar{K} \in \mathbb{Z}\}$$

Resolver el sistema:

$$\left.\begin{cases} 2x \equiv 2 \pmod 4 \rightarrow \text{tiene solución} \rightarrow = x \equiv 1 \pmod 2 \\ 6x \equiv 3 \pmod 9 \rightarrow \text{tiene solución} \rightarrow = 2x \equiv 1 \pmod 3 \\ 2x \equiv 3 \pmod 5 \rightarrow \text{tiene solución} \rightarrow = 2x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}\right\}$$

$$\left.\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ 2x \equiv 1 \pmod 3 \\ 2x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}\right\} \begin{cases} x = 1+2K \\ 2(1+2K) \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 4K \equiv -1 \pmod 3 \end{cases}$$

$$K \equiv 2 \pmod 3 \rightarrow K = 2+3\bar{K}$$

$$x = 1+2(2+3\bar{K}) = 5+6\bar{K}$$

$$2(5+6\bar{K}) \equiv 3 \pmod 5$$

$$10+12\bar{K} \equiv 3 \pmod 5$$

$$12\bar{K} \equiv -7 \pmod 5$$

$$2\bar{K} \equiv 3 \pmod 5 \rightarrow \bar{K} = 4+5\bar{\bar{K}}$$

$$x = 5+6\bar{K} = 5+6(4+5\bar{\bar{K}}) = 29+30\bar{\bar{K}}$$

$$\{29+30\bar{\bar{K}} \text{ tq } \bar{\bar{K}} \in \mathbb{Z}\}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x \equiv 2 \pmod 4 \\ 3x \equiv 6 \pmod{12} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \text{tiene solución} \to = X \equiv 1 \pmod 2 \\ \to \text{tiene solución} \to = X \equiv 2 \pmod 4 \end{array}$$

$X \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow X = 1 + 2K$

$X \equiv 2 \pmod 4 \to 1 + 2K \equiv 2 \pmod 4$

$2K \equiv 1 \pmod 4 \to$ no tiene solución.

Como no tiene solución, el sistema No tiene solución.

- ¿Cuántos nº naturales hay menores de 1000, acaben en 7 y que al dividirlo por 55 den de resto 12? $\to x = q \cdot 55 + 12$

$$\left.\begin{array}{l} X \equiv 7 \pmod{10} \\ X \equiv 12 \pmod{55} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to x = 7 + 10K \\ \to 7 + 10K \equiv 12 \pmod{55} \end{array}$$

$10K \equiv 5 \pmod{55}$ mcd $\{10, 55\} = 5$

$2K \equiv 1 \pmod{11} \to K = 6 + 11\bar{K}$

$X = 7 + 10K = 7 + 10(6 + 11\bar{K}) = 67 + 110\bar{K}$

$\{67 + 110\bar{K}$ tq $\bar{K} \in \mathbb{Z}\}$

$0 \leq 67 + 110\bar{K} < 1.000$

$-67 \leq 110\bar{K} < 933$

$\frac{-67}{110} \leq \bar{K} < \frac{933}{110}$

$-0'61 \leq \bar{K} < 8'48 \to \boxed{0 \leq \bar{K} \leq 8} \to$ Son 9 nº naturales (del 0 al 8)

Solución

¿Cuántos nº enteros del intervalo [1000, 2000] son pares, al dividirlo entre 7 dan de resto 1 y al multiplicarlos por tres y dividirlos entre 5 dan de resto 2?

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 0 \pmod 2 \\ x \equiv 1 \pmod 7 \\ 3x \equiv 2 \pmod 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \text{tiene solución} \\ \to \text{tiene solución} \\ \to \text{tiene solución} \end{array} \quad x = 0 + 2K$$

$$2K \equiv 1 \pmod 7 \to K = 4 + 7\bar{K}$$

$$x = 2K = 2(4 + 7\bar{K}) = 8 + 14\bar{K}$$

$$3(8 + 14\bar{K}) \equiv 2 \pmod 5$$

$$24 + 42\bar{K} \equiv 2 \pmod 5$$

$$42\bar{K} \equiv -22 \pmod 5 \to \cancel{\bar{K} \equiv 4 + 5\bar{\bar{K}}}$$

$$2\bar{K} = 3 \pmod 5 \to \bar{K} = 4 + 5\bar{\bar{K}}$$

$$x = 8 + 14\bar{K} = 8 + 14(4 + 5\bar{\bar{K}}) = 64 + 70\bar{\bar{K}}$$

$$1000 \leq 64 + 70\bar{\bar{K}} \leq 2000$$

$$936 \leq 70\bar{\bar{K}} \leq 1936$$

$$\frac{936}{70} \leq \bar{\bar{K}} \leq \frac{1936}{70}$$

$$13'4 \leq \bar{\bar{K}} \leq 27'7 \to 14 \leq \bar{\bar{K}} \leq 27$$

$$\downarrow$$

$$\bar{\bar{K}} \in \{14, 15, \ldots 27\}$$

$$\boxed{\text{Solución: hay 14 nº enteros}}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Un cocinero de un barco pirata relató cómo había conseguido las 18 monedas de oro que llevaba. 15 piratas atracaron un barco, consiguieron un cofre de monedas, las repartieron en partes iguales y me dieron las ~~ch~~ 5 que sobraban. Tras una tormenta, murieron dos piratas, por lo que juntaron todas las monedas (excepto las del cocinero) y las volvieron a repartir. ~~Alzo~~ A mí me dieron las 10 que sobraron. Por último, tras una epidemia, murieron 5 piratas y los supervivientes repitieron de nuevo la repart. Sabiendo que en el cofre no caben más de 2.500. ¿Cuántas monedas contenía el cofre?

$x = 15q + 5$
$x - 5 = 12q$

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{15} \\ x - 5 \equiv 10 \pmod{13} \\ x - 15 \equiv 3 \pmod{8} \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{15} \\ x \equiv 2 \pmod{13} \\ x \equiv 2 \pmod{8} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 + 15K \\ 5 + 15K \equiv 2 \pmod{13} \Rightarrow 15K \equiv -3 \pmod{13} \\ 2K \equiv 10 \pmod{13} \\ K = 5 + 13\bar{K} \end{cases}$$

$$X = 5 + 15K = 5 + 15(5 + 13\bar{K}) = 80 + 195\bar{K}$$

$$80 + 195\bar{K} \equiv 2 \pmod 8$$
$$195\bar{K} \equiv -78 \pmod 8$$
$$3\bar{K} \equiv 2 \pmod 8 \longrightarrow \bar{K} = 6 + 8\bar{\bar{K}}$$

$$X = 80 + 195\bar{K} = 80 + 195(6 + 8\bar{\bar{K}}) = 80 + 1170 + 1560\bar{\bar{K}}$$
$$X = 1250 + 1560\bar{\bar{K}}$$

$\boxed{\text{Solución: 1250 monedas}}$

~~1250~~

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

- Resolución de ecuaciones diofánticas utilizando congruencia.

① Resolver la ecuación diofántica $6x + 10y = 14$

m.c.d $\{6, 10\} = 2$

Como $2 | 14$, la ecuación tiene solución, además tiene las mismas soluciones que la ecuación

$3x + 5y = 7$

$3x \equiv 7 \pmod 5$

$3x \equiv 2 \pmod 5 \rightarrow \boxed{x = 4 + 5K}$

$5y = 7 - 3x = 7 - 3(4+5K) = -5 - 15K$

$\boxed{y = -1 - 3K}$

② Resolver la ecuación diofántica $3x - 5y = -2$

$3x \equiv -2 \pmod 5 \Rightarrow 3x \equiv 3 \pmod 5$

$\boxed{x = 1 + 5K}$

$5y = 3x + 2 \rightarrow 5y = 3(1+5K) + 2$

$5y = 5 + 15K \rightarrow \boxed{y = 1 + 3K}$

③ Resolver $9x - 15y + 11z = 3$

m.c.d $\{9, 15, 11\} = 1$

$9x - 15y = 3u$ $\Rightarrow 3u + 11z = 3$

m.c.d $\{9, 15\} = 3$

$\downarrow$

$3u \equiv 3 \mod (11)$

$11z = 3 - 3u$ $\boxed{u = 1 + 11K}$

$11z = 3 - 3(1 + 11K) = 33K \Rightarrow \boxed{z = -3K}$

$9x - 15y = 3u \rightarrow 3x - 5y = u \Rightarrow 3x - 5y = 1 + 11K$

$3x \equiv 1 + 11K \pmod 5$ si $a \cdot u + m \cdot v = 1 \Rightarrow b \cdot u \mod m$ es solución.

$b \cdot u$ es solución de $ax \equiv b \pmod m$

$3u + 5v = 1$

$3(2) + 5(-1) = 1 \rightarrow$ $2(1 + 11K)$ es una solución.

$x = 2(1 + 11K) + 5\bar{K} \rightarrow \boxed{x = 2 + 22K + 5\bar{K}}$

$-5y = 1 + 11K - 3x \rightarrow -5y = 1 + 11K - 3(2 + 22K + 5\bar{K})$

$-5y = -5 - 55K - 15\bar{K}$

$\hookrightarrow \boxed{y = 1 + 11K + 3\bar{K}}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

* El anillo de los enteros, modulo un entero positivo.

Dado un entero positivo m, denotaremos por $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ en $\mathbb{Z}_m$ definimos una operación suma. y una operación producto de la siguiente forma:

$$a \oplus b = (a+b) \bmod m$$
$$a \odot b = (ab) \bmod m$$

Ejemplo: Calcular en $\mathbb{Z}_6$ $4 \oplus 3$ y $4 \odot 3$.

$$\boxed{4 \oplus 3} = (4+3) \bmod 6 = 7 \bmod 6 = \boxed{1}$$

$$\boxed{4 \odot 3} = 12 \bmod 6 = \boxed{0}$$

- Propiedades de la suma de $\mathbb{Z}_m$:

1) Conmutativa: $a \oplus b = b \oplus a$
2) Asociativa: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
3) Elemento neutro: $a \oplus 0 = a$
4) Elemento inverso: $a \oplus (m-a) = a$ ($-a$ inverso de a)
5) Cancelativa: $a \oplus c = b \oplus c \Rightarrow a = b$

- Propiedades del producto de $\mathbb{Z}_m$:

1) Conmutativa: $a \odot b = b \odot a$
2) Asociativa: $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$
3) Elemento neutro: $a \odot 1 = a$
4) Distributiva: $a \odot (b + c) = a \odot b + a \odot c$

NOTA: 1) El cero nunca tiene inverso para el producto en $\mathbb{Z}_m$. De los elementos distintos de cero, de $\mathbb{Z}_m$ hay algunos que tienen inverso para el producto y otros que no tienen.

Ej: En $\mathbb{Z}_4$ los elementos que tienen inverso por el producto, son el 1 y el 3

2) En $\mathbb{Z}_m$ NO se verifica ni tan siquiera la propiedad cancelativa por elemento distinto de cero, ya que por ejemplo en $\mathbb{Z}_6$: $30 \cdot 2 = 3 \cdot 4$

A los elementos de $\mathbb{Z}_m$ que tienen inverso para el producto, se les llama unidades. Si a es una unidad denotaremos por a^{-1} al inverso para el producto de a

Ej: Calcular las unidades de $\mathbb{Z}_5$

$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_5) = \{1, 2, 3, 4, \}$

$1^{-1} = 1 \qquad 3^{-1} = 2$

$2^{-1} = 3 \qquad 4^{-1} = 4$

Teorema:

Un elemento $a \in \mathbb{Z}_m$ tiene inverso para el producto si y solamente si el m.c.d $\{a, m\} = 1$. Además, si $a \cdot u + m \cdot v = 1$ con $u, v \in \mathbb{Z}$ entonces $a^{-1} = u \bmod m$.

Ej: Calcular las unidades de $\mathbb{Z}_{12}$:

$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12}) = \{1, 5, 7, 11\}$.

Calcular el inverso para el producto de 35 en $\mathbb{Z}_{97}$:

m.c.d $\{35, 97\} = 1$

$a \cdot u + m \cdot v = 1$

$35 \cdot u + 97 \cdot v = 1 \quad \begin{cases} u = \\ v = \end{cases}$

Aplicamos Alg. Ext. Euc.

$(a_0, a_1) = (97, 35) \overset{q=2}{=} (35, 27) \overset{q=1}{=} (27, 8) \overset{q=3}{=} (8, 3) \overset{q=2}{=} (3, 2) \overset{q=1}{=} (2, 1) \overset{q=1}{=} (1, 0)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 4) = (4, -9) = (-9, 13) = (13, -)$

$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -2) = (-2, 3) = (3, -11) = (-11, 25) = (25, -36) = (-36, -)$

$97 \cdot 13 + 35 \cdot (-36) = 1$

$u = -36$
$v = 13$ $\Rightarrow 35^{-1} = (-36) \bmod 97$

$\boxed{35^{-1} = 61}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

PRÁCTICAS 20/10/15

- Calcula, si es posible, 1392^{-1} en $\mathbb{Z}_{7585}$

Encontrar $x \in \mathbb{Z}_{7585}$ tq $1392x \equiv 1 \pmod{7585}$

$1392x \equiv 1 \pmod{7585}$ $\rightarrow$ ~~$7585x + 1392y = 1$~~

Aplicamos Algoritmo de Euclides gen.

$(a_0, a_1) = (7585, 1392) \overset{q=5}{=} (1392, 625) \overset{q=*}{=}$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) =$

$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -5) =$

$*q=2$ $\quad q=4$ $\quad q=28$

$= (625, 142) = (142, 57) \dots = (1, 0)$

$= (1, -2) = (-2, 9) \dots = (49, -)$

$= (-5, 11) = (11, -49) \dots = (-267, -)$

$1392x - 7585y = 1 \longrightarrow 7585a + 1392b = 1$

$a = 49$, $b = -267$ $\quad \begin{cases} a = -y \\ b = x \end{cases}$

Soluciones: $a = 49 + 1392K$
$b = -267 - 7585K$

$7585 \cdot 49 + 1392(-267) = 1$

$\Downarrow$

$1392(\overset{-267}{\cancel{49}}) \equiv 1 \pmod{7585}$

-267 no está en $\mathbb{Z}_{7585}$

$-267 + 7585 = 7318 \in \mathbb{Z}_{7585}$

$\Downarrow$

$1392(7318) \equiv 1 \pmod{7585}$

El inverso es para $K = -1 \rightarrow$ 7318

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

• Resuelve las congruencias:

→ $3x \equiv 2 \pmod 5$

→ $7x \equiv 4 \pmod{10}$

1) → $3x \equiv 2 \pmod 5$

$3 \cdot u - 5 \cdot v = 2 \begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = 4}$

$12 - 10 = 2$

$\boxed{\{4 + 5K \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}}$

2) → $7x \equiv 4 \pmod{10}$

$7u - 10v = 4 \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \rightarrow x = 2$

$14 - 10 = 4$

$\boxed{\{2 + 10K \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}}$

• Resuelve el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \bmod 2 \\ 6x \equiv 3 \bmod 9 \\ 3x \equiv 3 \bmod 5 \end{array}\right\}$$

→ $x = 3 \quad \{3 + 2K \text{ tq } K \in \mathbb{Z}\}$

→ $6(3 + 2k) \equiv 3 \pmod 9$

$18 + 12K \equiv 3 \pmod 9$

$12K \equiv -15 \pmod 9$

$12K \equiv 3 \pmod 9$

$K = 1 \rightarrow \{1 + 9\bar{K} \text{ tq } \bar{K} \in \mathbb{Z}\}$

$3(1 + 9\bar{k}) \equiv 3 \bmod 5$

$3 + 27\bar{k} \equiv 3 \bmod 5$

$27\bar{k} \equiv 0 \bmod 5 \rightarrow \{5\bar{\bar{k}} \text{ tq } \bar{\bar{k}} \in \mathbb{Z}\}$

$x = 3 + 2(1 + 9(5\bar{\bar{k}}))$

$\boxed{x = 5 + 90\bar{\bar{k}} \text{ tq } \bar{\bar{k}} \in \mathbb{Z}}$

$3 + 2(1 + 45\bar{\bar{k}})$

$3 + 2 + 90\bar{\bar{k}}$

$5 + 90\bar{\bar{k}}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Ejercicio:

① Resuelve en $\mathbb{Z}_9$ la ecuación $x+7=5x+2$

$x+7=5x+2$

$4x=5$ → como m.c.d $\{4,9\}=1$, entonces existe 4^{-1}

$\Rightarrow 4^{-1}\cdot 4x = 4^{-1}\cdot 5 \Rightarrow x=4^{-1}\cdot 5 \Rightarrow x=7\cdot 5 \Rightarrow x=8$

② Resuelve en $\mathbb{Z}_7$ la ecuación $3x+6=x+2$

$3x+6=x+2$

$2x=-4 \rightarrow 2x=3 \Rightarrow$ m.c.d $\{2,7\}=1 \Rightarrow$

existe $2^{-1} \Rightarrow 2^{-1}\cdot 2x = 2^{-1}\cdot 3 \Rightarrow x=4\cdot 3 \Rightarrow x=5$

③ Resuelve en $\mathbb{Z}_9$ la ecuación $6x=0$

m.c.d $\{6,9\}=3\neq 1$ entonces no existe 6^{-1}

$6x\equiv 0 \pmod 9$

$2x\equiv 0 \pmod 3$

$x=0+3K \rightarrow$ Solución: $\{0,3,6\}$

④ Resuelve en $\mathbb{Z}_{20}$ la ecuación $x+5=7x+1 \Rightarrow 6x=4$

Como m.c.d $\{6,20\}=2\neq 1$ no existe $6^{-1} \Rightarrow$

se resuelve → $6x\equiv 4 \pmod{20}$

$3x\equiv 2 \pmod{10}$

$x=4+10K \rightarrow$ Solución $\{4,14\}$

⑤ Resolver en $\mathbb{Z}_{25}$ la ecuación $8x+3=3x+2 \Rightarrow 5x=-1 \Rightarrow 5x=24$

m.c.d $\{5,25\}=5\neq 1 \rightarrow$ no existe $5^{-1} \Rightarrow$

$5x\equiv 24 \pmod{25}$ Esta congruencia no tiene solución y por tanto, la ecuación que nos dieron en $\mathbb{Z}_{25}$ no tiene solución. (Ningún nº en $\mathbb{Z}_{25}$ verifica esa igualdad).

PROPOSICIÓN:

Sean $a_1, a_2, \dots a_k$, $m \in \mathbb{Z}$ y $m \neq 0$.

1) $(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \bmod m = (a_1 \bmod m + a_2 \bmod m, \dots + a_k \bmod m) \bmod m$

2) $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots a_k) \bmod m = (a_1 \bmod m \cdot a_2 \bmod m \dots \cdot a_k \bmod m) \bmod m$

Ejemplos:

① Calcular el resto de dividir 4225^{1000} entre 7.

$(4225^{1000} \bmod 7)$

$= (4225 \cdot \overset{(1000}{\dots} 4225) \bmod 7 =$

$= (4225 \bmod 7 \cdot 4225 \bmod 7, \overset{(1000}{\dots}) \bmod 7 =$

Calculamos $4225 \bmod 7 = 4$

$\Rightarrow (4 \overset{(1000}{\dots} \cdot 4) \bmod 7 = 4^{1000} \bmod 7$

$4^1 \bmod 7 = 4$
$4^2 \bmod 7 = 2$
$4^3 \bmod 7 = \underline{\underline{1}}$

$1000 = 3 \cdot 333 + 1$

$\Rightarrow 4^{1000} \bmod 7 = 4^{3 \cdot 333 + 1} \bmod 7 = (4^{3 \cdot 333} \cdot 4^1) \bmod 7 =$

$= (4^3 \cdot \overset{(333}{\dots} 4^3 \cdot 4) \bmod 7 =$

$= (\underbrace{4^3 \bmod 7}_{1} \overset{(333}{\dots} \underbrace{4^3 \bmod 7}_{1} \cdot \underbrace{4^1 \bmod 7}_{4}) \bmod 7 =$

$= 4 \bmod 7 = \boxed{4}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

② Calcular el resto de dividir 162^{197} entre 5

Nos piden $162^{197} \bmod 5$

$\Rightarrow (162 \overset{(197}{\cdots} 162) \bmod 5 =$

$= (162 \bmod 5 \overset{(197}{\cdots} 162 \bmod 5) \bmod 5 =$

Calculamos $162 \bmod 5 = 2$

$\Rightarrow (2 \overset{(197}{\cdots} 2) \bmod 5 = 2^{197}$

$$\left.\begin{array}{l} 2^1 \bmod 5 = 2 \\ 2^2 \bmod 5 = 2 \\ 2^3 \bmod 5 = 3 \\ 2^4 \bmod 5 = \underline{\underline{1}} \end{array}\right\} \quad 197 = \cancel{4 \cdot 48 + 1} \; 4 \cdot 49 + 1$$

$\Rightarrow 2^{197} \bmod 5 = 2^{4 \cdot 49 + 1} \bmod 5 =$

$= (2^4 \overset{(49}{\cdots} 2^4 \cdot 2^1) \bmod 5 =$

$= (\underbrace{2^4 \bmod 5}_{1} \overset{(49}{\cdots} 2^4 \bmod 5 \cdot \underbrace{2^1 \bmod 5}_{2}) \bmod 5 =$

$= 2 \bmod 5 = \boxed{2}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

③ Demuestra que $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m^2 \equiv 0 \pmod 8$

$m^2 \equiv 1 \pmod 8$

$m^2 \equiv 4 \pmod 8$

Además, prueba que $8^{125} + 4^{12} + 3$ No tiene raíz cuadrada exacta.

Dividimos m entre 8, entonces $m = q \cdot 8 + r$ con $r \in \{0, 1, \dots, 7\}$. Entonces $m^2 = (q \cdot 8 + r)^2 = q^2 \cdot 8^2 + 2 \cdot q \cdot 8 \cdot r + r^2$

$m^2 \bmod 8 = (q^2 8^2 + 2q8r + r^2) \bmod 8 =$

$= (\underbrace{q^2 8^2 \bmod 8}_{0} + \underbrace{2q8r \bmod 8}_{0} + r^2 \bmod 8) \bmod 8 =$ → Al ser múlt de 8, el resto es 0

$= (r^2 \bmod 8) \bmod 8 = r^2 \bmod 8$

El ejercicio, lo que nos viene a decir es que el resto de dividir m^2 entre 8 vale o cero o 1 o 4

$0^2 \bmod 8 = 0$
$1^2 \bmod 8 = 1$
$2^2 \bmod 8 = 4$
$3^2 \bmod 8 = 1$
$4^2 \bmod 8 = 0$
$5^2 \bmod 8 = 1$
$6^2 \bmod 8 = 4$
$7^2 \bmod 8 = 1$

Así demostramos que
$m^2 \equiv 0 \pmod 8$
$m^2 \equiv 1 \pmod 8$
$m^2 \equiv 4 \pmod 8$

$(8^{125} + 4^{12} + 3) \bmod 8 = (\underbrace{8^{125} \bmod 8}_{0} + \underbrace{4^{12} \bmod 8}_{0} + \underbrace{3 \bmod 8}_{3}) \bmod 8 =$

$= 3 \bmod 8 = \underline{\underline{3}}$ No tiene raíz cuadrada exacta.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

* Sistema de numeración

Sea B un entero ≥ 2, entonces todo nº natural $\neq 0$ se puede poner de forma única como $n = a_k B^k + a_{k-1} B^{k-1} + \dots + a_1 B + a_0$ con $a_i \in \{0, 1, \dots, B-1\}$ $\forall i \in \{0, 1, \dots, k\}$ y $a_k \neq 0$

A la $k+1$-tupla $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0)$ la llamaremos expresión en base B del nº natural n.

Por definición (0) es la expresión en base B del nº natural cero.

Ejemplo:

1) Calcular la expresión en base 3 del nº 25.

$25 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \rightarrow (2, 2, 1)$

2) Calcular la expresión en base 2 del nº 39

$39 = \cancel{1 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2^1 + 1 \rightarrow (1, 3, 1)}$

$= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \rightarrow (1, 0, 0, 1, 1, 1)$

3) Calcular la expresión en base 7 del nº 12523

$$\begin{array}{l|l}
12523 & 7 \\
\quad 55 & 1789 \quad 7 \\
\quad\ \ 62 & \quad 38 \quad 255 \quad 7 \\
\quad\quad 3 & \quad\ \ 39 \quad 45 \quad 36 \quad 7 \\
\quad\quad \boxed{0} & \quad\ \ \boxed{4} \quad \boxed{3} \quad \boxed{1} \quad \boxed{5}
\end{array} \rightarrow (5, 1, 3, 4, 0)$$

4) Calcular la expresión en base 5 del nº 3.227

$$\begin{array}{l|l}
3227 & 5 \\
\quad 22 & 645 \quad 5 \\
\quad\ \ 27 & \quad 14 \quad 129 \quad 5 \\
\quad\quad \boxed{2} & \quad\ \ 45 \quad 29 \quad 25 \quad 5 \\
 & \quad\quad \boxed{0} \quad \boxed{4} \quad \boxed{0} \quad \boxed{5} \quad 5 \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \boxed{0} \quad \boxed{1}
\end{array} \rightarrow \cancel{(0, 4, 0, 2)}$$

$(1, 0, 0, 4, 0, 2)$

5) Si la expresión de un nº en base 3 es $(1,2,0,1,1)_3$ Calcular la expresión de dicho nuvero en base 8.

El nº es $\cancel{3^3 + 2\cdot 3^2 + 3^1 + 3^1}$

$1\cdot 3^4 + 2\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 1\cdot 3 + 1 = 81 + 54 + 3 + 1$

$(1,2,0,1,1)_3 = 139$

$(139)_8 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 139 & 8 \\ \hline 59 & 17 \;|\; 8 \\ \hline \boxed{3} & \boxed{1} \;|\; \boxed{2} \end{array} \Rightarrow (2,1,3)$$

Ejercicio: Calcular $(2,3,4)_5 + (4,3,3,3)_5$ y $(2,3,4)_5 \cdot (4,3,3,3)_5$

1) $(2,3,4)_5 = 2\cdot 5^2 + 3\cdot 5^1 + 4 =$

2) $\cancel{(2,3,4)_5}$ $(4,3,3,3)_5 = 4\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2 + 3\cdot 5^1 + 3 =$

$$\begin{array}{r} 4333 \\ +\;234 \\ \hline 10122 \end{array} \Rightarrow (2,3,4)_5 + (4,3,3,3)_5 = (10,1,2,2)_5$$

$$\begin{array}{r} 4333 \\ \times\;234 \\ \hline 33442 \\ 24104 \\ +\;14221 \\ \hline 1302132 \end{array} \Rightarrow (2,3,4)_5 \cdot (4,3,3,3)_5 = (2,3,0,2,1,3,2)_5$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio: Calcular $(4,5,6)_7 \cdot (4,5)_7 = (3,1,5,4,2)_7$

$$\begin{array}{r} 456 \\ \times\ 45 \\ \hline 3312 \\ +\ 2523 \\ \hline 31542 \end{array} \Rightarrow$$

* Método para pasar de base B a base una potencia de B

Si la expresión en base 2 de un nº es (1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,1,1)

⇒ Calcular la expresión en base 8 de dicho número

$8 = 2^3$

$$\overbrace{(1,0,1}^{2},\ \overbrace{0,1,1}^{5},\ \overbrace{0,1,1}^{5},\ \overbrace{0,1,1}^{5},\ \overbrace{1,0,1}^{6},\ \overbrace{0,0,0}^{4},\ \overbrace{1,1,1)}^{3}$$

Solución: $(2,5,5,5,6,4,3)_8$

② La expresión en base 3 de un nº es

$(1,2,0,1,1,2,0,1,2,2,1,0,1)$ → Calcular en base 9

$9 = 3^2$ *

$(1, 6, 4, 6, 5, 7, 1)$

③ Si la expresión en base 8 de un nº es 635
Calcular la expresión de dicho nº en base 2

$$\begin{array}{r|l} 635 & 2 \\ 0\ 1\ 3 & 317 \\ 1\ 1 & 158 \\ \boxed{1} & 79 \\ & \boxed{14} \end{array}$$

6 3 5

→ 110 011 101

④ Si la expresión en base 10 de un nº es 15861
Calcular la exp. de dicho nº en base 100 ⇒ 10^2

(1,58,61)

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

⑤ Si la expresión de un nº en base 100 es $(25, 1, 37, 2, 24)$ Calcular la expresión de dicho nº en base 10.

$(2501370224)_{10}$

Ejercicios:

1) Encontrar la base (si existe) entre $(4,1)_B \cdot (1,4)_B = (1,2,2,4)_B$

$$(4,1)_B \cdot (1,4)_B = (1,2,2,4)_B$$

$$(4B+1)\cdot(B+4) = B^3+2B^2+2B+4$$

$$4B^2+17B+4 = B^3+2B^2+2B+4$$

$$B^3-2B^2-15B=0$$

$$B(B^2-2B-15)=0 \rightarrow \underline{B=0} \quad B=B^2-2B-15 \Rightarrow \boxed{B=5} \quad \underline{B=-3}$$

La solución es siempre positiva >0

2) Demostrar que un número escrito en base 10 es múltiplo de 3 si y solamente si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

$(a_n, a_{n-1}, \dots a_1, a_0)_{10}$ es múltiplo de 3 $\Leftrightarrow (a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0)$ ~~es mult 3~~ $\bmod 3 = 0$

$\Leftrightarrow (a_n 10^n \bmod 3 + a_{n-1} 10^{n-1} \bmod 3, \dots$

$+ a_1 \cdot 10 \bmod 3 + a_0 \bmod 3) \bmod 3 = 0$

Vamos a ver qué vale $a_i 10^i \bmod 3 = (a_i \bmod 3 \cdot \underbrace{10 \bmod 3}_{1} \cdot \dots \cdot \underbrace{10 \bmod 3}_{1}) \bmod 3$

$= (a_i \bmod 3) \bmod 3 = a_i \bmod 3$

Por lo tanto $(a_n \bmod 3 + a_{n-1} \bmod 3 + \dots a_1 \bmod + a_0 \bmod 3) \bmod 3 = 0$

$\Leftrightarrow (a_n + a_{n-1} + \dots + a_0) \bmod 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\boxed{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \text{ es mult. } 3}$

Para demostrar que es múltiplo de 9, es exactamente igual, cambiando 3 por 9.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

3) ¿Cuándo un número, escrito en base a, es múltiplo de 4?

$(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)_q$ es múlt. de 4 $\Leftrightarrow (a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0) \bmod 4 = 0$

$\Leftrightarrow (a_n q^n \bmod 4 + a_{n-1} q^{n-1} \bmod 4 + \dots + a_1 q \bmod 4 + a_0 \bmod 4) \bmod 4 = 0 \Leftrightarrow$

$(a_n \bmod 4 + a_{n-1} \bmod 4 + \dots + a_1 \bmod 4 + a_0 \bmod 4) \bmod 4 = 0 \Leftrightarrow$

$(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \bmod 4 = 0 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ es múlt de 4

* 4) ¿Cuántos números hay en el intervalo [1000, 2000] que al expresarlos en base 8, terminan en 12 y que al expresarlos en base 9, terminan en 15.

① $(\dots 12)_8$; ② $(\dots 15)_9$

① $X = a_n 8^n + a_{n-1} 8^{n-1} + \dots + a_2 8^2 + 1 \cdot 8 + 2$

$X \bmod 8^2 = 10$

$\hookrightarrow X \equiv 10 \pmod{64}$

② $X = a_n 9^n + a_{n-1} 9^{n-1} + \dots +$

$X = \bmod 9^2 = 14$

$\hookrightarrow X \equiv 14 \pmod{81}$

$X \equiv 10 \pmod{64}$ $\rightarrow X = 10 + 64K$

$X \equiv 14 \pmod{81}$ $\rightarrow 10 + 64K \equiv 14 \pmod{81}$

$64K \equiv 4 \pmod{81}$

Aplicamos Algor. Ext. Euclides:

$(a_0, a_1) = (81, 64) \overset{q=1}{=} (64, 17) \overset{q=3}{=} (17, 13) \overset{q=1}{=} (13, 4) \overset{q=3}{=} (4, 1) \overset{q=4}{=} (1, 0)$

$(s_0, s_1) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -3) = (-3, 4) = (4, -15) = (-15, -)$

$(t_0, t_1) = (0, 1) = (1, -1) = (-1, 4) = (4, -5) = (-5, 19) = (19, -)$

$81(-15) + 64(19) = 1$

Sabemos por el teorema largo (pto 6) que si $au + bv = 1$ entonces $bu \bmod m$ es una solución de $ax \equiv b \bmod m$

Por tanto $K = 4 \cdot 19 \bmod 81 \rightarrow K = 76 \bmod 81 \Rightarrow K = 76$ es 1 sol.

y por consiguiente, el conjunto de todas sus soluciones es $\{76 + 81\bar{K} \text{ tq } \bar{K} \in \mathbb{Z}\}$

Continuamos el sistema: $X = 10 + 64(76 + 81\bar{K})$

$X = 4874 + 5184\bar{K}$

Por lo tanto, como necesitamos un valor entre [1000, 2000], NO EXISTE

5) Calcular todos los nº naturales que al expresarlos en base 2, terminan en $(\ldots 101)_2$ y al expresarlos en base 3, terminan en $(\ldots 21)_3$

$2 \cdot 3^1 + 1 \cdot$

$6 + 1 = \boxed{7}$

$\cancel{x = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_2 2^2 +}$

$\cancel{x \equiv}$

1) $x \equiv 5 \pmod 8 \rightarrow 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = \underline{5}$ /// $2^3 = \underline{8}$

2) $x \equiv 7 \pmod 9 \rightarrow 2 \cdot 3^1 + 1 = \underline{7}$ /// $3^2 = \underline{9}$

6) Resolver la ecuación diofántica:

$28x - 42y + 49z = 35$

7) ¿Cuántos divisores tiene el nº 10!?

$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$= 2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 =$

$= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$

$\Rightarrow (8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 270^+$

10! Tiene 540 divisores (270^+ y 270)

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

PRÁCTICA 27/10/15

Fecha entrega actividades 13 de Nov: (viernes)
Se puede entregar a Jesús García Miranda.
En pareja, también se defiende.

- Encuentra los sistemas de numeración para los que se verifica:

1 → $3 \times 4 = 22$
2 → $41 \times 14 = 1224$

1) $3_B \cdot 4_B = 22_B$

$3B \cdot 4B = 2B + 2$
$12B = 2B + 2 \longrightarrow 2B = 10$
$\cancel{10B = 2} \longrightarrow \boxed{B = \cancel{5}}$ $\quad \hookrightarrow \boxed{B = 5}$

2) $41_B \cdot 14_B = 1224_B$

$(4B+1)(B+4) = B^3 + 2B^2 + 2B + 4$
$4B^2 + 17B + 4 = B^3 + 2B^2 + 2B + 4$
$B^3 - 2B^2 - 15B = 0$
$B(B^2 - 2B - 15) = 0 \nearrow B = 0$
$B = B^2 - 2B - 15 = \nearrow \boxed{B = 5}$, $\searrow B = -3$

Se coge siempre las soluciones > 0 y natural. !!

Demuestra que un número escrito en base 10 es par si y solo si, su última cifra es par

$(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)_{10}$ es par $\iff (a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0) \bmod 2 = 0$
$\iff$ ~~$(a_n \bmod 2$~~ $(a_n 10^n \bmod 2 + a_{n-1} 10^{n-1} \bmod 2 + \dots + a_1 10 \bmod + a_0 \bmod 2) \bmod 2 = 0$
$\iff (a_n \bmod 2 + a_{n-1} \bmod 2 + \dots + a_1 \bmod 2 + a_0 \bmod 2) \bmod 2 = 0 \iff$
$(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \bmod 2 = 0 \iff a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ es par

No

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

• Demuestra que un número en base 10 es múltiplo de 4 si y solo si, su última cifra más dos veces la penúltima es mult. 4

x es mult 4

$\Leftrightarrow a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv 0 \pmod 4 \Leftrightarrow a_n (10^n \bmod 4) + \dots + a_1 (10 \bmod 4) + a_0 \bmod 4 \equiv 0 \bmod 4$

$\Leftrightarrow 2a_1 + a_0 \equiv \bmod 4 \Leftrightarrow 2a_1 + a_0$ ~~mod~~ es mult. 4

$10^n \equiv 0 \pmod 4 \rightarrow n \geq 2$

• Si $a_n, a_{n-1}, \dots a_1, a_0$ es la expresión decimal de un nº x, entonces x es un múltiplo de 7, si, y solo si, el número $y = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 - 2 \cdot a_0$ es múltiplo de 7.

Pista: Comprueba que $x \equiv 3y \bmod 7$

$y \equiv 0 \pmod 7$

Si $x \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow 3y \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow$ m.c.d $\{3, 7\} \Rightarrow$ ~~$y \equiv$ mod~~ 7

$10^n a_n + \dots + 10 a_1 + a_0 \equiv 3 (a_n 10^{n-1} + \dots + 10 a_2 + a_1 - 2a_0) \bmod 7$

$3^n a_n + \dots + 3a_1 + a_0 \equiv 3 \cdot 3^{n-1} \cdot a_n + \dots + 3 \cdot 3a_2 + 3 \cdot a_1 - 6 a_0 \bmod 7$

$a_0 \equiv -6a_0 \pmod 7 \Leftrightarrow \underline{7a_0 \equiv 0 \bmod 7}$

$\Rightarrow$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Tema 3 → El anillo de los polinomios con coeficiente en un cuerpo.

Un anillo es una terna $(R, +, \cdot)$ donde R es un conjunto y "+" y "·" son dos operaciones verificando las siguientes propiedades:

1) La operación "+" es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro (que denotaremos "0") y todo elemento tiene inverso (Al inverso para la suma de a, lo denotaremos $-a$).
2) La operación "·" es asociativa, tiene elemento neutro (que denotaremos "1") y se verifica la propiedad distributiva.

Si además la operación "·" es conmutativa, diremos que el anillo es conmutativo.

Un cuerpo es un anillo conmutativo en el que todo elemento distinto de "0" tiene inverso para el producto. (Al inverso para el producto de a, lo denotaremos a^{-1})

Nota:

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y <u>no</u> es un cuerpo.
2) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y también un cuerpo
   También es ejemplo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
3) $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y <u>no</u> un cuerpo.
4) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y también un cuerpo.

Proposición:

$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ siempre es un anillo conmutativo, además, es cuerpo, si, y solamente si "n" es primo.

Sea K un cuerpo. El conjunto de los polinomios con coeficiente en el cuerpo K y con la indeterminada x es $K[x] = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ tq $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K\}$

*Proposición:

$K[x]$ es un anillo conmutativo (y <u>NO</u> un cuerpo) con las operaciones suma y producto de polinomios.

Ejercicio:

Sean $a(x) = 3x^2 + 4x + 2$, $b(x) = 3x + 2 \in \underline{\mathbb{Z}_5[x]}$

Calcular $a(x) + b(x)$ y $a(x) \cdot b(x)$

1) $a(x) + b(x) = 3x^2 + 2x + 4$

2) $a(x) \cdot b(x) \Rightarrow 4x^3 + 3x^2 + 4x + 4$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x + 2 \\ 3x + 2 \\ \hline 4x^3 + 2x^2 + x \\ x^2 + 3x + 4 \\ \hline 4x^3 + 3x^2 + 4x + 4 \end{array} \rightarrow a(x) \cdot b(x)$$

Si $a(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ con $a_n \neq 0$ entonces diremos que n es el grado del polinomio $a(x)$ y lo denotaremos $gr(a(x))$.

Por definición diremos que el grado del polinomio "0" es $-\infty$.

PROPOSICIÓN:

$gr(a(x) \cdot b(x)) = gr(a(x)) + gr(b(x))$.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

→ Un elemento a de un anillo R es una unidad si tiene inverso para el producto.

→ Un elemento a de un anillo R diremos que es un divisor de cero si $a \neq 0$ y $\exists\, b \neq 0$ tq $a \cdot b = 0$

Ejercicio:

Calcular las unidades y los divisores de $\mathbb{Z}_6$

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_6) = \{1, 5\}$$
$$DC(\mathbb{Z}_6) = \{2, 3, 4\}$$

NOTA:

~~$\{\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m), DC(\mathbb{Z}_m), \{0\}\}$ es una partición de $\mathbb{Z}_m$~~

En $\mathbb{Z}_m$, los divisores de cero son los elementos que no son ni cero ni unidad.

Ej: Calcular $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$ y $DC(\mathbb{Z})$

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$$
$$DC(\mathbb{Z}) = \emptyset$$

PROPOSICIÓN:

Si K es un cuerpo, entonces $\mathcal{U}(K) = K - \{0\}$ y $DC(K) = \emptyset$

PROPOSICIÓN:

El conjunto de las unidades de $K[x]$ es → $\mathcal{U}(K[x]) = \{a[x] \in K[x] \text{ tq } gr(a(x)) = 0\} = K - \{0\}$

$DC(K[x]) = \emptyset$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Un polinomio $a(x) \in K[x]$ diremos que es irreducible si verifica lo siguiente:

1) $gr(a(x)) \geq 1$

2) Si $a(x) = b(x) \cdot c(x)$ entonces $gr(b(x)) = 0$ ó $gr(c(x)) = 0$

Ejercicio:

¿Es irreducible $x^2+x \in \mathbb{Z}_3[x]$?

No es irreducible, ya que $x^2+x = x(x+1)$

¿Es irreducible $x^3+x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$

Vamos a ver que sí es irreducible. Si no fuese irreducible, sería producto de un polinomio de grado 1 y otro de grado 2.

El conjunto de todos los polinomios de grado 1 de $\mathbb{Z}_2[x]$ es $\{x+1, x\}$ y el conjunto de todos los polinomios de grado 2 de $\mathbb{Z}_2[x]$ es $\{x^2, x^2+1, x^2+x+1, x^2+x\}$

$(x+1)\,x^2$

$(x+1)\,(x^2+1)$

$(x+1)\,(x^2+x+1)$

$\vdots$

Ninguno de esos polinomio nos da el nuestro, por lo tanto es irreducible.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

PROPOSICIÓN:

1) Todo polinomio $K[x]$ de grado 1, es irreducible
2) Si un polinomio de $K[x]$ irreducible lo multiplico por un elemento del cuerpo $\neq 0$ entonces obtenemos otro polinomio irreducible.

Un polinomio diremos que es mónico si el coeficiente del término de mayor grado (llamado coeficiente lider) vale 1.

- Teorema:

Un polinomio $a(x) \in K[x]$ de grado ≥ 1 se puede poner de forma única (salvo reordenaciones) como $a(x) = u P_1^{\alpha_1}(x) \cdot P_2^{\alpha_2}(x) \cdot \ldots \cdot P_r^{\alpha_r}(x)$ donde $u \in K - \{0\}$, $\alpha_1, \ldots \alpha_r \in \mathbb{N}$, y $P_1(x), \ldots, P_r(x)$ son polinomios mónicos e irreducibles.
A esta expresión la llamaremos "la descomposición en irreducibles del polinomio $a(x)$".

Ejercicio:
→ Calcular la descomposición en irreducibles del polinomio $a(x) = (4x+3)(3x+2) \in \mathbb{Z}_7[x]$
Esto es una descomposición en irreducibles del polinomio $a(x)$, pero dicha descomposición no es la descomposición en irreducibles de $a(x)$ porque no son mónicos los polinomios.
$a(x) = 4 \cdot 2 (4x+3) 3 \cdot 5 (3x+2) \Rightarrow \boxed{a(x) = 5(x+6)(x+3)}$

Sea $a(x), b(x) \in K[x]$, diremos que $a(x)$ divide a $b(x)$ y lo denotaremos $a(x) \mid b(x)$ si $\exists\, c(x) \in K[x]$ tq $b(x) = a(x) \cdot c(x)$

Sea $a(x), b(x) \in K[x]$ tq $a(x) \neq 0$ ó $b(x) \neq 0$
Un polinomio $d(x) \in K[x]$ diremos que es un máximo común divisor de $a(x)$ y $b(x)$ si verifica lo siguiente:

1) $d(x) \mid a(x)$ y $d(x) \mid b(x)$
2) si $c(x) \mid a(x)$ y $c(x) \mid b(x) \Rightarrow c(x) \mid d(x)$

NOTA: Si $d(x)$ es un m.c.d $\{a(x), b(x)\}$ entonces también lo es $u\,d(x)$ $\forall u \in K - \{0\}$

Cuando escribamos $m.c.d\{a(x), b(x)\}$ nos referiremos al máximo común divisor de $a(x)$ y $b(x)$ que es mónico.

Así por ejemplo si $a(x)$ y $b(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ y $3x^2+x+1$ es un máximo común divisor de ambos, entonces también lo son: x^2+2x+2, $4x^2+3x+3$, $2x^2+4x+4$ y $m.c.d\{a(x), b(x)\} = x^2+2x+2$.

Sea $a(x), b(x) \in K$. Un polinomio $m(x) \in K[x]$ diremos que es un mínimo común múltiplo de $a(x)$ y $b(x)$ si verifica lo siguiente:

1) $a(x) \mid m(x)$ y $b(x) \mid m(x)$

2) Si $a(x) \mid c(x)$ y $b(x) \mid c(x)$ entonces $m(x) \mid c(x)$

NOTA: Similar a la anterior

- Teorema:

Si $a(x) = u P_1^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot P_r^{\alpha_r}(x)$ y $b(x) = v \cdot P_1^{\beta_1}(x) \cdot \ldots \cdot P_r^{\beta_r}(x)$ con $u, v \in K[x] - \{0\}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots \beta_r \in \mathbb{N}$ y $P_1(x), \ldots, P_r(x)$ polinomios mónicos e irreducibles, entonces:

1) $m.c.d\{a(x), b(x)\} = P_1(x)^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot P_r(x)^{\text{mínimo}\{\alpha_r, \beta_r\}}$

2) $m.c.m\{a(x), b(x)\} = P_1(x)^{\text{máximo}\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot P_r(x)^{\text{máximo}\{\alpha_r, \beta_r\}}$

Ejercicio:

Dados los polinomios $a(x) = (x+1)(2x+3)$ y $b(x) = (x+2)(4x+1)$ de $\mathbb{Z}_5[x]$, calcular el $m.c.d\{a(x), b(x)\}$ y $m.c.m\{a(x), b(x)\}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Solución al ejercicio anterior:

$a(x) = (x+1)(2x+3)$ y $b(x) = (x+2)(4x+1)$ de $\mathbb{Z}_5[x]$

$a(x) = (x+1)2\cdot 3(2x+3) = 2(x+1)(x+4)$
$b(x) = (x+2)4\cdot 4(4x+1) = 4(x+2)(x+4)$

$m.c.d\{a(x), b(x)\} = x+4$
$m.c.m\{a(x), b(x)\} = (x+1)(x+2)(x+4)$

- Propiedad de la división:

Si $a(x), b(x) \in K[x]$ y $b(x) \neq 0$ entonces existen unos únicos $q(x), r(x) \in K[x]$ tales que $a(x) = q(x)\,b(x) + r(x)$ con $gr(r(x)) < gr(b(x))$

A $q(x)$ y $r(x)$ lo llamaremos el cociente y el resto de dividir $a(x)$ entre $b(x)$, y lo denotaremos $a(x)$ div $b(x)$ y $a(x)$ mod $b(x)$.

Ejercicio:
Calcular el cociente y el resto de dividir $3x^3+4x^2+2x+3$ entre $2x+4$ en $\mathbb{Z}_5[x]$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3+4x^2+2x+3 & 2x+4 \\
\cline{2-2}
2x^3+4x^2 & 4x^2+4x+3 \rightarrow q(x) \\
\cline{1-1}
0 \quad 3x^2+2x+3 & \\
\quad\; 2x^2+4x & \\
\cline{1-1}
\quad\; 0 \quad x+3 & \\
\qquad\quad 4x+3 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 0 \quad \boxed{1} \rightarrow r(x) &
\end{array}
$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

- Algoritmo de Euclides

Entrada: $a(x), b(x) \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$ (distintos de cero)

Salida: un m.c.d. de $a(x)$ y $b(x)$.

$(a_0(x), a_1(x)) = (a(x), b(x))$

Mientras $a_1(x) \neq 0$

$(a_0(x), a_1(x)) = (a_1(x), a_0(x) \bmod a_1(x))$

Devuelve $a_0(x)$.

NOTA: Si $d(x)$ es un m.c.d. de $a(x)$ y $b(x)$, entonces $(a(x)b(x)) \bmod d(x) = 0$, y además $(a(x)b(x)) \operatorname{div} d(x)$ es un m.c.m de $a(x)$ y $b(x)$

Ejercicio:

Sea $a(x) = x^4 + x + 1$ y $b(x) = x^2 + 2x + 3$ $\mathbb{Z}_5[x]$

Calcular m.c.d $\{a(x), b(x)\}$ y m.c.m $\{a(x), b(x)\}$.

$(a(x), b(x)) = (x^4 + x + 1, x^2 + 2x + 3) = (x^2 + 2x + 3, 3) = (3, 0)$

Por el alg. de Euclides, 3 es un m.c.d de $a(x), b(x)$, ahora bien, sabemos entonces que $1 \cdot 3, 2 \cdot 3, 3 \cdot 3$ y $4 \cdot 3$ también son m.c.d de $a(x)$ y $b(x)$.

El mónico es $2 \cdot 3 = 1$.

Por lo tanto $\rightarrow$ m.c.d $\{a(x), b(x)\} = 1$.

Como ~~a(x) y b(x)~~ $(a(x)b(x)) \operatorname{div} 1$) es mónico;

m.c.m $\{a(x), b(x)\} = a(x) \cdot b(x)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + x + 1 & x^2 + 2x + 3 \\
\cline{2-2}
4x^4 + 3x^3 + 2x^2 & x^2 + 3x + 1 \\
\hline
3x^3 + 2x^2 + x + 1 & \\
2x^2 + 4x^2 + x & \\
\hline
x^2 + 2x + 1 & \\
4x^2 + 3x + 2 & \\
\hline
\underline{\underline{3}} &
\end{array}
$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Sea $a(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in K[x]$. Un elemento $\alpha \in K$ diremos que es una raíz del polinomio $a(x)$ si $a(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0$

Ejemplo:

Sea $a(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$

$a_0(0) = 2$ $\quad a(2) = 0$ $\quad a(4) = 2$

$a(1) = 1$ $\quad a(3) = 0$

Raíces $= \{2, 3\}$

- Teorema del factor.

Sea $a(x) \in K[x]$ y $\alpha \in K$, entonces α es una raíz de $a(x)$ si y sólo si $x - \alpha \mid a(x)$

→ Corolario:

Un polinomio $a(x) \in K[x]$ es múltiplo de un polinomio de grado 1 si y sólo si el polinomio tiene una raíz.

→ Corolario:

Un polinomio de grado 2 o de grado 3 es irreducible si y solo si no tiene raíces

Ejercicio:

Estudiar la irreducibilidad de los siguientes polinomios en $\mathbb{Z}_3$:

1) $2x+1$ → irreducible, ya que, tiene grado 1.
2) x^2+x+1 → reducible, ya que tiene raíz
3) x^2+x+2 → irreducible, ya que no tiene raíces y es de grado 2
4) x^3+x+1 → irreducible, ya que no tiene raíces y es de grado 3
5) x^4+x+1 → reducible, ya que tiene una raíz y por tanto es producto de un polinomio de grado 1 y de grado 3.
6) x^4+x+2 → No sabemos todavía responder a este tipo de polinomios.

PRÁCTICAS 3/11/15

1. Calcula el cociente y el resto de dividir $2x^4+3x^3+x^2+6x+1$ entre $3x^2+1$ en $\mathbb{Z}_7[x]$ y en $\mathbb{Z}_{10}[x]$.

En $\mathbb{Z}_7$:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4+3x^3+x^2+6x+1 & 3x^2+1 \\ \cline{2-2}
5x^4 \qquad 4x^2 & 3x^2+3x+4 \\ \cline{1-1}
3x^3+5x^2+6x+1 & \\
4x^3 \qquad 6x & \\ \cline{1-1}
5x^2+5x+1 & \\
2x^2 \qquad 3 & \\ \cline{1-1}
0 \quad 5x+4 &
\end{array}
$$

COCIENTE $\rightarrow 3x^2+x+4$

RESTO $\rightarrow 5x+4$

En $\mathbb{Z}_{10}$:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4+3x^3+x^2+6x+1 & 3x^2+1 \\ \cline{2-2}
8x^4 \qquad 6x^2 & 4x^2+x+9 \\ \cline{1-1}
3x^3+7x^2+6x+1 & \\
7x^3 \qquad 9x & \\ \cline{1-1}
7x^2+5x+1 & \\
3x^2 \qquad 9 & \\ \cline{1-1}
5x+2 &
\end{array}
$$

COCIENTE $\rightarrow 4x^2+x+9$

RESTO $\rightarrow 5x+2$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

2. Sean $p(x) = x^4 + 2x^2 + 2x + 1$, $q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ polinomios en $\mathbb{Z}_3[x]$

Sean $r(x) = p(x) \bmod q(x)$ y $s(x) = q(x) \bmod r(x)$

a) - Calcula todos los divisores de $p(x)$ (hay 8, 4 de ellos mónicos) de $q(x)$ (hay 8), de $r(x)$ (hay 6) y de $s(x)$ (hay 4)

b) - Calcula todos los divisores comunes de $p(x)$ y $q(x)$; $q(x)$ y $r(x)$; $r(x)$ y $s(x)$

c) - Calcula el mínimo común múltiplo de $p(x)$ y $q(x)$.

1º Vamos a calcular $r(x) = p(x) \bmod q(x)$ y $s(x) = q(x) \bmod r(x)$

$r(x)$:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 2x^2 + 2x + 1 & x^3 + 2x^2 + x + 2 \\ \hline 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x & x + 1 \\ \hline x^3 + 2x^2 + 1 & \\ 2x^3 + x^2 + 2x + 1 & \\ \hline 2x^2 + 2 & \end{array}$$

$\rightarrow 2x^2 + 2x + 2 \Rightarrow r(x)$.

$s(x)$:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 2x^2 + x + 2 & 2x^2 + 2x + 2 \\ \hline 2x^3 + 2x^2 + 2x & 2x \\ \hline x^2 + 2 & \end{array}$$

$s(x) = 2x + 1$ ~~$s(x) = x^2 + 2$~~

a) Divisores de $p(x)$

Las raíces pueden ser 0, 1, 2.

$p(0) = 1 \rightarrow$ No es raíz

$p(1) = 0 \rightarrow$ es raíz $\rightarrow x + 2$ es divisor de $p(x)$.

$p(2) = 2 \rightarrow$ No es raíz

Dividimos $p(x)$ entre $x + 2 \rightarrow x^3 + x^2 + 2 = p'(x)$

$p(1) = 1 \rightarrow 1$ no es raíz de $x^3 + x^2 + 2$

Sabemos que $p(x) = (x+2)\, p'(x)$

$p'(x)$ no tiene divisores de grado $1 \Rightarrow p'(x)$ es irreducible

Porque si $p'(x) = a(x) \cdot b(x)$, donde $gr(a(x)), gr(b(x)) \geq 1$

Entonces $gr(a(x)) + gr(b(x)) = 3$

Por lo tanto, los divisores son

$\{1, 2, x+2, 2(x+2), x^3 + x^2 + 2, 2(x^3 + x^2 + 2), x^4 + 2x^2 + 2x + 1, 2(x^4 + 2x^2 + 2x + 1)\}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

- Teorema:

Sea $a(x) \in K[x]$:

1) Si el grado de $a(x) \geq 2$ y $a(x)$ tiene una raíz, entonces $a(x)$ es reducible.

2) Si el grado de $a(x)$ es 2 o 3, entonces $a(x)$ es irreducible si y solamente si no tiene raíces.

3) Si el grado de $a(x)$ es 4 o 5 entonces $a(x)$ es irreducible si y solamente si no tiene raíces y además ningún polinomio mónico e irreducible de grado 2 lo divide.

4) Si $a(x)$ tiene grado 6 o 7, entonces $a(x)$ es irreducible si y solamente si no tiene raíces y además no existe ningún polinomio mónico e irreducible de grado 2 o 3 que lo divida

Ejemplo:

¿Es irreducible el polinomio $x^4+x^2+2 \in \mathbb{Z}_3[x]$?

El polinomio NO tiene raíces.

Polinomios mónicos de grado 2:

$x^2+ax+b \rightarrow$ En $\mathbb{Z}_3$ hay 9 diferentes.

$\{\cancel{x^2}, \boxed{x^2+1}, \cancel{x^2+2}, \cancel{x^2+x}, \cancel{x^2+x+1}, \boxed{x^2+x+2}, \cancel{x^2+2x}, \cancel{x^2+2x+1}, \boxed{x^2+2x+2}\}$

Tachamos los reducibles

Los polinomios mónicos e irreducibles grado 2 $= \{x^2+1, x^2+x+2, x^2+2x+2\}$

Ahora dividimos nuestro polinomio entre los tres hallados.

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^2+2 & x^2+1 \\ \hline 2x^4+2x^2 & x^2 \\ \hline 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^4+x^2+2 & x^2+x+2 \\ \hline 2x^4+2x^3+x^2 & x^2+2x \\ \hline 2x^3+2x^2+2 & \\ x^3+x^2+2x & \\ \hline 2x+2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^2+2 & x^2+2x+2 \\ \hline 2x^4+x^3+x^2 & x^2+x \\ \hline x^3+2x^2+2 & \\ 2x^3+x^2+x & \\ \hline x+2 & \end{array}$$

Como no hay ningún polinomio mónico de grado 2 que lo divida, el polinomio x^4+x^2+2 es IRREDUCIBLE.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Ejemplos:

1) ¿Es irreducible el polinomio $x^5+x^4+x^3+2 \in \mathbb{Z}_3[x]$?

- El polinomio no tiene raíces.
- Tenemos que comprobar que ningún mónico irreducible de grado 2 lo divide.

Los polinomios mónicos e irreducibles de grado 2 de $\mathbb{Z}_3[x]$ son $\{x^2+1,\ x^2+x+2,\ x^2+2x+2\}$ (Sacado ej anterior)

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4+x^3+2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} 2x^5 \qquad 2x^3 & x^3+x^2+2 \\ \hline x^4+2 & \\ 2x^4+2x^2 & \\ \hline 2x^2+2 & \\ x^2+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Como el resto da cero, el polinomio $x^5+x^4+x^3+2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ es REDUCIBLE.

- Teorema del resto:

Sea $a(x) \in K[x]$ y $\alpha \in K$, entonces $a(x) \bmod x-\alpha = a(x)$

Ejercicio:

Calcular en $\mathbb{Z}_5[x]$ el resto de dividir $x^{1002}+x^{77}+1$ entre $x+3$

Nos piden $(x^{1002}+x^{77}+1) \bmod (x+3)$

$(x+3) = (x-2)$ en $\mathbb{Z}_5$

$(x^{1002}+x^{77}+1) \bmod (x-2) = 2^{1002}+2^{77}+1$

$2^1=2$
$2^2=4$
$2^3=3$
$2^4=1$

$$\begin{array}{l|l} 1002 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 250 \\ 02 & \end{array} \Rightarrow 1002 = 4\cdot 250+2$$

$2^{1002} = 2^{4\cdot 250+2} = (2^4)^{250}+2^2 = 4$

$$\begin{array}{l|l} 77 & 4 \\ \cline{2-2} 37 & 19 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 77 = 4\cdot 19+1$$

$2^{77} = (2^4)^{19}+2 = 2$

Por lo tanto $2^{1002}+2^{77}+1 = 4+2+1 = 2$

* Multiplicidad de una raíz

Si α es una raíz de $a(x) \in K[x]$, entonces aplicando reiteradamente el teorema del factor obtenemos que $a(x) = (x-\alpha)^m \cdot b(x)$.
Con $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, $b(x) \in K[x]$ y $b(x) \neq 0$.
Al número m lo llamaremos "la multiplicidad de la raíz α", si $m = 1$ diremos que α es una raíz simple y si $m \geq 2$, diremos que α es una raíz múltiple.

- Proposición:
Si $a(x) \in K[x] - \{0\}$ entonces la suma de las multiplicidades de las raíces de $a(x)$ es $\leq$ que el grado de $a(x)$.

- Ejercicio:
Calcular las raíces y sus multiplicidades, del polinomio $x^3 + 2x + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$

Raíces $= \{2, 4\}$, ahora calculemos las multiplicidades de cada una:

- Raíz 2:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 2x + 3 & x - 2 = x + 3 \\ \cline{2-2} 4x^3 + 2x^2 & x^2 + 2x + 1 \\ \hline 2x^2 + 2x + 3 & \\ 3x^2 + 4x & \\ \hline x + 3 & \\ 4x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow x^3 + 2x + 3 = (x-2)(x^2 + 2x + 1)$

No se anula en 2

Por lo tanto, la multiplicidad de la raíz 2 vale 1.

- Raíz 4:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 2x + 3 & x - 4 = x + 1 \\ \cline{2-2} 4x^3 + 4x^2 & x^2 + 4x + 3 \\ \hline 4x^2 + 2x + 3 & \\ x^2 + x & \\ \hline 3x + 3 & \\ 2x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^2 + 4x + 3 & x + 1 \\ \cline{2-2} 4x^2 + 4x & x + 3 \\ \hline 3x + 3 & \\ 2x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow x^3 + 2x + 3 = (x-4)(x^2 + 4x + 3)$

Se anula en 4 (seguimos dividiendo)

$\rightarrow x^3 + 2x + 3 = (x-4)(x-4)(x+3)$
$= (x-4)^2 (x+3)$

No se anula en 4

Por lo tanto, la multiplicidad de la raíz 4 vale 2.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

• Teorema:

Sea α una raíz de $a(x) \in K[x]$ entonces α, una raíz múltiple si y solamente si α es también raíz de $a'(x)$ (donde $a'(x)$ es la derivada de $a(x)$

Ejercicio:

1) Calcular las raíces múltiples del polinomio

$a(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \in \mathbb{R}[x]$

$a'(x) = 3x^2 + 8x + 5$

Vamos a ver donde se anula la derivada.

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-60}}{6} = \frac{-8 \pm 2}{6} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Las raíces de la derivada son $\{-1, -\frac{5}{3}\}$

$a(-1) = 0 \rightarrow$ Raíz múltiple

$a(-\frac{5}{3}) = \frac{-125}{27} + \frac{100}{9} - \frac{27}{3} + 2 \neq 0$

La única raíz múltiple de x^3+4x^2+5x+2 es -1

2) Demuestra que el polinomio $\underbrace{x^{70} - 1}_{a(x)} \in \mathbb{R}[x]$ No tiene raíces múltiples.

$a'(x) = 70x^{69} \rightarrow$ sólo se anula en cero.

El 0 es la única raíz de la derivada, además, $a(0) = -1$, por tanto, $a(x)$ No tiene raíces múltiples.

→ Corolario:

Sea $a(x) \in K[x]$ y $\alpha \in K$ entonces α es una raíz de multiplicidad m del polinomio $a(x)$ si y solamente si $a(\alpha) = 0$, $a'(\alpha) = 0$, $a''(\alpha) = 0, \dots,$ $a^{(m-1)}(\alpha) = 0$ y $a^{(m)}(\alpha) \neq 0$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicios:

1) Calcula las raíces y sus multiplicidades del polinomio

$a(x) = x^3 + 2x + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$

Raíces $= \{2, 4\}$

Vamos a calcular la multiplicidad de la raíz 2.

$a'(x) = 3x^2 + 2$ El 2 es una raíz de multiplicidad 1

$a'(2) = 4 \neq 0$

Vamos a calcular la multiplicidad de la raíz 2

$a'(4) = 0$

$a''(x) = 6x$ El 4 es una raíz de multiplicidad 2.

$a''(4) = 4 \neq 0$

→ Corolario:

Sea $a(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ entonces las raíces multiples de $a(x)$ son justamente las raíces del polinomio m.c.d $\{a(x), a'(x)\}$

Ejercicio:

1) Calcular las raíces multiples del polinomio

$a(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 \in \mathbb{R}[x]$

$(a_0(x), a_1(x)) = (x^4 - 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4,\ 4x^3 + 18x^2 + 26x + 12) =$

$= (4x^3 + 18x^2 + 26x + 12,\ -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}) \simeq$

$\simeq (2x^3 + 9x^2 + 12x + 6,\ x^2 + 3x + 2) =$

$= (\underbrace{x^2 + 3x + 2}, 0)$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

2) Calcular la multiplicidad de lo anterior

La multiplicidad es 2.

Ver explicación en Teorema.

Tiene que ser ≤ grado polinomio.

* Cuerpos finitos

Sea $m(x)$ un polinomio $\in K[x] \setminus \{0\}$, denotaremos por

$K[x]_{m(x)} = \{a(x) \in K[x] \text{ tq } gr(a(x)) < gr(m(x))\}$

El conjunto anterior es un anillo conmutativo con las siguientes operaciones:

$a(x) \oplus b(x) = (a(x) + b(x)) \bmod m(x)$

$a(x) \odot b(x) = (a(x) \cdot b(x)) \bmod m(x)$

Ejemplo:

Calcular $\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+x+1}$

$\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+x+1} = \{0, 1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2\}$

Ahora, calcula $(x+1) \odot (x+2)$

$(x+1) \odot (x+2) = (x^2+2) \bmod (x^2+x+1) = 2x+1$

• Proposición:

Sea $a(x) \in K[x]_{m(x)}$ entonces $a(x)$ es una unidad si y solamente si $m.c.d\{a(x), m(x)\} = 1$.

Ejercicio:

¿Es $x+3$ una unidad de $\mathbb{Z}_5[x]_{x^2+x+1}$?

$(a_0(x), a_1(x)) = (x^2+x+1, x+3) = (x+3, 2) = (2,0)$

2 es un máximo común divisor, por lo tanto: $2\cdot 1, 2\cdot 2, 2\cdot 3, 2\cdot 4$ son también máximos comunes divisores

$2\cdot 3 = 1$ (en $\mathbb{Z}_5$).

$m.c.d.\{x^2+x+1, x+3\} = 1$

Por lo tanto $x+3$ es una unidad.

→ Corolario:

$K[x]_{m(x)}$ es un cuerpo $\iff$ $m(x)$ es irreducible.

• Proposición:

El cardinal de un cuerpo finito es siempre la potencia de un nº primo. Además, si p es un nº primo positivo y $m(x)$ pertenece a $\mathbb{Z}_p[x]$, entonces el cardinal de $\mathbb{Z}_p[x]_{m(x)}$ es $p^{gr(m(x))}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

1) $\mathbb{Z}_5$ → ~~card~~ 5 elementos

2) $\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+x+1}$ es un anillo conmutativo con 9 elementos pero no es un cuerpo porque $m(x)$ no es irreducible.

~~3)~~ Sin embargo: $\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+1}$

3) Dar un cuerpo con 10 elementos.

No hay cuerpo de 10 elementos porque 10 NO es la potencia de un nº primo.

4) Dar un cuerpo con 16 elementos:

$\mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x+1}$. Vamos a ver que es cierto calculando si x^4+x+1 es irreducible:

1º Raíces: no tiene

2º Polinomios mónicos de grado 2.

$\{\cancel{x^2}, \cancel{x^2+1}, \cancel{x^2+x}, x^2+x+1\}$

Tachamos los no irreducibles

x^2+x+1 es el único polinomio mónico e irreducible de grado 2 de $\mathbb{Z}_2[x]$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x+1 & x^2+x+1 \\ \hline & x^2+x \\ \hline 1 & \end{array}$$

→ Resto 1 por lo tanto x^4+x+1 es irreducible.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

- Proposición:

Sea $a(x) \in K[x]_{m(x)}$, si $a(x)\,u(x) + m(x)\,v(x) = 1$ entonces $s(x) \bmod m(x)$ es el inverso para el producto de $a(x)$.

* Algoritmo extendido de Euclides

Entrada: $a(x), b(x) \in K[x] \setminus \{0\}$

Salida: $s(x), t(x), d(x) \in K[x]$ tq $d(x)$ es un m.c.d de $a(x)$ y $b(x)$, y $a(x)s(x) + b(x)t(x) = d(x)$.

$(a_0(x), a_1(x)) = (a(x), b(x))$

$(s_0(x), s_1(x)) = (1, 0)$

$(t_0(x), t_1(x)) = (0, 1)$

Mientras $a_1(x) \neq 0$

$q(x) = a_0(x) \operatorname{div} a_1(x)$

$(a_0(x), a_1(x)) = (a_1(x), a_0(x) - a_1(x) \cdot q(x))$

$(s_0(x), s_1(x)) = (s_1(x), s_0(x) - s_1(x)\, q(x))$

$(t_0(x), t_1(x)) = (t_1(x), t_0(x) - t_1(x)\, q(x))$

Devuelve $d(x) = a_0(x)$, $s(x) = s_0(x)$ y $t(x) = t_0(x)$

Ejercicio: Calcular el inverso para el producto de $x+3$ en $\mathbb{Z}_5[x]_{x^2+x+1}$

Por un ejercicio anterior, sabemos que m.c.d $\{x^2+x+1, x+3\} = 1$ por tanto existe $(x+3)^{-1}$

$(a_0(x), a_1(x)) = (x^2+x+1, x+3) \overset{q(x)=x+3}{=} (x+3, 2) = (2, 0)$

$(s_0(x), s_1(x)) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -)$

$(t_0(x), t_1(x)) = (0, 1) = (1, \underset{-x-3}{4x+2}) = (4x+2, -)$

$(x^2+x+1) \cdot 1 + (x+3)(4x+2) = 2$ multiplico por 3

$(x^2+x+1) \cdot 3 + (x+3)(2x+1) = 1$

$(x+3)^{-1} = (2x+1) \bmod (x^2+x+1) = 2x+1$

→ Comprobación: Si el ejercicio está bien,

$(x+3) \circ (2x+1) = 1$

$\Rightarrow (x+3)(2x+1) \bmod (x^2+x+1) =$

$(2x^2+2x+3) \bmod (x^2+x+1) = \underline{\underline{1}}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

PRÁCTICAS 10/11/15

Continuación ejercicio anterior sesión.

$p(x) = x^4 + 2x^2 + 2x + 1$ $\quad r(x) = 2x^2 + 2x + 2$ en $\mathbb{Z}_3[x]$

$q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ $\quad s(x) = \cancel{2(x+1)}$ $2x+1$

a) Ya tenemos los divisores de $p(x)$, vamos con los demás.

- Divisores de $q(x)$:

¿Tiene raíces?

$q(0) = 2$

$q(1) = 0 \rightarrow x-1 = x+2$ divide a $q(x)$.

$q(2) = 2$

Dividimos $q(x)$ entre $x+2 \rightarrow$ cociente x^2+1

$\Rightarrow q(x) = (x^2+1)(x+2)$

Volvemos a comprobar si 1 es raíz de $q(x)$:

$q(1) \neq 0 \rightarrow x^2+1$ es irreducible.

Por lo tanto, los divisores de $q(x) =$

$\{1, 2, x+2, 2(x+2) = 2x+1, x^2+1, 2x^2+2, \ldots\}$

Grado 0: 1, 2

Grado 1: $x+2$, $2(x+2) = 2x+1$

Grado 2: x^2+1, $2(x^2+1) = 2x^2+2$

Grado 3: $q(x)$, $2q(x)$

- Divisores de $r(x)$

1 es la única raíz. $\Rightarrow x+2$ divide a $r(x) \Rightarrow$ 1 es raíz doble

$r(x) = 2(x+2)^2$

Por lo tanto sus divisores son:

Grado 0: 1, 2

Grado 1: $x+2$, $2x+1$

Grado 2: $r(x)$, $2r(x)$

• Divisores de $s(x)$:

Grado 0: 1, 2
Grado 1: $s(x)$, $2\,s(x)$

b) Calcula todos los divisores comunes de $p(x)$ y $q(x)$; $q(x)$ y $r(x)$; $r(x)$ y $s(x)$.

•) Divisores comunes $p(x)$ y $q(x)$

Grado 0: 1, 2
1: $x+2$, $2x+1$

•) Divisores comunes $q(x)$ y $r(x)$

Grado 0: 1, 2
1: $x+2$, $2x+1$

• Divisores comunes $r(x)$ y $s(x)$

Grado 0: 1, 2
1: $x+2$, $2x+1$

Ejercicio: Calcular el resto de dividir en $\mathbb{Z}_7[x]$

1. x^7+x^2+1 entre $x-1$
2. x^n+1 entre $x-1$

1)

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^7} + x^2 + 1 & x-1 \\
\hline
6x^7 + 6x^6 & x^6 + 6x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 6x^2 \\
\hline
6x^6 + x^2 + 1 & \\
x^6 + 6x^5 & \\
\hline
6x^5 + x^2 + 1 & \\
x^5 + 6x^4 & \\
\hline
6x^4 + x^2 + 1 & \\
x^4 + 6x^3 & \\
\hline
6x^3 + x^2 + 1 & \\
x^3 + 6x^2 & \\
\hline
1 & \text{Resto} \rightarrow \cancel{1}\ 3
\end{array}
$$

$x^n+1 = q(x)(x-1) + r(x)$

~~$x^n+1 = (x^{n-1}-1)(x-1) + r(x)$~~

~~$x^n = x^n$~~

Teorema del resto:

$1^7 + 1^2 + 1 \Rightarrow 3$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

2) ~~$x^n+1 = q(x)\cdot(x-1) + r(x)$ en $\mathbb{Z}_2[x]$~~

$x^n + 1$ entre $x-1$

$a(x) \bmod (x-\alpha) = a(\alpha)$

$a(x) \in K[x]$, $\alpha \in K$

$1^n + 1 = 1+1 = 2.$

Ejercicio:

Sea $A = \mathbb{Z}_2[x]_{x^3+1}$ → nº elementos $\mathbb{Z}_p[x]_{m(x)} \to p^{gr(m(x))}$

1. Calcular las unidades de A y dar, en su caso, su inverso.
   ¿Es la suma de dos unidades una unidad? ¿y el producto?
2. Calcula los divisores ~~cero~~ de cero. Para cada uno de ellos, encuentra un elemento no nulo de A que al multiplicarlo por él de cero. ¿Es la suma de dos divisores de cero un divisor de cero? ¿y el producto?

1) Posibles raíces: $0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x+1, x^2+x$

Unidades: $\{1, x, x^2\}$

Inverso de 1: 1

x : x^2 porque $x \cdot x^2 = x^3 \bmod x^3+1 = 1$

x^2 : x

La suma de dos unidades no tiene porqué ser una unidad: Ejemplo → x y 1 son unidades pero $x+1$ no lo es.

El producto de dos unidades es siempre una unidad.

Demostración:

Si $P(x)$, $Q(x)$ son unidades en $K[x]$, entonces, si $P'(x)$ es el inverso de $P(x)$ y si $Q'(x)$ es el inverso de $Q(x)$, entonces $P'(x)\cdot Q'(x)$ es el inverso de $P(x)\cdot Q(x)$.

$P(x)\cdot Q(x)\cdot Q'(x)\cdot P'(x) = P(x)\cdot P'(x) = 1$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

2) $(x+1)(x^2+x+1) = x^3+1 \mod x^3+1 = \underline{0}$

Divisores de cero: $\{0, x+1, x^2+x, x^2+1, x^2+x+1\}$

- Para x^2+x, se cumple que $(x^2+x)(x^2+x+1) = x(x+1)(x^2+x+1)$
  $= x(x^3+1) \mod x^3+1 = 0$
- Para x^2+1, $\rightarrow (x^2+1)(x^2+x+1) = (x+1)^2(x^2+x+1)$
  $= (x+1)(x^3+1) \mod x^3+1 = 0$
- Para x^2+x+1, $\rightarrow (x^2+x+1)(x+1)$

La suma de dos divisores de cero no tiene porqué ser divisor de cero:

x^2+x+1, $x+1$ son divisores de cero pero $x^2+x+1+x+1 = x^2$ que es una unidad, y por tanto no es un divisor de cero.

El producto de dos divisores de cero NO es divisor de cero:

$x+1$, x^2+x+1 son divisores de cero:

pero $(x+1)(x^2+x+1)$ NO es divisor de cero.

porque $= 0$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Ejercicios

1) Calcular la descomposición en irreducibles del polinomio $x^5+x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. ¿Es $\mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x+1}$ un cuerpo?

→ 1º Se buscan las posibles raíces, NO tiene raíces.

→ 2º Buscar mónico de grado 2 que lo divida:

Por un ejercicio anterior, sabemos que x^2+x+1 es el único polinomio mónico e irreducible de grado 2 de $\mathbb{Z}_2[x]$

→ 3º Dividimos x^5+x+1 entre x^2+x+1. Si el resto es distinto de cero, el polinomio x^5+x+1 es irreducible.

$$\begin{array}{l|l} x^5 \qquad\quad +x+1 & x^2+x+1 \\ \hline x^5+x^4+x^3 & x^3+x^2+1 \\ \hline x^4+x^3+x+1 & \\ \hline x^2+x+1 & \\ x^2+x+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$(x^5+x+1) = \underbrace{\underbrace{(x^2+x+1)}_{\text{IRREDUCIBLE}}\underbrace{(x^3+x+1)}_{\text{IRREDUCIBLE}}}_{\text{DESCOMPOSICIÓN EN IRREDUCIBLES.}}$$

→ ¿Es $\mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x+1}$ un cuerpo?

No es cuerpo ya que x^5+x+1 NO es irreducible, $\mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x+1}$ es un anillo conmutativo y tiene cardinal $2^5=32$

→ ¿Es $x+1$ una unidad de ese anillo?

$m.c.d\{x^5+x+1, x+1\}=1$

$x+1$ es una unidad ya que $m.c.d\{x^5+x+1, x+1\}=1$.

Lo hemos visto rápidamente, observando las descomposiciones en irreducibles.

→ Calcular $(x+1)^{-1}$

Aplicamos Algor. Ext. Euclides.

$$(a_0(x), a_1(x)) = (x^5+x+1, x+1) \overset{q_1 = x^4+x^3+x^2+x}{=} (x+1, 1) = (1, 0)$$
$$(s_0(x), s_1(x)) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -)$$
$$(t_0(x), t_1(x)) = (0, 1) = (1, x^4+x^3+x^2+x) = (x^4+x^3+x^2+x, -)$$

$$(x^5+x+1)\cdot 1 + (x+1)(x^4+x^3+x^2+x) = 1$$

$$(x+1)^{-1} = (x^4+x^3+x^2+x) \bmod (x^5+x+1) = x^4+x^3+x^2+x$$

→ ¿Tiene $\mathbb{Z}_2[x]_{x^5+x+1}$ divisores de cero? En caso afirmativo, da uno.

Como $(x^2+x+1)\circ(x^3+x^2+1)$ vale cero

[NOTA: En $K[x]_{m(x)}$, los divisores de cero, son los elementos de $K[x]$ que no son cero ni unidad.

2) Resuelve en $\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+x+2}$ la ecuación $(2x+1)Y + x+2 = 2x$.

$$(2x+1)Y + x+2 = 2x$$
$$(2x+1)\ Y = x+1$$
$$Y = (2x+1)^{-1}(x+1)$$

Para calcular $(2x+1)^{-1}$ aplicamos algoritmo ext. Euclides.

$$(a_0(x), a_1(x)) = (x^2+x+2, 2x+1) \overset{q(x)=}{=} (2x+1, 1) = (1, 0)$$
$$(s_0(x), s_1(x)) = (1, 0) = (0, 1) = (1, -)$$
$$(t_0(x), t_1(x)) = (0, 1) = (1, x+2) = (x+2, -)$$

↳ $(x^2+x+2)\cdot 1 + (2x+1)(x+2) = 1$

$(2x+1)^{-1} = x+2$, Por lo tanto:

$$Y = (x+2)\cdot(x+1) = (x^2+2) \bmod (x^2+x+2) = \underline{\underline{2x}}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

3) ¿Existen cuerpos de cardinal 343? En caso afirmativo, da uno.

Un cardenal de un cuerpo es siempre la potencia de un primo, además $\mathbb{Z}_p[x]_{m(x)}$ tiene $p^{gr(m(x))}$ elementos.

Como $343 = 7^3$, entonces 343 es la potencia de un primo y por tanto, existen cuerpos de cardinal 343.

Vamos a dar ahora un ejemplo:

$\mathbb{Z}_7[x]_{x^3+x+1}$ es un cuerpo porque x^3+x+1 es irreducible.

x^3+ax^2+bx+c

4) Calcula las raíces y sus multiplicidades del polinomio $a(x) = x^4+3x^2+1 \in \mathbb{Z}_5[x]$

Raíces $= \{1, 4\}$

$a'(x) = 4x^3 + x'$

$a'(1) = 0$

$a''(x) = 2x^2+1$

$a''(1) = 3 \neq 0 \rightarrow$ El 1 es raíz de multiplicidad 2

$a'(4) = 0$
$a''(4) = 3 \neq 0$ $\rightarrow$ El 4 es raíz de multiplicidad 2.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Tema 4 → MATRICES CON COEFICIENTE EN UN CUERPO

Sean ~~la matriz~~ los conjuntos $I = \{1, 2, \dots m\}$ y $J = \{1, 2, \dots, n\}$, una matriz de orden $m \times n$ con coeficientes en un cuerpo K es una aplicación $A: I \times J \longrightarrow K$

$$(i, j) \longrightarrow a_{ij}$$

Normalmente a la aplicación A se le representa de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Y diremos que la matriz tiene m filas y n columnas.

Denotaremos así: $M_{m \times n}(K)$ al conjunto formado por todas las matrices de orden $m \times n$ y con coeficiente en K

Ejemplo: $M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\# M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_2) = 2^6 = 64$

* Suma de matrices

Si $A, B \in M_{m\times n}(K)$, entonces $A + B \in M_{m \times n}(K)$, además el elemento que ocupa la posición (i,j) en la matriz $A+B$ es $a_{ij} + b_{ij}$ donde a_{ij} y b_{ij} son los elementos que ocupan la posición (i,j) en las matrices A y B respectivamente.

- Proposición:
  $M_{m\times n}(K)$ con la operación suma es un grupo ABELIANO (o conmutativo), es decir, la operación suma de matrices es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y tiene elemento inverso.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Ejercicio:

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$

a) Calcular $A+B$

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) ¿Quién es el elemento neutro de $M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$

La matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) ¿Quién es el inverso de A?

$$-A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

* Producto de matrices

Si $A \in M_{n\times m}(K)$ y $B \in M_{m\times p}(K)$ entonces $A\cdot B \in M_{n\times p}(K)$. Además, si $(a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{im})$ es la fila i de la matriz A y $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna j de la matriz B entonces, el elemento que ocupa la posición (ij) en la matriz $A\cdot B$ es

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + a_{i3}\cdot b_{3j}.$$

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4}$, $\in \mathbb{Z}_7$

Calcular $A\cdot B$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Una matriz de orden $n \times n$ diremos que es una matriz cuadrada de orden n

- Proposición:

$(M_{n\times n}[K], +, \cdot)$ es un anillo (no conmutativo), además el elemento neutro del producto es la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{MATRIZ IDENTIDAD de orden } n$$

La denotaremos I_n

Ejercicio:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Q}$

Comprobar que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 6 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

* Determinantes

Dada una matriz cuadrada A, definimos el determinante de A, que lo denotaremos: $|A|$ ó $\det(A)$:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

Calcular los determinantes de las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ cuyos coeficientes están en $\mathbb{Z}_5$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 + 4 - 2 - 4 - 2 = 1$$

Sea la matriz $A \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$

denotaremos por A_{ij} a la matriz que se obtiene a partir de la matriz A quitándole la fila i y la columna j

Llamaremos adjunto del elemento a_{ij} a $(-1)^{1+i} |A_{ij}|$ y lo denotaremos α_{ij}

* Desarrollo de Laplace

Sea A una matriz cuadrada $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$

1) Desarrollo por la fila i:

$$|A| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}\alpha_{in}$$

2) Desarrollo por la columna j:

$$|A| = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \ldots + a_{nj}\alpha_{nj}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejemplo:

Calcular el siguiente determinante cuyos coeficientes están en $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 4(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= 5\,(4+2+6-6-6-6) + 3 \cdot (2+6+3-8-9-12) =$$

$$= 5 + 3 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ Si A es una matriz de orden $n \times n$ $[M_{n \times m}(K)]$

entonces llamaremos matriz traspuesta de A, a:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(K)$$

Una matriz cuadrada, diremos que es simétrica si coincide con su traspuesta.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

* Propiedades de los determinantes

Sea A una matriz cuadrada, $A \in M_{n \times n}(K)$:

1) $|A| = |A^t|$

2) Si intercambiamos dos filas (o dos columnas) de la matriz A, obtenemos una nueva matriz cuyo determinante es $-|A|$

3) Si multiplicamos todos los elementos de una fila (o de una columna) de la matriz A por $\alpha \in K$ obtenemos una nueva matriz cuyo determinante es $\alpha \cdot |A|$

4) Si a una fila de la matriz A le sumamos otra fila multiplicada por un elemento de K entonces obtenemos una nueva matriz cuyo determinante coincide con el determinante de la matriz A. (Lo mismo ocurre si hacemos esta operación por columnas).

5) Si $B \in M_{n \times n}(K)$ entonces, el determinante

$|A \cdot B| = |A|\,|B|$

Ejercicio:

Calcular el siguiente determinante cuyos coeficientes están en $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1)^2 \cdot 4(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(2+0+2-2-0-2) = \underline{\underline{0}}$$

Una matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}(K)$ diremos que es regular si tiene inversa para el producto, es decir, si existe $B \in M_{n\times n}(K)$ tq $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ (I_n = Matriz Identidad). En dicho caso, a la matriz B la denotaremos por A^{-1}. La matriz adjunta de A es la matriz $\bar{A}$

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{22} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}$$

NOTA: α_{ij} es el adjunto de A_{ij}.

* Teorema

Sea A una matriz cuadrada, $A \in M_{n\times n}(K)$, entonces A es regular $\Longleftrightarrow$ el determinante de A es distinto de cero. Además en dicho caso, $A^{-1} = |A|^{-1} (\bar{A})^t$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejemplo:

Calcular la inversa, si existe, de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

$|A| = -1 - 1 = 3$ Como es $\neq 0$, tiene inversa.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{A})^{t} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = 2\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = I_n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Prácticas 17/11/15

•) ¿Cuántos elementos tiene $\mathbb{Z}_3[x]_{x^4+x^2+x+1}$?
¿Cuántos de ellos tienen inverso?

$3^4 = \cancel{729}$ elementos. $(3^{gra(\cancel{729})})$
$\cancel{243}$
81

solución:

1º Comprobar si x^4+x^2+x+1 es irreducible

- No tiene raíces
- Calcular los polinomios de grado dos irreducibles
  $\{x^2+1, x^2+2, \ldots\}$
  Los irreducibles son $\{x^2+1, x^2+x+2, x^2+2x+2\}$
- Comprobar si cada uno de los irreducibles divide al polinomio x^4+x^2+x+1.
  Ninguno lo divide.

Por lo tanto x^4+x^2+x+1 es irreducible y por consiguiente, todos los elementos de $\mathbb{Z}_3[x]_{x^4+x^2+x+1}$ son unidades.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Ejercicios

1) Calcular la inversa de la siguiente matriz. $A^{-1} = |A|^{-1} (\bar{A})^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$$

$|A| = 4 - 2 = 2$ Como $|A| \neq 0$ tiene inversa.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{A})^t = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4 \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Sean A y B dos matrices $\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tq $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A-B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Calcular $A^2 - B^2$

$$2A = A+B+A-B \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Para qué valores de x es la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$ regular.

$|A| =$

La matriz será regular para aquellos valores de x en los que el det sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 2 \end{vmatrix} = \cancel{3x - 4x - 4}$$

$$= \cancel{3 + x - 2 + x - 1 = 2}$$

$$= 2x + 4$$

$$2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = 2^{-1} \cdot 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

La matriz es regular $\Leftrightarrow x \neq 3$, $x = 0, 1, 2, 4$

4) ~~La sigui~~ Resuelve la siguiente ecuación en $M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

5) ¿Qué cardinal tiene el conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{Z}_p)$?

$p^{m\cdot n}$

6) Dar un ejemplo de anillo no conmutativo con 512 elementos.

$M_{n\times n}(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow$

$p^{n\times n} = 512 \rightarrow 2^{3\times 3} = 512$

7) Encuentra una matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)$ tq $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pero $A^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Tema 5: Espacios Vectoriales

Sea K un cuerpo, diremos que un conjunto V tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo K, si verifica lo siguiente:

1) En V hay una operación $+$ de forma que $(V, +)$ es un grupo abeliano (es decir, la operación $+$ es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro e inverso). Denotaremos $\vec{0}$ al elemento neutro y $-\vec{v}$ al inverso de $\vec{v}$

2) Existe una aplicación $\begin{array}{l} K \times V \longrightarrow V \\ (a, \vec{v}) \longrightarrow a\vec{v} \end{array}$ verificando lo siguiente:

   i) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ $\forall a \in K$ y $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$
   ii) $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ $\forall a, b \in K$ y $\forall \vec{u} \in V$
   iii) $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$ $\forall a, b \in K$ y $\forall \vec{u} \in V$
   iv) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ $\forall \vec{u} \in V$

→ A los elementos ~~elementos~~ del conjunto V los llamaremos "vectores", a los elementos de K los llamaremos "escalares" y a la aplicación $K \times V \longrightarrow V$ diremos que es un producto por escalares

Ejemplos:

1) Si K es un cuerpo y n es un entero positivo, entonces K^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo K definiendo la suma

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

y el producto de escalares:

$$a(a_1, a_2, a_3, \dots) = (aa_1, aa_2, aa_3, \dots)$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

2) Si K es un cuerpo y m y n son enteros positivos entonces $M_{m \times n}(K) \Rightarrow$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo K con la operación suma de matrices y con productos por escalares

$$a \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} & a \cdot a_{12} & \dots & a \cdot a_{1n} \\ a \cdot a_{21} & a \cdot a_{22} & \dots & a \cdot a_{n} \\ \vdots & & & \\ a \cdot a_{m1} & a \cdot a_{m2} & \dots & a \cdot a_{m \cdot n} \end{pmatrix}$$

3) Si K es un cuerpo y n es un entero positivo, entonces $K[x]_n = \{a(x) \in K[x] \text{ tq } gr(a(x)) \leq n\}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo K con la operación ~~grad~~ suma de polinomios y con producto por escalares

$$a \cdot (a_n x^n + \dots a_1 x + a_0) = a \cdot a_n x^n + \dots a \cdot a_1 x + a \cdot a_0$$

Vamos a tratar fundamentalmente los del conjunto 1)

- Propiedades

1) $0 \cdot \vec{u} = \vec{0} \quad \forall \vec{u} \in V$

2) $a \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad \forall a \in K$

3) Si $a \cdot \vec{u} = \vec{0}$ entonces $a = 0$ ó $\vec{u} = \vec{0}$

4) $-(a \cdot \vec{u}) = (-a)\vec{u} = a(-\vec{u})$

5) $a(\vec{u} - \vec{v}) = a\vec{u} - a \cdot \vec{v}$

6) $(a-b)\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{u}$

7) Si $a\vec{u} = a \cdot \vec{v}$ y $a \neq 0$ entonces $\vec{u} = \vec{v}$

8) Si $a \cdot \vec{u} = b\vec{u}$ y $\vec{u} \neq \vec{0}$ entonces $a = b$

* NOTA: En adelante V denotará un espacio vectorial sobre el cuerpo K

→ Un subconjunto no vacío U de V diremos que es un subespacio vectorial de V si verifica lo siguiente:

1) Si $\vec{u}$ y $\vec{v} \in U$ entonces $\vec{u} - \vec{v} \in U$

2) Si $a \in K$ y $\vec{u} \in U$ entonces $a\vec{u} \in U$

* NOTA: Los subespacios vectoriales de V son también espacios vectoriales sobre el cuerpo K

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

1) Dar un espacio vectorial de cardinal 81

$81 = 3^4$ $\rightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$

$\rightarrow \mathbb{Z}_3^4 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

$\rightarrow \mathbb{Z}_3[x]_3$

2) Demostrar que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \text{ tq } x + y + z = 0\}$ es un subespacio vectorial $\mathbb{Q}^3$.

$(0,0,0) \in U$ $\quad (1,2,3) \notin U$

$(1,-1,0) \in U$

1) $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in U$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3) \in U$

$= (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)$

$x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 - y_3 = \underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{0} - \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3)}_{0} = 0 \in U$

2) $(x, y, z) \in U$ y $a \in K$

$a(x, y, z) = (ax, ay, az)$

$ax + ay + az = a\underbrace{(x, y, z)}_{0} \rightarrow a \cdot 0 = 0 \in U$

3) Encuentra todos los elementos de $U = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_3^2 \text{ tq } x + y = 0\}$

$\mathbb{Z}_3^2$ es un espacio vectorial de cardinal 9

Si procedemos como en el ejercicio anterior, veríamos que U es un espacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^2$.

$U = \{(0,0), (1,2), (2,1)\}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

- Proposición:

La intersección de subespacios vectoriales de V es también un subespacio vectorial de V.

Sea S un subconjunto no vacío de V. El subespacio vectorial de V generado por S es la intersección de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a S. A dicho subespacio, lo denotaremos $\langle S \rangle$.

NOTA: $\langle S \rangle$ es el menor (con el orden inclusión) subespacio vectorial de V que contiene a S

- Proposición:

si $S = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$, entonces $\langle S \rangle = \{a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} + \dots + a_n\vec{u_n}$ tq $a_1, a_2, \dots, a_n \in K\}$.

Ejercicio:

Calcular todos los elementos del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_2^3$ generado por $\{(1,1,0), (0,1,1)\} = V$

Nos piden calcular $\langle \{(1,1,0), (0,1,1)\} \rangle = \{a(1,1,0) + b(0,1,1)$ tq $a, b \in \mathbb{Z}_2\}$

$a=0 \quad b=0$; $a=0 \quad b=1$; $a=1 \quad b=0$; $a=1 \quad b=1$

$\langle V \rangle = \{(0,0,0), (0,1,1), (1,1,0), (1,0,1)\}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Sea $U_1, U_2, \dots, U_n$ subespacios vectoriales de V, llamaremos subespacio vectorial suma de todos ellos a $U_1 + U_2 + \dots + U_n = \{\vec{u_1} + \vec{u_2} + \dots \vec{u_n}$ tq $\vec{u_1} \in U_1, \vec{u_2} \in U_2, \dots \vec{u_n} \in U_n\}$

- Proposición

1) $U_1 + U_2 + \dots + U_n = \langle U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n \rangle$ unión

2) Si $U_1 = \langle S_1 \rangle, U_2 = \langle S_2 \rangle, \dots, U_n = \langle S_n \rangle$ entonces $U_1 + U_2 + \dots + U_n = \langle S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n \rangle$

Ejercicio:

Sean U_1 y U_2 los subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_3^3$ generados por $V = \{(1,2,0\}$ y $S = \{(0,1,2)\}$ respectivamente. Calcular todos los elementos de $U_1 + U_2$.

Sabemos que $U_1 = \langle \{(1,2,0\} \rangle$ y $U_2 = \langle \{(0,1,2)\} \rangle$
Por tanto aplicando el punto dos de la proposición anterior, tenemos que $U_1 + U_2 = \langle \{(1,2,0), (0,1,2)\} \rangle$
Por consiguiente $U_1 + U_2 = \{a(1,2,0) + b(0,1,2)$ tq $a, b \in \mathbb{Z}_3\}$

$U_1 + U_2 = \{(0,0,0), (0,1,2), (0,2,1), (1,2,0), (1,0,2), (1,1,1), (2,1,0), (2,2,2), (2,0,1)\}$

Dando valores 0, 1, 2 a "a" y "b"

Sean U y W subespacios vectoriales de V, diremos que V es suma directa de U y W (y lo denotaremos $V = U \oplus W$) si todo vector de V se puede poner de forma única como suma de un vector de U y otro de W. En dicho caso diremos que los subespacios vectoriales U y W son complementarios.

- Proposición:

$V = U \oplus W \iff$ se verifican las siguientes condiciones:

1) $V = U + W$
2) en $U \cap W = \{\vec{0}\}$

Ejercicio:

Sea $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x+y=0\}$ y $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x-y=0\}$. Demostrar que $\mathbb{R}^2$ es la suma directa de U y W: $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

Para la demostración vamos a utilizar la proposición anterior:

1) $\mathbb{R}^2 = U + W$: debemos probar que todo vector de $\mathbb{R}^2$ se puede poner como suma de un vector de U y un vector de W.

Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x,y) = \underbrace{\left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)}_{\in U} + \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in W}$

2) $U \cap W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x+y=0,\ x-y=0\}$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\} x=0 \Rightarrow y=0$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$ es linealmente dependiente si existe $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n \setminus \{(0,0,\dots,0)\}$ tq $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$

En caso contrario, diremos que el conjunto de vectores es linealmente independiente.

Ejercicio:

¿Son los vectores $(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ linealmente independiente?

$a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,0,1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (a+c, a+b, b+c) = (0,0,0) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} a+c=0 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} c-b=0 \\ b+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{c=0} \rightarrow \boxed{b=0} \rightarrow \boxed{a=0}$$

Los vectores son L.I.

¿Son los vectores $(2,3,4)$ y $(4,1,3)$ de $\mathbb{Z}_5^3$ L.I?

$a(2,3,4) + b(4,1,3) = (0,0,0)$

$(2a+4b, 3a+b, 4a+3b) = (0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} 2a+4b=0 \\ 3a+b=0 \\ 4a+3b=0 \end{array}\right\} \rightarrow b = 2a \quad \left\{\begin{array}{l} 2a+4\cdot(2a)=0 \\ 2a+3a=0 \\ 0a=0 \end{array}\right.$$

$\boxed{\cancel{a=0}}$

$b = 2a$

$4b = 0$

$\boxed{\cancel{b=0}}$

Tiene 5 sol.

L.D

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

PRÁCTICAS 28/11/15

Ejercicios con matrices:

1) Prueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$ satisface una ecuación de la forma $A^2 + \alpha A + \beta Id = 0$ $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$?
Utiliza este hecho para ver que A es regular y calcula su inversa.

$$A^2 + \alpha A + \beta Id = 0$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 2\alpha & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -5 \\ 2\alpha &= -4 \\ 2\alpha &= -4 \\ \alpha + \beta &= -5 \end{aligned} \quad \Bigg\| \quad \begin{aligned} \alpha + \beta &= -5 \\ 2\alpha &= -4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha = -2}$$

$$\boxed{\beta = -3}$$

Sabemos que

$$A^2 - 2A - 3Id = 0 \Rightarrow A^2 - 2A = 3Id \Rightarrow \frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A = Id$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}Id\right) = Id \Rightarrow$$ A es regular y $A^{-1} = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}Id$.

$$\Rightarrow \det A \cdot \det\left(\frac{1}{3}A - \frac{3}{2}Id\right) = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

* Proposición

1) S es un conjunto de vectores linealmente dependiente si y solo si existe $\vec{v} \in S$ tq $\vec{v} \in \langle S \setminus \{\vec{v}\} \rangle$

2) Cualquier conjunto de vectores que contenga al vector $\vec{0}$ es linealmente dependiente.

3) Si un conjunto de vectores linealmente dependiente le añadimos un vector, obtenemos un nuevo conjunto de vectores L.D.

4) Si un conjunto de vectores linealmente independiente, le quitamos un vector, obtenemos, un nuevo conjunto de vectores linealmente independiente.

* Base

Un subconjunto no vacío B de V diremos que es una base de V si verifica lo siguiente:

1) $V = \langle B \rangle$
2) B es L.I.

* Proposición

Si $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_n}\}$ es una base de V y $\vec{v} \in V$ entonces existe una única n-tupla $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$ tq $\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \dots + a_n\vec{v_n}$.

Al n-tupla $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ se le llama las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de la base B, y lo denotaremos

$\vec{v} \equiv_B (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Ejercicio:

Dada la base $B = \{(1,2),(1,3)\}$ de $\mathbb{Z}_5^2$, calcular las coordenadas del vector $(2,4)$ respecto de la base B.

$$(2,4) = a(1,2) + b(1,3) \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 2a+3b=4 \end{cases}$$

$$a+b=2 \rightarrow a = 2-b$$

$$2(2-b)+3b=4$$

$$4-2b+3b=4$$

$$4+b=4$$

$$\underline{b=0} \rightarrow \underline{a=2}$$

$$\Rightarrow (2,4) \equiv_B (2,0) \quad //$$

- <u>Teorema de la base:</u>

Todo espacio vectorial $V \neq \{\vec{0}\}$ tiene al menos una base, además todas las bases de V tienen el mismo cardinal.

Al cardinal de una base de V lo llamaremos la dimensión de V y lo denotaremos $\dim(V)$. Por definición diremos que la dimensión del espacio vectorial $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

- P

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

* Proposición.

1) La dimensión de $K^n = \dim(K^n) = n$ y además $\{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots(0,\dots,0,1)\}$ es una base de K^n a la que llamaremos base canónica.

2) $\dim(M_{m\times n}(K)) = m\cdot n$ y además

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\right\}$$

es una base de $M_{m\times n}(K)$.

3) $\dim(K[x]_n) = n+1$ y además $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es una base de $K[x]_n$

• Teorema de ampliación de la base

Si la $\dim(V) = n$ y $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente de V, entonces $r \leq n$, además, si $r = n$ entonces $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ es una base de V y si $r < n$ entonces existen $\vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_n \in V$ tq $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1}, \dots \vec{v}_n\}$ es una base de V.

→ Corolario:

Si $\dim(V) = n$ entonces n vectores linealmente independientes de V son una base de V.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

¿Es $B=\{(1,2,3),(0,1,1)\}$ una base de $\mathbb{Z}_7^3$?

Como la dimensión de $\mathbb{Z}_7^3$ es igual a 3, entonces todas las bases de $\mathbb{Z}_7^3$ tienen cardinal 3 y portanto, B no puede ser una base de $\mathbb{Z}_7^3$ (tiene cardinal 2).

¿Es $B=\{(1,2,3),(0,1,1),(0,0,1)\}$ una base de $\mathbb{Z}_7^3$?

Para responder a esta pregunta utilizando el corolario anterior, me bastará ver si son o no L.I.

$$a(1,2,3)+b(0,1,1)+c(0,0,1)=(0,0,0)$$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ 2a+b &= 0 \\ 3a+b+c &= 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned} \right.$$

Los vectores son linealmente independientes y por tanto, B es una base de $\mathbb{Z}_7^3$.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Ejercicio:

Ampliar el conjunto $\{(1,1,1)\}$ a una base de $\mathbb{R}^3$

$B = \{(1,1,1), (\ldots), (\ldots)\}$

Siempre se puede ampliar con vectores de base canónica.

$B = \{(1,1,1), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$a(1,1,1) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0)$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ a+b &= 0 \\ a+c &= 0 \end{aligned} \quad \Bigg\| \quad \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

⚠ * Método para calcular una base de un subespacio vectorial a partir de un sistema de generadores de E.

1) Se quitan los vectores que son combinación lineal de los anteriores y el conjunto resultante, es una base del subespacio

2) Triangularizando la matriz cuyas filas son los vectores del sistema de generadores del subespacio las filas distintas de cero de esta matriz forman una base del subespacio.

Ejercicio:

Sea $\mathcal{U}$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,2,1),(2,4,2),(1,3,2),(2,5,3)\}$ calcular una base de $\mathcal{U}$

→ combinación lineal de los 1º

suma de $(1,2,1)$ + $(1,3,2)$

1er método:

$B_{\mathcal{U}} = \{(1,2,1),(1,3,2)\}$

2º método: (recomendado)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_{\mathcal{U}} = \{(1,2,1),(0,1,1)\}$$

- Corolario:

Sea $\mathcal{U}$ un subespacio vectorial de V entonces $\mathcal{U} = V$ si y solamente si $\dim(\mathcal{U}) = \dim(V)$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

Sea $U = \langle (1,1,1), (1,2,1) \rangle$ y $W = \langle (1,2,3), (0,0,2) \rangle$ dos subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_5^3$. ¿Es $\mathbb{Z}_5^3$ la suma de U y W?

Sabemos que $U + W = \langle (1,1,1), (1,2,1), (1,2,3), (0,0,2) \rangle$

Vamos a calcular una base de $U+W$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_{U+W} = \{ (1,1,1), (0,1,0), (0,0,2) \}$

Por tanto $U+W$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ y $\dim(U+W) = 3$. Por consiguiente, aplicando el corolario anterior podemos afirmar que $\mathbb{Z}_5^3 = U + W$

* Método para calcular el complementario de un subespacio vectorial

(Recuérdese que si $V = U \oplus W$ entonces los subespacios U y W son complementarios).

Sea U un subespacio vectorial de V:

1. Calculamos una base de U
2. Amplicamos la base de U a una base de V
3. El subespacio generado por los vectores que hemos añadido en la ampliación, es un complementario de V

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

Sea $\mathcal{U}$ el subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^3$ generado por $\{(1,1,1),(2,1,3),(4,3,5)\}$ Calcular un complementario de $\mathcal{U}$.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B_{\mathcal{U}} = \{(1,1,1),(0,-1,1)\}$

2) $B_{\mathbb{Q}^3} = \{(1,1,1),(0,-1,1),(0,0,1)\}$

$a(1,1,1) + b(0,-1,1) + c(0,0,1) = (0,0,0)$

$\left.\begin{array}{l} a = 0 \\ a - b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array}$

3) $W = \langle (0,0,1) \rangle$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Ejercicio:

Calcula la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^4$ generado por $\{(2,4,3,4),(4,1,6,1),(3,3,3,3),(5,0,6,0)\}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \{(2,4,3,4),(0,4,2,4)\} \rightarrow \text{Base del subespacio}$$

Por lo tanto, el subespacio tiene dimensión 2.

Sea $B=\{(1,1,0),(1,2,1),(1,1,2)\}$ y $B'=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ $\mathbb{Z}_5^3$. Si las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto a la base B son $(1,2,3)$. Calcular las coordenadas de ese mismo vector respecto a la base B'.

Si $\vec{v} \equiv_B (1,2,3) \Rightarrow \vec{v} = 1(1,1,0)+2(1,2,1)+3(1,1,2)$

$\Rightarrow \vec{v} = (1,3,3)$

$\vec{v} \equiv_{B'} a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1) = (1,3,3)$

$a+b=1 \rightarrow b=1-a$

$a+c=3 \rightarrow c=3-a$

$b+c=3 \rightarrow b+(3-a)=3$

$b-3+a=3$

$b+a=1 \rightarrow \cancel{b=1-a}$

$a+(1-a)=1$

$a+1-a=1$

$2a=1 \Rightarrow a=2$

$$\boxed{\begin{matrix} a=3 \\ b=3 \\ c=0 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\vec{v} \equiv_{B'} (3,0,3)}$$

* Operaciones del cambio de base

Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ y $B' = \{\vec{v}_1', \vec{v}_2', \dots \vec{v}_n'\}$ dos bases de V. Supongamos que $\vec{v}_1 \equiv_B (a_{11}, a_{12}, a_{1n})$ $\vec{v}_2 \equiv_B (a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n})$, $\vec{v}_n \equiv_B (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$.

Sea $\vec{x} \in V$ y supongamos que $\vec{x} \equiv_B (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\vec{x} \equiv_{B'} (x_1', x_2', \dots x_n')$, entonces

$$\boxed{(x_1', x_2', \dots, x_n') = (x_1, x_2, \dots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{matriz del cambio de base de } B \text{ a } B'}}$$

Expresión matricial del cambio de base de B a B'

La matriz del cambio de base es siempre regular, además, su inversa es justamente la matriz del cambio de base de B' a B

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Sean $B=\{(1,1,0),(1,2,1),(1,1,2)\}$ y $B'=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ dos bases de $\mathbb{Z}_5^3$

a) Calcular las ecuaciones del cambio de base de B a B'.

$(1,1,0) \equiv_{B'} (1,0,0)$

$(1,2,1) \equiv_{B'} (1,0,1)$

$(1,1,2) \equiv_{B'} (0,1,1)$

$\rightarrow (1,1,0) = a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1) \Rightarrow$

De aquí sacamos un sistema y lo resolvemos obteniendo: $\Rightarrow$ $\underline{a=1,\ b=0,\ c=0}$

$\rightarrow (1,2,1) = a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow a=1,\ b=0,\ c=1$

$\rightarrow (1,1,2) = a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow a=0,\ b=1,\ c=1$

La expresión matricial del cambio de base de B a B' es

$$(x',y',z') = (x,y,z)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}x' &= x+y\\ y' &= z\\ z' &= y+z\end{aligned}}$$

b) Si las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto de la base B son $(1,2,4)$. Calcula las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B'

$$(1,2,4)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} = (3,4,1)$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

c) Calcular las ecuaciones del cambio de base, de B' a B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det = -1$

$$[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La expresión matricial del cambio de base de B' a B es

$$(x^*, y^*, z^*) = (x', y', z') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Si la coordenada de un vector $\vec{v}$ respecto de la base B' son (1, 1, 1). Calcula las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de la base B.

$$(1, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 1) //$$

Las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de la base B' = (1, 0, 1)

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

* Ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial.

Sea U un subespacio vectorial de V, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de V y $B_U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$ una base de U. Supongamos que: ~~las coordenadas de u respecto~~

$$\vec{u}_1 \equiv_B (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$
$$\vec{u}_2 \equiv_B (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\vec{u}_r \equiv_B (a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn})$$

Sea $\vec{x} \in V$ y supongamos que $\vec{x} \equiv_B (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Entonces $\vec{x} \in U \iff (x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) + \lambda_2 (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) + \dots + \lambda_r (a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn})$

Para algún $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K$. Por tanto $\vec{x} \in U \iff$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{r1}\lambda_r \\ x_2 &= a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \dots + a_{r2}\lambda_r \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \dots + a_{rn}\lambda_r \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas de } U \text{ respecto a la base } B$$

NOTA: Las ecuaciones paramétricas de un subespacio siempre van referidas respecto a una base del espacio. Cuando nos pidan las ec. paramétricas de un subespacio y no nos especifiquen respecto de qué base supondremos que es respecto de la base ~~canónica~~ canónica.

Ejercicio:

Dada la base $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ de $\mathbb{Q}^3$ y U es subespacio vectorial generado por $\{(1,2,1), (1,3,2), (2,5,3)\}$ calcular las ecuaciones paramétricas de U respecto de la base B

1) Vamos a calcular la base de U, para ello triangularemos la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_U = \{(1,2,1), (0,1,1)\}$

2) Calculamos las coordenadas de los vectores de la base de U respecto de la base B.

$(1,2,1) \equiv_B a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = (1,2,1)$

$(0,1,1) \equiv_B a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = (0,1,1)$

$\rightarrow a = 1,\ b = 0,\ c = 1 \Rightarrow (1,0,1)$

$\rightarrow a = 0,\ b = 0,\ c = 1 \Rightarrow (0,0,1)$

3) $(x, y, z) = \lambda(1,0,1) + \mu(0,0,1)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 0 \\ z &= \lambda + \mu \end{aligned}}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

Calcular las ec. paramétricas del subespacio vectorial $\mathbb{Z}_7^3$ generado por $\{(2,3,5),(3,1,4),(2,3,1)\}$

1) Calculamos una base de $\mathcal{U}$. Para ello, triangularizaremos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $B_{\mathcal{U}} = \{(2,3,5),(0,0,3)\}$

2) Calculamos:

$(2,3,5) \equiv_{B_c} (2,3,5)$

base canónica.

$(0,0,3) \equiv_{B_c} (0,0,3)$

3) $(x,y,z) = \lambda(2,3,5) + \mu(0,0,3)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2\lambda \\ y &= 3\lambda \\ z &= 5\lambda + 3\mu \end{aligned}}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

PRÁCTICAS 1/12/15

1) Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x + y + z = 1\}$

¿Es un subespacio vectorial?

No, porque no es cerrado para la suma

$(0,0,1) \in U$
$(0,1,0) \in U$

$(0,0,1) + (0,1,0) = (0,1,1) \notin U$

2) $\left.\begin{array}{l} V_1 = (1,2,1) \\ V_2 = (1,0,1) \\ V_3 = (2,0,1) \\ V_4 = (1,0,2) \end{array}\right\} \mathbb{R}^3$

¿Son linealmente dependientes?

Sí:

$(1,0,1) = a(1,2,1) + b(2,0,1) + c(1,0,2)$

$\Rightarrow a = 0,\ b = \frac{1}{3},\ c = \frac{1}{3}$

V_1 no es combinación lineal.

V_2 sí es comb. lineal $V_2 = \frac{1}{3} V_3 + \frac{1}{3} V_4$

V_3 sí es comb. lineal. $V_3 = 3V_2 - \frac{1}{3} V_4$

V_4 sí es comb. lineal $V_4 = 3V_2 - \frac{1}{3} V_3$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

3) ¿Es $B = \{(1,1,1), (1,2,2), (1,1,2)\}$ base de $\mathbb{Q}^3$?

Para que lo sea:

$\langle B \rangle = \mathbb{Q}^3$ y B es L.I.

Si $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es regular, B es L.I.

$\det(\ ) = 1 \neq 0$

Por lo tanto, B es L.I.

4) $B' = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$

Ecuaciones del cambio de base de B a B'

(B está en el ej. anterior)

$u = (3,5,7)$

* Calculamos coordenadas de u en B

** Calculamos coordenadas de u en B'

* $(3,5,7) = a(1,1,1) + b(1,2,2) + c(1,1,2)$

5) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a = 0$
$b = 0$
$c = 0$
$d = 0$

Son linealmente Independiente.

6) En $(\mathbb{Z}_5{}^3)$

Calcula una base del espacio generado por:

$\{(2,1,3), (4,4,1), (4,3,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{(1,3,4), (0,1,0)\}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a \\ y &= 3a + b \\ z &= 4a \end{aligned}}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

* Aplicaciones lineales.

Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Una aplicación $f: V \longrightarrow V'$ diremos que es lineal (o un ~~homorfismo~~ homomorfismo) si verifica lo siguiente:

1) $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$
2) $f(a \cdot \vec{v}) = a \cdot f(\vec{v}) \quad \forall a \in K$ y $\forall \vec{v} \in V$

Ejercicio:

Demuestra que la aplicación $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
$f(x,y,z) = (x+y, x+z)$ es lineal.

1) $f((x,y,z) + (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})) = f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}) =$
$(x+\bar{x}+y+\bar{y}, x+\bar{x}+z+\bar{z}) = (x+y, x+z) + (\bar{x}+\bar{y}, \bar{x}+\bar{z}) =$
$= f(x,y,z) + f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.
Se conserva la suma.

2) $f(a(x,y,z)) = f(ax, ay, az) = (ax+ay, ax+az) =$
$= a(x+y, x+z) = a f(x,y,z)$
Se conserva el producto.
Por lo tanto, la aplicación es lineal

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

- Proposición.

Si $f: V \to V'$ es una aplicación lineal, entonces:

1) $f(\vec{0}) = \vec{0}$

2) $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$

3) $N(f) = \{ \vec{v} \in V \text{ tq } f(\vec{v}) = \vec{0} \}$

que llamaremos núcleo de f, es un subespacio vectorial, de V

4) $Im(f) = \{ f(\vec{v}) \text{ tq } \vec{v} \in V \}$ es un subespacio vectorial de V' y que llamaremos imagen de f

Ejercicio:

Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ definida por $f(x,y,z) = (2x+y+z, x+y+z)$. Calcular todos los elementos del núcleo de f.

$$N(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } f(x,y,z) = (0,0) \}$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } (2x+y+z, x+y+z) = (0,0) \} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 2x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{pmatrix} \} =$$

$$= \{ (0,0,0), (0,4,1), (0,1,4), (0,2,3), (0,3,2) \}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

* Tipos especiales de aplicaciones lineales

1) Un "monomorfismo" es una aplicación lineal inyectiva.
2) Un "epimorfismo" es una aplicación lineal sobreyectiva.
3) Un "isomorfismo" es una aplicación lineal biyectiva

• Proposición

Sea $f: V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal:

1) Si f es un isomorfismo, entonces f^{-1} es también un isomorfismo.

2) f es un monomorfismo si y solamente si $N(f) = \{\vec{0}\}$

3) Si $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n \rangle$, entonces la $Im(f) = \langle f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots, f(\vec{v}_n) \rangle$

4) Si f es un monomorfismo y $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces $\{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_n)\}$ es también un conjunto de vectores L.I.

Ejercicio:

Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{Z}_7^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_7^3$ $f(x,y) = (x, y, x+y)$

a) Calcular una base de la imagen

Como $\mathbb{Z}_7^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$ entonces aplicando el punto 3 de la proposición anterior, tenemos que $Im(f) = \langle f(1,0), f(0,1) \rangle$.

Por tanto, $Im(f) = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$

triangularizamos :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, como ya está triangularizado,

una base de la imagen sería :

$B_{Im(f)} = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$

b) ¿Es f un epimorfismo?

$Im(f) \neq \mathbb{Z}_7^3$

No, porque la dimensión de la imagen es 2 y la imagen de $\mathbb{Z}_7^3$ es 3.

Por tanto, f no es sobreyectiva y por consiguiente no es un ~~iso~~ epimorfismo.

c) ¿Es f un monomorfismo?

$N(f) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_7^2 \text{ tq } f(x,y) = (0,0,0)\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{Z}_7^2 \text{ tq } (x, y, x+y) = (0,0,0)\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{Z}_7^2 \text{ tq } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+y=0 \end{cases}\} = \{(0,0)\}$

$= \{\vec{0}\}$

Por tanto, aplicando el punto ~~de~~ 2 de la proposición anterior, tenemos que f es un monomorfismo

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z,t) = (x+y,\ x+z,\ x+t)$.

a) Calcular una base de la imagen

Como $\mathbb{R}^4 = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$

entonces $Im(f) = \langle f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1) \rangle$

Por tanto:

$Im(f) = \langle (1,1,1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$B_{Im f} = \{ \cancel{1,0,0}\ (1,1,1), (0,1,0), (0,0,1) \}$

b) ¿Es f un epimorfismo?

Como $Im(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 3, entonces $\mathbb{R}^3 = Im(f)$.

Por tanto, f es sobreyectiva y por consiguiente, f es un epimorfismo.

c) ¿Es f un monomorfismo?

$$N(f) = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } \begin{matrix} x+y=0 \\ x+z=0 \\ x+t=0 \end{matrix} \right\} =$$

$= \{ (0,0,0,0), (-1,1,1,1), (1,-1,-1,-1), \ldots \}$

Como $(1,-1,-1,-1) \in N(f)$ entonces, f no es inyectiva y por consiguiente, f no es un monomorfismo.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

- Teorema

Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de V y $\{\vec{v}_1', \vec{v}_2', \dots, \vec{v}_n'\}$ un subconjunto de V'

Entonces existe una única aplicación lineal $f: V \longrightarrow V'$ verificando que $\{f(\vec{v}_1) = v_1', f(\vec{v}_2) = v_2', \dots, f(\vec{v}_n) = v_n'\}$

además f es un isomorfismo si y solamente si el conjunto $\{\vec{v}_1', \vec{v}_2', \dots \vec{v}_n'\}$ es una base de V'.

NOTA: El teorema anterior nos dice que una aplicación lineal queda perfectamente determinada si conocemos las imágenes de los vectores de una base de V, además dicha aplicación lineal es un isomorfismo, si y solamente si las imágenes de los vectores de la base de V son una base de V'.

- Dos espacios vectoriales V y V' diremos que son isomorfos si existe un isomorfismo $f: V \to V'$

→ Corolario:

Dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo son isomorfos si y solamente si tienen la misma dimensión.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Ejercicio:

- ¿Son los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{Z}_5^2$ isomorfos?

  No, ya que no son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo.

- ¿Son los espacios vectoriales $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$ y $\mathbb{Z}_5^4$ isomorfos?

  Sí, porque son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo y tienen la misma dimensión: 4.

- ¿Son isomorfos los espacios vectoriales $\mathbb{Q}[x]_3$ y $\mathbb{Q}^3$?

  No, ya que la dimensión de $\mathbb{Q}[x]_3$ es 4 y $\mathbb{Q}^3$ es 3.

examen

Ejercicio:

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(1,2,3),(0,1,2),(1,3,0)\}$. Calcular el cardinal de U.

1º Vamos a calcular una base de U, para ello triangulizaremos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_U = \{(1,2,3),(0,1,2)\}$

U es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de dimensión 2, y por tanto, U es isomorfo a $\mathbb{Z}_5^2$. Por consiguiente el cardinal de U coincide con el cardinal de $\mathbb{Z}_5^2$ y en consecuencia el cardinal de U es $\boxed{25}$

* Ecuaciones de una aplicación lineal:

Sea $f: V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal,

$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de V y

$B' = \{\vec{v}_1', \vec{v}_2', \dots \vec{v}_m'\}$ una base de V'.

Supongamos que $f(\vec{v}_1) \equiv_{B'} (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})$

$f(\vec{v}_2) \equiv_{B'} (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m})$

$f(\vec{v}_n) \equiv_{B'} (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm})$

Sea $\vec{x} \in V$ $\quad \vec{x} \equiv_{B} (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\vec{x} \equiv_{B'} (x_1', x_2', \dots x_m')$

Entonces: $\underbrace{(x_1', x_2', \dots, x_m') = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}$

Expresión matricial de f respecto de la base B de V y la base B' de V'.

A la matriz se la llama, matriz asociada a f respecto de la base B de V y la base B' de V'.

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_n \\ &\vdots \\ x_m' &= a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{nm}x_n \end{aligned}\right\}$$

Ecuaciones de f respecto de la base B de V y la base B' de V'.

NOTA:

1) f es un isomorfismo si y solamente si su matriz asociada es regular

2) La expresión matricial de una aplicación lineal siempre va referida a una base B de V y una base B' de V'

Cuando nos piden calcular la expresión matricial de una aplicación lineal y no nos especifiquen respecto de qué base, supondremos que es respecto de la base canónica de V y la base canónica de V'

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

Si $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a una aplicación lineal $f: \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^3$ respecto de la base $B = \{(2,1), (3,1)\}$ y $B' = \{(1,1,0), (0,0,1), (0,1,1)\}$ calcular $f(2,3)$.

La expresión matricial de f respecto de las bases B y B' es $(x', y', z') = (x, y)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$(2,3) \equiv_B ($

$(2,3) = a(2,1) + b(3,1) \to \begin{matrix} 2a + 3b = 2 \\ a + b = 3 \end{matrix} \{ \begin{matrix} a = 2 \\ b = 1 \end{matrix}$

$(2,3) \equiv_B (2,1)$

$(2,1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (4,0,0)$

$f(2,3) \equiv_{B'} (4,0,0)$.

$f(2,3) = 4(1,1,0) + 0(1,0,1) + 0(0,1,1) =$

$\Rightarrow \boxed{f(2,3) = (4,4,0)}$

Ej: Sea $f: \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ la aplicación lineal definida por: $f(x,y) = (x, x+y, x-y)$. Calcular la expresión matricial de f respecto de las bases $B = \{(1,1),(1,2)\}$ y $B' = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$.

$f(1,1) \equiv_B \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$f(1,2) \equiv_{B'} \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$f(1,1) = (1,2,0)$

$f(1,2) = (1,3,-1)$

$a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = (1,2,0) \to a = \frac{3}{2} \quad b = -\frac{1}{2} \quad c = \frac{1}{2}$

$a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = (1,3,-1) \Rightarrow a = \frac{5}{2} \quad b = \frac{-3}{2} \quad c = \frac{1}{2}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

La expresión matricial de f respecto de la base B y B' es:

$$(x', y', z') = (x, y) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y \\ y' &= -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y \\ z' &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{aligned}}$$

→ Ecuaciones de la aplicación lineal

Ejercicio:

Calcular una aplicación lineal $f: \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^3$ verificando que $f(1,2) = (2,3,1)$ y $f(2,5) = (3,4,2)$

Como $\{(1,2),(2,5)\}$ es una base de $\mathbb{Z}_7^2$ entonces por el teorema anterior, sabemos que existe una única aplicación lineal verificando lo que queremos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \cancel{A = (\ )(2\ 3\ 1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = (x,y) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{f(x,y) = (4x+6y,\ 5y,\ x)}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Comprobación:

$f(1,2) = (2, 3, 1)$

$f(2,5) = (3, 4, 2)$

Calcular una aplicación lineal de $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ verificando que $(1,0,0) \in N(f)$ y que $Im(f) = \langle (2,3,1) \rangle$

$f(1,0,0) = (0,0,0)$

$f(0,1,0) = (2,3,1)$

$f(0,0,1) = (8,12,4) \rightarrow$ múltiplos de $(2,3,1)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 12 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{f(x,y,z) = (2y + 8z, 3y + 12z, y + 4z)}$$

* Espacio vectorial cociente

Sea U un subespacio vectorial de V definimos sobre V la relación binaria $\vec{u} R_U \vec{v}$ si $\vec{u} - \vec{v} \in U$. Entonces R_U es una relación de equivalencia, y al conjunto cociente $\frac{V}{R_U}$ lo denotaremos $\frac{V}{U}$ (V sobre U)

El conjunto $\frac{V}{U}$ es también un espacio vectorial sobre el cuerpo K definiendo la suma como $[\vec{u}] + [\vec{v}] = [\vec{u} + \vec{v}]$ y definiendo el producto por escalar como $a[\vec{v}] = [a \cdot \vec{v}]$

A dicho espacio vectorial, lo llamaremos espacio vectorial cociente de V sobre U $\left(\frac{V}{U}\right)$

- Proposición

Si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$ es una base de U y $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \dots \vec{u}_n\}$ una base de V. Entonces $\{[\vec{u}_{r+1}], \dots, [\vec{u}_n]\}$ es una base de $\frac{V}{U}$.

→ Corolario:

$$\dim \frac{V}{U} = \dim V - \dim U$$

Ejercicio:

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(2,3,4), (1,4,2)\}$ Calcular una base del espacio vectorial cociente $\frac{\mathbb{Z}_5^3}{U}$.

Vamos a calcular una base de U. y para ello triangulizaremos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_U = \{(2,3,4)\}$$

Vamos a ampliar la base de U a una base de $\mathbb{Z}_5^3$:

$B = \{(2,3,4), (0,1,0), (0,0,1)\}$ entonces por la proposición anterior tenemos que $\{[(0,1,0)], [(0,0,1)]\}$ es una base de $\frac{\mathbb{Z}_5^3}{U}$.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

* 1er teorema de isomorfía

Si $f: V \to V'$ es una aplicación lineal entonces los espacios vectoriales $\frac{V}{N(f)}$ y $Im(f)$ son isomorfos

→ Corolario:

Si $f: V \to V'$ es una aplicación lineal, entonces $\dim V = \dim N(f) + \dim Im(f)$.

Ejercicio:

Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x + y, 3x + z)$. Calcular una base del núcleo

$$N(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \begin{matrix} 2x + y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{matrix}\}$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(f) + \dim Im(f)$$

$$3 = \dim N(f) + \dim Im(f)$$

$$Im(f) = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) \rangle$$

$$Im(f) = \langle (2,3), (1,0), (0,1) \rangle$$

$$B_{Im(f)} = \{(1,0), (0,1)\} \Rightarrow \dim Im(f) = 2$$

Por lo tanto:

$$\dim N(f) = 1$$

$$B_{N(f)} = \{(1, -2, -3)\}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

* Segundo teorema de isomorfía:

Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V, entonces los espacios vectoriales $\frac{U_2}{U_1 \cap U_2}$ y $\frac{U_1 + U_2}{U_1}$ son isomorfos.

→ Corolario:

Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V, entonces $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim (U_1 + U_2) + \dim (U_1 \cap U_2)$

Ejercicio:

Sean U y W los subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_5^3$ generados por $\{(1,1,2), (1,2,3)\}$ y $\{(1,0,0), (2,1,3)\}$ respectivamente. Calcular la dimensión de $U \cap W$

$$\dim U + \dim W = \dim U + W + \boxed{\dim U \cap W}$$

$U = \langle (1,1,2), (1,2,3) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim U = 2$$

$W = \langle (1,0,0), (2,1,3) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim W = 2$$

$U + W = \langle (1,1,2), (1,2,3), (1,0,0), (2,1,3) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim U + W = 3$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\dim (U \cap W) = 1}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Tema 6: "Sistemas de ecuaciones lineales"

Sea $A \in M_{n \times m}(K)$, el rango por fila de la matriz A es la dimensión del subespacio vectorial de K^n generado por la fila de la matriz.

El rango por columna de la matriz A, es la dimensión del subespacio vectorial de K^m generado por la columna de la matriz.

Ejercicio:

Calcular el rango por fila y el rango por columna de la matriz. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$

$$R.F(A) = \dim(\langle (2,3,4,1), (3,3,2,4), (0,1,1,0) \rangle) = \underline{\underline{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R.C(A) = \dim(\langle (2,3,0), (3,3,1), (4,2,1), (1,4,0) \rangle) = \underline{\underline{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* Teorema:

El rango por fila siempre coincide con el rango por columna. A dicha cantidad la llamaremos rango de la matriz A y la denotaremos $\operatorname{rang}(A)$

Sea Una matriz A, entonces una matriz que se obtiene a partir de la matriz A quitándole alguna fila y alguna columna, se dice que es una submatriz de A.

* Teorema:

El rango de una matriz es el máximo de los órdenes de sus submatrices cuadradas regulares.

Ejercicios:

1) Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\text{rang}(A) = 2}$$

2) ¿Es $\{(1,2,1), (2,3,2), (4,3,3)\}$ una base de $\mathbb{Z}_7^3$?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 2 - 2 - 6 - 2 = 1 //$$

rang $= 3$ Por lo que son una base de $\mathbb{Z}_7^3$.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

* Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sobre un cuerpo K es una expresión de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Una solución del sistema es una n-tupla $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in K^n$ tal que si $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \dots x_n = s_n$ se verifican las n igualdades del sistema.

Las m igualdades del sistema se pueden expresar como una única igualdad entre matrices de la siguiente forma:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{matriz de los coeficientes}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{matriz incógnita}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{matriz de los términos independientes}}}_{\text{Expresión matricial del sistema.}}$$

Llamaremos "matriz ampliada":

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

* Tipos especiales de sistemas:

Si un sistema tiene solución diremos que es compatible y en caso contrario diremos que es incompatible.

Si tiene una única solución diremos que es compatible determinado, y si tiene al menos dos soluciones diremos que es compatible indeterminado

Dos sistemas de ecuaciones sobre el mismo cuerpo, diremos que son equivalentes si tienen la misma solución.

* Proposición:

1) Si intercambiamos de posición dos ecuaciones en un sistema, obtenemos un sistema equivalente.
2) Si multiplicamos una ecuación por un elemento del cuerpo distinto de cero, obtenemos un sistema equivalente
3) Si a una ecuación le sumamos otra ecuación multiplicada por un elemento del cuerpo, obtenemos un sistema equivalente.

* <u>MÉTODO DE GAUSS</u>

Resolver el siguiente sistema cuyos coeficientes están en $\mathbb{Z}_7$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 4z = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ 6y + 6z = 6 \\ 4y + 5z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ y + z = 1 \\ 4y + 5z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ y + z = 1 \\ z = 4 \end{array}\right\}$$

$$z \quad \boxed{z = 4} \quad \boxed{y = 4} \quad \boxed{x = 2}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Ejercicio:

Resolver el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y+3z=0 \\ x+4y+3z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 4y+z=3 \\ 3y+2z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 4y+z=3 \\ 0=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1-z \\ 4y=3-z \end{array}\right\} \quad \boxed{z=\lambda}$$

$$\hookrightarrow y=4^{-1}(3-\lambda)=4(3-\lambda)$$

$$=2-\lambda \Rightarrow \boxed{y=2+\lambda}$$

$$\Rightarrow x=1-\lambda-2-\lambda=4+3\lambda$$

$$\boxed{x=4+3\lambda}$$

Ejercicio:

Resolver el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Q}$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y+z=2 \\ 2x+y+4z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y-2z=1 \\ -y+2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y-2z=1 \\ 0=1 \end{array}\right\}$$

El sistema es incompatible

$\Rightarrow$ No tiene solución.

Cuando se pida estudiar un sistema, hay que resolverlo e indicar de qué tipo es

* Teorema de ROUCHE - FROBENIUS

Un sistema es compatible si y solamente si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el de la matriz ampliada. Además es compatible determinado si y solamente si dicho rango coincide con el número de incógnita.

Ejercicio:

Estudiar el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4y + 4z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 4y + z = 3 \end{array}\right\} \quad \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

El sistema es compatible determinado.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Estudiar el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$ y que depende del parámetro a.

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = a \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \boxed{a^3 + 4a + 2}$$

$$a^3 + 4a + 2 = 0 \iff a \in \{1, 5\}$$

Si $a \notin \{1, 5\}$ el determinante es distinto de cero y el rango de la matriz del los coeficientes vale 3. Por consiguiente el rango de la matriz ampliada vale 3, y por consiguiente el sistema es <u>compatible determinado</u>

Ahora estudiamos los casos $a = 1$ y $a = 5$

$\boxed{a = 1}$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Por lo tanto, para $a = 1$, el sistema es <u>incompatible</u>

$\boxed{a = 5}$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{rang}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 1 - 5 - 5$$

Por lo tanto, para $a = 1$, el sistema es <u>incompatible</u>

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Resolver el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$ y que depende de los parámetros a y b.

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = b \\ ax + by + z = 1 \end{array}\right\} \qquad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = a + a + b - a - ab - 1 =$$

$$= a + b - ab - 1$$

$$= a(1-b) + b - 1 =$$

$$= a(1-b) - (1-b) =$$

$$= (1-b)(a-1)$$

$$(1-b)(a-1) = 0 \iff \begin{array}{l} a = 1 \\ \text{ó} \\ b = 1 \end{array}$$

Si $a \neq 1$ y $b \neq 1$ el determinante es distinto de cero, el rango es 3 y el de la matriz ampliada es 3 por lo que el sistema es compatible determinado.

$\boxed{a=1}$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } b \neq 1 \\ 2 & \text{si } b \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } b = 1 \\ 3 & \text{si } b \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = b^2 - 2b + 1 = (b-1)^2$$

Por lo tanto, si $a = 1$ y $b = 1 \rightarrow$ S.C.I

si $a = 1$ y $b \neq 1 \rightarrow$ S.I

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

$\boxed{b=1 \text{ y } a\neq 1}$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{rang}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Por lo tanto, si $a \neq 1$ y $b=1 \rightarrow$ S.C.I.

→ Estudiar el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$ y que depende del parámetro a.

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\} \qquad \text{rang}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } a=1 \\ 2 & \text{si } a\neq 1 \end{cases}$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Por lo tanto, si $a=1 \rightarrow$ S.I.

$a \neq 1 \rightarrow$ S.C.I.

→ Estudiar el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$ y que depende del parámetro.

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \qquad \text{rang}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Por lo tanto el sistema es C.I

→ Estudiar el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$ y que depende del parámetro a.

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \end{array}\right\} \quad \text{rang}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Por lo tanto → S. C. I

* CRAMER

• Fórmula.

Un sistema es de Cramer si su matriz de coeficientes es cuadrada y regular.

Si $AX = B$ es la expresión matricial de un sistema de Cramer, entonces el sistema es compatible determinado y su única solución es $|A|^{-1}\,((|M_1|, |M_2|, \dots |M_n|)$ donde M_i es la matriz que se obtiene a partir de la matriz a quitándole la columna y y colocando en su lugar, la columna B.

Ejercicio:

Probar que el siguiente sistema coeficientes en $\mathbb{R}$. es de Cramer y calcular su solución usando la fórmula de Cramer.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+1+1+1-1 \to 1 = 4$$

$$x = \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$y = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}}$$

$$z = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{z = -\frac{1}{2}}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

Resolver el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x+y+2z=1 \end{array}\right\} \qquad \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{l} y+z=3-x \\ y+2z=1-x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+z=3+4x \\ y+2z=1+4x \end{array}\right\}$$

$$\boxed{x=\lambda}$$

$$\left.\begin{array}{l} y+z=3+4\lambda \\ y+2z=1+4\lambda \end{array}\right\} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$y = 1^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 3+4\lambda & 1 \\ 1+4\lambda & 2 \end{vmatrix} = 1+3\lambda-1-4\lambda = 4\lambda$$

$$\boxed{y=4\lambda}$$

$$z = 1^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3+4\lambda \\ 1 & 1+4\lambda \end{vmatrix} = 3$$

$$\boxed{z=3}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Resuelve el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z+t=1 \\ x+y+2z+3t=2 \end{array}\right\} \quad \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x+t=1+6y+6z \\ x+3t=2+6y+5z \end{array}\right\} \quad \boxed{y=\lambda} \quad \boxed{z=\mu}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+t=1+6\lambda+6\mu \\ x+3t=2+6\lambda+5\mu \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = 2^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1+6\lambda+6\mu & 1 \\ 2+6\lambda+5\mu & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (3+4\lambda+4\mu+5+\lambda+2\mu)$$

$$= 4(1+5\lambda+6\mu)$$

$$= 4+6\lambda+3\mu$$

$$\boxed{x=4+6\lambda+3\mu}$$

$$t = 2^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1+6\lambda+6\mu \\ 1 & 2+6\lambda+5\mu \end{vmatrix} = 4(2+6\lambda+5\mu-1-6\mu-6\lambda)$$

$$= 4(1+6\mu) = 4+3\mu$$

$$\boxed{t=4+3\mu}$$

Tiene 7^2 soluciones $= \underline{\underline{49}}$.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

* Ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial

Sea $\mathcal{U}$ un subespacio vectorial de V, sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de V y $B_{\mathcal{U}} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$ una base de $\mathcal{U}$

Supongamos que
$$\vec{u}_1 \equiv_B (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$
$$\vec{u}_2 \equiv_B (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\vec{u}_r \equiv_B (a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn})$$

Sea $\vec{x} \in V$ y supongamos que $\vec{x} \equiv_B (x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces $\vec{x} \in \mathcal{U} \iff$ el rango de
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{rn} & a_{2n} & \cdots & a_{rn} & x_n \end{pmatrix} = r$$

Para que esto ocurra, ciertos determinantes deben ~~llevar el~~ valer cero. El desarrollo de dichos determinantes igualados a cero, nos proporciona $n-r$ ecuaciones linealmente independientes de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \dots + b_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{n-r,1} x_1 + b_{n-r,2} x_2 + \dots + b_{n-r,n} x_n = 0 \end{array}\right\}$$

A dichas ecuaciones las llamaremos ecuaciones cartesianas de $\mathcal{U}$ respecto de la base B.

NOTA:

1) $\mathcal{U}$ está determinado por $\dim V - \dim \mathcal{U}$ ecuaciones cartesianas L.I (linealmente independientes)

2) Si nos piden calcular las ecuaciones cartesianas de $\mathcal{U}$ y no nos dicen respecto de qué base, supondremos que es respecto de la base Canónica

10 EJERCICIOS MUY IMPORTANTES

① Dada la base $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, calcular las ecuaciones cartesianas de $U = \langle (1,2,1) \rangle$ respecto de la base B

1º necesitamos una base de U

$$B_U = \{(1,2,1)\}$$

2º Calculamos las coordenadas de los vectores de la base de U respecto de la base B.

$$(1,2,1) \equiv_B (1,0,1)$$

$$(1,2,1) = a(1,1,0), b(1,0,1), c(0,1,1)$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+c=2 \\ b+c=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

3º. U viene dado por $\dim \mathbb{R}^3 - \dim U = 3-1 = 2$ ecuaciones cartesianas linealmente independiente que se obtienen al imponer el

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} = \dim U = 1$$

Para ello $\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{y=0} \\ \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{z-x=0} \end{cases}$ → ec. cartesianas de U resp. de la base B.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

② Calcular las ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial $\mathbb{Q}^4$ generado por $\{(1,2,3,1), (1,1,1,1), (3,5,7,3)\}$

Sea U dicho subespacio:

1º Calculamos una base de U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_U = \{(1,2,3,1), (0,-1,-2,0)\}$$

2º Calculamos las coordenadas de los vectores de la base U respecto de la base canónica.

$$(1,2,3,1) \equiv_{BC} (1,2,3,1)$$

$$(0,-1,-2,0) \equiv_{BC} (0,-1,-2,0)$$

3º U viene dado por $\dim \mathbb{Q}^4 - \dim U = 4-2=2$ ecuaciones cartesianas que se obtienen al imponer que

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \\ 3 & -2 & z \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} = \dim U = 2$$ Para ello,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \\ 3 & -2 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -z-4x+3x+2y=0 \Rightarrow \boxed{-x+2y-z=0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \\ 1 & 0 & t \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -t+x=0$$

Las ecuaciones son: $\boxed{\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ -t+x=0 \end{cases}}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

③ Dado los subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_5^3$ $U = \langle (1,1,1), (1,2,1) \rangle$ y $W = \langle (1,4,3), (0,0,4) \rangle$, calcular una base de $U \cap W$

1º Vamos a calcular las ecuaciones cartesianas de U

$B_U = \{(1,1,1), (1,2,1)\}$ Por tanto, U viene dado por $3-2=1$ ecuación. Dicha ecuación se obtiene al imponer:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} = \dim U = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2z + y + x - 2x - y - z = 0$$

$$\boxed{4x + z = 0}$$

Entonces $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } 4x + z = 0\}$

2º Vamos a calcular las ecuaciones cartesianas de W.

$B_W = \{(1,4,3), (0,0,4)\}$ W viene dada por $3-2=1$ ecuaciones, que se obtiene imponiendo:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 4 & 0 & y \\ 3 & 4 & z \end{pmatrix} = 2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 4 & 0 & y \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y = 0$$

Entonces $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } x + y = 0\}$

$$U \cap W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{array}{l} 4x \quad + z = 0 \\ x + y \quad = 0 \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones son L.I.

$U \cap W$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ que viene dado por dos ecuaciones L.I. Por tanto $U \cap W$ es un espacio vectorial de dimensión $\dim \mathbb{Z}_5^3 - \text{nº ec. L.I.} = 3-2 = \underline{1}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

~~$U \cap W$~~

Por consiguiente, una base de $U \cap W$ es:

$B_{U \cap W} = \{(1,4,1)\}$

4) Sea $U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{array}{l} 2x + 3y + 2z + t = 0 \\ x + 4y + z + 3t = 0 \end{array} \right\}$

Calcular una base de U.

1º Vemos cuántas ecuaciones hay L.I.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ No son L.I.

Por lo tanto la ec. $x + 4y + z + 3t = 0$ no sirve para nada.

U es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$ que viene dada por una ecuación L.I. Por tanto $\dim U = 4 - 1 = 3$

$2x = 2y + 3z + 4t$.

$y = 1,\ z = 0,\ t = 0 \rightarrow x = 1$

$y = 0,\ z = 1,\ t = 0 \rightarrow x = 4$

$y = 0,\ z = 0,\ t = 1 \rightarrow x = 2$

$B_U = \{(1,1,0,0), (4,0,1,0), (2,0,0,1)\}$

⑤ Sea $U = \langle (1,1,1,1), (1,2,3,3) \rangle$ y $W = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Q}^4 \text{ tq } x+y-z-t=0 \}$

Calcular una base de $U+W$

W viene dado por una ecuación, por tanto, $\dim W = 3$,

en consecuencia, $B_W = \{ (-1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1) \}$

Por tanto:

$U+W = \langle (1,1,1,1), (1,2,3,3), (-1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1) \rangle$

Ahora triangularizamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$B_{U+W} = \{ (1,1,1,1), (0,1,2,2), (0,0,1,2), (0,0,0,-3) \}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

⑥ Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{Z}_5^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^3$ definida por $f(x,y,z,t) = (x+y+z+t,\ x+y+z+2t,\ x+y+z)$. Calcular una base del núcleo.

$$N(f) = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+y+z+2t=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N(f) = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ t=0 \end{array} \right\}$$

Como el núcleo de f viene dado por dos ecuaciones linealmente independientes, entonces $\dim N(f) = 4-2=2$

$$B_{N(f)} = \{ (4,1,0,0),\ (4,0,1,0) \}$$

$$\begin{array}{l} x+t = 4y+4z \\ t=0 \end{array}$$

⑦ Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^3$ generado por $\{(2,3,2),(1,3,3)\}$. ¿Es $\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ una base de U.

Como $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ es L.I, es una base de U. Por lo que $\dim U = 2$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ son ~~es~~ L.I Para saber si son una base,

U es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^3$ de dimensión 2, los vectores del conjunto $\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ son L.I, Por tanto son una base de $U \Leftrightarrow$ los dos vectores están en U

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Para ver si dichos vectores están o no en U, calcularé las ecuaciones cartesianas de U y veré si los vectores verifican o no dichas ecuaciones.

U viene determinado por 1 ecuación que se obtiene al imponer que

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 3 & y \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix} = \dim U = 2$$

Es decir, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 3 & y \\ 2 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6z + 2y + 2x + x + y + 4z = 0$

$\rightarrow 3x + 3y + 3z = 0$

$\rightarrow \boxed{x + y + z = 0}$

$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } x + y + z = 0\}$

Por tanto $\{(1,1,5),(2,0,5)\} \subseteq U$

Por consiguiente, U es un espacio vectorial de dimensión 2 y $\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ son dos vectores de U L.I. En consecuencia $\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ es una base de U.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

⑧ Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(1,1,1,1)\}$ y $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } x+y+z=0\}$

a) ¿Es $\mathbb{Z}_5^3 = U + W$?

$B_U = \{(1,1,1,1)\}$ $\quad B_W = \{(1,4,0),(1,0,4)\}$

$U + W = \langle (1,1,1), (1,4,0), (1,0,4) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B_{U+W} = \{(1,1,1),(0,3,4),(0,0,1)\}$

$U+W$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ de dimensión 3. Por tanto $U + W = \mathbb{Z}_5^3$

b) ¿Es $\mathbb{Z}_5^3 = U \oplus W$?

Sabemos que $\mathbb{Z}_5^3 = U \oplus W \iff$ se verifican las siguientes condiciones:

1- $\mathbb{Z}_5^3 = U + W$

2- $U \cap W = \{(0,0,0)\}$

Sabemos que $\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\dim U}} + \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim W}} = \underset{3}{\underset{\shortparallel}{\dim (U+W)}} + \dim (U \cap W)$.

$\Rightarrow \dim (U \cap W) = 0 \Rightarrow U \cap W = \{(0,0,0)\}$

Luego se verifican ambas condiciones

⑨ Sea $\mathcal{U}$ el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ cuyas ecuaciones cartesianas respecto de la base $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ son:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{array}\right\}$$

¿Es $(0,4,4) \in \mathcal{U}$?

Calculamos: $(0,4,4) \equiv_B ($

$$(0,4,4) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0)$$

$$\begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ a + b = 4 \\ a = 4 \end{array} \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{l} c = 1 \\ a = 4 \\ b = 0 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$(0,4,4) \equiv_B (4,0,1)$$

Como $(4,0,1)$ verifica las ecuaciones, entonces $(0,4,4) \in \mathcal{U}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

(10) Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$ generado por $\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1)\}$ y sea $W=\{(x,y,z,t)\in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } x+y+z+t=0\}$

Calcular el cardinal de $U\cap W$

~~Vamos a calcular las ecuaciones cartesianas de U~~

Sabemos que $\underset{\underset{3}{\parallel}}{\dim U} + \underset{\underset{3}{\parallel}}{\dim W} = \dim(U+W) + \dim(U\cap W)$

$B_W = \{(4,1,0,0),(4,0,1,0),(4,0,0,1)$

$U+W = \langle (1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(4,1,0,0),(4,0,1,0),(4,0,0,1)\rangle.$

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\4&1&0&0\\4&0&1&0\\4&0&0&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&2&1&1\\0&1&2&1\\0&1&1&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&4&4\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&4\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightarrow \dim U+W = 4$$

Por lo tanto $\rightarrow$ $\dim(U\cap W) = 2.$

$U\cap W$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de dimensión 2, por tanto, $U\cap W$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_5^2$ por consiguiente el cardinal de $U\cap W$ es $5^2 = \underline{\underline{25}}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Tema 7: Diagonalización de matrices.

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada en la que todos sus valores son cero salvo algunos de la diagonal principal.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada A es diagonalizable si existe una matriz diagonal D y existe una matriz regular P tal que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

La diagonalización de matrices es útil para el cálculo de potencias grandes de una matriz, ya que si A es diagonizable y $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, ~~entonces~~ entonces $A^n = A \cdot A \cdot A \overset{(n}{\cdots} \cdot A = P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} \overset{(n}{\cdots} P \cdot D \cdot P^{-1} =$

$= P \cdot D \cdot D \cdots \overset{(n}{\cdots} D \cdot P^{-1} = P \cdot D^n P^{-1}$

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 \\ 0 & 0 & d_3^n \end{pmatrix}$$

En adelante, A será una matriz cuadrada de orden $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo K

Un elemento $\lambda \in K$ diremos que es un valor propio de A si existe $(x_1, \dots, x_n) \in K^n \setminus \{0, \dots, 0\}$ tq $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda (x_1, \dots, x_n)$. En tal caso diremos que $(x_1, \dots, x_n)$ es un vector propio asociado al valor propio λ

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

* Teorema :

Un elemento $\lambda \in K$ es un vector propio de la matriz A si y solamente si $|A - \lambda I_n| = 0$ (si el determinante vale cero).

El teorema anterior nos dice que los valores propios de la matriz A, son las raíces del polinomio $|A - \lambda I_n| \in K[\lambda]$ que se conoce como Polinomio característico de la matriz A y que denotaremos $P_A(\lambda)$

Nótese que el grado $P_A(\lambda)$ es n.

Ejercicio :

Calcula el Polinomio característico y los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$P_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \boxed{\lambda^2 - 2\lambda - 3}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \lambda = 3 \\ \lambda = -1 \end{matrix}}$$ Valores propios de la matriz.

Una matriz cuadrada diremos que es triangular superior si todos los elementos que hay por debajo de la diagonal principal valen cero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada diremos que es triangular inferior si todos los elementos que hay por encima de la diagonal, valen cero.

* Proposición:

1) Si A es una matriz triangular (sup o inf) entonces sus valores propios son justamente los valores que aparecen en la diagonal principal.

2) Los valores propios de A y los de A^t, coinciden.

3) El determinante de A es cero sí y solamente si cero es un valor propio de A.

4) Si A es regular y λ es un valor propio de A, entonces λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Si λ es un valor propio de la matriz A, entonces,

$V(\lambda) = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \text{ tq } (A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$ es un subespacio vectorial de K^n al que llamaremos subespacio vectorial propio asociado al valor propio λ

Ejercicio:

Calcular los subespacios vectoriales propios asociados a los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Por el ejercicio anterior, sabemos que los valores propios $\lambda = -1$ y $\lambda = 3$. Por lo tanto:

$$V(-1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} =$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{matrix} 2x + 2y = 0 \\ \cancel{2x + 2y = 0} \end{matrix}\}$$

Por tanto $\dim V(-1) = 1$

y $B_{V(-1)} = \{(1, -1)\}$

$$V(3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} =$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{matrix} -2x + 2y = 0 \\ \cancel{2x - 2y = 0} \end{matrix}\}$$

Por tanto $\dim V(3) = 1$

y $B_{V(3)} = \{(1, 1)\}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Sea $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ los valores propios de la matriz A, entonces a la multiplicidad de la raíz λ_i de polinomio $P_A(\lambda)$ la llamaremos la multiplicidad algebráica del valor propio λ_i, y a la $\dim V(\lambda_i)$ la llamaremos la multiplicidad geométrica del valor propio λ_i

- Ejemplo:

Calcular la multiplicidad algebráica y la multiplicidad geométrica de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Sabemos por los ejercicios anteriores que $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ y que los valores propios son $\lambda = -1$ y $\lambda = 3$.

También sabemos que $\dim V(-1) = 1$ y $\dim V(3) = 1$.

Por tanto, los dos valores propios tienen multiplicidadad geométrica 1

$P_A'(\lambda) = 2\lambda - 2$ $\quad$ $P_A'(-1) = -4 \neq 0$, $P_A'(3) = 4 \neq 0$ $\quad$ Tienen multiplicidad algebráica 1

* Proposición.

La multiplicidad geométrica de un valor propio siempre es $\leq$ que su multiplicidad algebráica.

- Criterio de diagonalización

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$, entonces A es diagonizable si y solamente si la suma de las multiplicidades algebráicas de sus valores propios es igual a n y además para cada valor propio, coincide su multiplicidad algebráica y su multip. geométrica.

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Ejercicio:

¿Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ diagonizable?

Sí, ya que la suma de las mult. algebráicas de sus valores propios es 2 que coincide con el tamaño y además, cada valor propio tiene mult. algebráica y geométrica 1.

* COROLARIO

Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tiene n valores propios distintos, entonces la matriz A es diagonizable

* COROLARIO

Toda matriz cuadrada y simétrica con coeficiente en $\mathbb{R}$ es diagonizable.

→ Método para diagonalizar una matriz.

Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$:

1) Calculamos $P_A(\lambda)$, sus raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ y sus multiplicidades algebráicas $m_1, \dots, m_k$

2) Si $m_1 + m_k \neq n$, entonces la matriz no es diagonalizables.

3) Para cada λ_i calculamos su multiplicidad geométrica, si para algún i no coincide su mult. algebraica y su mult. geométrica, entonces la matriz A no es diagonalizable.

4) La matriz A es diagonalizable, además $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ donde D es la matriz diagonal que contiene en la diagonal λ_1, m_1 veces, λ_2 m_2 veces, ..., λ_k m_k veces. y la matriz P se construye colocando por columnas una base de $V(\lambda_1), V(\lambda_2), \dots, V(\lambda_k)$

Ejercicio:

Diagonalizar $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio:

Diagonalizar, si es posible, la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_7)$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) - 12(2-\lambda)$$

$$= 6\lambda^3 + 5\lambda + 5$$

$\lambda = 2$ y $\lambda = 3$ son las raíces de $P_A(\lambda)$ y por tanto, 2 y 3 son los valores propios de la matriz A

Vamos a calcular la multiplicidad algebraica de los valores propios

$P_A'(\lambda) = 4\lambda^2 + 5 \qquad P_A'(2) = 0 \qquad P_A'(3) = 6 \neq 0$

$P_A''(\lambda) = \lambda \qquad P''(2) = 2 \neq 0$

multip. algebraica $3 = 1$
$2 = 2$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

La suma de las mult. algebráicas es 3 = tamaño matriz. seguimos.

$$V(2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{array}{l} 2x + 2y + 5z = 0 \\ 6x + 6y \cancel{+ 7z} = 0 \end{array} \right\}$$

Por lo tanto dim $V(2) = 2$

multip. geométrica $= 2$

Como coincide con la algebráica, seguimos.

$B_{V(2)} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$

$$V(3) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{array}{l} x + 2y + 5z = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \\ 6z = 0 \end{array} \right\}$$

~~Por lo tanto~~ Para saber cuántas ecuaciones L.I triangulizamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto dim $V(3) = 1$

multip. geométrica $= 1$

Como coincide con la algebráica, seguimos

$B_{V(3)} = \{(5, 1, 0)\}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

PRÁCTICAS 12/01/16

·) Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + 4z = 3 \\ x + 2y + az = 4 \\ 3x + (a+2)y + 2z = 2 \end{array}\right\}$$

Discútelo según el valor de a. Si para $a = 4$ es compatible, resuélvelo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & a+2 & 2 \end{vmatrix} = 3a(1+a)$$

Para $a = 0 \Rightarrow$ Incompatible

Para $a = 4 \Rightarrow$ Comp. Indeterminado.

Vamos a resolverlo para $a = 4$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + 4z = 4 \\ 2y + z = 0 \end{array}\right\}$$

$y = \alpha$

$z = 3\alpha$

$2x + \alpha + 2\alpha = 3$

$x = (3+2\alpha)3$

•) Calcula en $\mathbb{R}^4$ $U \cap W$

1. $U = \{(a, b, -b, a) \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$

$W = \{(a, b, 0, c) \,/\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$

Son ecuaciones paramétricas

2. $U = \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \lambda + \mu \\ x_4 = \lambda + \mu + \gamma \end{cases}$ $\quad W = \begin{cases} x_1 = \lambda + \mu + \gamma \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \lambda \end{cases}$

$U = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0) \rangle$

$W = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$

$(x, y, z, t) \in U \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$ matriz de rango 2

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0$

$(x, y, z, t) \in W \iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0$

$\rightarrow U \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ -x + t = 0 \end{cases}$

$\rightarrow W \equiv \{ z = 0$

$U \cap W \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ -x + t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Tema 8: "Combinatoria"

La combinatoria es la técnica de saber cuántos elementos tiene un conjunto sin necesidad de contarlos uno por uno.

* Principio de inclusión - exclusión para dos conjuntos

Si A_1 y A_2 son conjuntos, entonces, ~~el cardinal de A_1~~

$$\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#A_1 \cap A_2$$

Ejercicio:

Cuántos nº enteros entre 1 y 100 son múltiplos de 2 o de 3

$A_1 = \{x \in \{1, \dots, 100\} \text{ tq } x \text{ es múltiplo de } 2\}$

$A_2 = \{x \in \{1, \dots, 100\} \text{ tq } x \text{ es múltiplo de } 3\}$

La solución del problema es el conjunto $\#A_1 \cup A_2 =$

$$\underset{50}{\underset{\parallel}{\#A_1}} + \underset{33}{\underset{\parallel}{\#A_2}} - \underset{\parallel}{\#A_1 \cap A_2}$$

$A_1 \cap A_2 = \{x \in \{1, \dots, 100\} \text{ tq } x \text{ es múlt. } 6\}$

$= 16$

$50 + 33 - 16 = \boxed{67}$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

* Principio de inclusión - exclusión general.

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son conjuntos, entonces

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \# A_i - \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} \# A_1 \cap A_2 + \dots + \dots$$

$$+ (-1)^{K+1} \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_K \le n} \# A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{i_K} + \dots$$

$$+ (-1)^{K+1} \# (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) +$$

NOTA: El principio anterior quiere decir lo siguiente

1) $\# A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \# A_1 + \# A_2 + \# A_3 - \# A_1 \cap A_2 - \# A_1 \cap A_3 - \# A_2 \cap A_3 + \# A_1 \cap A_2 \cap A_3$

2) $\# A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \# A_1 + \# A_2 + \# A_3 + \# A_4 - \# A_1 \cap A_2 - \# A_1 \cap A_3 - \# A_1 \cap A_4 - \# A_2 \cap A_3 - \# A_2 \cap A_4 - \# A_3 \cap A_4 + \# A_1 \cap A_2 \cap A_3 + \# A_1 \cap A_2 \cap A_4 + \# A_1 \cap A_3 \cap A_4 + \# A_2 \cap A_3 \cap A_4 - \# A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$

Ejercicio:

¿Cuántos nº entre 1 y 100 son múltiplos de 2, de 3 o de 5?

$A_1 = \{x \in \{1, \dots, 100\} \text{ tq } x \text{ es múlt de } 2\}$

$A_2 = \{x \in \{1, \dots, 100\} \text{ tq } x \text{ es múlt. de } 3\}$

$A_3 = \{x \in \{1, \dots, 100\} \text{ tq } x \text{ es múlt de } 5\}$

La solución es $\# A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$$\Rightarrow \underbrace{\# A_1}_{50} + \underbrace{\# A_2}_{33} + \underbrace{\# A_3}_{20} - \underbrace{\# A_1 \cap A_2}_{16} - \underbrace{\# A_1 \cap A_3}_{10} - \underbrace{\# A_2 \cap A_3}_{6} + \underbrace{\# A_1 \cap A_2 \cap A_3}_{3}$$

$106 - 32 = 74$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

* Principio del complementario

Si $A \subseteq X \Rightarrow \#(X \setminus A) = \#X - \#A$

Ejercicio:

¿cuántos nº de tres cifras no son múltiplos ni de 3 ni de 7?

$X = \{$ números de 3 cifras

$A = \{x \in X$ tq x es múlt. 3 $\}$

$B = \{x \in X$ tq x es múlt. 7 $\}$

La solución es $\#(X \setminus A \cup B)$

$$\#(X \setminus A \cup B) = \#X - \#A \cup B = \underset{900}{\underset{\shortparallel}{\#X}} - (\underset{300}{\underset{\shortparallel}{\#A}} + \underset{128}{\underset{\shortparallel}{\#B}} - \underset{43}{\underset{\shortparallel}{\#A \cap B}})$$

$$900 - (300 + 128 - 43) = 515$$

* Principio del producto

Si $A_1, A_2, \dots A_n$ son conjuntos, $\Rightarrow \#(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \#A_1 \cdot \#A_2 \cdot \dots \cdot \#A_n$

Ej:

Ejercicio:

La placa de matrícula de vehículos de cierto país consta de 4 letras (elegidas entre 25) seguidas de 3 números (de 10 posibles). ¿Cuántas placas de matrículas diustintas pueden formarse?

Sea L el conjunto de letras y N el conjunto de números, dar una patrícula es lo mismo que dar un elemento de $L \times L \times L \times L \times N \times N \times N$

$25^4 \cdot 10^3 =$

Si $q \in \mathbb{Q}$, denotaremos $\lfloor q \rfloor = \text{máximo}\{z \in \mathbb{Z} \text{ tq } z \leq q\}$

y $\lceil q \rceil = \text{mínimo}\{z \in \mathbb{Z} \text{ tq } q \leq z\}$

Ejemplo:

$\lfloor 6'3 \rfloor = 6 \qquad \lceil 6'3 \rceil = 7$

* Principio de la caja (o Dirichlet)

Si se distribuyen n objetos en K cajas, entonces existe una caja que contiene al menos $\left\lceil \frac{m}{K} \right\rceil$ objetos, y existe otra caja que contiene a lo sumo $\left\lfloor \frac{m}{K} \right\rfloor$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

¿Cuál es el mínimo número de alumnos que debe tener una asignatura para poder asegurar que al menos 6 alumnos van a obtener la misma calificación?

Se califican $\{0, 1, 2, \dots 10\}$

$$\left\lceil \frac{56}{11} \right\rceil = 6$$

* Variaciones simples

Sea A un conjunto con m elementos. Una K-tupla $(a_1, \dots, a_K)$ diremos que es simple si

$$\#\{a_1, \dots, a_K\} = K$$

~~Ejercicio~~

¿Cuántas K-tuplas simples podemos formar con el conjunto A?

·) Si $m < K$, ninguno

·) Si $m \geq K$, $V_{m,K} = \dfrac{m!}{(m-K)!}$ → Variaciones de m elementos tomados de K en K

El número anterior también indica el nº de aplicaciones inyectivas que hay de un conjunto de K elementos en un conjunto de m elementos

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

1) ¿Cuántos nº de 3 cifras distintas podemos formar con los dígitos 5, 6, 7, 8 y 9

$$V_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 60$$

$$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 60$$

2) ¿De cuántas formas se pueden sentar cuatro personas en un mircobus de 15 plazas?

$$V_{15,4} = \frac{15!}{(15-4)!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$$

$$\underset{15}{\underline{P_1}} \quad \underset{14}{\underline{P_2}} \quad \underset{13}{\underline{P_3}} \quad \underset{12}{\underline{P_4}}$$

3) ¿Cuántos nº de 3 cifras distintas podemos formar con los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4

$$V_{5,3} - V_{4,2} = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 48$$

$$\underline{4} \quad \underline{4} \quad \underline{3} = 48$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

* Variaciones con repetición

Sea A un conjunto con m elementos, ¿Cuántas K-tuplas podemos formar con los elementos de A.

$$V^R_{m,K} = m^K$$

El número anterior también indica el número de aplicaciones que hay de un conjunto de K elementos en un conjunto de m elementos.

Ejercicio:

¿Cuántos números de 3 cifras podemos construir utilizando los dígitos 1 y 2?

$$\overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} = 8$$

¿Cuántos números de tres cifras podemos construir utilizando los dígitos 0, 1, 2?

$$\overline{2} \cdot \overline{3} \cdot \overline{3} = 18$$

¿Cuántos polinomios tiene $\mathbb{Z}_5[x]$ de grado $\leq$ que 2?

$$\underset{5}{\underline{\ }} \cdot x^2 + \underset{5}{\underline{\ }} \cdot x + \underset{5}{\underline{\ }} = 125$$

¿Cuántos polinomios de grado 2 hay en $\mathbb{Z}_5[x]$?

$$\underset{4}{\underline{\ }}\, x^2 + \underset{5}{\underline{\ }}\, x + \underset{5}{\underline{\ }} = 100$$

¿Cuántos polinomios mónicos de grado 2 tiene $\mathbb{Z}_5[x]$?

$$\underset{1}{\underline{\ }} \cdot x^2 + \underset{5}{\underline{\ }} \cdot x + \underset{5}{\underline{\ }} = 25$$

¿Cuántos polinomios mónico de grado ≤ 2 tiene $\mathbb{Z}_5[x]$?

$$\frac{_}{1} x^2 + \frac{_}{5} x + \frac{_}{5} = 25$$

$$\frac{1x}{1} + \frac{_}{5} = 5$$

$$\frac{1}{1} = 1$$

$\Big\}$ ~~30~~ 31

~~¿cuántas po~~

* Permutaciones simples

Sea A un conjunto con m elementos, ¿cuántas m-tuplas simples podemos formar con los elementos de A ?

$$P_m = m!$$

El número anterior también indica el número de aplicaciones biyectiva que hay de un conjunto de m elementos en un conjunto de m elementos. Es además un caso particular de variación simple, cuando $m = K$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

¿~~de~~ cuántas formas distintas se pueden colocar 5 libros en una estantería

$$\underset{5}{__}\ \underset{4}{__}\ \underset{3}{__}\ \underset{2}{__}\ \underset{1}{__} = 5!$$

* Permutaciones con repetición

Sea A un conjunto con r elementos y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ enteros positivos tales que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = m$

¿Cuántas n-tuplas podemos formar con los elementos del conjunto A de manera que una coordenada se repita α_1 veces, otra coordenada se repita α_2 veces, ..., y otra coordenada se repita α_r veces.

$$P_m^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} = \frac{m!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_r!}$$

Ejemplo:

¿Cuántos nº de 16 cifras se pueden formar con 3 unos, 5 doses y 8 treses.

$$P_{16}^{3,5,8} = \frac{16!}{3! \cdot 5! \cdot 8!}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

Ejercicio:

¿Cuántos nº de 16 cifras se pueden formar con 3 unos, 5 doses, 6 treses y 2 ceros?

$$P_{16}^{3,5,6,2} - P_{15}^{3,5,6,1}$$

¿De cuántas formas podemos ordenar las letras de la palabra memotreto?

$$P_9^{2,2,2,1,1,1}$$

* Combinaciones simples

Sea A un conjunto con m elementos, ¿cuántos subconjuntos de cardinal K tiene A?

$$C_{m,K} = \binom{m}{K} = \frac{m!}{K!\,(m-K)!}$$

Ejercicio:

Se extraen 5 cartas de una baraja de 40, ¿cuántas jugadas diferentes pueden obtenerse?

$$C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!\;35!}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

BNEXT 10€ GRATIS AL ACTIVAR TU TARJETA BNEXT

Ejercicio:

Cierto club deportivo está formado por 15 mujeres y 12 hombres. un comité consta de 4 personas.

a) ¿Cuántos comités pueden formarse?

$$C_{27,4} = \binom{27}{4} = \frac{27!}{4! \cdot 23!}$$

b) ¿Cuántos comités se pueden formar que contengan exactamente dos mujeres.

$$\underbrace{\binom{15}{2}}_{\text{dos mujeres}} \underbrace{\binom{12}{2}}_{\text{dos hombres}} \Rightarrow \binom{15}{2} \cdot \binom{12}{2}$$

Ejercicio:

¿De cuántas formas se puede acertar exactamente 9 resultados en una quiniela de 14?

$$\binom{14}{9} \cdot 2^5$$

* Combinaciones con repetición

Disponemos de bolas de n colores (un nº ilimitado de cada una de ellas) ¿Cuántas cajas distintas de K bolas podemos formar?

$$C^R_{m,K} = \binom{m+K-1}{K}$$

El nº anterior también indica el cardinal del conjunto $\{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{N}^m \text{ tq } x_1 + x_2 + \dots + x_m = K\}$

Ejercicio:

1) En una heladería se sirven helados de 20 sabores diferentes, ¿cuántas compras distintas de 12 helados podemos efectuar?

$$C^R_{20,12} = \binom{31}{12}$$

2) Se lanzan 3 dados simultáneamente ¿cuántas jugadas distintas podemos obtener?

$$C^R_{6,3} = \binom{8}{3}$$

3) Calcular el cardinal del conjunto

$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4$ tq $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$ y $x_i \geq 2$ para todo $i \in \{1,2,3,4\}\}$

~~$C^R_{4,24}$~~ Este conjunto tiene el mismo cardinal que el conjunto

$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4$ tq $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$ y $x_i \geq 0$ $\forall i \in \{1,2,3,4\}\}$

$$C^R_{4,16} = \binom{19}{16}$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH

* Regla del binomio de Newton.

Sea A un anillo conmutativo, y $a, b \in A$.

Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$ se verifica que $(a+b)^m =$

$$\sum_{K=0}^{m} \binom{m}{K} a^K \cdot b^K$$

Ejercicio:

Calcular utilizando la fórmula del binomio de Newton

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^0 \cdot b^{3-0} + \binom{3}{1} a^1 \cdot b^{3-1} + \binom{3}{2} a^2 b^{3-2}$$

$$+ \binom{3}{3} a^3 b^{3-3} = b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + a^3$$

Compra ahora tu paquete de apuntes sin publicidad, desde solo 0,99€ - WUOLAH