Resumen Variable Compleja

Docente: Pedro de Jesús Hernández Rizzo

Índice

Nota al lector

El fin de estas notas es estudiar el curso de Variable Compleja ofertado en el período académico 2026-1 por el docente Pedro de Jesús Hernández Rizzo, materia en la que se tratará el cuerpo de los número complejos, definiendo sus operaciones, la forma polar, y observando resultados importantes como la *desigualdad triangular, y el teorema de De Moivre*. Luego estudiaremos la topología del plano $\mathbb{R}^2$, definiendo los abiertos y cerrados del mismo, así cómo el concepto de convergencia, tendremos como resultados importantes el Teorema de Heine-Borel o Bolzano-Weierstrass, luego estaremos en puertas del cálculo complejo, dónde se verá resultados de límites, series, sucesiones, derivadas y como teorema especial tenemos el Teorema de Green.

En la segunda unidad definiremos los conceptos de funciones holomorfas, además de tocar la idea de derivación compleja, tocando las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Veremos funciones especiales como la función exponencial o la función logaritmo y sus ramas, también se tocarán transformaciones conformes y de Möbius. Finalmente en esta unidad se abordará el concepto de funciones analíticas.

En la tercera unidad tocaremos la teoría de Cauchy empezando por la integración compleja con el Teorema de Cauchy-Goursat, usaremos la fórmual integral de Cauchy, además de ver las derivadas de las funciones analíticas, además de que veremos el teorema de Morera, el teorema del módulo máximo , el teorema de Liouville, y un resultado importante como *el Teorema Fundamental del Álgebra*, trataremos funciones analíticas y holomorfas a más profundidad con el concepto del dominio integral de funciones holomorfas. Finalmente veremos el Teorema de Cauchy general y sus aplicaciones.

Para la unidad final veremos los ceros y las singularidades, tales como Series de Laurent, la clasificación de singularidades, el teorema de los residuos, el teorema de Rouché, y con todo esto encima veremos la aplicación de estos resultados al cálculo de integrales.

1. El cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$

Se define el cuerpo de los números complejos bajo una nueva idea respecto al $\mathbb{R}$-espacio vectorial, se denota $\mathbb{C} = \{a+ib : a,b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$, la diferencia central con $\mathbb{R}^2$ es una propiedad que lo hace distinto al respecto de los espacios vectoriales comúnes reales que veremos más adelante. Se definen las operaciones en este conjunto como:

Sea $z = a+ib, w = c+id$, luego $z+w = (a+c)+i(b+d), \quad z \cdot w = (ac-bd)+i(ad+bc)$ ¿Cuál es la razón de definir las operaciones de esta forma? Evitar los divisores de 0, que conocemos que en $\mathbb{R}^2$ un ejemplo son: $(0,1),(1,0)$, dado que se está construyendo un **cuerpo**, y se necesitan ciertas ataduras en su estructura. Se establece $\hat{0} = 0 + i \cdot 0$ como el neutro aditivo, y también $\hat{1} = 1 + i \cdot 0$ como el neutro multiplicativo, con estas definiciones conseguimos estas propiedades:

Propiedades de Campo

- $+$ es conmutativa y $(\mathbb{C},+)$ es un grupo abeliano.
- $\cdot$ es conmutativa y $(\mathbb{C}/\{0\},\cdot)$ es un grupo abeliano.
- Si $z = a+ib$, entonces el elemento inverso multiplicativo será: $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$.
- Finalmente $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un cuerpo. Lo llamaremos *Cuerpo de los Números Complejos*.

En un número complejo de la forma $z = a+ib$ se ven las siguientes propiedades: $\Re(z) = a, \Im(z) = b$, dónde representan *la parte real de z, y la parte imaginaria de z* respectivamente.

Un número complejo z se considera **imaginario** cuándo $\Re(z) = 0$, y un número complejo w se considera **real** cuándo $\Im(w) = 0$.

Sea $z = a+ib$ tenemos que $\bar{z} := a - ib$ se entiende como ***el conjugado de z***, y corresponde a la parte imaginaria cambiarle el signo. Esta operación unaria representa una reflexión con respecto al eje x.

1.1. Módulo de un complejo y propiedades

Cómo nueva función tenemos la que asigna el concepto de *distancia desde el origen a ese número complejo*, la cuál es la norma del número, se define:

$$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Aquí hay propiedades de un espacio métrico parecidas a las que uno estudia en $\mathbb{R}$, pero la diferencia inicial está aquí, las propiedades son:

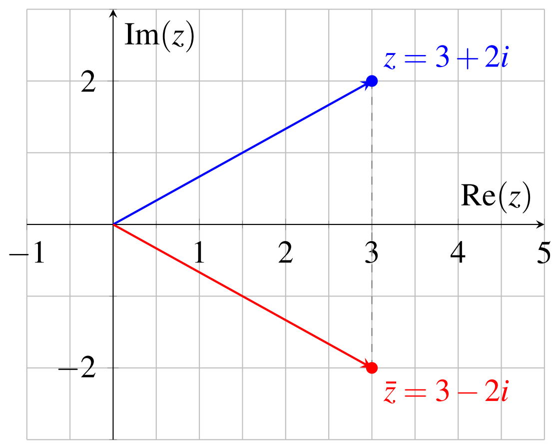

Figura 1: Representación en el plano complejo de $z = 3 + 2i$, y su conjugado $\bar{z} = 3 - 2i$

.

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ Aquí radica la diferencia, los complejos en el producto son un homomorfismo, si recordamos en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial los números que salen en valor absoluto son los escalares, ¡aquí lo hacen los propios elementos del $\mathbb{C}$-eespacio vectorial!
3. $|z + w| \leq |z| + |w|$ Desigualdad Triangular.

Dadas estas propiedades se dan algunas con el conjugado del número complejo z.

Propiedades con el conjugado

1. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
2. $\Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$.
3. $\Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.
4. $z \bar{+} w = \bar{z} + \bar{w}, \quad z \bar{\cdot} w = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
5. $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

1.2. Representación Polar

Otra forma distinta de expresar los números complejos van de la mano con un cambio de coordenadas, dónde diremos que: $z = a + ib = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, dónde $a = r\cos(\theta), b = r\sin(\theta)$. Se da que $r = |z|, \theta := \arg(z)$ son valores únicos tales que $r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$, ó $\theta \in (-\pi, \pi]$. Basado en esto se da que: $i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$. Si tenemos que $z = r(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$, $w = s(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$, resulta que: $z \cdot w = r \cdot s(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$. De esto se obtiene que $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$.

Si tomamos $w = z$, podemos notar que: $z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$, si seguimos inductivamente obtenemos que:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Esa fórmula recién escrita se conoce como la *Fórmula de De Moivre*. Planteemonos la siguiente pregunta:

¿Qué tal resolver para $z_0 \in \mathbb{C}$ fijo la ecuación $w^n = z_0$?, $\quad n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.