

# Morfologia matemàtica

## Menú

### 1. Imatges binàries

- Introducció
- Erosions i dilatacions
- Transformada de distància
- Opening i closing
- Dilatació condicional
- Reconstrucció
- Aplicacions
- Esquelets

## Introducció

- La morfologia és una eina matemàtica que ens permet treballar amb estructures espaials. L'objectiu és l'anàlisi de les formes dels objectes
- Sorgeix a finals dels 70 (*Ecole des mines. Paris*)
- Es popularitza a partir de la publicació de:

J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*.  
Academic Press, 1982.

- Molt útil per a les aplicacions on la forma dels objectes és important.  
P ex: inspecció industrial, ocrs, geologia, imatges biològiques microscòpiques...

- L'enfoc clàssic del processat d'imatges és proper al càlcul matemàtic (concepte de funció imatge, operadors linials ...)
- L'enfoc morfològic es basa en àlgebra no linial i treballa amb conjunts de punts, la seva forma i connectivitat.

## Estructures de base

### PROCESSAT LINIAL

Estructura bàsica: Espai Vectorial

Conjunt de vectors  $V$  i conjunt d'escalars  $K$  tals que:

- 1)  $V$  és un grup commutatiu
- 2)  $K$  és un cos
- 3) Existeix una llei de producte extern entre escalars i vectors

### MORFOLOGIA MATEMÀTICA

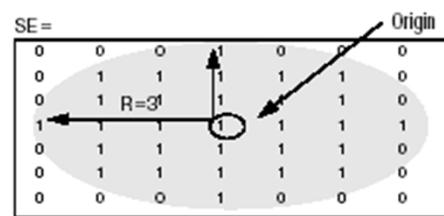
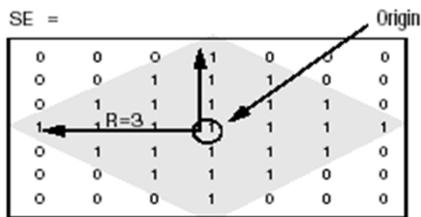
Estructura bàsica: Reticle (lattice)

Conjunt  $L$  tal que:

- 1)  $L$  està dotat d'un ordenament parcial, és a dir una relació  $\leq$  amb:  

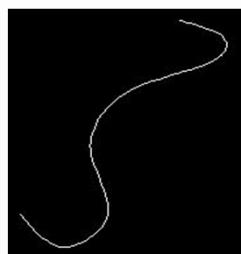
$$\begin{aligned} A &\leq A \\ A \leq B, B \leq A &\Rightarrow A=B \\ A \leq B, B \leq C &\Rightarrow A \leq C \end{aligned}$$
- 2) Per a cada família d'elements  $\{x_i\} \in L$ , existeix en  $L$ :  
 Infim: La major fita inferior  $\wedge \{x_i\}$   
 Suprem: La menor fita superior  $\vee \{x_i\}$

## L'element estructurant



## Dilatació

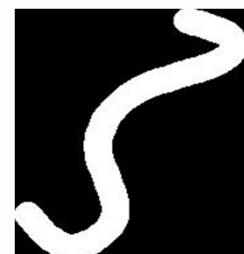
- Cal una imatge i un element estructurant



Imatge original



Element  
estructurant



Imatge dilatada

## Dilatació

$$1 \quad \delta_B(A) = \bigcup (B)_x, x \in A$$

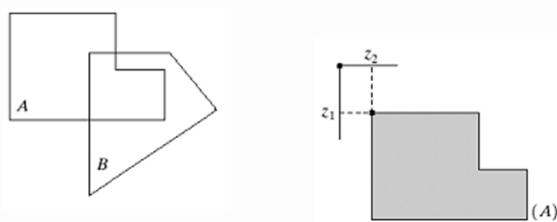
$$2 \quad \delta_B(A) = \bigcup (A)_x, x \in B$$

$$3 \quad \delta_B(A) = \{x | (\check{B})_x \cap A \neq \emptyset\}$$

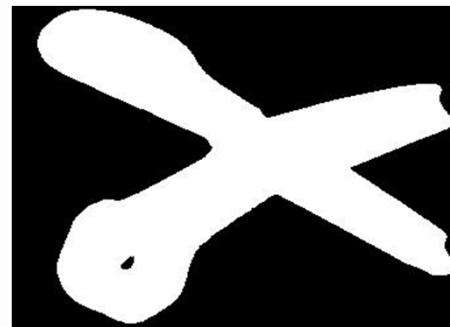
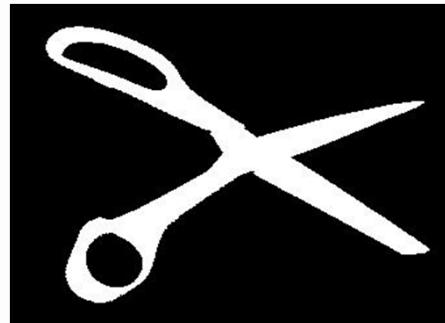
## Traslació

$$f_b(x) = f(x - b)$$

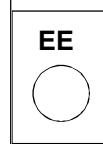
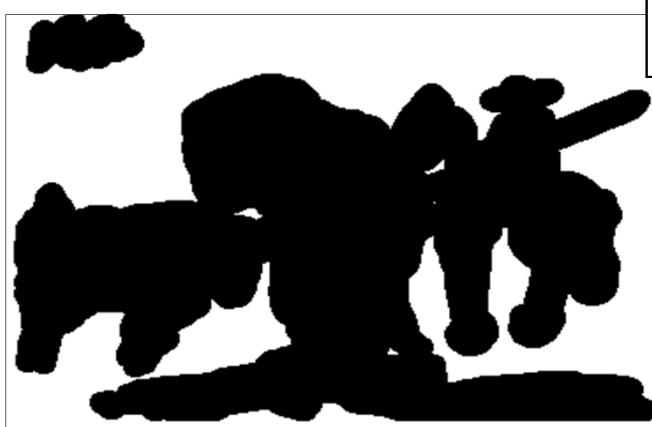
El valor de la imatge trasladada en un pixel  $x$ , és igual al valor de la imatge original en la posició trasladada pel vector oposat



## Dilatació



## Dilatació



## Erosió

- Cal una imatge i un element estructurant



Imatge original



Element  
estructurant

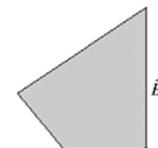
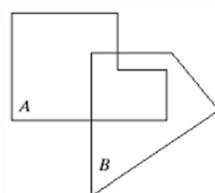


Imatge erosionada

## Reflexió

$$\check{A} = \{-a \mid a \in A\}$$

La reflexió d'un conjunt B es defineix com el seu simètric respecte de l'origen

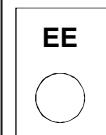


## Erosió

$$^1 \quad \varepsilon_B(f) = \nu(\delta_{\check{B}}(\nu(f)))$$

$$^2 \quad \varepsilon_B(A) = \{x \mid (B)_x \subseteq A\}$$

## Erosió



## Propietats d'erosió i dilatació

- Són duals una respecte de l'altra  $\mathcal{E}_B = C\delta_B C$

- Són creixents

$$f \leq g \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}(f) \leq \mathcal{E}(g) \\ \delta(f) \leq \delta(g) \end{cases}$$

- Composició

$$\delta_{B2}\delta_{B1} = \delta_{(\delta_{B2}^f B1)}$$

$$\delta_{nB} = \delta_B^{(n)}$$

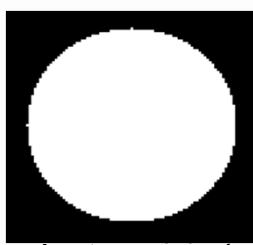
$$\mathcal{E}_{B2}\mathcal{E}_{B1} = \mathcal{E}_{(\delta_{B2}^f B1)}$$

- Relació d'ordre

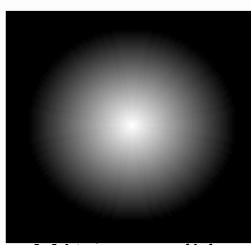
$$\mathcal{E}_B \leq \delta_B$$

## Transformada de distància

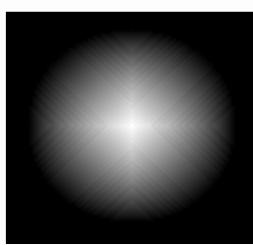
- El valor dels píxels de la imatge resultat representen la distància desde el píxel fins a la vora de la forma connexa a la que pertany



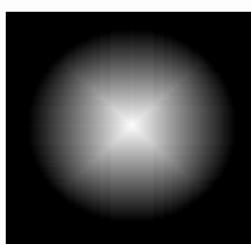
Imatge original



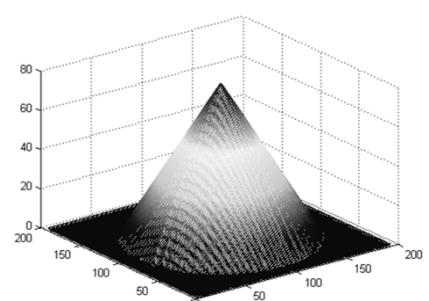
Mètrica euclídea



Mètrica C-8

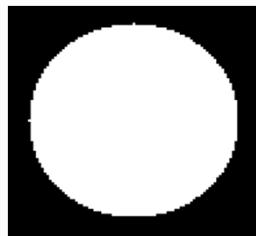


Mètrica C-4

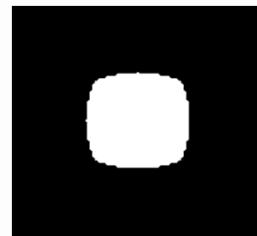


## Transformada de distància

- Combinada amb l'operació 'threshold' emula una erosió.
- L'exemple mostra el resultat de binaritzar (llindar=41) la imatge distància (mètrica C-4). És equivalent a erosionar amb un EE C-4 de radi 41



Imatge original



Imatge resultat

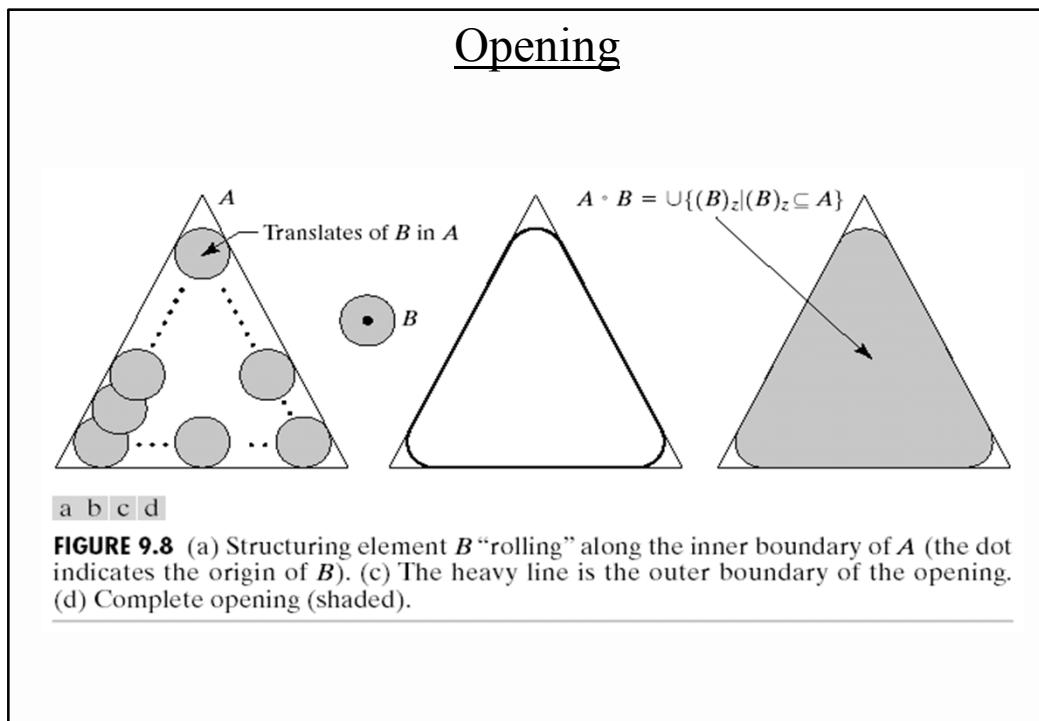
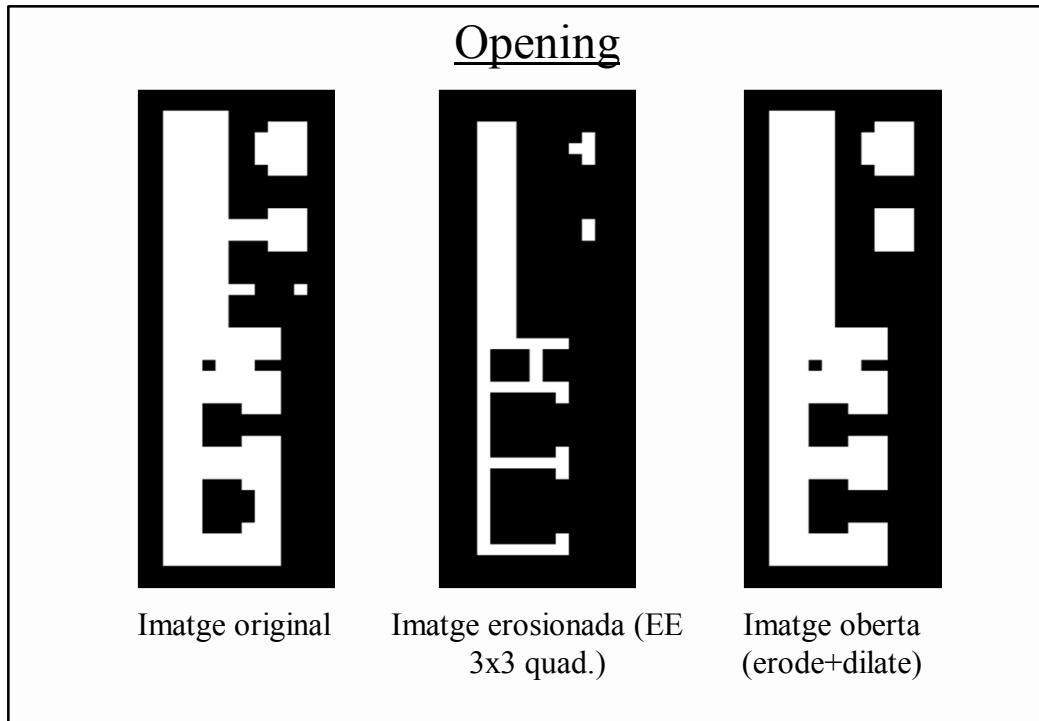
## Opening

- Es pot expressar com la composició d'una erosió seguida d'una dilatació.

$$\gamma_B(f) = \delta_B^{\complement}[\varepsilon_B(f)]$$

- O també directament a base d'operacions de conjunts:

$$\gamma_B(X) = \bigwedge_X \{B_X \mid B_X \subseteq X\}$$



## Closing

- Es pot expressar com la composició d'una dilatació seguida d'una erosió.

$$\phi_B(f) = \epsilon_B^f [\delta_B(f)]$$

- O bé:  $\phi_B(X) = \bigcup_X \{B_X^c \mid X \subseteq B_X^c\}$

- O bé (dualitat amb l'open):

$$\phi_B(X) = \left[ \bigcap_X \{B_X \mid B_X \subseteq X^c\} \right]^c$$

## Closing



Imatge original

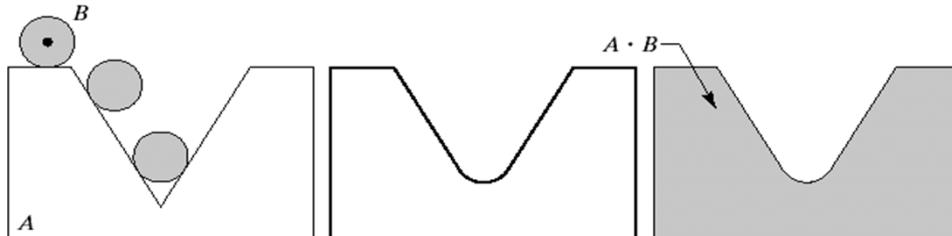


Imatge dilatada (EE  
3x3 quad.)



Imatge tancada  
(dilate+erode)

## Closing



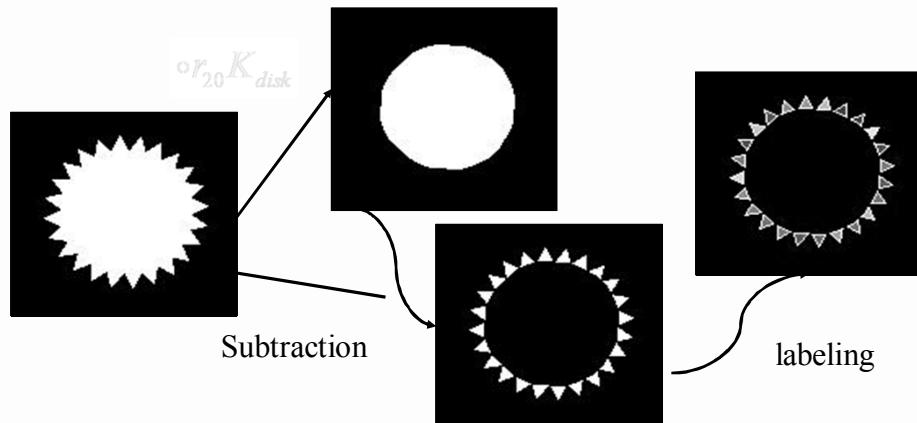
a b c

**FIGURE 9.9** (a) Structuring element  $B$  “rolling” on the outer boundary of set  $A$ . (b) Heavy line is the outer boundary of the closing. (c) Complete closing (shaded).

## Propietats de l'open i el close

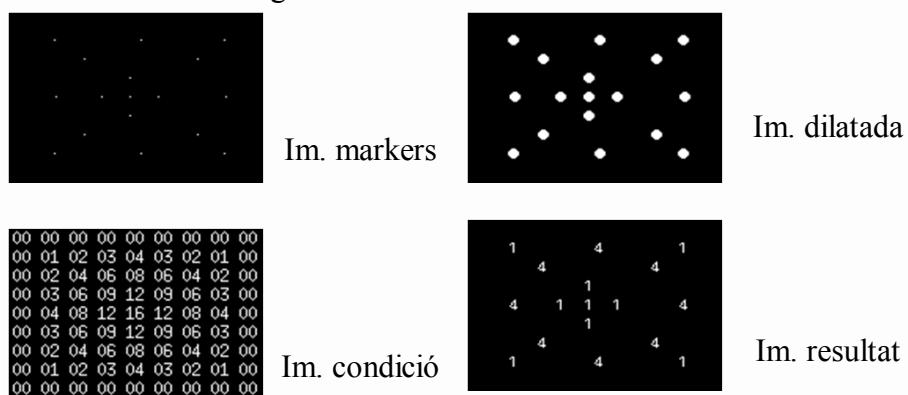
- Invariants a la translació del EE
- Idempotència  $\gamma\gamma = \gamma; \phi\phi = \phi$
- Dualitat  $\gamma_B = C\phi_B C$
- l'open és anti-extensiu i el close és extensiu  $\gamma_B \leq id \leq \phi_B$
- Operadors creixents  $f \leq g \Rightarrow \begin{cases} \gamma(f) \leq \gamma(g) \\ \phi(f) \leq \phi(g) \end{cases}$

## Detecció de les dents



## Dilatació condicional

- Cal una imatge d'entrada (markers), una imatge condicionant i el EE
- El resultat ve donat per la intersecció entre la imatge d'entrada dilatada amb la imatge condicionant



## Reconstrucció

- Cal una imatge d'entrada, una imatge de marques i el EE
- Es van aplicant dilatacions condicionals fins arribar a una imatge estable.

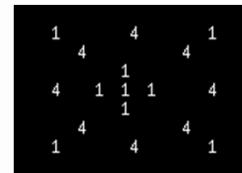
$$\begin{aligned}\delta_{B_c, G}(F) &= \delta_{B_c}(F) \wedge G \\ \delta_{B_c, G}^n(F) &= \underbrace{\delta_{B_c, G}(\delta_{B_c, G}(\cdots \delta_{B_c, G}(f \wedge g)))}_n \\ \gamma_{B_c, F}(G) &= \delta_{B_c, G}^\infty(F)\end{aligned}$$

## Reconstrucció

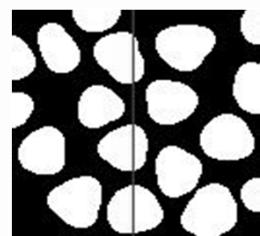
```
00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00  
00 01 02 03 04 03 02 01 00  
00 02 04 06 08 06 04 02 00  
00 03 06 09 12 09 06 03 00  
00 04 08 12 16 12 08 04 00  
00 03 06 09 12 09 06 03 00  
00 02 04 06 08 06 04 02 00  
00 01 02 03 04 03 02 01 00  
00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00
```



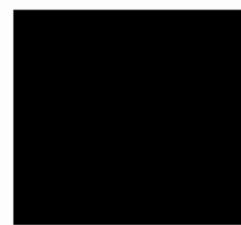
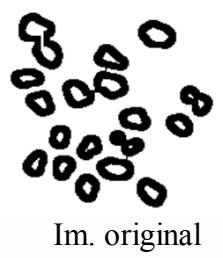
Im. original



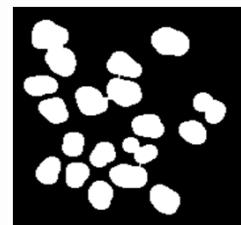
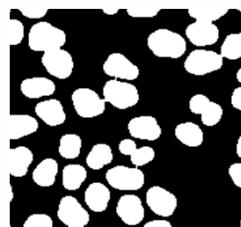
Im. resultat



### Exemple: tancament de forats

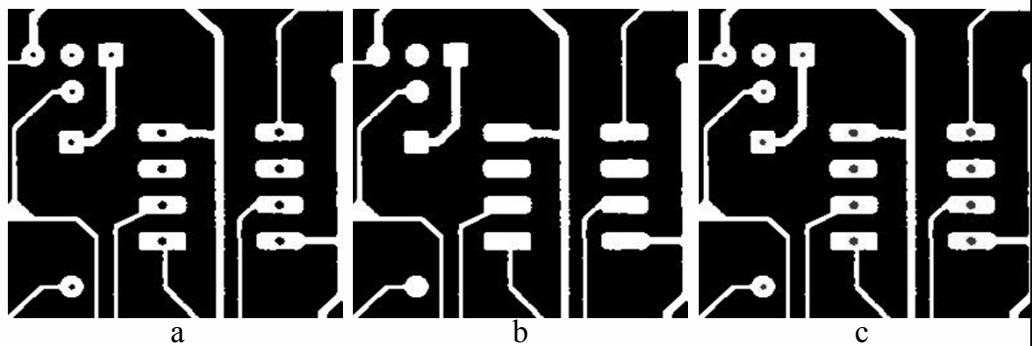


### Exemple: eliminació d'objectes a les vores

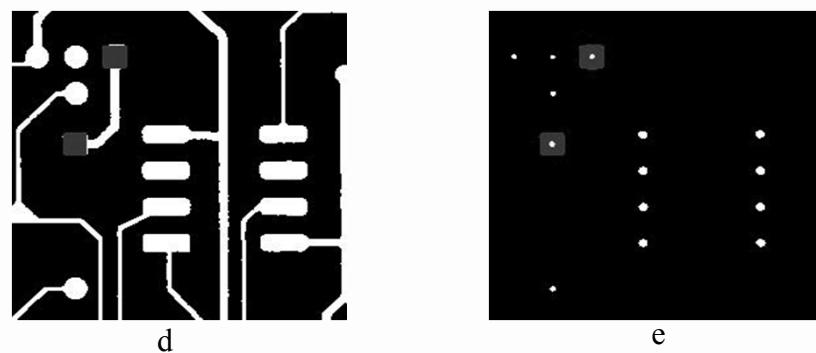


## Aplicacions

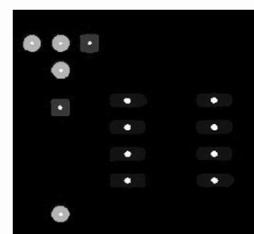
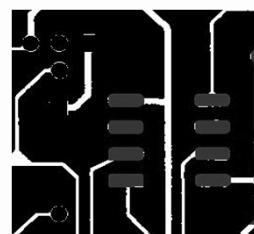
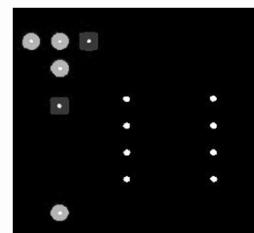
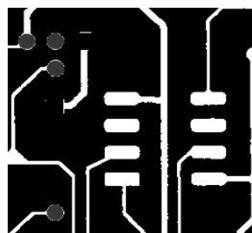
Extracció de les diferents parts d'un circuit imprès



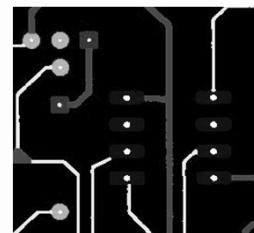
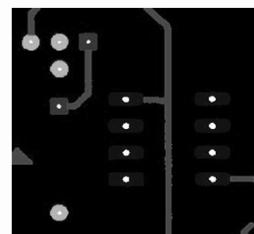
## Aplicaciones



## Aplicaciones



## Aplicaciones



## Open i close per reconstrucció

$$\gamma_R^{(n)}(f) = R_f^\delta [\mathcal{E}^{(n)}(f)]$$

$$\phi_R^{(n)}(f) = R_f^\varepsilon [\mathcal{S}^{(n)}(f)]$$

## Diferències entre open i open by reconstruction



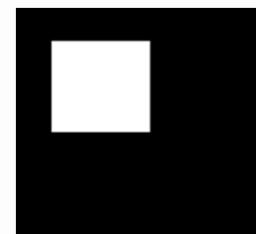
Imatge original



Opening



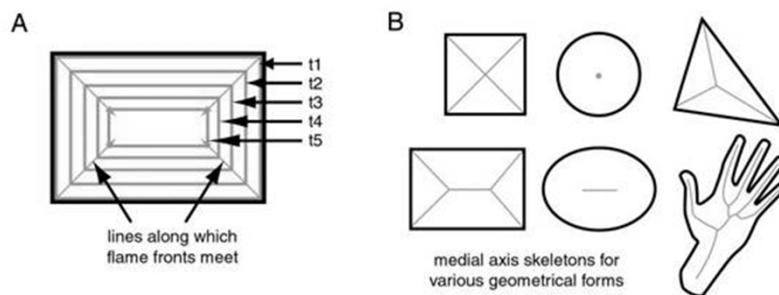
EE



Open by reconstruction

## Esquelets

- Consisteix en afinar l'objecte fins a obtenir un conjunt de línies, preservant la homotopia.
- Les línies resultants són l'esquelet o 'medial axis'
- Transformació idempotent, anti-extensiva i no creixent.
- L'analogia 'grassfire':



## Esquelets

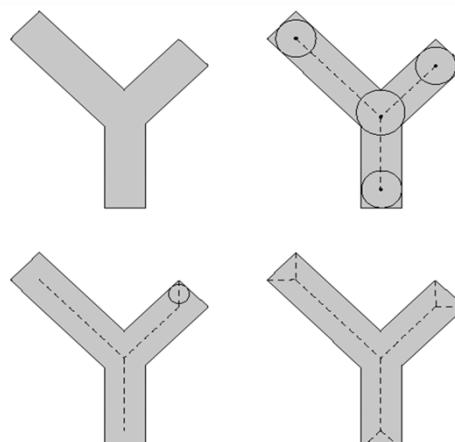
- Maximal disks

$$x \in SK(A) \Leftrightarrow$$

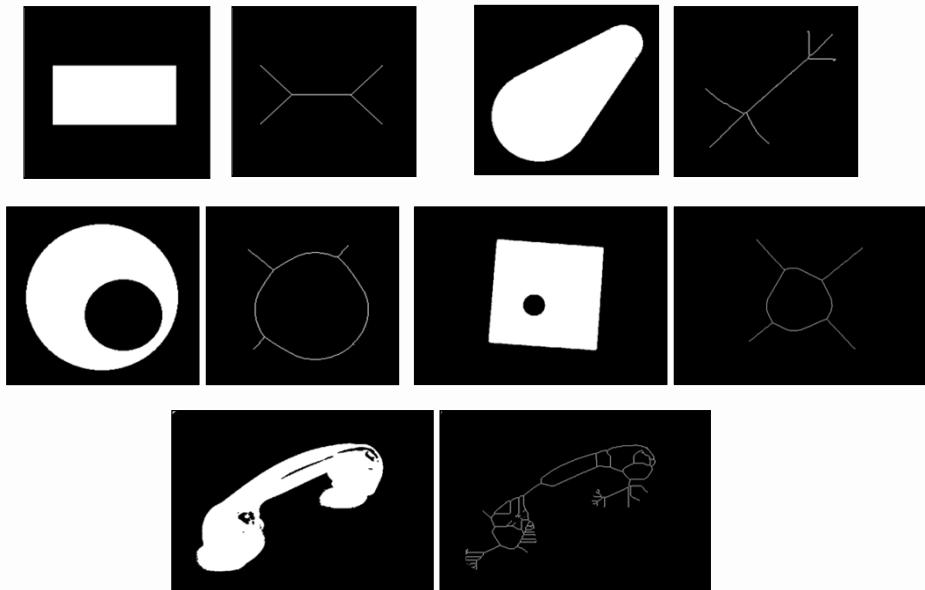
$$\exists y_1, y_2 \in \partial A \mid y_1 \neq y_2 \text{ i } d(x, \partial A) = d(x, y_1) = d(x, y_2)$$

a b  
c d

**FIGURE 9.23**  
 (a) Set  $A$ .  
 (b) Various positions of maximum disks with centers on the skeleton of  $A$ .  
 (c) Another maximum disk on a different segment of the skeleton of  $A$ .  
 (d) Complete skeleton.



## Esquelets. Sensibilitat a variacions del contorn



## SKIZ

- Skeleton by Influence Zones
- Zona d'influència : Conjunt de píxels d'una imatge binària que estan més propers a una component connexa que a la resta
- SKIZ: Vores de les zones d'influència



## Exemple: separació d'objectes solapats

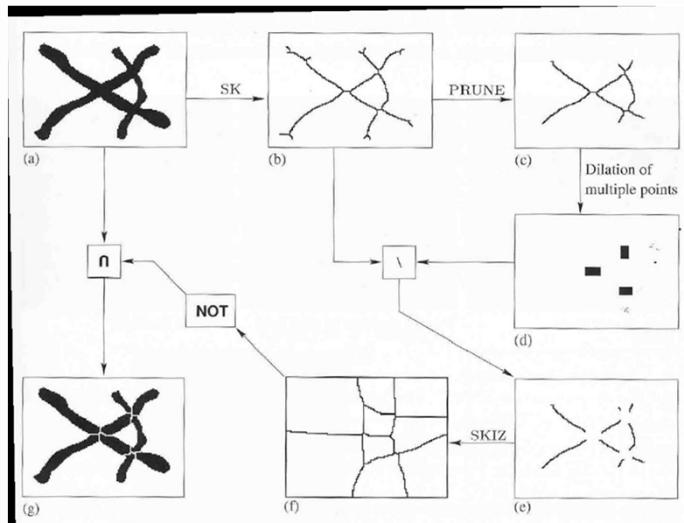


Fig. 5.23. Use of skeletonisation for separating overlapping fibres.

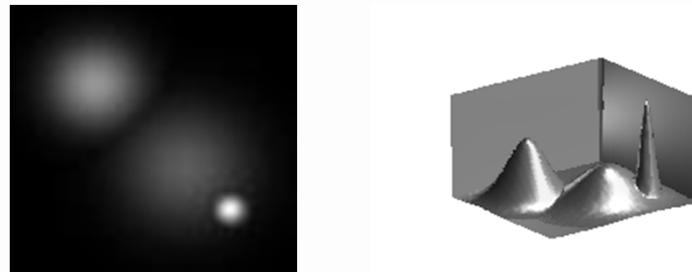
## Menú

### 2. Imatges multinivell

- Extensió a imatges multinivell
- Operadors bàsics sobre imatges multinivell
- Residus
  - Gradient morfològic
  - top-hat
- Reconstrucció multinivell.
- Segmentació morfològica: Watershed
- El problema de la sobresegmentació. Segmentació amb marques
- Màxims i mínims regionals

## Morfologia per a imatges multinivell

- És útil imaginar les imatges multinivell com models d'elevació del terreny. On el nivell de gris de cada píxel representa l'alçada.



- 2 models per extendre els operadors binaris per treballar amb imatges multinivell:

- Descomposició per llindars
- Umbra d'una funció

## Descomposició per llindars

- Una imatge multinivell es pot descomposar en varies imatges binàries (*cross sections*) binaritzant-la a cada nivell de gris.
- La *cross section* de nivell 't' ve donada pel conjunt de tots els píxels de valor major o igual que 't'.  $F(t) = \{x | f(x) \geq t\}$
- La imatge es pot reconstruir a partir de les cross sections.

$$f(x) = \text{Max}\{t | x \in F(t)\}$$

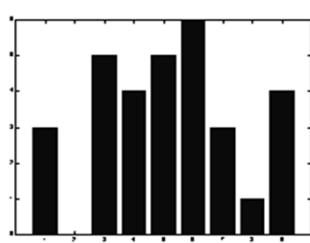


fig.a

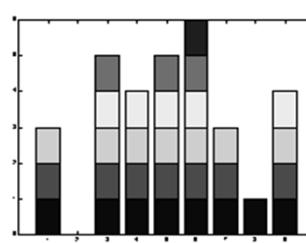
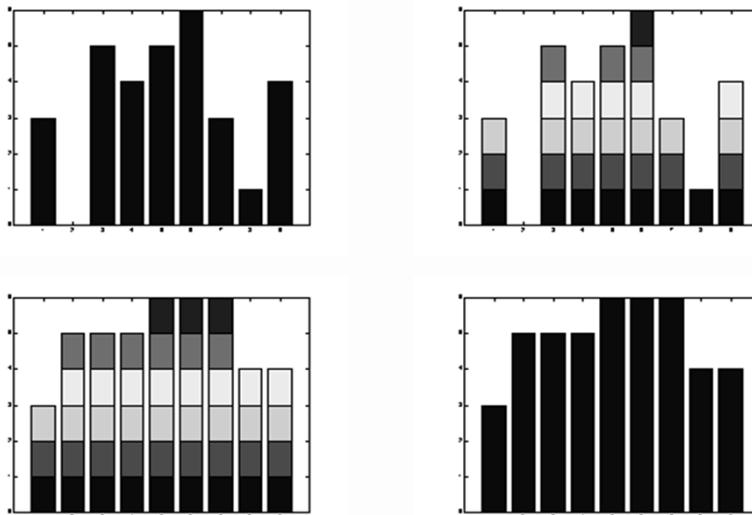


fig.b

## Descomposició per llindars

- Per dilatar una imatge multinivell, la descomposem en cross sections, les dilatem, i recomposem la imatge.

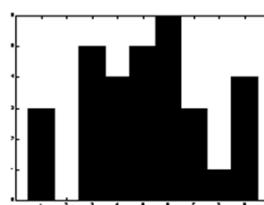


## Umbra d'una funció

- La umbra d'una funció  $f$ ,  $SG(f)$  és el conjunt de punts  $(x,t)$  que queden per sota la funció.  $SG(f) = \{(x, t) | 0 < t \leq f(x)\}$
- Per a recuperar la funció a partir de la umbra, busquem la top surface. El top d'un conjunt ve donat per:

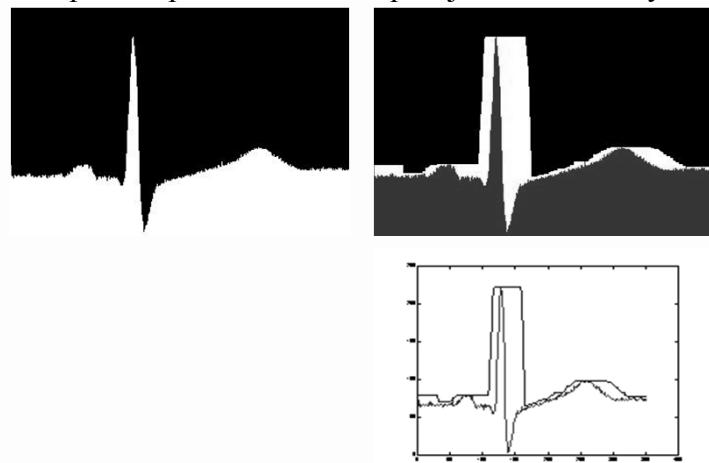
$$T(A)(x) = \begin{cases} \max\{t | (x, t) \in A\} & \text{if } (x, t) \notin A \\ 0 & \text{if } (x, t) \in A \end{cases}$$

- Cal afegir una dimensió més a la funció per a convertir-la en un conjunt. La figura ens mostra un senyal 1D representat com a imatge binària 2D



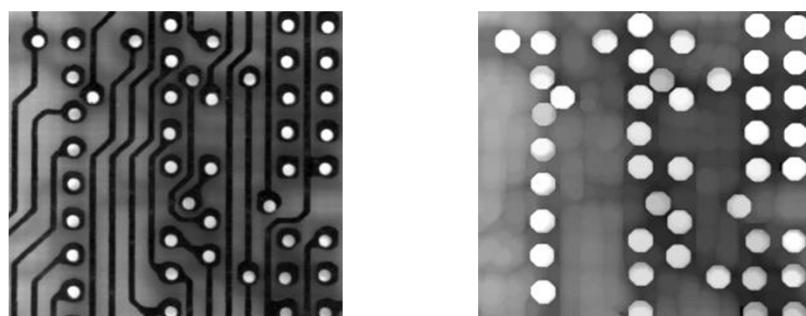
## Umbra d'una funció

- El dilate de la imatge multinivell és el top del dilate binari de la seva umbra.  $\delta_B(f) = T(\delta_B(SG(f)))$
- Representem la umbra d'un senyal ECG com imatge binària. El dilatem. Obtenim el top i el representem en un plot junt amb el senyal original:



## Dilatació multinivell

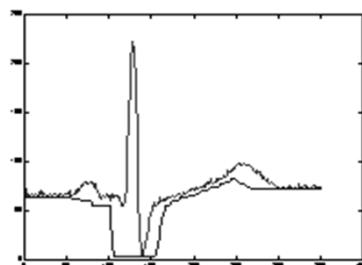
$$\delta_B(f)(x) = \max\{f(y) : y \in (\check{B} + x)\}$$



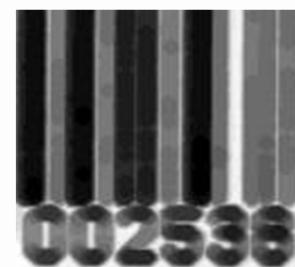
### Erosió multinivell

$$\varepsilon_B(f)(x) = \min\{f(y) : y \in (B + x)\}$$

- La imatge mostra el resultat de erosionar un senyal 1D usant un EE assimètric.

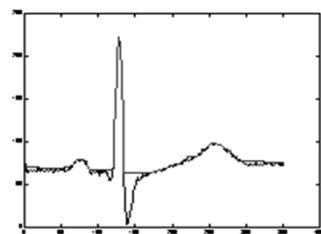


### Erosió multinivell

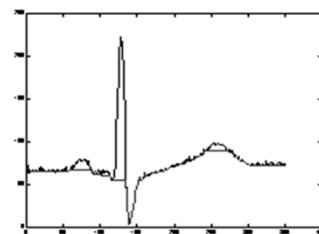


## Open i Close multinivell

- Es construeixen obviament a partir del dilate i erode.
- Les imatges mostren el resultat de obrir i tancar un senyal 1D usant un EE de mida 30

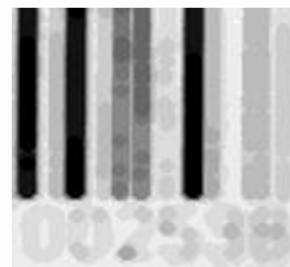


close



open

## Open i Close multinivell



close



open



## Aplicacions de l'opening

Filtrat de soroll impulsional

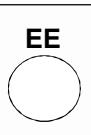
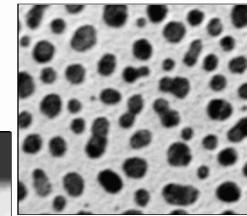
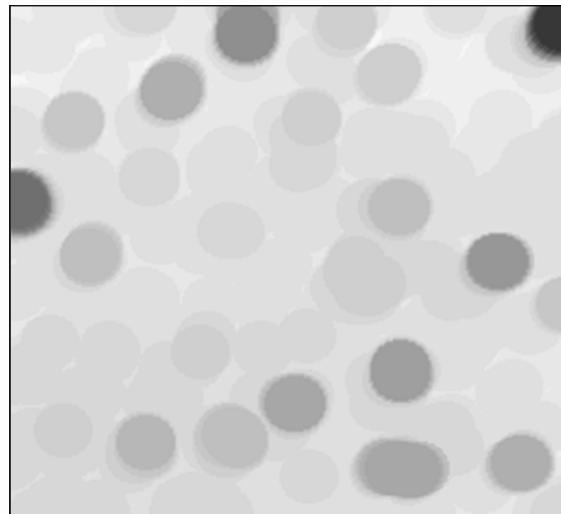


## Aplicacions de l'opening

Filtrat de soroll impulsional amb operador gaussià



## Closing multivell



## Residus

- És la part de la imatge que ha estat eliminada al filtrar.
- Diferenciem dos grups: gradient morfològic i top-hat.

- Gradient morfològic:

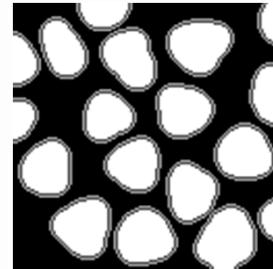
- intern (imatge – erosió)
- extern (dilatació – imatge)
- tots dos ( dilatació – erosió)  $\rho_B = \delta_B - \varepsilon_B$
- Laplaciana (gradient extern – gradient intern)

- Top hat:

- open top-hat (imatge – opening)  $WTH(f) = f - \gamma(f)$
- close top-hat (closing – imatge)  $BTH(f) = \phi(f) - f$

## Extracció de contorns

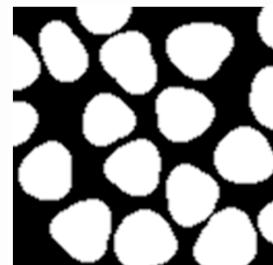
- Usarem el gradient morfològic



doble



intern



extern

## Extracció de contorns

- La mida del EE determina el gruix del contorn

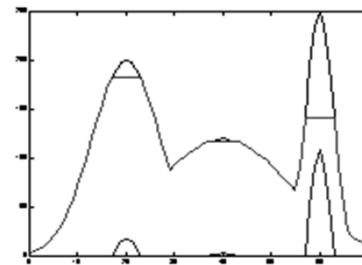
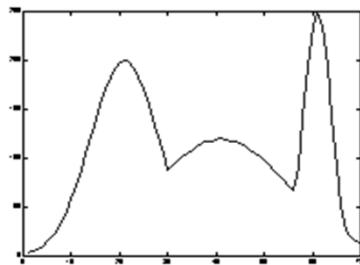


- Podem extreure gradients d'imatges multinivell:



## Open top-hat

- Detectem pics més estrets que el EE.



## Open top-hat

- La imatge original està corrompuda amb iluminació no uniforme.
- Recuperem la imatge original amb un top-hat.
- Cal fer l'opening usant un EE més gruixut que les estructures de la imatge original

wed by erosion  
cal filter:  
 $(f) = \Psi(\Psi(f))$   
 $< g \Rightarrow \Psi(f) <$

Original

wed by erosion  
cal filter:  
 $(f) = \Psi(\Psi(f))$   
 $< g \Rightarrow \Psi(f) <$

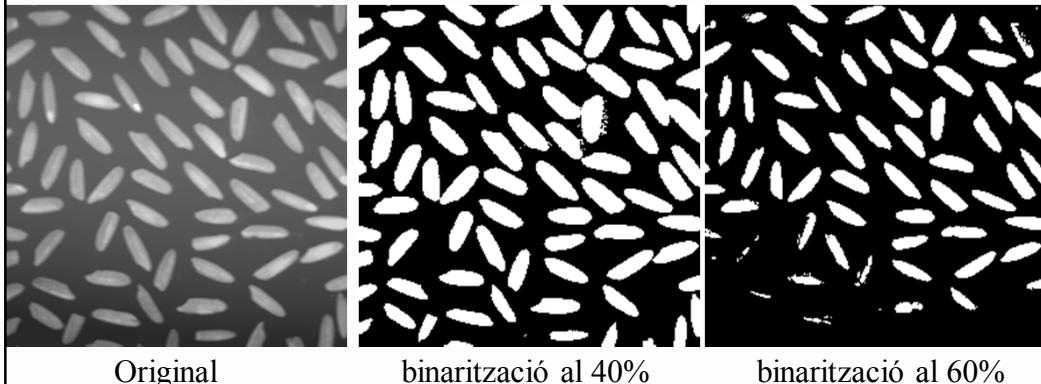
Open

wed by erosion  
cal filter:  
 $(f) = \Psi(\Psi(f))$   
 $< g \Rightarrow \Psi(f) <$

Top-hat

## Open top-hat

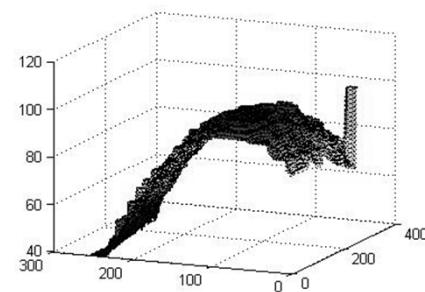
- Volem segmentar els grans d'arròs
- La imatge està corrompuda amb iluminació no uniforme.



## Open top-hat

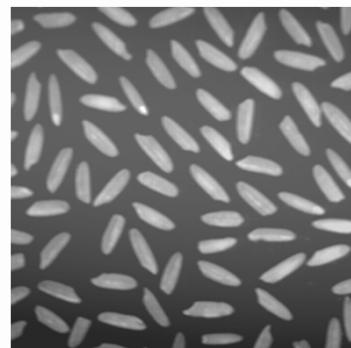


Opening

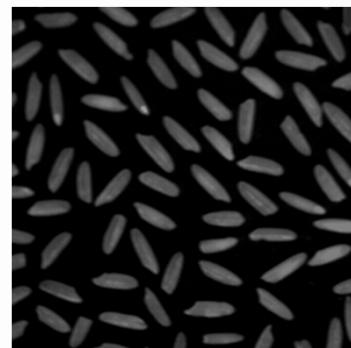


Representació 3D

### Open top-hat

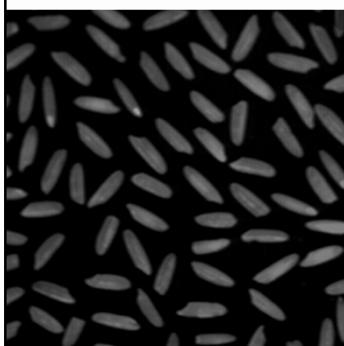


Original



top hat

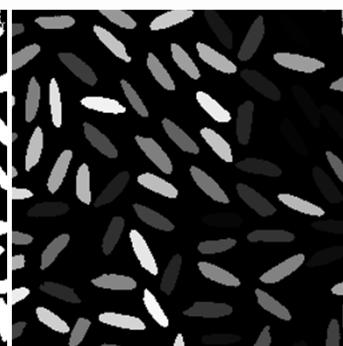
### Open top-hat



top hat



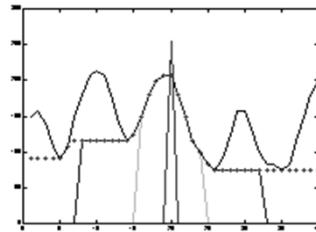
binarització al 16%



imatge etiquetada

## Reconstrucció multinivell

- Es defineix igual que la binària: seqüència infinita de dilatacions del marker condicionades a la imatge original



-Reconstrucció per dilatació:

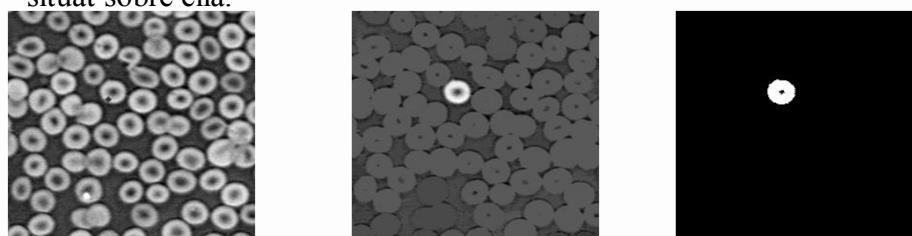
$$R_g^\delta(f) = \delta_g^\infty(f)$$

-Reconstrucció per erosió:

$$R_g^\varepsilon(f) = \varepsilon_g^\infty(f)$$

## Reconstrucció multinivell

- Segmentem una única cel.lula a partir d'un pixel de valor 255 (marker) situat sobre ella.

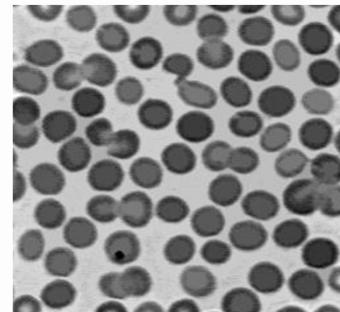
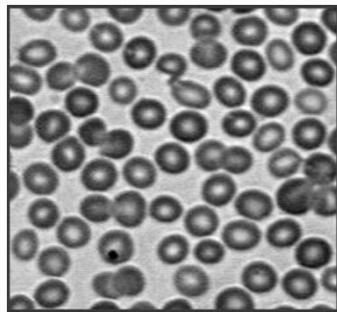


- Segmentem els carrers del mapa situant el marker sobre un dels carrers



## Exemple: eliminació de regions aïllades

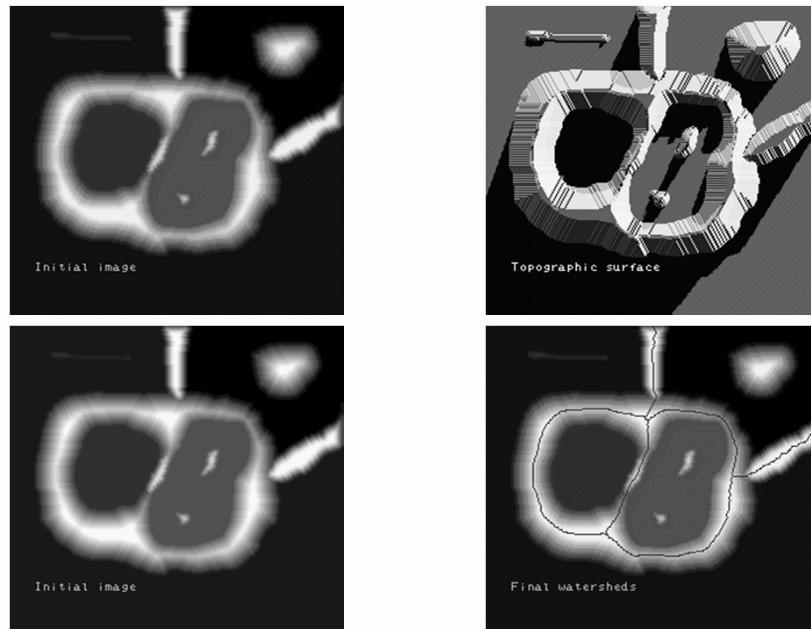
- Eliminem el centre de les cel·lules de la imatge
- Creem un marc de imatge de valor 255 (marker)



## watershed

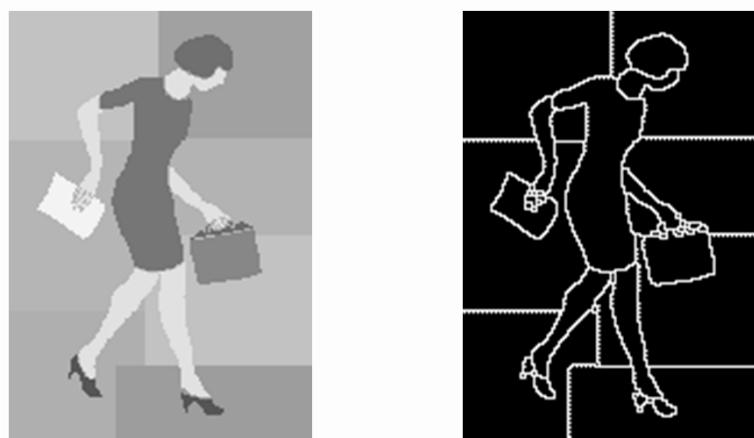
- Eina per a segmentació morfològica
- La imatge multinivell s'interpreta com una superficie topogràfica
- Descripció intuitiva: inundació
  1. Representar la imatge com un relleu de plàstic
  2. Foradem el plàstic en els mínims locals de la imatge (o en els markers)
  3. Submergem el plàstic en aigua progressivament
  4. L'aigua que entra per cada forat s'etiqueta amb l'identificador del marker corresponent
  5. Quan aigües de diferents procedències es troben, aixequem una pared per a evitar que es barregin
  6. L'algorisme segueix fins que tot ha estat anegat
  7. Finalment les parets representen les línies de watershed
  8. La imatge queda particionada en regions

## watershed



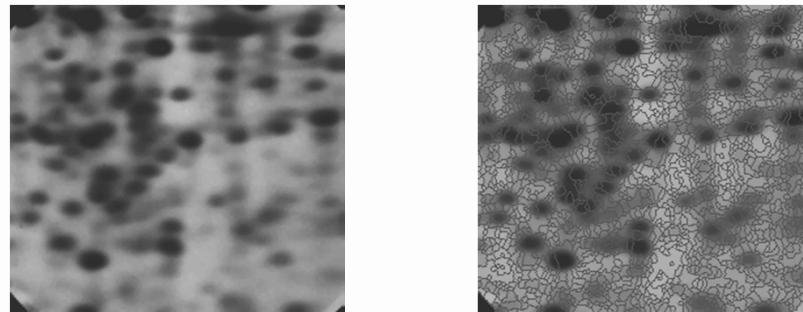
## Watershed. Exemple

- Metodologia per segmentar (1)
  1. Obtenir la imatge gradient
  2. watershed a la imatge gradient a partir dels seus mínims



## Watershed. La sobresegmentació

- Metodologia per segmentar (1)
  1. Obtenir la imatge gradient
  2. watershed a la imatge gradient a partir dels mínims



- Problema: Sobre-segmentació deguda al soroll o a petites irregularitats en la imatge gradient

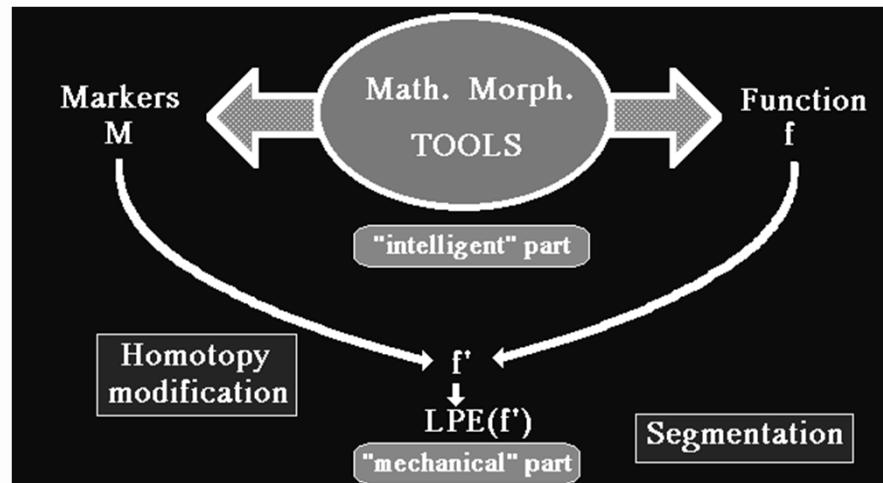
## watershed amb markers

- Metodologia per segmentar (2)
  1. Obtenir la imatge gradient
  2. Buscar markers, un per cada objecte a segmentar
  3. watershed a la imatge gradient a partir dels markers



- Ara, el problema de la segmentació consisteix en trobar els markers

## Watershed. El paradigma

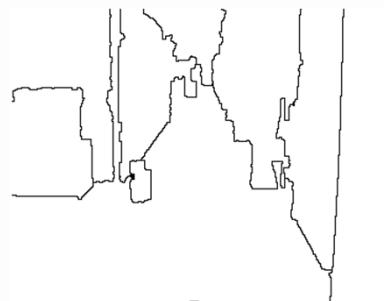
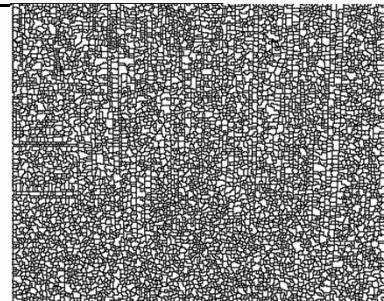


## watershed amb markers

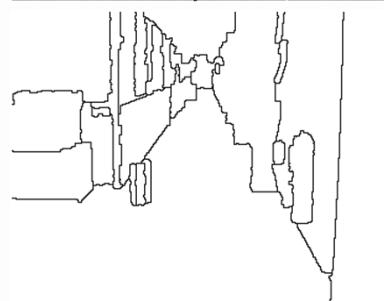
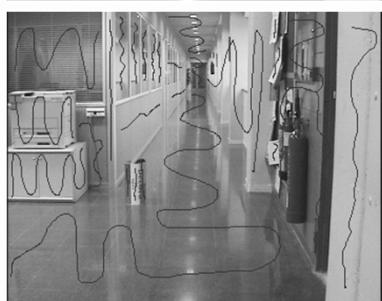
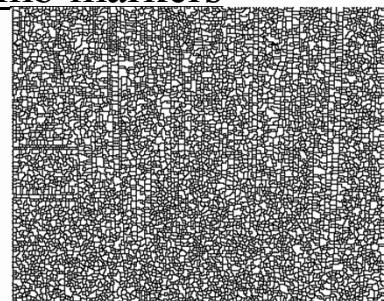
- Segmentació de carreteres. Els markers s'han collocat manualment



watershed amb markers

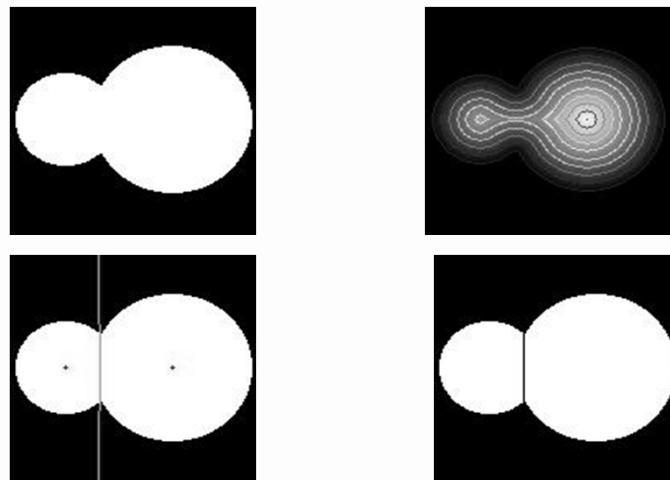


watershed amb markers



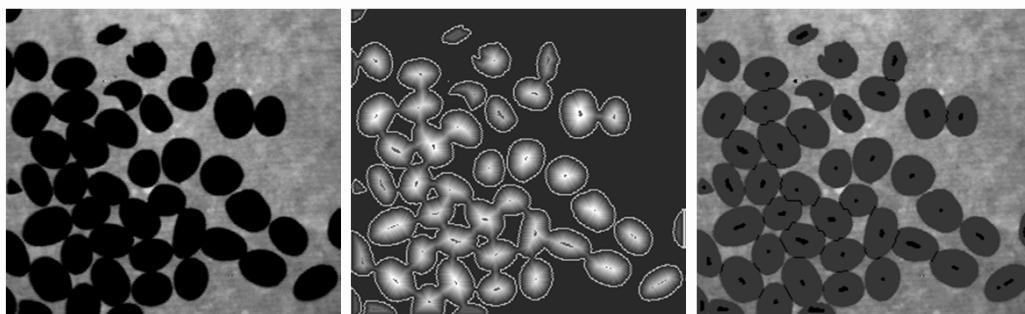
## Separació de touching-blobs

- Transformada de distància + watershed
- Els màxims de la transformada de distància seran els markers
- Watershed sobre la inversa de la transformada de distància



## watershed amb markers

- Segmentació de grans de cafè. Els markers s'han trobat localitzant els màxims de la transformada de distància



## Màxims i mínims regionals

- Un màxim (mínim) regional és una regió connexa on tots els píxels veïns tenen un valor estrictament menor (major).
- Les imatges reals tenen masses màxims i mínims regionals.
- Cal filtrar per a reduir el nombre de màxims i mínims.
- Els extrems regionals trobats solen ser bons markers per al watershed.



Original



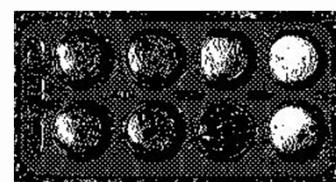
Extrems regionals

## Màxims i mínims regionals

- Les tècniques de filtratge es basen en:
  - contrast: h-max, h-min
  - forma: Opening
  - mida: AreaOpening



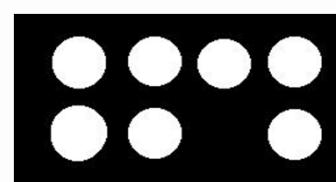
Original



Extrems regionals



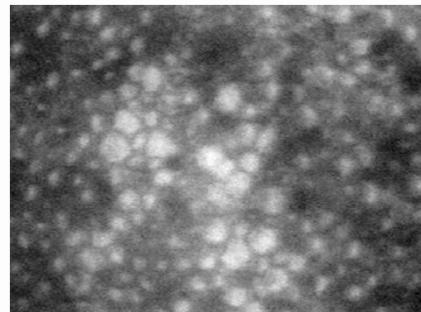
Opening



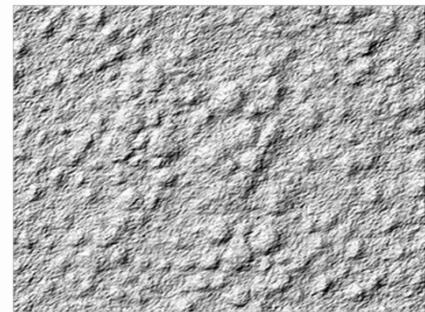
Extrems regionals de la imatge filtrada

## Segmentació usant màxims regionals

- Volem segmentar les cel·les d'una imatge de la cornea.
- La imatge és molt sorollosa

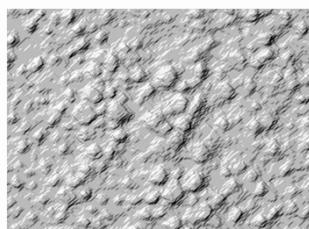


Imatge Original

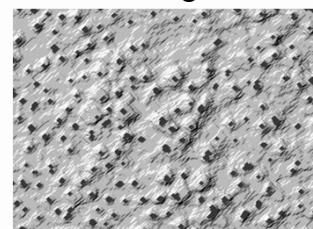


Imatge en relleu

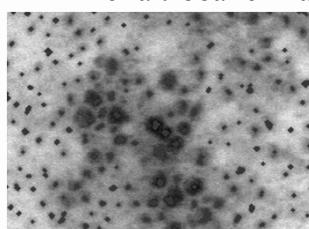
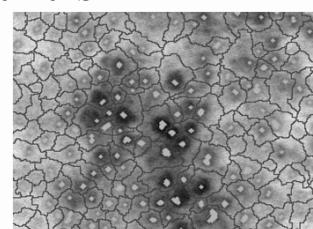
- Per a eliminar soroll apliquem un filtre open-close
- Per trobar els markers busquem els màxims regionals



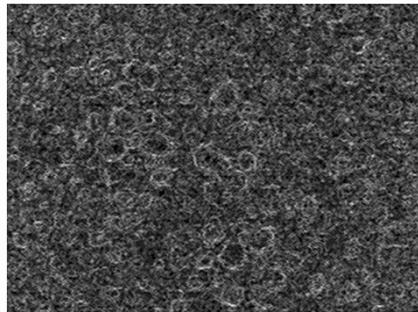
filtrada

màxims  
regionals

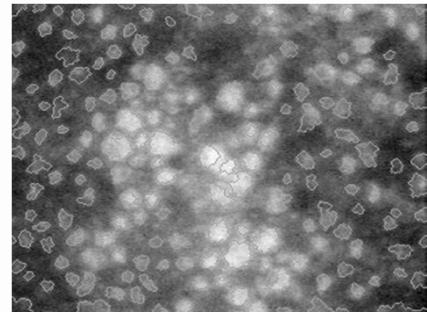
- Per a trobar el marker del fons fem el SKIZ

markers de  
les cel·lesmarkers de  
cel·les i fons

- Segmentem la imatge amb watershed sobre la imatge gradient usant els markers obtinguts



Imatge gradient



Imatge segmentada