

Processamento de Sinais Biológicos

02/2014 – Lista de exercícios 2

Tópicos tratados:

1. Conceitos básicos de bancos de filtros.
2. Componentes básicos de sistemas multitaxa: blocos sobreamostrador e subamostrador.
3. Efeitos dos blocos sobreamostrador e subamostrador nos domínios do tempo, z e das frequências.
4. Propriedades de equivalência entre sistemas multitaxa (propriedades nobres).
5. Condições para reconstrução perfeita em bancos de filtro multitaxa.
6. Bancos do tipo *quadrature mirror filters* (QMFs).

Questão 1

Demonstre que os sistemas amostrador e subamostrador das figuras a seguir, onde M representa um inteiro maior que 1, são lineares e variantes no tempo.



Questão 2

Para os sistemas da questão anterior, demonstre a expressão para a transformada- z de $y[n]$ em função da transformada- z de $x[n]$.

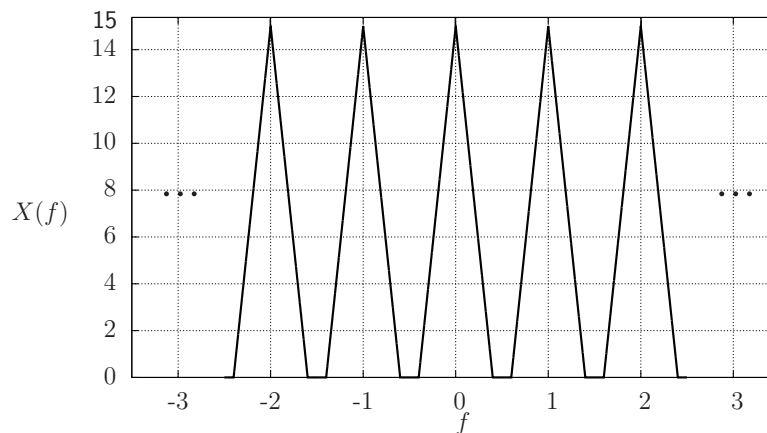
Questão 3

Com base em sua resposta ao item anterior, calcule a expressão para a transformada de Fourier em tempo discreto (DTFT) da saída do sobreamostrador e para a DTFT da saída

do subamostrador, em função da DTFT da entrada.

Questão 4

Calcule o sinal no domínio do tempo discreto cuja transformada de Fourier em tempo discreto (DTFT) é a representada no gráfico a seguir.



Em seguida, janele o sinal obtido com uma janela retangular de comprimento $N = 1024$ e registre no MatLab o sinal obtido.

Com base nesse sinal de comprimento $N = 1024$, desenvolva os seguintes itens.

- Calcule no MatLab a transformada discreta de Fourier (DFT) do sinal obtido, trace o gráfico correspondente e compare com o gráfico da DTFT. Comente com base no janelamento e na relação entre a DFT e a DTFT.
- Ainda no MatLab, passe o sinal por um subamostrador de fator 2. Em seguida, calcule a DFT do sinal resultante, trace o gráfico e compare com o resultado obtido no item a. Comente com base na sua resposta à questão anterior.
- Ainda no MatLab, passe o sinal por um sobreamostrador de fator 2. Em seguida, calcule a DFT do sinal resultante, trace o gráfico e compare com o resultado obtido no item a. Comente com base na sua resposta à questão anterior.

Questão 5

Demonstre a equivalência entre os seguintes pares de sistemas.

$$\text{a) } X(z) \longrightarrow \boxed{\uparrow 2} \longrightarrow \boxed{H(z^2)} \longrightarrow Y(z) \quad \equiv \quad X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow \boxed{\uparrow 2} \longrightarrow Y(z)$$

$$\text{b) } X(z) \longrightarrow \boxed{\downarrow 2} \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z) \quad \equiv \quad X(z) \longrightarrow \boxed{H(z^2)} \longrightarrow \boxed{\downarrow 2} \longrightarrow Y(z)$$

Questão 6

Usando apenas as propriedades de cada bloco, sem reagrupar ou simplificar os blocos, determine a relação entre as saídas e as entradas, para o seguinte sistema.

$$X(z) \longrightarrow \boxed{\uparrow 2} \longrightarrow \boxed{1-5z^2-3z^6} \longrightarrow \boxed{\downarrow 4} \longrightarrow \boxed{1+2z^{-1}-3z^2} \longrightarrow \boxed{1+5z^2+2z^4} \longrightarrow \boxed{\downarrow 2} \longrightarrow Y(z)$$

Questão 7

Simplifique o diagrama da questão anterior, usando as propriedades nobres, de forma a se obter um único filtro e um único bloco sobreamostrador ou subamostrador. Em seguida, obtenha a relação entre a entrada e a saída com base no diagrama simplificado, e compare o resultado com o da questão anterior.

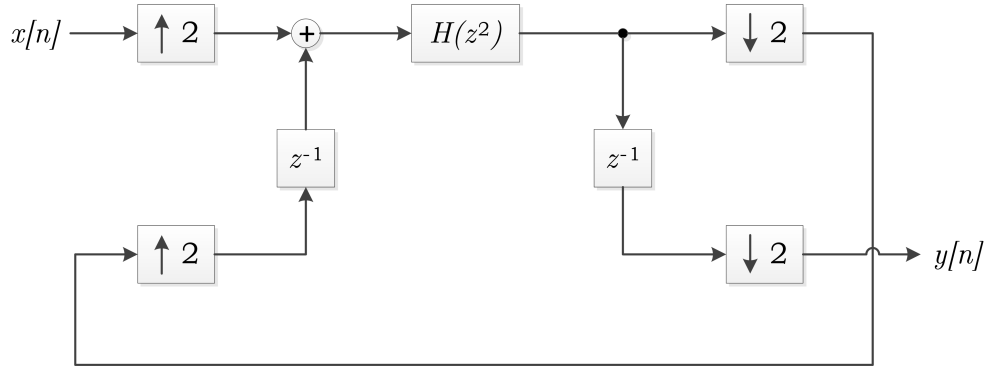
Questão 8

(Adaptada do problema 13.11 em [1]) Obtenha a relação entre a saída $y[n]$ e a entrada $x[n]$ na estrutura multitaxa da figura a seguir.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{z^6} \longrightarrow \boxed{\downarrow 2} \longrightarrow \boxed{\uparrow 4} \longrightarrow \boxed{\downarrow 3} \longrightarrow y[n]$$

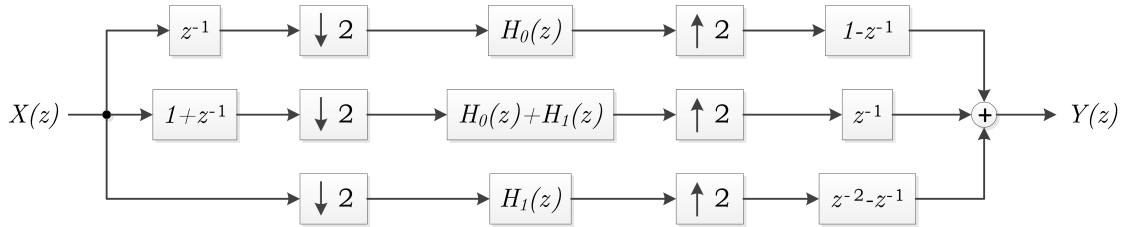
Questão 9

(Adaptada de 13.43 em [1]) Demonstre que o sistema multitaxa da figura a seguir é linear e invariante no tempo. Determine a função de transferência correspondente.



Questão 10

(Adaptada de 13.40 em [1]) A estrutura da figura a seguir foi proposta por Vetterli [3] como uma forma computacionalmente eficiente para se implementar um filtro de resposta finita ao impulso.



- Mostre que a estrutura é livre de *aliasing*, e calcule a função de transferência global em função de $H_0(z)$ e $H_1(z)$.
- Determine a função de transferência do sistema para o caso em que

$$H_0(z^2) = \frac{1}{2}[H(z) + H(-z)]$$

e

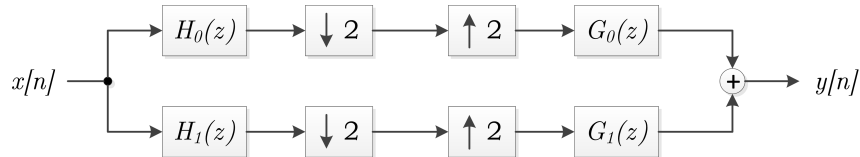
$$H_1(z^2) = \frac{1}{2}[H(z) - H(-z)]z.$$

Expresse o resultado em termos de $H(z)$.

- Se $H(z)$ é um filtro FIR de comprimento $2K$, quais os comprimentos dos filtros $H_0(z)$ e $H_1(z)$?
- No caso do item anterior, determine o número de multiplicações necessárias para se implementar o sistema acima, para um dado comprimento do sinal de entrada.

Questão 11

Considere o banco QMF apresentado na figura a seguir.



Determine se o banco de filtros em questão é de reconstrução perfeita, para o seguinte conjunto de filtros:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= -0.1294 + 0.2241z^{-1} + 0.8365z^{-2} + 0.4830z^{-3}, \\ H_1(z) &= -0.4830 + 0.8365z^{-1} - 0.2241z^{-2} - 0.1294z^{-3}, \\ G_0(z) &= 0.4830 + 0.8365z^{-1} + 0.2241z^{-2} - 0.1294z^{-3}, \\ G_1(z) &= -0.1294 - 0.2241z^{-1} + 0.8365z^{-2} - 0.4830z^{-3}. \end{aligned}$$

Questão 12

Com auxílio do MatLab, realize a decomposição do sinal de ECG fornecido no arquivo ECG1 (veja o *Moodle*), utilizando o QMF da questão anterior iterado com 3 níveis (utilize apenas as 1024 primeiras amostras do sinal). Realize também a reconstrução do sinal, utilizando o banco de filtros de síntese.

- Compare o sinal reconstruído com o sinal original. Comente as diferenças.
- Compare a transformada obtida (coeficientes calculados na decomposição) com a transformada de Haar calculada em sala de aula (o código correspondente também se encontra no *Moodle*). Comente as diferenças

Questão 13

Ainda com base no banco QMF de 2 canais com filtros

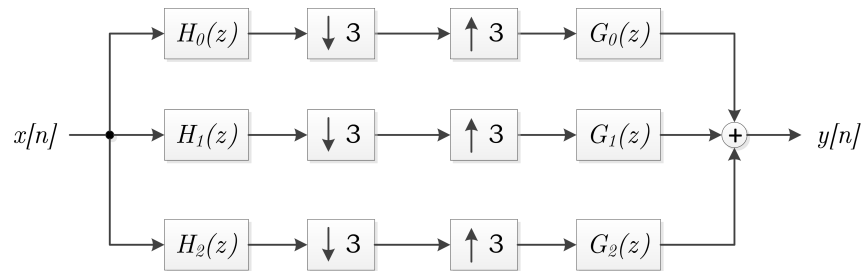
$$\begin{aligned} H_0(z) &= -0.1294 + 0.2241z^{-1} + 0.8365z^{-2} + 0.4830z^{-3}, \\ H_1(z) &= -0.4830 + 0.8365z^{-1} - 0.2241z^{-2} - 0.1294z^{-3}, \\ G_0(z) &= 0.4830 + 0.8365z^{-1} + 0.2241z^{-2} - 0.1294z^{-3}, \\ G_1(z) &= -0.1294 - 0.2241z^{-1} + 0.8365z^{-2} - 0.4830z^{-3}, \end{aligned}$$

trace os gráficos das magnitudes das respostas em frequência, para os bancos de filtros

- a) sem iteração;
- b) iterado com 2 níveis;
- c) iterado com 3 níveis;
- d) iterado com 4 níveis.

Questão 14

A estrutura da figura a seguir corresponde a um banco QMF de 3 canais. Deduza as condições para reconstrução perfeita nesse banco de filtros. (Veja [2] e [1] para a generalização do resultado para L canais).



Questão 15

Considere o sinal de eletrocardiografia disponibilizado no *Moodle* para esta questão (arquivo `ecg1.mat`). Utilizando o banco QMF com 3 níveis baseado nos filtros Daubechies 45:

- a) Decomponha o sinal em questão e forneça o gráfico da transformada de Daubechies obtida.
- b) Reconstrua o sinal utilizando os filtros de síntese iterados. Forneça o gráfico do sinal reconstruído e compare com o sinal original.

Questão 16

Considere novamente o sinal de ECG do arquivo `ecg1.mat`. Este exercício aborda um processo de redução de ruído (*denoising*) baseado em bancos de filtro. Alguns parâmetros serão ajustados por você, com base em algumas experimentações.

Comece adicionando ao sinal um ruído gaussiano branco, com variância v (varie v de 1% a 15% da energia total do sinal). Para isso, utilize o comando

```
x_ruído = x + sqrt(v) * randn(size(x));
```

em seguida:

- Decomponha o sinal (ruidoso) em questão. Forneça o gráfico da transformada de Daubechies obtida para os exemplos com o menor v e o maior v (seu programa deve calcular a decomposição em todos os casos).
- Aplique um processo de limiarização aos coeficientes de saída de cada filtro do banco de filtros, com o limiar L (*threshold*) maior para as bandas de maiores frequências. Neste processo de limiarização, os coeficientes maiores que L são mantidos, os demais são zerados. Os valores exatos de L serão determinados por você, empiricamente, pela análise da saída – veja o item seguinte; no final, adote um único conjunto de limiares (não é necessário ajustá-los para cada v , embora na prática isto possa levar a resultados melhores).
- Reconstrua o sinal utilizando os filtros de síntese iterados, aplicados aos coeficientes obtidos após a limiarização. Forneça o gráfico do sinal reconstruído e compare com o sinal original (apresente os gráficos apenas para o menor e o maior v).
- Apresente uma tabela com os valores de relação sinal-ruído em dB (SNR_{dB}) na entrada e na saída do seu sistema implementado.

Questão 17

Bancos de filtros podem ser utilizados para extrair características de sinais biológicos, pela decomposição da informação em bandas de frequências de interesse.

Os sinais de eletroencefalografia (EEG), por exemplo, são comumente estudados em suas ondas delta, teta, alfa, beta, gama etc. Considerando a tabela de bandas de EEG seguir, programe um banco de filtros que extraia os coeficientes de cada banda, para sinais amostrados a 1 kHz. Utilize filtros do tipo IIR (você pode utilizar o MatLab para projeto dos filtros).

Aplique o banco de filtros ao sinal de EEG fornecido no *Moodle* para esta questão (arquivo `eeg1.mat`). Trace os gráficos das ondas extraídas.

Tipo de onda	Faixa de frequências (Hz)
Delta	0 a 4
Teta	4 a 7
Alfa	7 a 14
Beta	15 a 30
Gama	30 a 100

References

- [1] S.K. Mitra. *Digital signal processing*. McGraw-Hill series in electrical and computer engineering. McGraw-Hill/Irwin, Boston, 3rd edition, 2005.
- [2] P.P. Vaidyanathan. *Multirate systems and filter banks*. Prentice-Hall signal processing series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.
- [3] M. Vetterli. Running FIR and IIR filtering using multirate filter banks. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 36(5):730–738, 1988.