



TP d'EDO : ordre

GERGAUD Joseph

1 Introduction

Il est rappelé que les programmes doivent respecter les **bonnes pratiques de la programmation**. En particulier on vérifiera que les interfaces soient bien définies (paramètres en entrée, en sortie avec leurs types, les dimensions, ...). Dans le cas contraire on mettra des **points négatifs** pour un maximum de 4 points.

On trouvera une version pdf de ce document à l'adresse
http://gergaud.perso.enseeiht.fr/teaching/edo/edo_ordre.pdf.

L'objectif de ce projet est de réaliser les graphiques de la figure 1 concernant l'ordre qui seront complétés avec les résultats obtenus pour le schéma implicite de Gauss à 2 étages (*cf.* cours sur les schémas implicites).

2 Rappels

2.1 Schémas de Runge-Kutta

On rappelle les schémas classiques

$\begin{array}{c c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$ <p>Euler</p>	$\begin{array}{c cc} 0 & & \\ \hline 1/2 & 1/2 & \\ & 0 & 1 \end{array}$ <p>Runge</p>	$\begin{array}{c ccc} 0 & & & \\ \hline 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$ <p>Heun</p>
$\begin{array}{c ccc} 0 & & & \\ \hline 1/2 & 1/2 & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$ <p>La méthode RK4</p>	$\begin{array}{c cccc} 0 & & & & \\ \hline 1/3 & 1/3 & & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$ <p>RK4 3/8</p>	
	$\begin{array}{c cc} 1/2 - \sqrt{3}/6 & 1/4 & 1/4 - \sqrt{3}/6 \\ \hline 1/2 + \sqrt{3}/6 & 1/4 + \sqrt{3}/6 & 1/4 \\ & 1/2 & 1/2 \end{array}$ <p>Gauss d'ordre 4</p>	

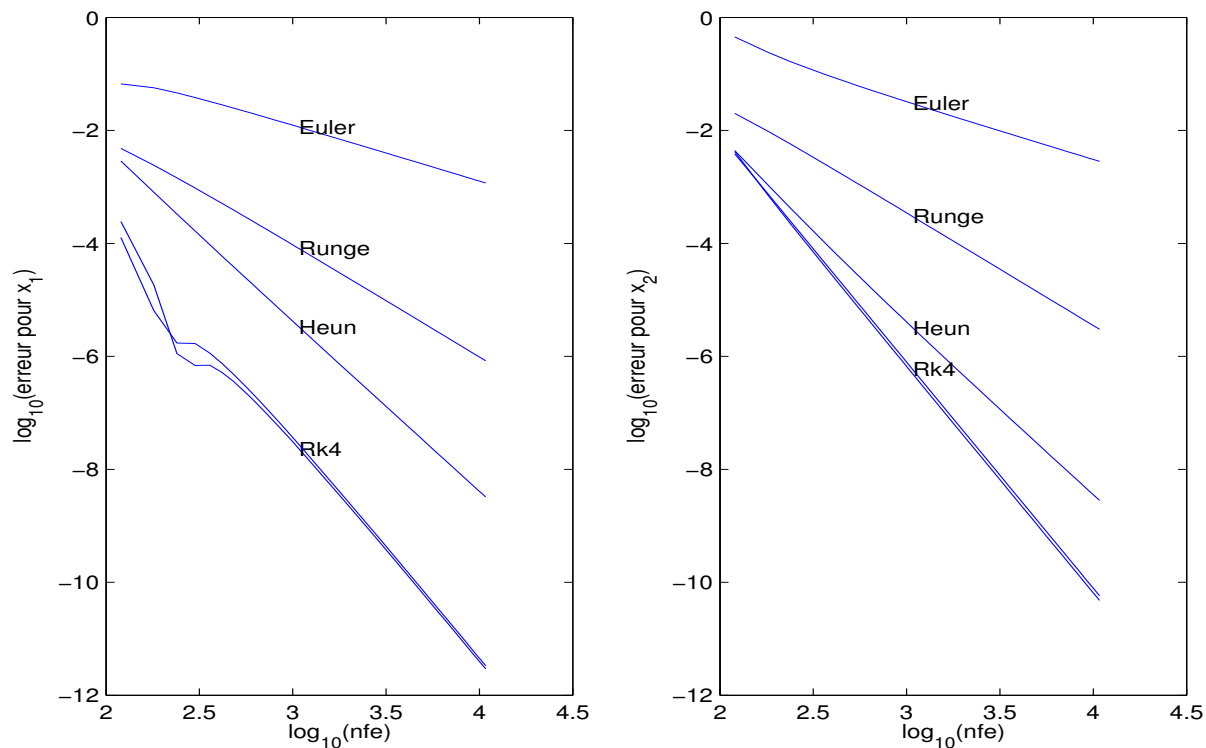


FIGURE 1 – *Erreur globale en fonction du nombre d'évaluations, E. Hairer, S.P. Nørsett and G. Wanner, Tome I, page 140, $\log_{10}(\text{err}) = C_1 - p \log_{10}(nphi)$.*

3 Travail demandé

3.1 Ordre

L'équation différentielle considérée est l'équation de Van der Pol

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = (1 - y_1^2(t))y_2(t) - y_1(t) \\ y_1(0) = 2.00861986087484313650940188 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$t_f = T = 6.6632868593231301896996820305$$

La solution de ce problème de Cauchy est périodique de période T .

Les programmes seront effectués en MATLAB. On demande que les appels aux sous-programmes se fassent à la MATLAB.

— Pour les schémas explicites :

`[T,Y] = ode_euler(@phi,[t0 tf],y0,N)` où T est un vecteur colonne de longueur $N + 1$ et Y est de dimension $(N + 1, n)$.

- Pour le schéma implicite de Gauß :
`[T,Y,nphi,ifail] = ode_gauss_fp(@phi,[t0 tf],y0,option)` (respectivement `[T,Y,nphi,ifail] = ode_gauss_newton(@phi,[t0 tf],y0,option)`) pour la version point fixe (respectivement Newton) avec
 - `option(1)=N`;
 - `option(2)=nb_itmax`, nombre d'itérations maximum pour le point fixe;
 - `option(3)=f_eps`, ε pour le test d'arrêt pour le point fixe;
 - `nphi`=nombre d'évaluations du second membre de l'équation différentielle;
 - `ifail(i)`=nombre d'itérations si le point fixe a convergé pour l'intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ et -1 sinon.
- L'interface pour la fonction `phi` sera :
`ypoint = phi(t,y).`

Les programmes d'intégration numérique par les méthodes explicites ne devront comporter d'une seule boucle.

On demande pour cette équation :

- de réaliser les graphiques de la figure 2 qui tracent les deux composantes de la solution et le plan de phase pour $N = 25$. Pour Gauß on prendra `nb_itmax = 15` et `f_eps = 1.e-12`. On fera 2 versions pour Gauß : une version point fixe et une version Newton.
- de réaliser les graphiques de la figure 1. Pour les schémas explicites on mettra en abscisse le vecteur (en notation MATLAB) `log10([120:60:1080 1200:600:10800])`. On ajoutera sur ces graphiques les résultats obtenus pour le schéma implicite de Gauß en prenant comme nombre de pas le vecteur `[120:60:1080 1200:600:10800]/4` et comme valeurs pour les paramètres `nb_itmax = 15` et `f_eps = 1.e-12`.
- On fera une deuxième figure avec les résultats correspondant au schéma implicite de Gauß pour
 1. `nb_itmax = 15` et `f_eps = 1.e-12`;
 2. `nb_itmax = 2` et `f_eps = 1.e-12`;
 3. `nb_itmax = 15` et `f_eps = 1.e-6`.

3.2 Rendu

Le travail en TP est individuel. Deux tests seront effectués, le premier lors du deuxième TP, le deuxième lors de dernière séance de TP. Le rendu définitif est à rendre le soir du dernier TP contiendra :

- les graphiques obtenus au format pdf;
- les sources des programmes qui seront mis dans un répertoire `<noms>`. le fichier contenant l'archive (`<noms>.tar`), sera envoyé à votre enseignant en TP (`gergaud@enseeiht.fr` ou `damien.goubinat@enseeiht.fr`).

Dans le courriel vous mentionnerez le nom du fichier MATLAB permettant d'obtenir les courbes résultats.

4 Résultats pour tests

Voici ci-après les résultats pour $N = 10$ pour les différents schémas. La première colonne est T et les deux suivantes Y .

Euler

[T Y]=

1.0e+03 *

0	0.002008619860875	0
0.000666328685932	0.002008619860875	-0.001338401032434
0.001332657371865	0.001116804859682	0.000029458487294
0.001998986057797	0.001136433894810	-0.000719553966981
0.002665314743729	0.000656974445535	-0.001337038672872
0.003331643429662	-0.000233932776401	-0.002281177517157
0.003997972115594	-0.001753946793787	-0.003562133341263
0.004664300801526	-0.004127498422186	0.002534846643721
0.005330629487459	-0.002438457389035	-0.021800755581294
0.005996958173391	-0.016964926207850	0.051673054627621
0.006663286859323	0.017466312380281	-9.812202238480943

Runge

[T Y]=

0	2.008619860874843	0
0.666328685932313	1.562712360278651	0.014729243646829
1.332657371864626	1.220894137875029	-0.531644111154892
1.998986057796939	0.653509832528317	-1.176382554058143
2.665314743729252	-0.425046060567530	-2.355437605902746
3.331643429661565	-2.328613474497056	-0.666821025659383
3.997972115593877	-1.601326538420963	-2.971936242570924
4.664300801526190	-2.194094633102912	2.142928059459987
5.330629487458503	-2.093551719985328	3.009462583470000
5.996958173390816	-1.883624518031323	3.696462462835581
6.663286859323128	-1.093338066861612	4.585206668061812

Heun

[T Y]=

EDO

EDO : ordre

0	2.008619860874843	0
0.666328685932313	1.863255533197435	-0.908266060321282
1.332657371864626	1.211064582800380	-0.970739550986403
1.998986057796939	0.340951280354486	-1.805621923056305
2.665314743729252	-1.343388532295027	-2.597289061805764
3.331643429661565	-1.553155419631253	-1.762194037001645
3.997972115593877	-1.761923667266568	-0.354168010449823
4.664300801526190	-1.696763283602980	0.676119846604791
5.330629487458503	-1.141093089779297	1.054354969329856
5.996958173390816	-0.188465573737059	1.992096663893664
6.663286859323128	1.593565087325988	2.154895921996044

rk41

[T Y]=

0	2.008619860874843	0
0.666328685932313	1.728289565064685	-0.434733098442855
1.332657371864626	1.281792525355265	-0.876907363239775
1.998986057796939	0.486631604430130	-1.622466234766066
2.665314743729252	-1.024410786018538	-2.556512804455775
3.331643429661565	-1.953005683961636	-0.209070573804531
3.997972115593877	-1.742817815413673	0.341277278614284
4.664300801526190	-1.337915627756918	0.814186086166159
5.330629487458503	-0.600769643339283	1.494502898570029
5.996958173390816	0.821446001908530	2.589914527582617
6.663286859323128	1.886292589030273	0.455334065676449

rk42

[T Y]=

0	2.008619860874843	0
0.666328685932313	1.728431198946091	-0.211759053069020
1.332657371864626	1.375706139766528	-0.721188019200479
1.998986057796939	0.707667824739475	-1.357210789873531
2.665314743729252	-0.590816207768864	-2.540503725686247
3.331643429661565	-1.878982165607427	-0.961286868462577
3.997972115593877	-1.902956029657481	-0.528261317222284
4.664300801526190	-1.794364994284346	-0.200341333153498
5.330629487458503	-1.596255551513502	0.385694139487150
5.996958173390816	-1.154514128501387	0.909206784653410
6.663286859323128	-0.301567059544812	1.775167703012563

Gauss, point fixe

EDO

EDO : ordre

```
[N, nb_itmax, f_eps]
10.000000000000000 15.000000000000000 0.000001000000000

[T Y]=
0 2.008619860874843 0
0.666328685932313 1.748077038315635 -0.614452193067304
1.332657371864626 1.227167526678123 -0.975617349879985
1.998986057796939 0.345219364241332 -1.811976134160198
2.665314743729252 -1.241597780608769 -2.475124551330471
3.331643429661565 -2.013913987826556 -0.001168903518536
3.997972115593877 -1.753872199839338 0.612809197750127
4.664300801526190 -1.235039630038149 0.970480377872889
5.330629487458503 -0.359183505874149 1.797419504046430
5.996958173390816 1.222176651788525 2.495490845811687
6.663286859323128 2.014631389666057 0.015750010678870
```

nphie =

296

ifail =

-1 13 11 15 -1 -1 13 11 15 -1

Gauss, Newton

```
[N, nb_itmax, f_eps]
10.000000000000000 15.000000000000000 0.000001000000000

[T Y]=
0 2.008619860874843 0
0.666328685932313 1.748103353412420 -0.614524376585803
1.332657371864626 1.227167371665737 -0.975642346688062
1.998986057796939 0.345201034491682 -1.812011679746201
2.665314743729252 -1.241634876414838 -2.475102844185241
3.331643429661565 -2.013908638346081 -0.001153761617750
3.997972115593877 -1.753891509975080 0.612895411728274
4.664300801526190 -1.235024728110440 0.970518388811259
5.330629487458503 -0.359136669330347 1.797486858502427
5.996958173390816 1.222255698893968 2.495430848815410
6.663286859323128 2.014631461651370 0.015689664812240
```

EDO	EDO : ordre
-----	-------------

nphie =

96

ndphie =

76

ifail =

4	3	3	4	5	4	3	3	4	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

On trouveras aussi ci-après les figures des solutions pour $N = 25$ pas.

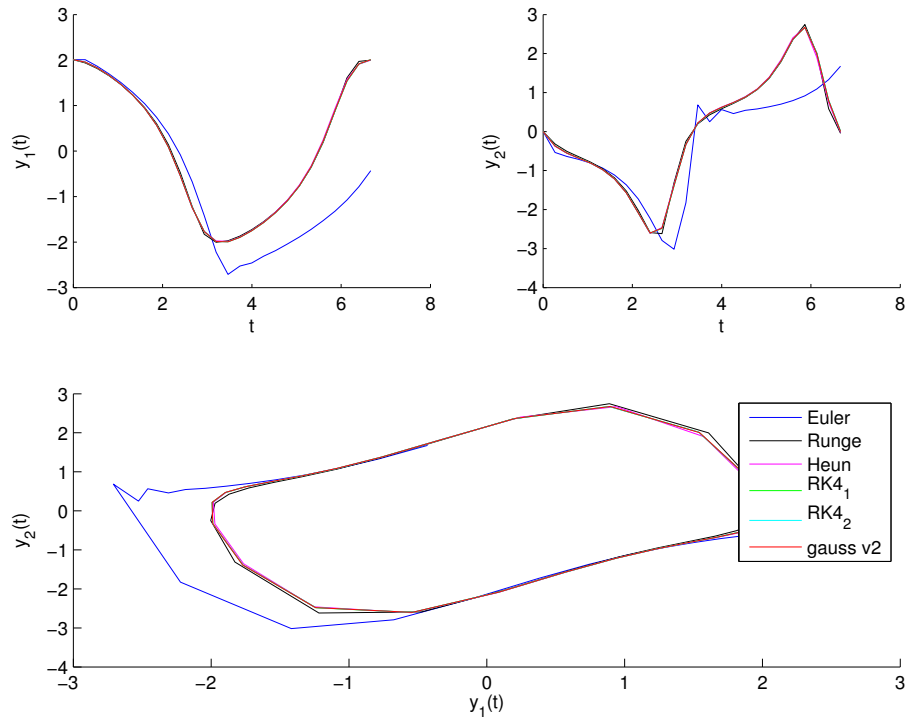


FIGURE 2 – Solution de l'équation de Van der Pol, composante 1 et 2 et plan de phase, pour les schémas de Runge-Kutta avec $N = 25$, pour Gauß $nb_itmax = 15$ et $f_eps = 1.e-12$.