拉普拉斯轉換（Laplace Transform）

通常來說，一般我們日常生活中所接觸到的信號，大都是以時間的函數來表示，因為這具有一般人可以理解的物理上直觀的意義。可是因為信號在系統中相關的分析與應用上的需要，常常就必須使用其他的方式來表示這些信號。之前，在本電子報中所提到的傅立葉轉換（Fourier transform），就是以頻率的形式來表示信號的有效方法。在這篇文章中，我們將介紹另一種表示信號的方式，那就是十八世紀法國著名數學家拉普拉斯（Pierre Simon de Laplace）在他的著作“***Theorie analytique des probabilities***”中所提出的拉普拉斯轉換（Laplace transform）（以下簡稱為拉氏轉換）。在拉氏轉換相對應的空間領域裏，通常慣用以變數符號 s 的函數來作為信號的表述。而在事實上，由於拉氏轉換擁有一對一的對應特性，因此並不會造成信號轉換之間的混淆。換句話說，一個以時間函數 $x(t)$ 所表示的信號，就只會有一個與其相對應的拉氏轉換表述函數 $X(s)$，但是特別要注意的是，並非所有的時間信號都會存在有與其相對應的拉氏轉換。一般在拉氏轉換的定義上，我們會有下列數學積分運算的關係式：

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt$$

此外，我們也會把下列表述的關係式稱做為一組拉氏轉換對組（Laplace transform pair）：

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) \leftrightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

其中符號 $\mathcal{L}\{\cdot\}$ 表示的是拉氏轉換的積分運算，而符號 $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$ 被稱做反拉氏轉換（inverse Laplace transform），也就是拉氏轉換的逆運算。

舉例來說，當時間函數 $x(t)=1$ 的時候，其相對應的拉氏轉換經過上述計算後，就可以被表示成 $X(s)=\dfrac{1}{s}$；而當信號被選為一個指數函數的形式時，也就是 $x(t)=e^t$，它的拉氏轉換就可以經計算而被寫成 $X(s)=\dfrac{1}{s-1}$。為了拉氏轉換在使用上的方便，一些常用的時間函數信號的拉式轉換，都可以直接從登載有拉式轉換對組的轉換表上查得。表(一)列出了一些常用的時間函數信號的拉氏轉換對組，其中相關的係數 a 和 b 可以是任意的實數。

表(一)：常用的時間函數信號的拉氏轉換對組

$x(t),\ \ t \ge 0$	$X(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$

拉氏轉換中的變數符號s，基本上可以當作一個複數來看待，也就是可以寫成$s=\sigma+j\omega$，其中σ和ω都是實數，而$j=\sqrt{-1}$。當選定$\sigma=0$時，也就是說s變成只剩下$j\omega$這一項，如果把這個關係式$s = j\omega$代回去上述的拉氏轉換數學式，那麼整個式子就會變成了一般傅立葉轉換的表述式。從這個層面來看，拉氏轉換其實就可以稱做是廣義的連續時間（continuous time）的傅立葉轉換。所以在傅立葉轉換中所擁有的一些重要特性，譬如說線性加成（linearity）、時間微分（time differentiation）、時間積分（time integration）與迴旋積分（convolution）等特性，拉氏轉換也同樣會擁有這些性質。我們在此把這幾個重要定理依序在表(二)中列出來，其中相關的係數a_1和a_2可以是任意的實數。

表(二) ：拉氏轉換的一些重要定理

$x(t),\ \ t \ge 0$	$X(s)$
$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)-x(0)$
$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
$\int_0^\infty h(t-\tau)x(\tau)d\tau$	$H(s)X(s)$

接著下來，我們就來討論拉氏轉換究竟有什麼用途。簡單來說，拉氏轉換最

大的好處就是它能夠把較為複雜的關於積分與微分的問題, 轉變成運用比較容易計算的代數方法來解決。因此，在拉式轉換的廣泛應用上，通常是被使用來解決下列幾種形式的問題：

・用來解常數係數（constant coefficient）的線性微分或積分方程式。

・用來分析線性非時變系統（linear time-invariant system）的輸入與輸出信號之間的關係。

就讓我們在這裏舉兩個例子來看看如何有效的運用拉氏轉換。

首先，我們來介紹如何利用拉氏轉換來解一個線性微分方程式。假設現在有一個待解的微分方程式如下所示：

$$\dot{y}(t)+2y(t)=x(t), \quad y(0)=1, \quad x(t)=10, \quad t\geq 0$$

利用拉氏轉換在表(一) 與表(二)所列的關係式，我們先在這個微分方程式等號的兩邊取各自的拉氏轉換，然後就可以得到以下的式子：

$$sY(s)-y(0)+2Y(s)=X(s)$$

因為 $x(t)=10$ 的拉氏轉換是 $X(s)=\dfrac{10}{s}$，我們將這個結果與初始值 $y(0)=1$ 代回去上述式子，經過移項整理後，我們可以得到

$$(s+2)Y(s)=1+\frac{10}{s}$$

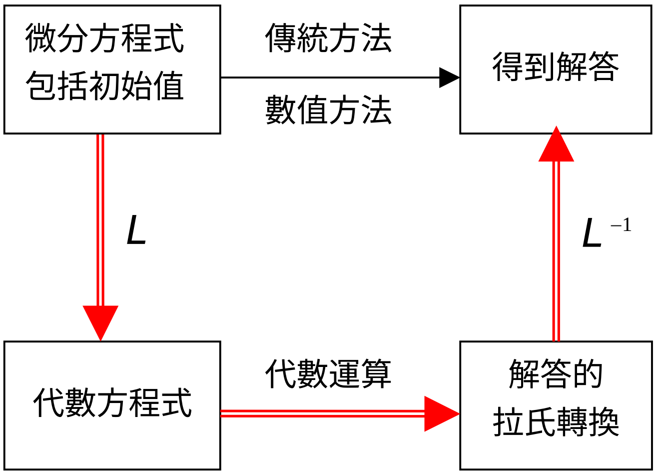
接著在等號的兩邊除以“$s+2$”這一項，經過進一步的整理可得

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{1}{s+2}+\frac{10}{s(s+2)}\\&=\frac{5}{s}-\frac{4}{s+2}\end{aligned}$$

既然 $y(t)\leftrightarrow Y(s)$ 是為一組拉氏轉換對組，所以微分方程式的解 $y(t)$ 就可以直接從上述的 $Y(s)$ 取反拉氏轉換來獲得，也即是

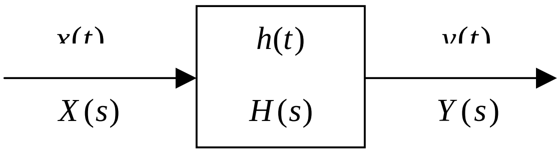
$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=5-4e^{-2t}$$

因此，我們僅只使用代數四則運算的方法，以及查對拉氏轉換的對組和定理，微分方程式的解就這麼輕而易舉的獲得了。這個以拉氏轉換來求解線性微分方程式的所有演算程序，即如圖(一)中的紅色箭號所示。



圖(一)：利用拉氏轉換解線性微分方程式的過程

接下來的這個例子，我們將要討論利用拉氏轉換來分析線性非時變系統的輸入與輸出信號之間的關係。在一般的線性非時變系統中，通常會使用圖(二) 的方塊圖來表示輸入與輸出信號與系統之間的關係，其中 $x(t)$ 是輸入信號， $y(t)$ 是輸出信號， $h(t)$ 是表示系統特性的脈衝響應（impulse response），而 $X(s)$、 $Y(s)$ 和 $H(s)$ 分別代表是它們相對應的拉氏轉換表述。



圖(二)：線性非時變系統輸入與輸出信號方塊圖

在上述圖(二) 的系統中，輸入與輸出信號在時域定義裏相互之間的關係，可以用下列迴旋積分的式子來表示：

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$$

如果微積分的相關計算學得不太好的話，這個式子可能就不太有機會算得出來了。所幸我們可以利用拉式轉換在表(二)中的特性，把這個複雜的積分式子轉變成代數演算的問題來處理，也就是說：

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = H(s)X(s)$$

等到我們先將 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的拉式轉換表述項 $X(s)$ 和 $H(s)$ 相乘後，再取這整個乘

積式子的反拉式轉換，這樣就可以得到我們想要得到的系統輸出 $y(t)$ 了。現在讓我們舉一個例子來試看看，假設在圖(二) 的線性非時變系統中，所使用的輸入信號是 $x(t)=5\sin t$，並且 $t\geq 0$，而表示系統特性的脈衝響應為 $h(t)=e^{-2t}$，那麼此時的系統輸出信號 $y(t)$ 是什麼呢？當然，如果利用迴旋積分的定義，輸出信號 $y(t)$ 就可以由下列關係式來求得：

$$y(t)=\int_0^{\infty} e^{-2(t-\tau)} 5\sin\tau\, d\tau$$

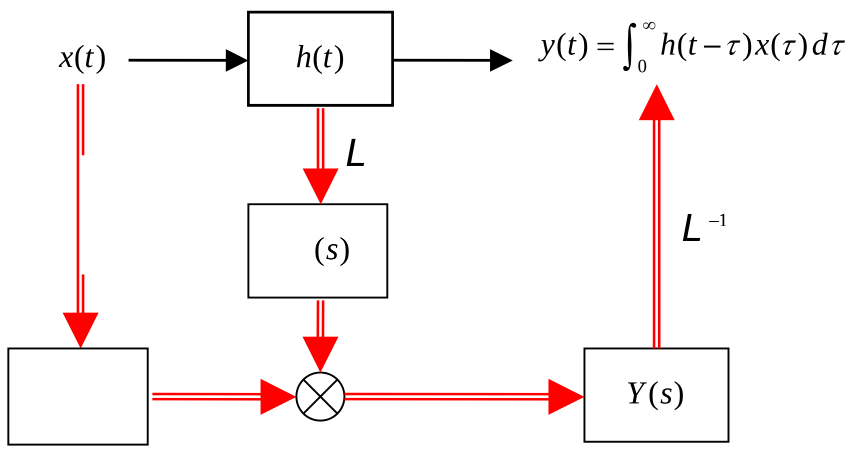
看來這個積分式子並不是三兩下就可以被解答的。如果我們想直接利用拉式轉換來解決這個問題，我們可以先找出 $x(t)=5\sin t$ 和 $h(t)=e^{-2t}$ 的拉式轉換對應項，它們分別是 $X(s)=\dfrac{5}{s^2+1}$ 和 $H(s)=\dfrac{1}{s+2}$，然後把這兩項相乘可得

$$\begin{aligned} Y(s)=H(s)X(s)&=\left(\frac{1}{s+2}\right)\left(\frac{5}{s^2+1}\right)\\ &=\frac{1}{s+2}-\frac{s}{s^2+1}+\frac{2}{s^2+1}\end{aligned}$$

最後取上述式子的反拉式轉換，我們就可以得到如下的系統輸出 $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\\ &=e^{-2t}-\cos t+2\sin t\end{aligned}$$

總之，我們僅只使用代數運算的法則，以及查表找出拉氏轉換的對組和定理，就這麼輕而易舉的得到了線性系統的輸出信號。這個以拉氏轉換來找出線性系統輸出響應的所有演算過程，即如圖(三)中的紅色箭號所示。



圖(三)：利用拉氏轉換來尋找線性系統的輸出響應

看了以上幾個運用拉氏轉換的例子，想來大家己經能夠感受到拉氏轉換好用的地方。除了上述的幾種應用之外，拉氏轉換還可以用來探討電阻-電感-電容的電路（*RLC* circuit）分析問題，也可以被使用來求取系統的轉移函數（transfer function），進而利用它來決定系統的穩定性（stability）及頻率響應（frequency response）。由於篇幅限制的因素，在此我們就不再多做敘述，有興趣的讀者可以去看看下列的參考書籍。總而言之，如果能夠有效的活用拉氏轉換這個數學工具，那麼許多與微分或積分相關的複雜問題，都可以利用代數運算的方法簡單地來分析與解答。

參考書籍

[1] Abell, M. L. and Braselton, J. P. (1996). ***Modern Differential Equations: Theory, Applications, Technology***. Orlando, FL: Saunders College Publishing.

[2] Lindner, D. K. (1999). ***Introduction to Signals and Systems***. WCB/McGraw-Hill.

[3] Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. and Nawab, S. H. (1997). ***Signals & Systems***, 2nd ed. (International ed.) Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall Inc.

[4] Strum, R. D. and Kirk, D. E. (2000). ***Contemporary Linear Systems Using MATLAB***. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole.

[5] Zill, D. G. and Cullen M. R. (1997). ***Differential Equations with Boundary-Value Problems***, 4th ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole.