RENDEZ-VOUS

P. 80 *Logique & calcul*
P. 86 *Art & science*
P. 88 *Idées de physique*
P. 92 *Chroniques de l'évolution*
P. 96 *Science & gastronomie*
P. 98 *À picorer*

CES GRILLES DE TIGES ARTICULÉES SONT-ELLES RIGIDES ?

Comment savoir si un assemblage plan de tiges articulées est déformable ou rigide? En appelant à la rescousse la théorie des graphes, qui fournit des algorithmes efficaces.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (Cristal)

Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Pour éviter qu'une chaise ne s'écroule quand on s'y assied, on consolide les angles où se rejoignent les pieds et les barres délimitant la surface horizontale du siège. Il est prudent aussi d'ajouter quelques barreaux transversaux. Le problème de la rigidité prend une forme plus générale avec un échafaudage complexe (comme la Tour Eiffel) fait de tiges attachées par leurs extrémités. Les mathématiciens se sont intéressés à cette question et l'ont résolue en déterminant où et comment placer un minimum de barres transversales pour rigidifier un ensemble de tiges articulées.

Des exemples simples du problème constituent déjà de petites énigmes amusantes à laquelle nous vous invitons à réfléchir quelques secondes en observant l'encadré 1.

Imaginons un réseau de barres placées dans un plan dont elles ne peuvent s'échapper, toutes de la même longueur et attachées par leurs extrémités. Sur le schéma *b*, nous avons représenté un réseau formant un rectangle 2×3 où quelques tringles obliques, des diagonales, ont été ajoutées. Parmi les six assemblages de tringles figurés, certains rendent rigide l'assemblage, d'autres non. Saurez-vous identifier les assemblages rigides? Saurez-vous aussi déterminer si le réseau *c* est rigide ou non? Comment formulerez-vous vos arguments? Autre question: combien faut-il au minimum de tringles transversales pour rigidifier un réseau rectangulaire de ce type ayant *a* carrés de haut et *b* carrés de large?

Bien sûr, une méthode pour découvrir la solution à ce type de problèmes consiste à prendre son Meccano, à fabriquer les structures et à les secouer! L'encadré 2 montre quelles structures de l'encadré 1 se déforment. Mais ce n'est guère satisfaisant et nous imaginons qu'un raisonnement doit donner la réponse sans nous obliger à prendre un tournevis.

Une idée naturelle, mais fausse, est de croire que, s'il y a au moins une tringle oblique dans chaque colonne et dans chaque ligne, alors la structure sera rigide. On verra plus loin qu'il peut même y avoir deux tringles obliques dans chaque ligne et dans chaque colonne, et que pourtant l'assemblage se déforme.

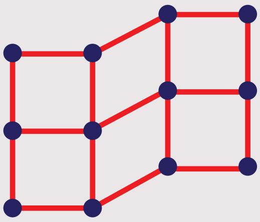
REGROUPER LES BARRES NÉCESSAIREMENT PARALLÈLES

Découvrir la solution générale à ces problèmes de grilles rigides demande qu'on réfléchisse aux contraintes de parallélisme qui s'imposent aux barres du réseau. Considérons un réseau composé de 16 carrés comme celui de l'encadré 3, dessin *a*. La mécanique de l'assemblage indique qu'il existe 8 séries de cinq tringles telles que, dans chaque série, toutes les barres sont nécessairement parallèles, qu'on y ait ajouté des tringles obliques ou qu'il n'y en ait pas. En effet, quand le réseau se déforme, les carrés restent des carrés ou deviennent des losanges (quatre côtés égaux) et donc des parallélogrammes. Cela signifie que leurs côtés opposés sont et seront toujours parallèles. De proche en proche, dans une même ligne ou une même colonne, ces contraintes de parallélisme

DÉFORMABLES OU RIGIDES ?

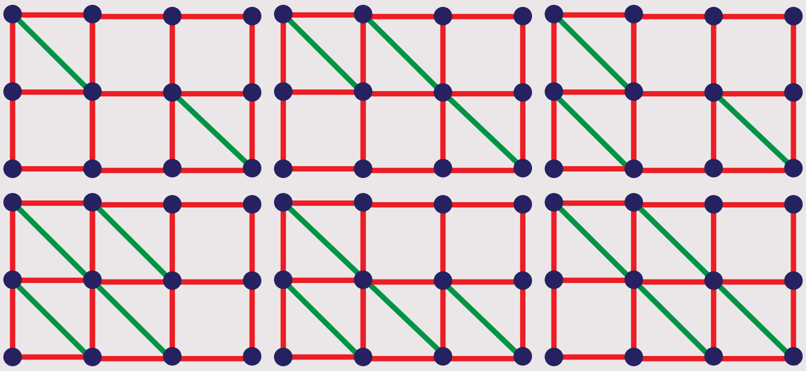
1

a

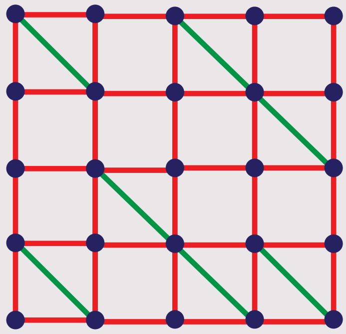


On considère des grilles faites de barres de même longueur attachées aux points de jonction. Les articulations *(en bleu foncé)* étant souples, une telle grille peut se déformer *(a)*. On suppose toutefois que toutes les barres restent dans un même plan. Afin de rendre la grille rigide, on a ajouté des tringles obliques *(en vert)*. Pour certains assemblages, on a ajouté suffisamment de barres vertes, pour d'autres non. Saurez-vous reconnaître quels assemblages, parmi les six dessinés en *b* et celui dessiné en *c*, sont rigides ? Pourquoi ? Quel est le nombre minimal de barres obliques qu'il faut ajouter à une grille rectangulaire de taille $p \times q$ pour qu'elle devienne rigide ?

b



c



des tringles déterminent 8 groupes de 5 tringles. L'un de ces groupes de 5 tringles toujours parallèles est figuré en rouge sur le schéma *a* de l'encadré 3, un autre est figuré en vert. En prenant en compte toutes ces contraintes de parallélisme, on sépare les 40 tringles en 8 groupes de 5 tringles. Ce sont, d'une part : (1) les 5 tringles en rouge au-dessus de la tringle x_1 ; (2) les 5 tringles au-dessus de x_2 ; (3) celles au-dessus de x_3 ; (4) celles au-dessus de x_4. D'autre part, les tringles verticales se regroupent en 4 groupes de 5 : (5) celles à la même hauteur que y_1 ; (6) celles à la même hauteur que y_2 ; (7) celles (*en vert*) à la même hauteur que y_3 ; et (8) celles à la même hauteur que y_4.

Nous désignerons chacun de ces 8 paquets de 5 tringles par le nom de la tringle « maîtresse » du bas ou de gauche. Les 8 paquets sont donc x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 et y_4.

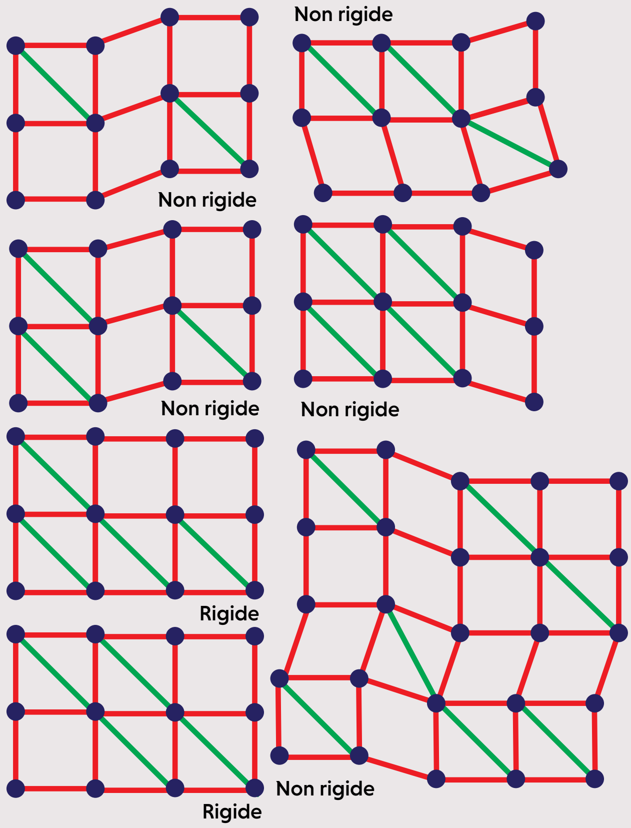
Remarquons maintenant qu'à chaque fois qu'on introduit 1 tringle transversale, on contraint 2 tringles de paquets différents à être orthogonales, et donc toutes les tringles d'un paquet à être orthogonales à toutes les tringles d'un autre paquet. Par exemple, en introduisant 1 tringle transversale (*en gris dans le schéma a de l'encadré 3*) dans la colonne x_1 et dans la ligne y_3, on oblige les 5 tringles de x_1 (*en rouge*) à rester orthogonales aux 5 tringles de y_3 (*en vert*).

Quand plusieurs tringles transversales sont insérées dans le réseau, pour faire le bilan de contraintes d'orthogonalité créées, il est utile de dessiner un graphe dont les nœuds sont les huit groupes x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 et dont les arcs sont ceux correspondants aux tringles >

LA RÉPONSE PAR LE BRICOLAGE

2

Pour résoudre les problèmes de l'encadré ci-dessus, on peut construire les grilles en Meccano et les secouer. Reste la question : pour rigidifier une grille quelconque, combien de barres diagonales faut-il, et comment les placer ?



> transversales établissant des contraintes, comme nous l'avons vu avec x_1 et y_3. Les graphes associés à deux grilles 4×4 (dont celle de l'encadré 1, schéma *c*) sont dessinés dans la figure *b* de l'encadré 3.

LA THÉORIE DES GRAPHES POUR COMPRENDRE

Dans ces graphes, si 2 paquets de tringles sont reliés par un chemin, cela signifie qu'ils sont rigidement associés. Si ce sont 2 paquets de tringles horizontales (ou 2 paquets de tringles verticales), c'est que les tringles des 2 paquets sont toutes parallèles; si l'un des 2 paquets est horizontal et l'autre vertical, c'est que chaque tringle de l'un des paquets est orthogonale à chaque tringle de l'autre.

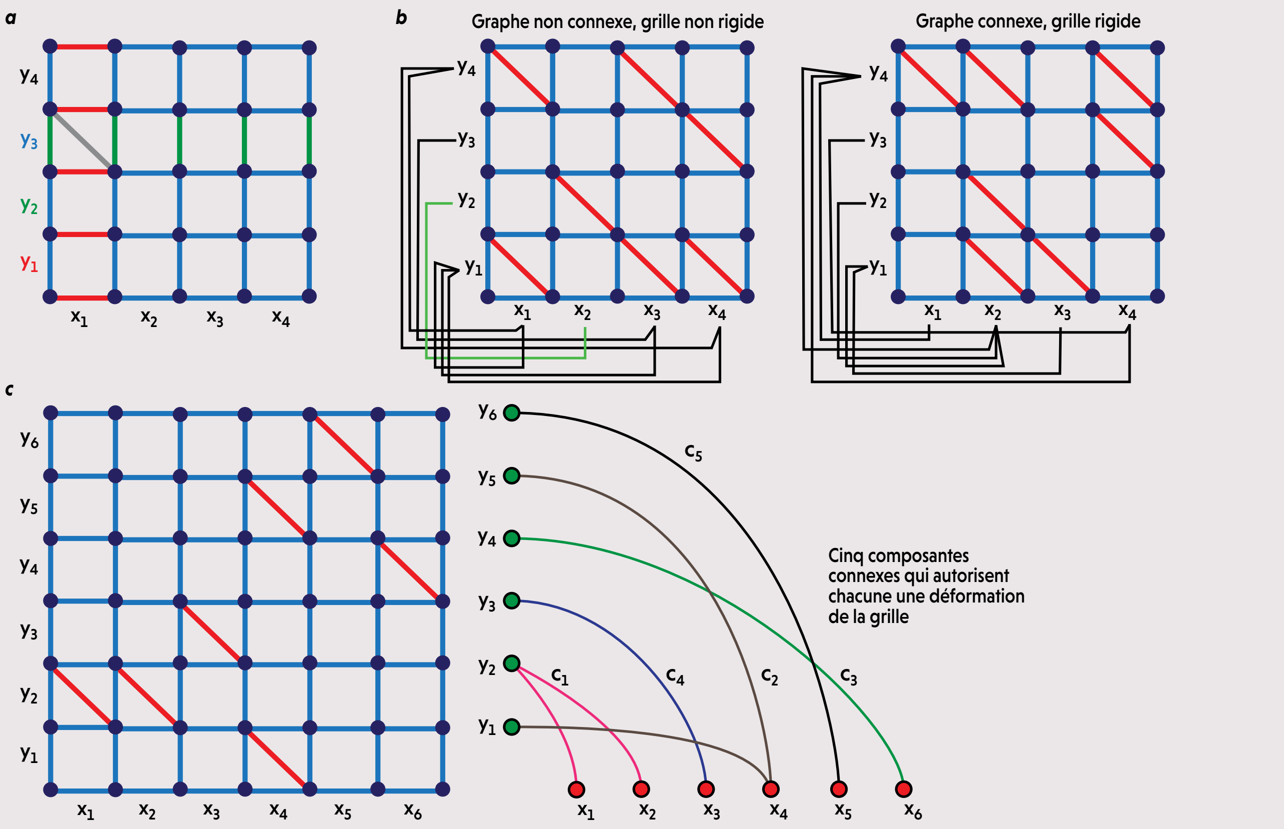
Pour que le réseau soit rigide, il suffit donc que tous les nœuds du graphe soient reliés, c'est-à-dire que le graphe associé au réseau soit «d'un seul tenant» ou, en termes de théorie des graphes, «connexe» (pas de nœuds ou de groupes de nœuds isolés).

La réciproque est vraie aussi, comme les mathématiciens américains Ethan Bolker et Henry Crapo l'ont établi en 1979. Finalement, pour savoir si un réseau de ce type est rigide, il faut et il suffit que le graphe associé aux familles de tringles (les x_i et les y_i) soit connexe.

Pour illustrer cette propriété, on a dessiné dans l'encadré 3 (schéma *c*) un réseau 6×6 avec quelques tringles transversales et son graphe. Celui-ci comporte 5 composantes connexes, c'est-à-dire qu'il se décompose en 5 sous-graphes non liés entre eux: quand on est dans l'un des sous-graphes, on ne peut pas passer dans un autre en suivant les arcs du graphe. On a aussi dessiné 5 déformations possibles du

3 CONTRAINTES DE PARALLÉLISME ET D'ORTHOGONALITÉ

Quand une grille à articulations souples, comme celle représentée en *a*, se déforme, les carrés deviennent des losanges et donc toutes les barres horizontales d'une même colonne *(par exemple celles indiquées en rouge)* restent parallèles. De même, toutes les barres verticales d'une même ligne *(par exemple celles indiquées en vert)* restent parallèles. Cela détermine 8 ensembles de 5 barres qui seront toujours parallèles quand on ajoutera des tringles obliques et qu'on déformera la grille. Chaque tringle oblique crée une contrainte d'orthogonalité (un carré doté d'une telle tringle est indéformable). L'ensemble de ces contraintes se représente par un graphe dont les 8 nœuds ne sont pas les tiges, mais les groupes de 5 tiges (4 groupes de 5 tiges horizontales, et 4 autres groupes de 5 tiges verticales). Pour que toutes les tringles soient solidaires, c'est-à-dire pour que l'assemblage soit rigide, il faut et il suffit qu'il y ait une contrainte entre toute paire de nœuds du graphe,



réseau, chacune associée à une composante connexe du graphe.

NOMBRE MINIMUM DE BARRES TRANSVERSALES

On peut maintenant assez facilement répondre à la question: combien faut-il au minimum de tringles obliques pour rigidifier un réseau rectangulaire de a carrés de large et de b carrés de haut? Le graphe associé au réseau comporte $a+b$ nœuds; on peut les joindre pour former un graphe connexe en utilisant $a+b-1$ arcs, par exemple de la façon suivante:

$$x_1—y_1, x_1—y_2, ..., x_1—y_b,$$
$$x_2—y_1, x_3—y_1, ..., x_a—y_1.$$

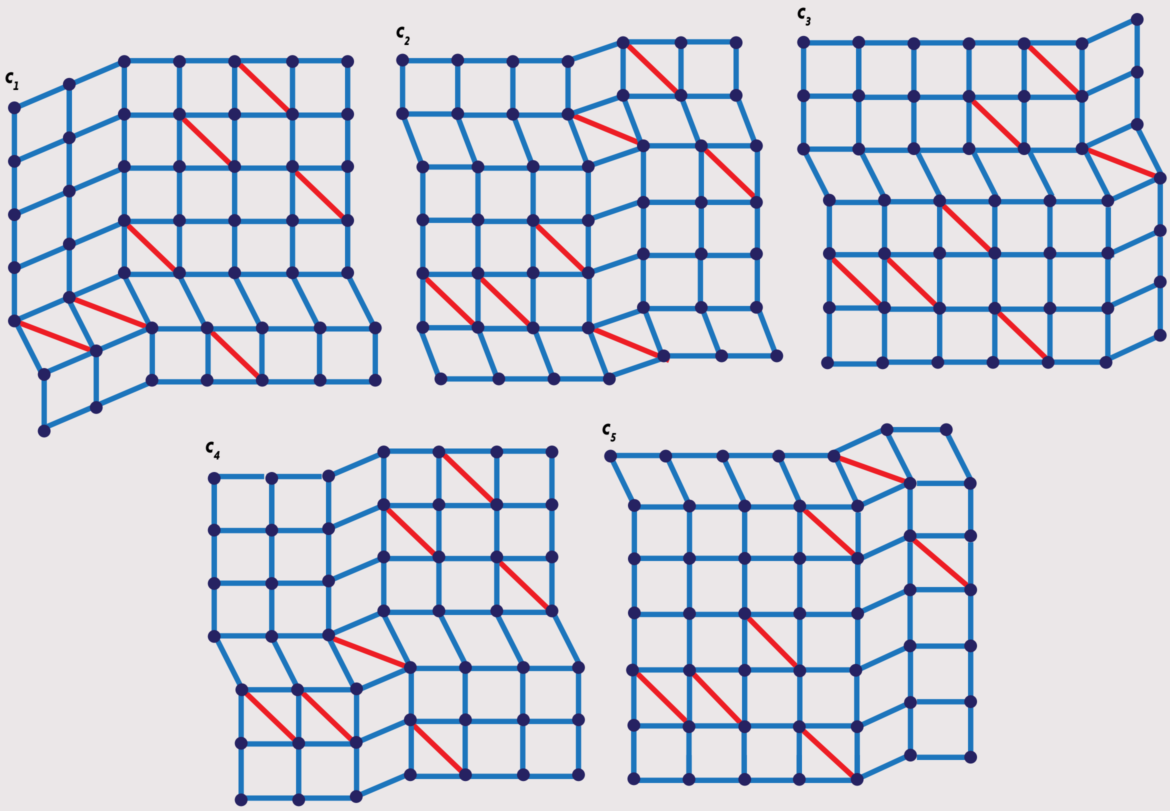
Il est impossible de rendre le graphe connexe en utilisant moins de $a+b-1$ arcs, car on montre facilement qu'un graphe connexe de k nœuds comporte au moins $k-1$ arcs.

On montre aussi que si un graphe de k nœuds est connexe et comporte plus de $k-1$ arcs, on peut enlever certains de ces arcs et n'en garder que $k-1$ tout en préservant la propriété de connexité. Dans notre problème, ce résultat se traduit de manière intéressante: si un réseau rectangulaire de taille $a \times b$ est rigide et comporte plus de $a+b-1$ tringles obliques, alors on peut enlever certaines de celles-ci jusqu'à n'en laisser que $a+b-1$ en préservant la rigidité.

Attention, nous n'avons pas dit que, dès qu'il y a plus de $a+b-1$ tringles obliques, le réseau est rigide: ce n'est vrai que si le graphe associé est connexe. Attention aussi, on ne dit pas non plus que n'importe quelle tringle oblique peut être enlevée: il faut bien choisir les $a+b-1$ tringles que l'on garde, de façon à préserver la connexité. >

c'est-à-dire qu'on puisse passer d'un nœud N du graphe à un autre N' pour toute paire N-N'. Dit autrement, il faut que le graphe associé à la grille soit connexe. Ce n'est pas le cas du premier graphe de la figure *b* à cause des nœuds x_2 et y_2 : ils sont liés entre eux, mais pas aux autres nœuds du graphe. Le premier assemblage de tringles n'est donc pas rigide, comme nous l'avons vu par bricolage *(voir l'encadré 2)*. Le second graphe de *b* est, lui, connexe et c'est pourquoi l'assemblage auquel il correspond est rigide.

Le graphe associé à un assemblage permet d'identifier quels sous-ensembles de tringles sont liés et ce que cela implique en termes de mouvements. Le graphe associé à la grille 6 × 6 de la figure *c* comporte 5 composantes connexes, notées ici c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5. À chacune de ces composantes connexes correspond une déformation possible de l'assemblage (figures c_1 à c_5). D'autres déformations, qui associent plusieurs de celles représentées ici, sont possibles.



4

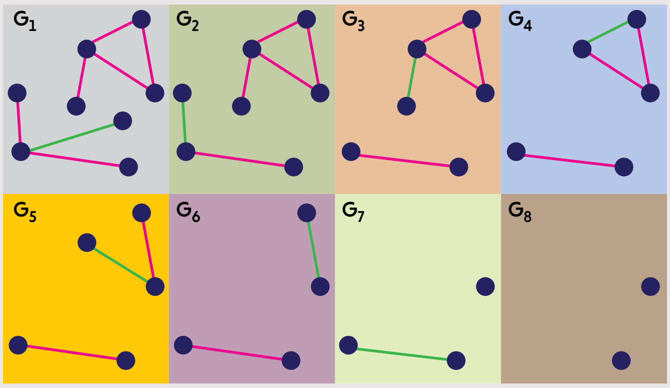
DÉSHABILLAGE D'UN GRAPHE ET RÉDUCTION PROGRESSIVE DES GRILLES

Le dessin *a* illustre les étapes de l'algorithme qui simplifie progressivement (de G_1 à G_8) un graphe sans en changer le nombre de composantes connexes. Quand on trouve un circuit (une suite d'arcs partant d'un nœud et y revenant), on enlève un arc quelconque du circuit. Quand un nœud n'a qu'un seul arc incident, on enlève le nœud et l'arc. Ici, après quelques étapes, on a réduit le graphe initial à 2 nœuds, ce qui signifie que le graphe initial comporte deux composantes connexes et qu'il n'est donc pas connexe.

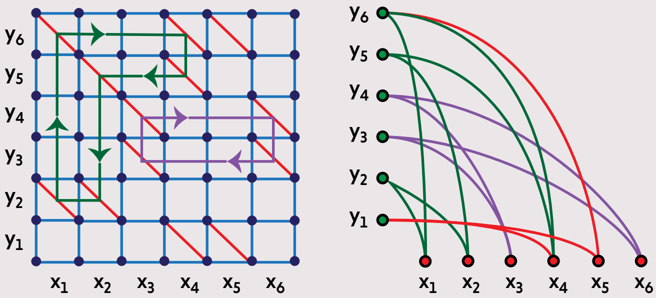
La figure *b* représente une grille difficile à analyser et le graphe correspondant, qui n'est pas connexe. On voit qu'à chaque circuit du graphe correspond un circuit sur la grille. Pour appliquer l'algorithme de déshabillage du graphe dans le but de savoir s'il est connexe (et donc si la grille associée est rigide), on peut donc travailler directement sur la grille sans avoir à considérer les graphes : à chaque fois qu'une ligne ou une colonne ne comporte qu'une barre transversale, on supprime la ligne ou la colonne ; à chaque fois qu'on identifie un circuit, on enlève une barre transversale du circuit.

Les séries de dessins *c*, *d* et *e* représentent des applications de cet algorithme de test de rigidité.

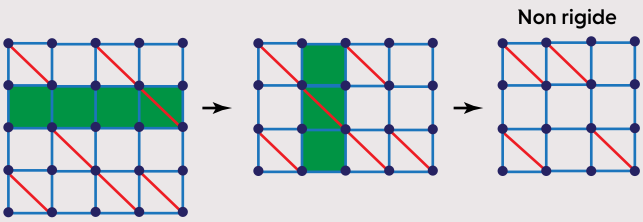
a



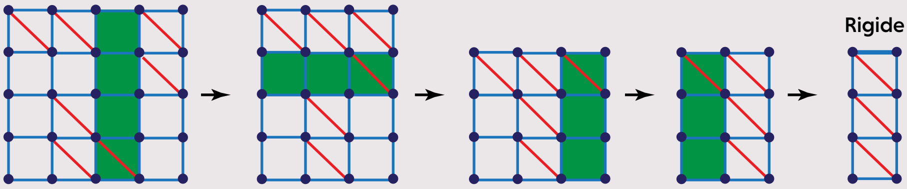
b



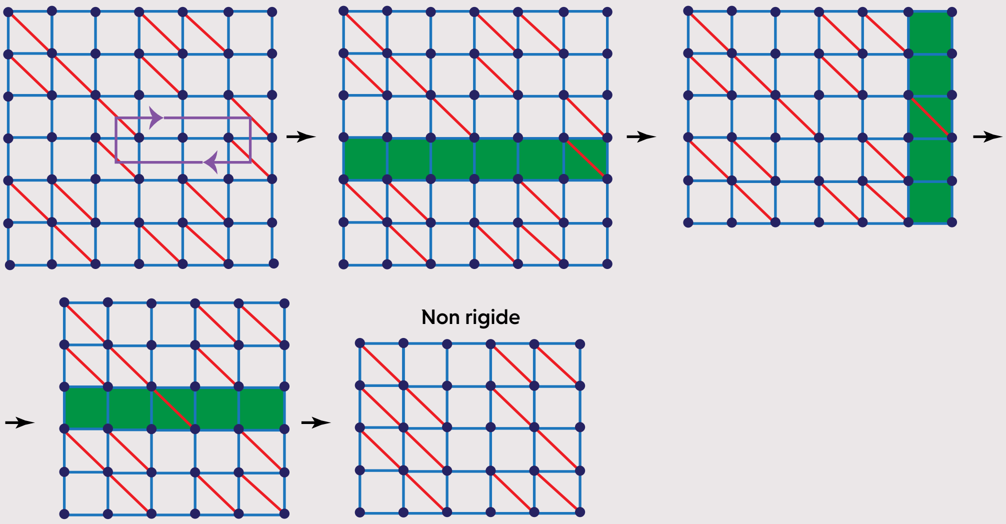
c



d



e



> La présence d'une tringle oblique dans chaque colonne et chaque ligne, ou même en posséder 2, ou même 3, etc., n'est jamais une condition suffisante générale assurant la rigidité d'un réseau de ce type. Il faut prendre en compte le graphe associé, et c'est lui qui donne la réponse, celle-ci étant négative s'il n'est pas connexe (*voir l'encadré 4 pour un exemple de grille déformable comportant 2 barres obliques au moins dans chaque ligne et chaque colonne*).

DES ALGORITHMES POUR LES CAS LES PLUS DIFFICILES

Un algorithme de «déshabillage» permet de savoir si un graphe est connexe. Il résout la question des grilles rigides sans avoir à dessiner de graphes compliqués et emmêlés.

On part d'un graphe qu'on simplifie progressivement en lui ôtant nœuds et arcs en appliquant la règle suivante: quand on trouve un circuit, c'est-à-dire une suite d'arcs partant d'un nœud et y revenant, on supprime un arc quelconque de ce circuit; et quand un nœud n'a qu'un arc incident, on supprime le nœud et l'arc (*voir l'encadré 4*).

La justification de l'algorithme est facile, car il est clair que son application ne peut déconnecter le graphe s'il est connexe, ni le reconnecter s'il ne l'était pas. L'algorithme, quel que soit l'instant où on l'arrête, produit donc un graphe qui est connexe si celui de départ l'était, ou qui n'est pas connexe si celui de départ ne l'était pas. En fait, l'algorithme préserve exactement le nombre de composantes connexes du graphe de départ.

Notons que les circuits du graphe associé à une grille avec tringles transversales peuvent se voir directement sur la grille. En effet, il existe un circuit si l'on peut passer de barre oblique en barre oblique en ne se déplaçant que verticalement ou horizontalement (comme une tour au jeu d'échecs) et revenir à son point de départ. La figure *b* de l'encadré 4 illustre l'idée: deux circuits sont dessinés sur le graphe associé à la grille et les circuits correspondants directement visibles sur la grille sont aussi dessinés. Repérer les circuits directement sur la grille est plus facile que sur le graphe associé, souvent très emmêlé.

ALGORITHME DE TEST DE RIGIDITÉ D'UNE GRILLE

Comme indiqué dans l'encadré 4, si une ligne ou une colonne ne contient qu'une tringle oblique, on enlève toute la ligne ou toute la colonne. Si une série de tringles obliques forme un circuit, on enlève une tringle oblique quelconque du circuit. Quand on arrive à une grille qui est évidemment rigide ou non rigide, on a la réponse pour la grille initiale.

Il y a bien sûr plusieurs façons de rigidifier une grille donnée de taille $a \times b$ en y plaçant le minimum possible $(a+b-1)$ de tringles transversales. La caractérisation en termes de graphes connexes permet de décompter le nombre de façons de rigidifier une grille. Péter Dóbé et Gábor Domokos, de l'université de Budapest, ont montré en 2014 que le nombre de dispositions (minimales) rendant rigide la grille rectangulaire de taille $a \times b$ est $a^{b-1} b^{a-1}$.

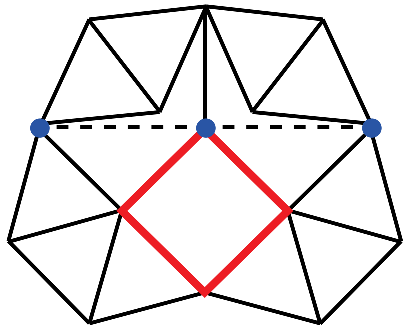
Une petite subtilité doit être notée ici. Nous avons supposé que toutes les tringles étaient de même longueur. Si on renonce à cette hypothèse et qu'on envisage des grilles approximativement carrées, alors parfois un peu moins de tringles obliques sont nécessaires pour rigidifier l'assemblage. Bien évidemment, toutes sortes d'autres cas ont été étudiés, généralisant les résultats mentionnés à des grilles rectangulaires trouées, ou à des grilles en trois dimensions.

L'IMMOBILISATION DU CARRÉ

L'un des problèmes de rigidification les plus simples et les plus étonnants dans cette catégorie est celui du carré unique. On place un carré unique sur un plan et on cherche, à l'aide de tringles de même longueur que le côté du carré, liées comme précédemment par des articulations souples, à l'immobiliser pour qu'il ne puisse plus se plier. Combien faut-il au minimum de tringles obliques et comment faut-il les disposer pour réussir cette rigidification du carré? La réponse est donnée dans l'encadré 5.

La théorie mathématique de la rigidité ne s'arrête pas à ces situations. Elle constitue aujourd'hui un domaine de recherche actif, qui produit régulièrement de nouveaux résultats. ■

5



RIGIDIFIER UN CARRÉ

Si un carré de côté *L* est donné, combien faut-il introduire de tiges (ne se croisant pas) de longueur *L* liées et articulées par leurs extrémités pour immobiliser le carré, le tout restant dans un plan ? La meilleure réponse connue utilise 23 barres *(voir la figure)* ; elle a été trouvée par sept lecteurs de Martin Gardner, qui avait posé la question dans sa célèbre rubrique mathématique dans *Scientific American*. Saurez vous faire mieux, ou démontrer qu'on ne peut pas faire mieux ? Erich Friedman, de l'université Stetson, présente d'autres problèmes de ce type sur ses pages web (https://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0100.html).

BIBLIOGRAPHIE

E. Weisstein, **Braced polygon**, http://mathworld.wolfram.com/BracedPolygon.html (consulté en avril 2018).

P. Dóbé, **Efficient algorithms for sensitivity analysis of trusses, adapted for distributed computing infrastructures**, Thèse de l'université de Budapest, 2014.

P. Winkler, **Mathematical Mind-Benders**, CRC Press, 2007.

A. Kaveh, **Optimal structural analysis**, Wiley, 2006.

E. Bolker et H. Crapo, **Bracing rectangular frameworks I**, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 36(3), pp. 473-490, 1979.

M. Gardner, **Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Diversions from Scientific American**, University of Chicago Press, 1971.