Théorie des Graphes et assemblage de tiges articulées

Joseph COURCELLE

TIPE 2018-2019

Mots-clés/Key-words :

-Théorie des Graphes / Graph Theory

-Connexité / Connected Graph

-Assemblage / Mechanical Assembly

-Grille / Grid

-Test de rigidité / Stiffness

-Cube / Cube

Abstract :

Graph theory is a very efficient way to resolve complex issues by representing the situation with points and lines.

Here we will use it in order to resolve problems concerning some articulate rods.

Firstly we will consider an assembly of articulate rods forming a grid. This assembly has no determinate shape : we can warp it without problem. The aim here is to make it stiff by adding the lowest possible number of inclined rods.

Then we will bring the problem on a bigger scale by considering a cube and we will try to make it stiff by adding inclined rods on its faces.

Finally, we will unify both problems to show the link with ocean.

Résumé :

La Théorie des graphes est un outil permettant de simplifier des problèmes dont la résolution est très compliquée et elle représente un domaine très fécond des mathématiques actuelles. On se propose ici de s'en servir dans le cadre de problèmes concernant des assemblages de tiges articulées.

Dans un premier temps nous allons nous en servir pour chercher à rigidifier un assemblage plan de tiges articulées formant une grille.

Nous élargirons ensuite le problème à 3 dimensions et nous essaierons de rendre indéformable un cube.

Nous montrerons ensuite avec un cas concret rassemblant les deux précédents le lien que peuvent avoir ce genre de problèmes avec l'océan.

Table des matières

Première partie

Introduction :

1 Théorie des Graphes

La théorie des graphes a fait son apparition en 1736 avec un article écrit par Euler sur le problème des ponts de Königsberg qui avait été posé au 13ème siècle par le roi Ottokar. Il s'agissait de chercher s'il existe un circuit passant exactement une fois par chacun des 7 ponts de la ville.

En représentant la situation par des points reliés ou non par des arrêtes, Euler a réussi à résoudre ce problème.

Tel est le principe de la théorie des graphes : Représenter un problème par des points reliés ou non afin d'en faciliter la résolution.

Un graphe est un objet relativement simple, et pourtant le champ d'application de la théorie des graphes est immense, les théorèmes de graphe sont nombreux et cette théorie soulève de nombreuses questions mathématiques sans réponse pour l'instant.

En effet, la théorie des graphes est utilisée en informatique, en sociologie, en algorithmique, en cartographie, en mécanique, en chimie, génétique, communication, électricité etc...

Elle se révèle utile pour représenter toutes sortes d'objets : des réseaux de transports aux molécules chimiques en passant par les arbres généalogiques.

Pourtant, cette théorie n'a commencé à sérieusement se développer qu'aux 19^{eme} et $20eme$ siècles. Les mathématiciens célèbres s'y étant intéressé sont Euler, Lucas, Hamilton, Cayley, Sylvester, Polya et Möbius.

La théorie des graphes constitue aujourd'hui un des domaines mathématiques les plus féconds :

-elle permet de réaliser des démonstrations en algorithmique

-elle soulève de nombreux problèmes complexes

-des théorèmes sur les graphes sont découverts régulièrement

-les graphes ont fait leur entrée dans les programmes de mathématiques du secondaire et du supérieur

2 Un peu de vocabulaire...

Les points du graphe sont appelés les sommets et les traits reliant les sommets sont appelés les arrêtes

L'arrête entre les sommets a et b est notée $[a, b]$ et on dit qu'elle est incidente à a et b

Une arrête entre un sommet et lui-même est appelée boucle

Si deux sommets sont reliés, on dit qu'ils sont adjacents

Si il existe un chemin entre deux sommets, on dit qu'ils sont connectés ou connexes

Deux arrêtes sont adjacentes si elles possèdent un sommet en commun

Le degré d'un sommet a noté $deg(a)$ est le nombre d'arrêtes qui lui sont incidentes

En notant $x \sim y$ pour x et y sont adjacents, on dit d'un graphe qu'il est cyclique/qu'il contient un cycle si il existe des sommets distincts $x_1, x_2, ...x_p$ avec $p \geqslant 3$ tels que/

$x_1 \sim x_2 \sim ... \sim x_p$

Il existe différents types de graphes :

Les graphes orientés sont ceux pour lesquels la relation d'adjacence n'est pas réfléxive, dans ce cas on représente les arrêtes par des flèches orientées.

Les graphes étiquettés sont ceux où les arrêtes ne signifient pas toute la même chose. L'information portée par une arrête est appelée étiquette.

Il peut y avoir plusieurs arrêtes entre deux sommets, mais lorsqu'il n'y en a qu'une seule on dit que l'arrête est simple

Un graphe simple est un graphe qui ne possède ni boucles ni arrêtes multiples. (La plupart des graphes que nous étudierons dans notre problème seront des graphes simple)

Dans un graphe simple, un sommet de degré 1 est appelé sommet pendant et son arrête est une arrête pendante

Dans un graphe simple, si il existe un chemin entre deux sommets pour toute paire de sommets on dit que le graphe est connexe

Si dans un graphe G il existe un sous-ensemble de sommets tel que le graphe formé par les sommets et les arrêtes de ce sous-ensemble est connexe, on dit que ce sous ensemble est une classe connexe de G

Un graphe connexe acyclique/qui ne possède pas de cycle est appelé arbre

On appelle nombre chromatique d'un graphe le nombre minimal de couleurs à utiliser pour colorier ses sommets de telle sorte que deux sommets adjacents soient coloriés différemment.

3 Quel rapport avec l'océan ?

Le voyageur de commerce :

Un cargo doit livrer des conteneurs dans différents ports à travers la Terre entière.

Le but du problème est d'établir, en considérant la liste des ports à livrer, l'itinéraire le plus court permettant de desservir tous les ports en question.

L'énoncé du problème est assez simple, mais la résolution cependant est très complexe.

En effet, voici quelques ordres de grandeurs :

Pour 3 destinations il y a 6 possibilités

Pour 10 destinations il y a 3628800 possibilités

Pour 100 destinations le nombre de possibilités est de l'ordre de 10^{158}

Représenter la situation par un graphe où les sommets sont les ports à desservir et où les arrêtes portent en étiquette la distance entre les deux ports concernés permet de faciliter grandement la résolution de ce problème.

L'aquarium :

On doit regrouper différentes espèces de poissons dans un aquarium sachant que l'on dispose d'un nombre limité de bassins et que certaines espèces ne sont pas compatibles (Pour des raisons de conditions de vie ou de relations proie/prédateur)

Ce genre de problèmes relève d'un domaine particulier de théorie des graphes : les problèmes de coloriage de graphe.

Ce domaine est celui des problèmes d'optimisation pour lesquels la résolution consiste à chercher le nombre chromatique d'un graphe.

Ici chaque sommet représente une espèce de poissons, et deux sommets sont reliés si les espèces qu'ils représentent sont incompatibles.

Une couleur correspond à un bassin.

Le nombre chromatique de ce graphe est donc le nombre minimal de bassins différents à utiliser pour regrouper toutes nos espèces.

Deuxième partie

Corps principal

Comment déterminer si un assemblage de tiges articulées est rigide ?

4 La grille : Comment la rigidifier ?

Le premier problème auquel nous allons nous confronter est le suivant :

On considère un assemblage de tiges articulées dans le plan formant une grille rectangulaire. (cf. annexe pour une telle figure de dimension 2x3)

Cet assemblage n'est pas rigide.

On cherche à savoir comment rigidifier cette structure en ajoutant des tringles obliques dans certaines "cases". Notre objectif est de déterminer le nombre minimal de tringles à rajouter ainsi que leurs emplacements.

Au sein d'une colonne de notre grille, les tiges horizontales sont contraintes de rester parallèles. De même, au sein d'une ligne, les tiges verticales sont contraintes de rester parallèles.

Ces ensembles de tiges qui sont contraintes d'être parallèles définissent des classes d'équivalence.

On décide alors de modéliser la situation avec un graphe :

Les sommets représentent les classes d'équivalence (On les notes hor_i pour les tiges horizontales et ver_j pour les tiges verticales). Il y a donc $l+n$ sommets dans le graphe associé à une grille de taille n x l

Deux sommets sont reliés par une arrête si les classes d'équivalence qu'ils représentent sont contraintes d'être parallèles (s'il s'agit de deux classes verticales ou deux classes horizontales) ou contraintes d'être perpendiculaires (s'il s'agit d'une classe horizontale et une classe verticale)

Lorsqu'on ajoute une tige oblique dans la case située entre la i-ème colonne et la j-ème ligne, on impose $hor_i \perp ver_j$. Sur notre graphe associé à la situation, cela revient à relier les sommets correspondants à hor_i et ver_j.

D'après les propriétés des relations de parallélisme et d'orthogonalité en deux dimensions ($d_1//d_2$ et $d_2//d_3 => d_1//d_3$; $d_1//d_2$ et $d_2 \perp d_3 => d_1 \perp d_3$) , notre grille sera rigide si et seulement si le graphe qui lui est associé est connexe.

Afin de déterminer le nombre minimal de tringles à ajouter, on s'intéresse au nombre d'arrêtes que peut posséder un graphe connexe.

<u>*Théorème 1*</u> *: Un graphe connexe à n sommets contient au moins $n-1$ arrêtes*

Soit $n \geqslant 2$

On considère la propriété P_n :"Un graphe connexe à n sommets contient au moins $n-1$ arrêtes"

On va montrer par récurrence que P_n est vérifiée pour tout $n \geqslant 2$

<u>Initialisation</u> : $n = 2$

Soit A un graphe connexe à 2 sommets (<u>cf</u>. figure en annexe)
A contient 1 arrête
Donc P_2 est vérifiée

<u>Hérédité</u> : Soit $n \geqslant 2$, on suppose $P_2, P_3, ..., P_n$ vraies.

Soit G un graphe connexe à $n+1$ sommets
On supprime un sommet de G (et donc k arrêtes avec $k \geqslant 1$).
Ainsi, on obtient un graphe G'.

— <u>1^{er} cas :</u> G' est toujours connexe
  G' est connexe et possède n sommets.
  D'après l'hypothèse de récurrence, G' contient au moins $n-1$ arrêtes.
  Soit l et l' respectivement les nombres d'arrêtes de G et G', on a :
  $l = l' + k \geqslant n - 1 + k$
  Or, $k \geqslant 1$ donc $l \geqslant n$

— <u>2^{eme} cas :</u> On obtient p classes connexes G'_i ($i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant p$) possédant chacune n_i sommets
  On a :
  -$n_1 + n_2 + ... + n_p = n$
  -$\forall i \in [\![1; p]\!], n_i \leqslant n$
  -$p \leqslant k$ (Car on ne peut pas créer plus de classes connexes que l'on ne supprime d'arrêtes <u>cf.</u> Preuve annexe 1)
  Pour tout i on pose A_i le nombre d'arrêtes de la classe connexe G'_i
  Pour tout i on a $n_i \leqslant n$ donc P_{n_i} vraie.
  D'après l'hypothèse de récurrence, on a :
  $\forall i \in [\![1; p]\!] : A_i \geqslant n_i - 1$
  Donc $\sum_{i=1}^{p} A_i \geqslant \sum_{i=1}^{p} (n_i - 1)$
  Donc $\sum_{i=1}^{p} A_i \geqslant n - p$
  Or, $p \leqslant k$, on obtient donc :
  $\sum_{i=1}^{p} A_i \geqslant n - k$
  $\sum_{i=1}^{p} A_i + k \geqslant n$
  Or, $\sum_{i=1}^{p} A_i + k$ est le nombre d'arrêtes de G
  Donc G possède bien au moins n arrêtes.
  Ainsi, P_{n+1} vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence forte, $\forall n \geqslant 2$, tout graphe connexe à n sommets contient au moins $n-1$ arrêtes.

Théorème 2 *:Tout graphe connexe à k sommets contenant au moins k arrêtes contient un cycle*

Rappel : Un arbre est un graphe connexe ne contenant pas de cycle

Soit $k \geqslant 2$

On considère la propriété Q_k :"Tout graphe connexe à k sommets contenant au moins k arrêtes contient un cycle"

La contraposée de cette assertion est P_k : "Un arbre à k sommets contient $k-1$ arrêtes" (exactement $k-1$ car d'après le théorème 1 si le graphe est connexe il contient au moins $k-1$ arrêtes)

On va montrer par récurrence que P_k est vraie pour tout $k \geqslant 2$

Initialisation : $k = 2$

Soit A_2 un arbre à 2 sommets (cf. figure en annexe)

A_2 possède exactement une arrête donc P_2 est vérifiée

Hérédité : Soit $k \geqslant 2$, on suppose que P_k est vraie

Soit A un arbre à $k+1$ sommets

A est un arbre donc A admet un sommet pendant que l'on notera x (cf. Preuve annexe 2)

On supprime l'unique arrête liée à x.

On obtient alors 2 graphes B et C :

-B possède 1 sommet donc 0 arrêtes

-C possède k sommets et est un arbre donc d'après l'hypothèse de récurrence C possède $k-1$ arrêtes

Ainsi, en notant n_G le nombre d'arrêtes du graphe G on obtient :

$n_A = n_B + n_C + 1 = 0 + k - 1 + 1 = k$

Donc P_{k+1} est vérifiée

Conclusion : D'après le principe de récurrence P_k est vraie pour tout $k \geqslant 2$.

Par contraposée, Q_k est vraie pour tout $k \geqslant 2$

Ainsi, tout graphe connexe à k sommets contenant au moins k arrêtes contient un cycle.

Théorème 3 : Soit G un graphe connexe à k sommets, il est possible de ne garder que $k-1$ arrêtes tout en conservant la connexité de G

Remarque : On notera $x_A \sim x_B$ pour "x_A et x_B sont adjacents".

Soit $k \geqslant 2$

Soit G un graphe connexe à k sommets et $M > k-1$ arrêtes.

D'après le theorème 2, G contient au moins un cycle.

Soient x_A et x_B deux sommets adjacents de ce cycle.

x_A et x_B appartenant à un cycle, il existe $x_1, x_2, ..., x_p \in G \setminus \{x_A, x_B\}$ tels que

$x_A \sim x_1 \sim x_2 \sim ... \sim x_p \sim x_B$

On supprime l'arrête $[x_A, x_B]$

x_A et x_B sont toujours connectés par la chaîne ($[x_A, x_1]$,$[x_1, x_2]$,...,$[x_p, x_B]$) donc le graphe obtenu a conservé sa connexité et possède $M-1$ arrêtes.

Ainsi, en supprimant une arrête appartenant à un cycle dans un graphe connexe, on conserve la propriété de connexité.

On peut donc répéter l'opération jusqu'à l'obtention d'un graphe à $k-1$ arrêtes qui est toujours connexe.

Plus particulièrement, on obtient un arbre.

$\star$*Solution : D'après les 3 théorèmes que nous venons de démontrer, il est possible de rigidifier une grille de dimension n x l en rajoutant uniquement $n+l-1$ tiges obliques.*

On sait désormais que la solution optimale de notre problème consiste à ajouter $n+l-1$ tiges obliques. Cependant, cela ne signifie en aucun cas que ces tiges peuvent être ajoutées n'importe où. Pour vérifier si une configuration donnée rigidifie ou non une grille, on a créé un programme Python muni d'une interface graphique (Tkinter) permettant de visualiser une grille de dimension souhaitée, d'y ajouter des tiges obliques où l'on veut et d'en vérifier la rigidité. (Ce programme sera présenté lors de la présentation orale)

De même, tous les programmes informatiques élaborés concernant les graphes en général seront présentés à l'oral.

5 Le cube : Déformable ?

On souhaite désormais élargir le problème à un assemblage en 3 dimensions. On va donc s'intéresser à la rigidité d'un cube. Plus particulièrement, on cherche à déterminer le nombre minimal de tiges obliques à rajouter sur les faces d'un cube pour que celui-ci ne soit pas déformable dans l'espace.

Il est clair que si l'on ne rigidifie qu'une seule face du cube, celui-ci peut aisément être déformé.

De même avec deux faces rigidifiées, qu'elles soient opposées ou non. (Le cube peut-être plié pour former une figure plane)

On essaye donc d'ajouter des tringles obliques sur 3 faces du cube.

Il y a deux façons de procéder : On rigidifie 3 faces alignées ou bien on rigidifie 3 faces partageant un sommet du cube (cf. figures en annexe)

En ajoutant des tringles obliques sur 3 faces alignées, le cube est toujours déformable : on peut le plier pour en faire une figure plane.

Montrons alors que si on rigidifie 3 faces partageant un sommet, on obtient un cube rigide.

- Avec des théorèmes de Sciences de l'Ingénieur :

  On a affaire à un problème concernant la capacité à se déformer d'une structure en 3 dimensions. Il est alors naturel d'essayer de le résoudre en employant les théorèmes de liaisons cinématiques et de statique. Malheureusement, on va vite se rendre compte qu'il est très compliqué de démontrer la stabilité d'une telle structure avec ces théorèmes.

  La première raison est la suivante :

  Les solides que nous considérons sont les arrêtes du cube et les sommets sont les liaisons entre ces arrêtes. C'est ici que les soucis commencent : un sommet du cube étant une articulation entre 3 arrêtes a_1, a_2 et a_3, il s'agit en fait de 3 liaisons sphériques/rotules partageant le même centre (Une pour a_1/a_2, une pour a_2/a_3 et une pour a_1/a_3)

  Or, il est très difficile de modéliser une telle superposition de trois liaisons.

  La seconde raison est que même si on arrivait à modéliser ces liaisons et à écrire les torseurs correspondants, en réalisant le graphe de structure on se rendrait vite compte que le problème est intraitable :

  Si les 3 faces que l'on rigidifie partagent les arrêtes a_1, a_2 et a_3, on peut alors considérer $S = \{a_1 + a_2 + a_3\}$ comme un seul solide. On s'intéresse donc aux relations entre 10 solides $(12 - 3 + 1)$

  Notre graphe de structure contiendrait alors 10 solides avec 6 liaisons pour le solide S et 2 liaisons pour les autres. Cela nous fait déjà $6 + 9\text{x}2 = 24$ torseurs à écrire.

  Ceci étant fait, pour montrer que notre structure est indéformable, il faudrait montrer que le PFS (Principe Fondamental de la Statique) est vérifié peu importe les forces auxquelles serait soumis le cube ("peu importe" signifie pour tout nombre de forces, pour toute norme, pour toute direction et pour tout point d'application).

  Pour modéliser ces forces on utilise de nouveau l'outil torseur : 3 inconnues pour les résultantes, 3 inconnues pour les moments.

  Il faudrait écrire une infinité de tels torseurs.

  Notre graphe de structure contenant 10 solides, on peut réaliser 2^{10-1} isolements différents. Chaque isolement nous donne 6 équations (3 pour les résultantes et 3 pour les moments).

  Le système à résoudre pour prouver la rigidité de la structure est don un système de $2^9\text{x}6 = 3072$ équations pour... une infinité d'inconnues.

  On abandonne alors l'utilisation de théorèmes de Sciences de l'Ingénieur.

- En passant par la théorie des graphes :

  En se servant des graphes, il était assez simple de résoudre un problème de rigidité d'une structure en 2 dimensions. Malheureusement ce n'est pas le cas en 3 dimensions.

  Dans le cas d'un cube, les sommets du graphe représentent les arrêtes du cube. Le passage à un problème dans l'espace est problématique pour le résoudre en se servant de graphes.

  En effet, les relations $\perp$ et // n'ont pas du tout les mêmes propriétés dans l'espace que dans le plan. (par exemple, pour a_1, a_2, a_3 des arrêtes, on n'a pas $a_1 \perp a_2$ et $a_2 \perp a_3 => a_1 \perp a_3$)

  Il est alors très difficile de traduire l'effet que va avoir sur notre graphe le fait de rajouter une tige oblique sur une face du cube.

  De plus il faudrait que notre graphe puisse distinguer $x \perp y$ de $x//y$. On est alors obligé de créer un graphe étiqueté.

  On se retrouve bloqué car on dispose de beaucoup moins de théorèmes sur les graphes étiquetés ou orientés que sur les graphes simples.

  On abandonne le passage par la théorie des graphes

- En revenant à la géométrie dans l'espace et aux équations cartésiennes :

  Il s'agit étonnamment du meilleur moyen de prouver que la solution optimale est celle décrite précédemment.

  On considère un cube $ABCDEFGH$ dont les arrêtes sont de longueur 1.

  On se place dans la base $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (cf. figure en annexe)

  En ajoutant des tiges rigides entre les points D et B, D et F, B et F, on impose alors :

$$\begin{aligned}
A &= (0,0,0)\\
B &= (0,1,0)\\
C &= (0,1,1)\\
D &= (0,0,1)\\
E &= (1,0,1)\\
F &= (1,0,0)\\
G &= (1,1,0)
\end{aligned}$$

  Cependant on n'impose rien au point H

  On se demande alors si il est possible de déplacer le point H sans briser ni déformer d'arrêtes.

  On note $H = (x, y, z)$

  Tout ce que l'on sait sur le point H c'est que :

$$\|\overrightarrow{EH}\| = 1 \ \|\overrightarrow{CH}\| = 1 \text{ et } \|\overrightarrow{GH}\| = 1$$

  H est l'intersection de trois sphères de rayon 1 et de centres respectifs E, C et G

  Connaissant les coordonnées de ces points et celles-ci étant fixes, on peut alors écrire :

$$y^2 + (x-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \tag{1}$$
$$x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \tag{2}$$
$$z^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \tag{3}$$

  En faisant $(1) - (2)$ on obtient :

$$\begin{gathered}
y^2 + (x-1)^2 + (z-1)^2 - 1 - (x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 1) = 0\\
y^2 + x^2 - 2x + 1 + z^2 - 2z + 1 - 1 - x^2 - y^2 + 2y - 1 - z^2 + 2z - 1 + 1 = 0\\
-2x + 2y = 0\\
x = y
\end{gathered}$$

En faisant $(1)-(3)$ on obtient :

$$y^2+(x-1)^2+(z-1)^2-1-(z^2+(x-1)^2+(y-1)^2-1)=0$$
$$y^2+x^2-2x+1+z^2-2z+1-1-z^2-x^2+2x-1-y^2+2y-1+1=0$$
$$2y-2z=0$$
$$y=z$$

On a donc $x=y=z$

En remplaçant y par x dans l'équation (1) on obtient :

$$x^2+(x-1)^2+(x-1)^2=1$$
$$3x^2-4x+1=0$$

On calcule le discriminant de ce trinôme : $\triangle=(-4)^2-4\times 3\times 1=16-12=4$

Les solutions de cette équations sont donc $x=1$ ou $x=\frac{1}{3}$

Ainsi, on a donc $H=(1,1,1)$ ou $H=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

Si lorsque l'on a ajouté les 3 tiges obliques le point H était en $(1,1,1)$, alors le cube obtenu est rigide.

Si lorsque l'on a ajouté les 3 tiges obliques le point H était en $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, alors la figure obtenue est rigide mais n'est pas un cube. (<u>cf</u>. figure en annexe)

⋆<u>*Solution*</u> *:Ainsi, 3 est le nombre minimal de tiges transversales pouvant être ajoutées sur les faces pour rigidifier un cube. Cependant, il faut s'assurer que l'on choisit bien 3 faces ayant un coin du cube en commun.*

6 Retour vers l'océan : La cage anti-requins

Le shark-diving/cage-diving est une activité répandue dans certains pays touristiques (Australie, Guadeloupe, Bahamas, etc...).

Cela consiste à se munir de bouteilles d'oxygène et à s'enfermer dans une cage en métal qui sera plongée dans l'océan afin de pouvoir observer des requins dans leur habitat naturel, de près et surtout en sécurité. Pour attirer les requins on répand de grandes quantités de nourriture dans la zone explorée.

La conséquences du cage-diving est d'augmenter de façon considérable le nombre d'attaques de requins et les populations locales vivant sur les littoraux se battent pour interdire ce genre d'activités.

Nous mettrons de côté le fait que ce genre d'activité est dangereux et à déconseiller pour nous concentrer sur l'objet qui nous intéresse : la cage.

On décide de construire une telle cage avec des tiges de longueur 1 articulées entre elles dans l'espace.

On réalise une cage de forme cubique où chaque face du cube est une grille.

La structure est elle rigide ? (va-t-elle résister aux requins ? ?)

Si elle ne l'est pas, est-ce possible de la rendre rigide en ajoutant des tiges obliques dans certaines cases formées par les grilles des faces ?

Cette situation correspond à un mélange entre notre premier problème (la grille dans le plan) et notre second (le cube dans l'espace).

Comment traduire l'effet que va avoir l'ajout d'une tringle oblique dans une case ?

Pour résoudre ce problème, est-il plus judicieux de passer par la théorie des graphes ou bien par la géométrie et les équations cartésiennes comme nous l'avons fait pour le cube ?

Troisième partie

Conclusion

En considérant des assemblages de tiges de même longueur et en les supposant parfaitement articulées entre elles, on est amené à se poser de nombreuses questions. Notamment à propos de la capacité de la structure globale à se déformer. Il est toujours possible d'élargir le problème mais à chaque nouvelle étape la difficulté pour le résoudre est décuplée.

Les problèmes de ce genre peuvent sembler relativement simples, car les objets qu'ils concernent le sont mais en réalité leur résolution est très complexe. Pour pouvoir les résoudre, il faut être capable de bien comprendre les mécanismes entrant en jeu afin de pouvoir les modéliser de façon judicieuse. La théorie des graphes dont le principe est justement de faciliter la résolution de problèmes complexes, peut se révéler très pratique là où d'autres théorèmes, techniques et domaines de sciences s'avèrent être inutiles et/ou inutilisables.

Avant de représenter un problème avec un graphe, il faut bien analyser la situation pour choisir quels objets représenter par des sommets, que représenter avec les arrêtes et surtout savoir comment traduire les modifications que l'on apporte à l'objet étudié sur notre graphe.

Quatrième partie

Bibliographie

Ces grilles de tiges articulées sont-elles rigides ? article de J.P Delahaye, *Pour la Science* numéro 490 rubrique Logique et Calcul page 80, Août 2018

Théorie des Graphes O. Cogis et C. Robert, *éditions Vuibert*, 2003

Les graphes par l'exemple F. Droesbeke M. Hallin et Cl. Lefevre, *éditions Ellipses*, 2001

Eléments de théorie des graphes A. Bretto A. Faisant et F. Hennecart, *éditions Springer*, 2012

Documentation officielle de Python

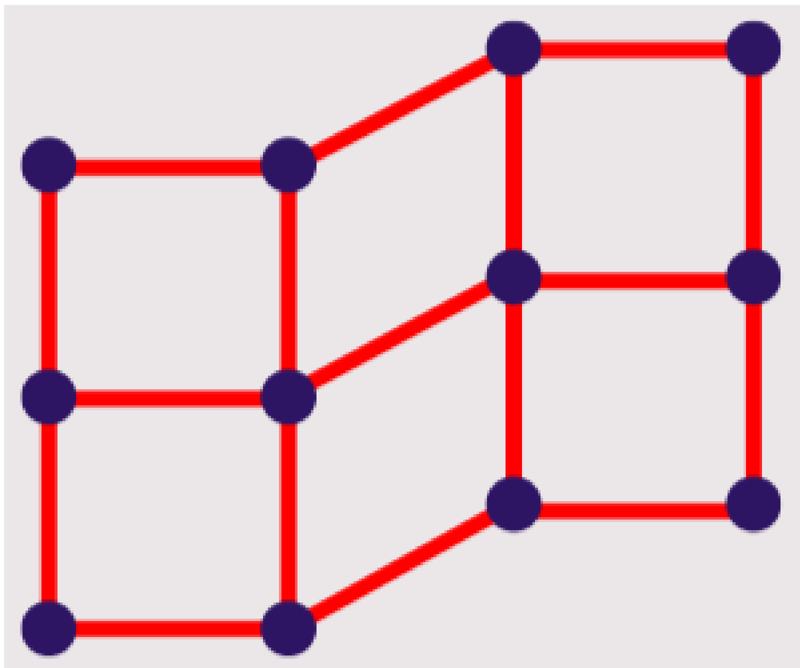
Documentation officielle de LaTex

Documentation officielle du module PyDot/PyGraphViz

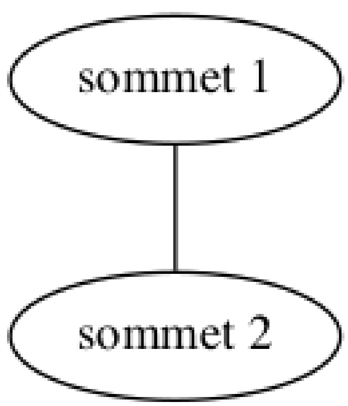
Cinquième partie

Annexe

Exemple de grille de tiges articulées



Graphe connexe à 2 sommets



Preuve annexe 1 :

On ne peut pas créer plus de classes connexes que l'on ne supprime d'arrêtes

Soit G un graphe à n sommets ($n \geqslant 2$)

Soient $x, y \in G$

1ercas : Il existe un cycle contenant x et y

En supprimant l'arrête $[x, y]$, la connexité entre x et y est préservée.

On n'a donc créé aucune classe connexe supplémentaire.

2emecas : Il n'existe pas de cycle contenant x et y

En supprimant l'arrête $[x, y]$, la connexité entre x et y est perdue.

La classe connexe qui contenait initialement x et y est séparée en deux classes connexes : une contenant x et une autre contenant y.

On a donc créé une classe connexe supplémentaire.

Conclusion : Ainsi, en supprimant une arrête dans un graphe, on créé au plus une classe connexe supplémentaire. Il est alors impossible de créer plus de classes connexes que l'on ne supprime d'arrêtes.

Preuve annexe 2 :

Soit $k \geqslant 2$

On considère la propriété P_k : "Un arbre à k sommets contient au moins 2 sommets pendants"

On va montrer par récurrence que P_k est vraie pour tout $k \geqslant 2$

Initialisation : $k = 2$

On considère un arbre à 2 sommets x_1 et x_2 (cf. figure en annexe)

$deg(x_1) = 1$ donc x_1 est un sommet pendant.

$deg(x_2) = 1$ donc x_2 est un sommet pendant.

P_2 est vérifiée

Hérédité : Soit $k \geqslant 2$, on suppose $P_2, P_3, ..., P_k$ vraies.

Soit G un arbre à $k+1$ sommets.

Soient x, y deux sommets de G.

G est un arbre, donc il n'existe pas de cycle contenant x et y.

En supprimant l'arrête $[x, y]$, on sépare G en deux classes connexes : G_1 et G_2 avec $x \in G_1$ et $y \in G_2$

— 1^{er} cas : $G_1 = \{x\}$
  $G_1 = \{x\}$ donc $deg_{G_1}(x) = 0$ donc $deg_G(x) = 1$
  Donc x est un sommet pendant de G.
  G_2 est un arbre à k sommets, donc d'après l'hypothèse de récurrence G_2 possède deux sommets pendants. On appelle y' le sommet pendant de G_2 différent de y.
  On a $deg_{G_2}(y') = 1$ et $y' \neq y$ donc $deg_G(y') = 1$
  y' est donc un sommet pendant de G.
  Ainsi, G possède deux sommets pendants.

— 2^{eme} cas : $G_2 = \{y\}$
  De même que pour le cas précédent, on montre que G possède deux sommets pendants.

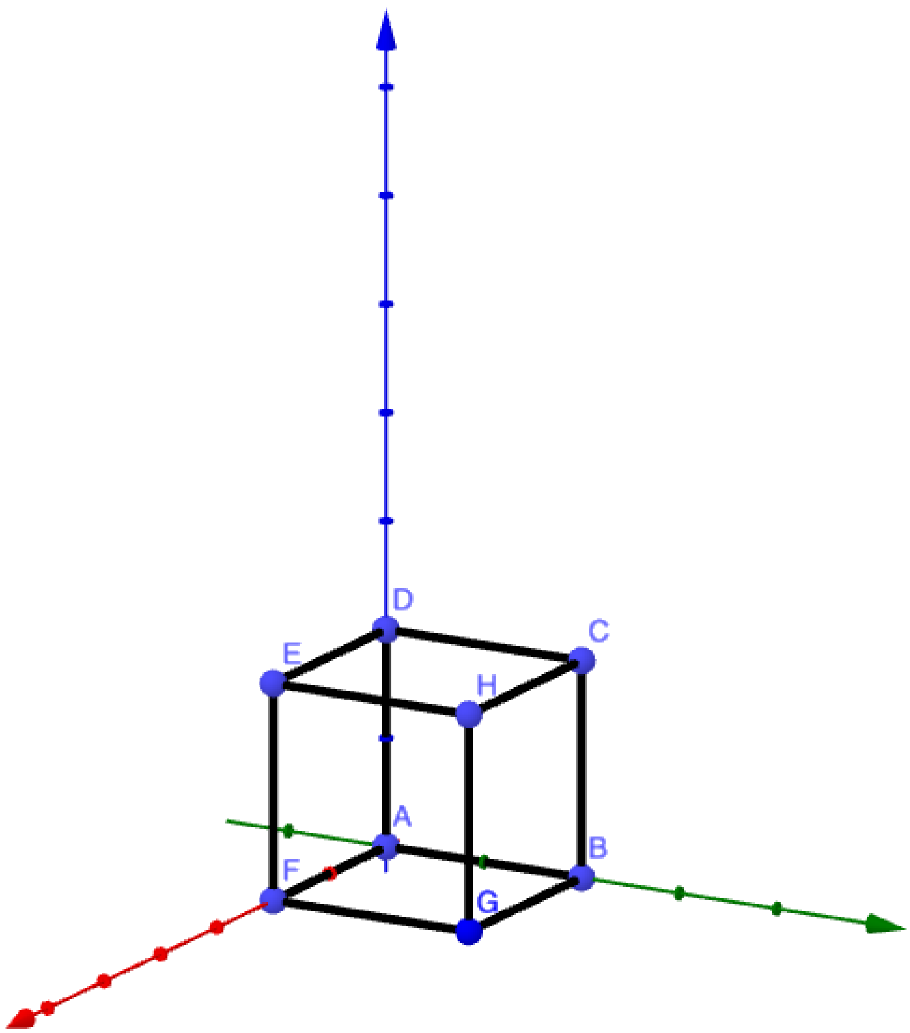
— 3^{eme} cas : $G_1 \neq \{x\}$ et $G_2 \neq \{y\}$
  G_1 et G_2 sont alors deux arbres contenant respectivement S_1 et S_2 sommets, avec :
  -$S_1 + S_2 = k + 1$
  -$k > S_1 \gg 2$
  -$k > S_2 \gg 2$
  D'après l'hypothèse de récurrence, P_{S_1} et P_{S_2} sont vérifiées donc :
  -G_1 admet au moins 2 sommets pendants
  -G_2 admet au moins 2 sommets pendants
  Soit x' un sommet pendant de G_1 différent de x

Soit y' un sommet pendant de G_2 différent de y
On a $deg_{G_1}(x') = 1$ et $x' \neq x$ donc $deg_G(x') = 1$
On a $deg_{G_2}(y') = 1$ et $y' \neq y$ donc $deg_G(y') = 1$
x' et y' sont des sommets pendants de G.
Ainsi, G admet deux sommets pendants.

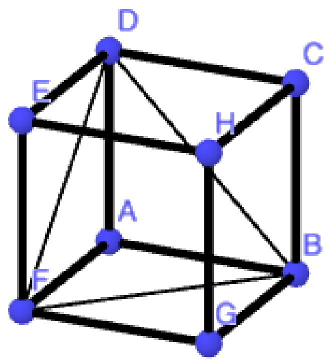
Tout arbre à $k + 1$ sommets admet au moins 2 sommets pendants donc P_{k+1} est vraie.

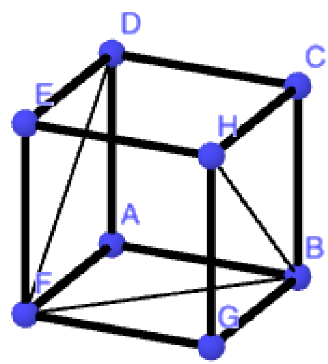
Conclusion : D'après le principe de récurrence forte, un arbre à plus de 2 sommets possède au moins 2 sommets pendants.

Cube ABCDEFGH dans la base $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:



<u>2 façons d'ajouter 3 tiges</u> :





Cube déformé