随　机　过　程

2006 年 9 月 27 日

序言

本书为中国科学技术大学概率统计和金融工程类硕士研究生教材, 内容包括:

张曙光

2003年6月30日

于中国科学技术大学

目　录

第一章　概述

§1.1　基本概念

所谓的**随机过程**，可以理解为概率空间$\{\,\Omega, \mathcal{F}, P\,\}$ 上定义的一族随机变量$X = \{X_i, i \in I\}$。其中指标集I为具有某种全序关系的集合，通常称之为时间集。

根据专业基础的不同，在研究随机过程一般理论的方法上有着不同侧重点。粗略划分，可以有如下的观点：

- 固定t，X_t为一个随机随机变量。过程$X = \{X_t,\ t \in I\}$可以看作一个随机变量的集合。这样就可以应用经典概率论的观点研究相关的过程属性。特别当指标集是至多可数时，这种方法广为采用，如众所熟知的时间序列方法就可以归入这一范围；
- 对任意给定的$\omega \in \Omega$, X_t可视为t的确定函数，通常称之为过程X的**轨道**（**或路径**）。$X = \{X_t\} : \{\,\Omega, \mathcal{F}\,\} \longrightarrow \{\,H, \mathcal{H}\,\}$，这里$H$为某种函数类，因此可以使用函数论的方法；
- 将$X(t,\omega)$视为如下映射$X(t,\omega) : I \times \Omega \longrightarrow \{\,E, \mathcal{T}(E)\}$，这里$\{\,E, \mathcal{T}(E)\}$可以为$\{R^d, \mathcal{B}(R^d)\}$

一般的研究是以上三种观点和方法的结合。

$(\omega) \mapsto X_i(\omega) : \{\,\Omega, \mathcal{F}\,\} \to \{\,R, \mathcal{B}(R^d)\,\}$为r.v.，把$\{\,R, \mathcal{B}(R^d)\,\}$ 推广为一般的拓扑

空间$\{S, \mathcal{S}\}$，我们称$\{S, \mathcal{S}\}$为过程X的**状态空间**。(以下只对实空间作分析)

定义 1.1.1 (连续过程) 对于随机过程$X_t = X(t, \omega)$，如果对于所有的ω，$X_t = X(t, \omega)$都是连续的函数，那么称X_t为**连续过程**。

在概率空间$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上，可以定义r.v.，相应的就可以定义随机过程。

定义 1.1.2 在概率空间$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上，有两个随机过程X，Y

$$if \quad \forall\, t \in I \quad X_t = Y_t \quad a.\ s. \quad (\, i.\ e. \quad P(X_t = Y_t) = 1\,)$$

称X_t为Y_t的**一个修正**。对所有的时间t，$X_t \neq Y_t$的可能性为零，$i.\ e.\ P(\, X_t \neq Y_t, t \in I\,) = 0$ 称X,Y**不可区分**。

可以证明：X, Y不可区分$\Longrightarrow X$与Y互为修正，反之不然。

例 1.1.3 (反例) 时间T是连续的随机变量，$i.\ e. \quad P(T = t) = 0$

$$X_t \equiv 0 \quad Y_t = \begin{cases} 0 & : \quad T \neq t \\ 1 & : \quad T = t \end{cases}$$

对于固定的$t > 0$，$P(\, X_t = Y_t\,) = P(\, T = t\,) = 0$ 因此，X为Y的修正;

对$\forall\, \omega \in \Omega$，$T(\omega)$为一个固定值，$t_0 = T(\omega)$时，$X_{t_0} \neq Y_{t_0}$

$$P[\, X_t \neq Y_t, \quad t \in [0, \infty)\,] = 1$$

因此，X,Y不是不可区分的。

问题 1.1.4 $\{X_t\}$在什么情况下会有连续修正？

命题 1.1.5 Y为X的修正，且X,Y有着右连续的过程轨道（路径），则X,Y不可区分。

定义 1.1.6 (有限维分布) 假定$\{\Omega,\mathcal{F},P\}$ 和$\{\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P}\}$ 是两个不同的概率空间。X,Y分别为定义其上的随机过程，且状态空间相同，对$\forall\ t_1<t_2<\cdots<t_n$（$t_1,t_2,\cdots,t_n$为I中的不同时刻），及$\forall\ A\in\mathcal{B}(R^{nd})$，称$P\{(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n})\in A\}$为X的**有限维分布**。

对$\forall\ n\quad t_1<t_2<\cdots<t_n\in I$及$\forall\ A\in\mathcal{B}(R^{nd})$，$P\{(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n})\in A\}=\widetilde{P}\{(Y_{t_1},Y_{t_2},\cdots,Y_{t_n})\in A\}$，称$X,Y$的**分布相同**。

定义 1.1.7 (可测（measurable）) 随机过程$X_t=X(t,\omega)$，

$$X_t\ :\ [0,\infty)\rightarrow \text{随机变量空间}$$

$$X_t\ :\ \{\Omega,\mathcal{F}\}\rightarrow\{H,\mathcal{H}\}\text{函数空间}$$

我们称随机过程$X_t=X(t,\omega)$是**可测的**，即对$\forall\ A\in\mathcal{B}(R^d)$有$\{(t,\omega):X_t(\omega)\in A\}\in\mathcal{B}([0,\infty))\bigotimes\mathcal{F}$，$i.\ e.$ 映射$(t,\omega)\mapsto X_t(\omega):([0,\infty)\times\Omega,\mathcal{B}([0,\infty))\bigotimes\mathcal{F})\rightarrow(R,\mathcal{B}(R^d))$为可测映射。

定义 1.1.8 (σ域流) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$是一族$\sigma$域，$\mathcal{F}_t$可以理解为截止到时刻$t$时，所能收集到的所有信息。如果$s\le t$则$\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t$，另外，我们有$\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$，我们称$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$为$\sigma$**域流**。

我们定义$\mathcal{F}_{+\infty}=\sigma(\bigcup_{s\ge0}\mathcal{F}_s)$，

定义 1.1.9 ($\mathcal{F}_t$适应) 如果对于$\forall t \in I$, X_t关于$\mathcal{F}_t$可测, $i.\ e.\ X_t \in \mathcal{F}_t$, 称$X$是$\mathcal{F}_t$**适应的**（$\mathcal{F}$-*adopted*）。

如果X_t是Y_t的一个修正，且$X_t \in \mathcal{F}_t \Longrightarrow Y_t \in \mathcal{F}_t$。

定义 1.1.10 (循序可测（progressive measurable）) 在概率空间$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上定义了一个$\sigma$-域流$\{\mathcal{F}_t\}$，若对于$\forall\, t \geq 0$和$A \in \mathcal{B}(R^d)$有$\{(s,\omega): 0 \leq s \leq t, X(s,\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0,t]) \bigotimes \mathcal{F}_t$，$i.\ e.\ ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \bigotimes \mathcal{F}_t) \to (R^d, \mathcal{B}(R^d))$，$X_t$称为$\{\mathcal{F}_t\}$**循序可测**。

这个概念是随机积分中不可避免的。

命题 1.1.11 X_t是右（左）连续的一个$\mathcal{F}_t$适应过程，则X_t是$\mathcal{F}_t$循序可测过程。

问题 1.1.12 可测与循序可测的关系？

§1.2 停时

在概率空间$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上定义$\sigma$-域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$，我们得到四元组$\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P\}$。

定义 1.2.1 (停时（stopping time）) T是一个非负的随机变量，如果$\forall\, t \geq 0$,$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$，称T为**停时**。

定义 1.2.2 (可选时（optional time）) T是一个非负的随机变量，如果$\forall\, t \geq 0$,$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$，称T为**可选时**。

注 1.2.3 (停时与可选时的关系) T是停时$\Longrightarrow T$是可选时，反之未必。

我们定义$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$

命题 1.2.4 T是$\mathcal{F}_t$可选时，则T是$\mathcal{F}_{t+}$停时。

$\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$则$T$为$\mathcal{F}_t$停时，当且仅当$T$为$\mathcal{F}_t$可选时。

满足上述要求的$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$称为**右连续**域流。进一步，若$\mathcal{F}_0$包含了$\{\Omega, \mathcal{F}\}$中所有的$P$-0集合，则称$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$满足**通常条件**。

问题 1.2.5 试举一反例说明，可选时不都是停时。

停时的基本性质：

1.T是$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$的可选时，$C$为大于零的任意常数，则$T+C$为$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$停时。

证明：

$$\forall t \geq 0 \quad \{T + C \leq t\} = \{T \leq t - C\} = \bigcap_{0<\varepsilon<C}\{T < t - C + \varepsilon\} \in \mathcal{F}_t$$

2.S_n，$n \geq 1$为一停时序列，$\bigvee_{n\geq 1} S_n$和$\sum_{n=1} S_n$均为停时；而$\bigwedge_{n\geq 1} S_n$为可选时。

（当$\{S_n\}$满足条件：$\forall \omega \in \Omega$,$\exists n(\omega) \in N$,当$n \geq n(\omega)$时,$S_n(\omega) = S_{n(\omega)}(\omega)$i. e. **尾定性**;则$\bigwedge_{n\geq 1} S_n$为停时。）

定义 1.2.6 (T前σ-域) 给定一个停时T，如果一个事件A满足条件：在$\{T \leq t\}$前提下，可以断定A是否已经发生，那么直观上把A称为T前发生的事件。我们定

义$\mathcal{F}_t = \{A \in \mathcal{F} : A \bigcap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in R_+\}$可以验证$\mathcal{F}_t$是$\sigma$-域，称其为**T前$\sigma$-域**。

类似地我们定义：

$\mathcal{F}_{T^+} = \{A \in \mathcal{F} : A \bigcap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_{t^+}, \forall t \in R_+\}$

$\mathcal{F}_{T^-} = \mathcal{F}_0 \bigvee \sigma\{A \bigcap \{T > t\}; A \in \mathcal{F}_t, \forall t \in R_+\}$

可以发现$\mathcal{F}_{T^-} \subseteq \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}_{T^+}$。

命题 1.2.7 S, T是停时，$\{S_n\}_{n\ge 1}$为停时列；R, U为可选时，$\{R_n\}_{n\ge 1}$为可选时序列

(1) $R \in \mathcal{F}_{R^-}$

(2) $S \le T \quad \Rightarrow \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$

$R \le U \quad \Rightarrow \mathcal{F}_{R^-} \subseteq \mathcal{F}_{U^-} \quad \mathcal{F}_{R_+} \subseteq \mathcal{F}_{U^+}$

(3) $\mathcal{F}_S \bigcap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S \wedge T}$

(4) $A \in \mathcal{F}_{S \wedge T} \Rightarrow A \bigcap \{S \le T\} \in \mathcal{F}_T \quad A \bigcap \{S = T\} \in \mathcal{F}_T \quad A \bigcap \{S < T\} \in \mathcal{F}_T$

(5) $\mathcal{F}_S \bigvee \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S \vee T} = \{A \cup B : A \in \mathcal{F}_S, B \in \mathcal{F}_T, AB = \emptyset\}$

(6) $A \in \mathcal{F}_{R_+} \Rightarrow A \bigcap \{R < U\} \in \mathcal{F}_{U^+}$

(7) $R \le U$ 且在$[R < \infty]$上,$R < U \Rightarrow \mathcal{F}_{R_+} \subseteq \mathcal{F}_{U^-}$

(8) $S \le T$ 且在$[T > 0]$上,$S < T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_{T^-}$

(9) $R \doteq \bigvee_n R_n \quad U \doteq \bigwedge_n R_n \Rightarrow \mathcal{F}_{R^-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{R_n^-} \quad \mathcal{F}_{U^+} = \bigwedge_n \mathcal{F}_{R_n^+}$

(10) $$S \doteq \bigvee_n S_n \quad 0 < S_n < \infty, S_n < S \Rightarrow \mathcal{F}_{S^-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{S_n}$$

定理 1.2.8 *1),S为停时，随机变量T∈ $\mathcal{F}_S$，且$T \geq S$，则T为停时；如果S为可选时，随机变量T∈ $\mathcal{F}_{S^+}$，且$T \geq S$，在$\{S < \infty\}$上$T > S$，则T为停时。*

2),S,T为停时，则S+T也是停时。

问题 1.2.9 证明当R为可选时，C为大于零的常数时，$R + C$为停时。

§1.3 经典鞅论

首先从离散时间切入，$\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$是概率空间$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上的一族$\sigma$-域流，$\{X_n\}$是$\mathcal{F}_n$适应的一族随机变量序列。停时$T \in \overline{N}$。

定义 1.3.1 (鞅（martingale）) $\{\mathcal{F}_n\}$适应的随机序列$\{X_n\}$称为$\mathcal{F}_n$-鞅（**上鞅或者下鞅**），若X_n可积，

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \;=\; (\leq, \geq)\, X_n \quad a.\ s.$$

等式两边取期望得到$E(X_n) \;=\; (\leq, \geq)\, E(X_1) \quad n > 1$。

例 1.3.2 ξ为可积的随机变量，令$X_n \;=\; E\,[\xi|\mathcal{F}_n]$，则$\{X_n, \mathcal{F}_n\}$是鞅。**证明:**

$$E\,[\,X_{n+1}|\mathcal{F}_n\,] \;=\; E\,[\,E\,[\,\xi|\mathcal{F}_{n+1}\,]|\mathcal{F}_n\,] \;=\; E\,[\,\xi|\mathcal{F}_n\,] \;=\; X_n$$

例 1.3.3 $\{X_n\}_{n\geq 1}$为独立的随机变量序列，$E\,(X_n) = 0, (\forall\, n \geq 1)$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$，取$\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，显然有$S_n \in \mathcal{F}_n, (\forall\, n \geq 1)$，则$\{S_n, \mathcal{F}_n\}$为鞅。

证明:

$$\begin{aligned}
E\left[S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= E\left[S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\
&= E\left[S_n|\mathcal{F}_n\right] + E\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\
&= E\left[S_n|\mathcal{F}_n\right] + E\left(X_{n+1}\right) \\
&= S_n + E\left(X_{n+1}\right) \\
&= S_n
\end{aligned}$$

如果$X_n \geq 0$，则S_n为下鞅；$X_n \leq 0$，则S_n为上鞅。

定理 1.3.4 假设$X = \{X_n\}_{n\geq 1}, Y = \{Y_n\}_{n\geq 1}$是两个鞅（上鞅，下鞅），则

1) $X + Y$仍为鞅（上鞅，下鞅）

2) X是鞅（下鞅），f为R上连续凸函数（连续凸增），则$f(X) = \{f(X_n)\}$是下鞅

3) X, Y是鞅（上鞅），则$X \bigwedge Y = \{X_n \bigwedge Y_n\}$为上鞅。

证明： 1),3)显然成立，可以利用条件期望的线性性和单调性证明之。

对2) $f(X_n) = f(E\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]) \leq E\left[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n\right)$ (Jenson不等式)

i. e. $f(X_n)$为下鞅。

定理 1.3.5 假定$X = \{X_n\}_{n\geq 1}$是鞅（上鞅），S, T为两个有界停时，且$S \leq T$，则$E\left[X_T|\mathcal{F}_S\right] = X_S (\leq X_S) \quad a.\ s.$

证明: 只考虑上鞅情况，不妨设$T \le n$，$|X_T| \le \sum_{k=1}^{n} |X_k|$，两边取期望得到$E\,|X_T| \le \sum_{k=1}^{n} < \infty$，从而知道$X_T$和$X_S$都可积。

$$\forall\, A \in \mathcal{F}_S \quad j \ge 0 \qquad A \bigcap \{S = j\} \bigcap \{T > j\} \,\in\, \mathcal{F}_j$$

首先假定$T - S \le 1$，由上鞅性质，得到

$$\int_A (X_S - X_T) dP = \sum_{j=0}^{n} \int_{A \cap \{S=j\} \cap \{T>j\}} (X_j - X_{j+1}) dP$$

X是上鞅，$E\,[\,X_{n+1} | \mathcal{F}_n\,] \le X_n$，

$$\int_{A \cap \{S=j\} \cap \{T>j\}} (X_j - X_{j+1}) dP \ge 0 \quad \Longrightarrow \int_A (X_S - X_T) dP \ge 0$$

$$\Longrightarrow E\,[\,X_T | \mathcal{F}_S\,] \le X_S \quad a.\,s.$$

对于一般情况，令$R_j = T \bigwedge (S + j) \quad j = 1 \cdots n$，$R_j$为停时，且$S \le R_1 \le R_2 \le \cdots \le R_n = T \quad R_{j+1} - R_j \le 1$，利用上面的结论得到:

$$\begin{aligned}
E\,[\,X_{R_n} | \mathcal{F}_{R_{n-1}}\,] &\le X_{R_{n-1}} \\
E\,[\,E\,[\,X_T | \mathcal{F}_{R_{n-1}}\,] | \mathcal{F}_{R_{n-2}}\,] &\le E\,[\,X_{R_{n-1}} | \mathcal{F}_{R_{n-2}}\,] \\
E\,[\,X_T | \mathcal{F}_{R_{n-2}}\,] &\le X_{R_{n-2}} \\
\cdots \quad &\cdots \quad \cdots \\
E\,[\,X_T | \mathcal{F}_S\,] &\le X_S \quad a.\,s.
\end{aligned}$$

几个重要的不等式

定理 1.3.6 $\{X_n\}_{n\geq 1}$是一个上鞅，$k\geq 0$，$\forall\lambda>0$，有

$$1)\quad \lambda P[\sup_{n\leq k} X_n\geq\lambda] \leq EX_0-\int_{\{\sup\limits_{n\leq k} X_n<\lambda\}} X_k dP$$

$$2)\quad \lambda P[\inf_{n\geq k} X_n\leq -\lambda] \leq \int_{\{\inf\limits_{n\leq k} X_n\leq -\lambda\}}(-X_k)dP$$

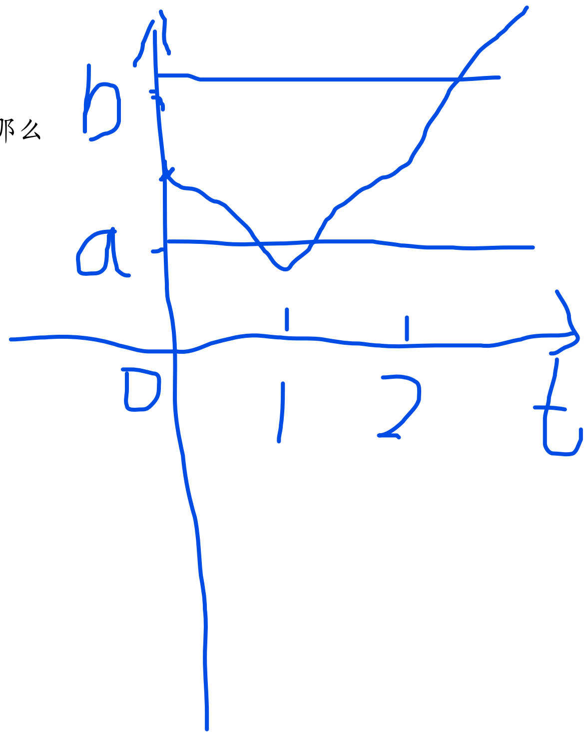
$$3)\quad \lambda P[\sup_{n\leq k}|X_n|\geq\lambda] \leq EX_0+2E(X_k^-)$$

证明: 令$T=\inf\{n\geq 0,\, X_n\geq\lambda\}\bigwedge k$，由定义知道$T$为一个有界停时，在$\{\sup_{n\leq k}X_n\geq\lambda\}$上有$X_T\geq\lambda$，在$\{\sup_{n\leq k}X_n<\lambda\}$上有$T=k$，由上鞅的性质有：

$$\begin{aligned} E(X_0)\geq E(X_T) &= \int_{\{\sup\limits_{n\leq k}X_n\geq\lambda\}} X_T dP+\int_{\{\sup\limits_{n\leq k}X_n<\lambda\}} X_T dP \\ &\geq \lambda P[\sup_{n\leq k}X_n\geq\lambda]+\int_{\{\sup\limits_{n\leq k}X_n<\lambda\}} X_k dP \end{aligned}$$

从而1)得证。

请自己完成2),3)的证明。



推论 1.3.7 $\{X_n\}$为鞅，且对于$k\geq 0$，有$EX_k^2<\infty$，那么

$$P[\sup_{n\leq k}|X_n|\geq\lambda]\leq\frac{1}{\lambda^2}E[X_k^2]$$

上穿不等式：首先定义

$$\begin{aligned} T_0 &= \inf\{n\geq 0,\, X_n\leq a\} \\ T_1 &= \inf\{n: n\geq T_0,\, X_n\geq b\} \\ T_2 &= \inf\{n: n\geq T_1,\, X_n\leq a\} \\ \cdots &\quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

则$\{T_k\}_{k\geq 0}$是一族单调上升的停时列。如果$T_{2j-1}<\infty,(j>0)$，则$\{X_n\}_{0\leq n\leq T_{2j-1}}$上穿区间$[a,b]$j次，用$\bigcup_a^b[X,k]$表示$(X_1,X_2,\cdots,X_k)$上穿区间$[a,b]$的次数。

定理 1.3.8 (上穿不等式) $\{X_n\}$是一个上鞅，对$N\geq 1$，$k\geq 0$，有:

$$P\{\bigcup_a^b[X,N]\geq k+1\}\ \leq\ \frac{1}{b-a}\,E\{[X_n-a]^-\,I_{[\cup_a^b[X,N]=k]}\}$$

进一步得到:

$$E\{\bigcup_a^b[X,N]\}\ \leq\ \frac{1}{b-a}\,E[X_n-a]^-\ \leq\ \frac{1}{b-a}\,(E\,X_N^+\ +\ |a|)$$

证明：我们有 $\{\bigcup_a^b[X,N]=k\}\ =\ \{T_{2k-1}\leq N<T_{2k+1}\}$

由于$\{X_n\}$是一个上鞅，得到:

$X_{T_{2k}}\leq a$

$$\begin{aligned}
0\ &\geq\ E[X_{T_{2k+1}\wedge N}-X_{T_{2k}\wedge N}]\\
&=\ E[X_{T_{2k+1}\wedge N}-X_{T_{2k}\wedge N}](I_{(T_{2k}\leq N<T_{2k+1})}\ +\ I_{(N\geq T_{2k+1})})\\
&\geq\ E[X_N-a]I_{(T_{2k}\leq N<T_{2k+1})}\ +\ (b-a)P[N\geq T_{2k+1}]
\end{aligned}$$

$$(b-a)P[N\geq T_{2k+1}]\ \leq\ (-1)E[X_N-a]\,I_{(\cup_a^b[X,N]=k)}\ \leq\ E[(X_N-a)^-\,I_{(\cup_a^b[X,N]=k)}]$$

且$\{N\geq T_{2k+1}\}\ =\ \{\bigcup_a^b[X,N]\ \geq\ k+1\}$，命题得证。

定理 1.3.9 (Doob不等式) $\{X_n\}_{n\geq 0}$是一个非负下鞅，$X^*\ =\ \sup_n\{X_n\}$，则有:

1) $$E[X^*]\ \leq\ \frac{e}{e-1}[1\ +\ \sup_n\ E(X_n\log^+X_n)]$$

2) $\|X^*\|_p\ \leq\ q\cdot\sup_n\|X_n\|_p\quad(\frac{1}{p}\ +\ \frac{1}{q}\ =\ 1$，其中$\|X\|_p\ =\ E^{\frac{1}{p}}|X|^p)$

证明： 假设$k \geq 0$，令$X_k^* = \sup_{n\leq k}\{X_n\}$

$\Phi(\lambda)$是R_+上单调上升的有限右连续函数，且$\Phi(\lambda) = 0$

$$
\begin{aligned}
E[\Phi(X_k^*)] &= \int_\Omega \int_{[0,X_k^*]} d\Phi(\lambda)dP(\text{交换积分次序}) \\
&= \int_{[0,\infty)} P(X_k^* \geq \lambda)d\Phi(\lambda) \\
&\leq \int_{[0,\infty)} (\frac{1}{\lambda}) \int_{(X_k^*\geq\lambda)} X_k dP)d\Phi(\lambda) \\
&= E[X_k \int_0^{X_k^*} \frac{1}{\lambda} d\Phi(\lambda)]
\end{aligned}
$$

1) 取$\Phi(X) = (X-1)^+$，则由以上不等式得到：

$$E[X_k^* - 1] \leq E[X_k^* - 1]^+ \leq E[X_k \log^+ X_k^*]$$

(注意到$\log(x) \leq \frac{x}{e}, (x \geq 0)$，$\forall a, b \geq 0 \quad a\log^+ b \leq a\log^+ a + \frac{b}{e}$)

$$E[X_k \log^+ X_k^*] \leq E[X_k \log^+ X_k + \frac{1}{e} E[X_k^*]$$

代入最初的不等式即得到结论。

2) 取$\Phi(X) = X^p$并应用Hölder不等式

$$E[X_k(X_k^*)^{p-1}] \leq E^{\frac{1}{p}}[X_k^p] \cdot E^{\frac{1}{q}}[(X_k^*)^{q(p-1)}], (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

可得结论。

定理 1.3.10 (收敛性) $\{X_n\}$是一个上鞅，$\sup_n EX_n^- < \infty$，则当$n \longrightarrow \infty$时，X_n $a.s.$ 收敛于一个可积随机变量X_∞。

如果$\{X_n\}$是一个非负上鞅，有$E[X_\infty | \mathcal{F}_n] \leq X_n \quad a.s. \quad \forall n > 0$

证明：$a,b\in Q$且$a<b$，令$\bigcup_a^b[X]$表示$\{X_n\}_{n\geq 0}$上穿区间$[a,b]$的次数，i. e. $\bigcup_a^b[X]=\lim_{N\to\infty}\bigcup_a^b[X,N]$

$$E\,[\bigcup_a^b[X]\,]\leq\frac{1}{b-a}\sup_N\;E\,[\,X_N-a\,]^-\leq\frac{1}{b-a}(|a|+\sup_N\;E\,[\,X_n^-\,])<\infty$$

i. e. $\quad\bigcup_a^b[X]\;<\;\infty\quad$ a. s.

令$W_{a.b}=\{\liminf_n X_n\leq a,\;\limsup_n X_n\geq b\}$，$W=\bigcup_{\substack{a,b\in Q\\a<b}}W_{a.b}$，得到

$W_{a.b}\subset\{\bigcup_a^b[X]=\infty\}$，$P(W_{a.b})=0\Rightarrow P(W)=0$

当$\omega\overline{\in}W$，则$X_n(\omega)$的极限存在，记为$X_\infty(\omega)$；当$\omega\in W$，人为定义$X_\infty(\omega)=0$。于是有$X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X_\infty,(n\to\infty)$。

由Faton引理，$E\,|X_\infty|\leq\sup_n\;E\,|X_n|<\infty$(事实上，对上鞅$\{X_n\}$有：$\sup_n EX_n^-<\infty\Leftrightarrow\sup_n E\,|X_n|<\infty$)。

?

若X_n非负，对于$m>n$，有：

$$\begin{aligned}E\,[\,X_m\,|\mathcal{F}_n\,]&\leq X_n\\ \lim_{m\to\infty}E\,[\,X_m\,|\mathcal{F}_n\,]&\leq X_n\\ E\,[\lim_{m\to\infty}X_m\,|\mathcal{F}_n\,]&\leq X_n\end{aligned}$$

命题得证。

定理 1.3.11 $\{X_n\}$是鞅(上鞅)，若X_n一致可积，则存在一可积随机变量X_∞，使得$X_n\longrightarrow X_\infty\quad a.\,s.$，且对$\forall n\geq 0$，有：

$$E\,[\,X_\infty|\mathcal{F}_n\,]=X_n(\leq X_n)\quad a.\,s.$$

上鞅的结构性质

定义 1.3.12 (可料（predictable）) $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上$\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$是$\sigma$域流，$\{X_n\}_{n\geq 0}$称为$\mathcal{F}_n$**-可料的**，如果对于$\forall n \geq 1$，有$X_n \in \mathcal{F}_{n-1}$

A_n单调增序列，对于$\forall m \geq n$，有$A_n \subseteq A_m \quad a.\ s.$，且$A_\infty \doteq \lim\limits_{n\to\infty} A_n$，称为增序列$A_n$可积，如果$EA_\infty < \infty$

定理 1.3.13 (Doob分解) 设X是一个上鞅，则X可以唯一分解成$X_n = M_n - A_n$。其中M_n为鞅，A_n是单调增的可积可料过程，$A_0 = 0$

证明： 假设$\{X_n\}_{n\geq 0}$具有以上的分解，则由$\{M_n\}$的鞅性，我们有

$$\begin{aligned}
A_{n+1} - A_n &= E[(A_{n+1} - A_n)|\mathcal{F}_n] \\
&= \underbrace{E[(M_{n+1} - M_n)|\mathcal{F}_n]}_{0} + E[(X_n - X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \\
&= X_n - E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
&\geq X_n - X_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

证唯一性

A_n单调上升，$A_0 = 0$。由于$A_0 = 0$，所以$A_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1}[X_k - E(X_{k+1}|\mathcal{F}_k)] \in \mathcal{F}_{n-1} \quad (n \geq 1)$，$A_n$是个可料增过程。

定义 1.3.14 (位势(potential)) 一个非负上鞅$\{Z_n\}_{n\geq 0}$称为一个**位势**，如果$\lim\limits_{n\to\infty} EZ_n = 0 \quad i.\ e.\ Z_n \xrightarrow{L^1} 0$

问题 1.3.15 证明任何一个位势为一致可积的上鞅。

定义 1.3.16 (Risez分解) $X=\{X_n\}_{n\geq 1}$为一个上鞅，如果存在另一个上鞅$Y=\{Y_n\}_{n\geq 0}$，以及一个位势$\{Z_n\}_{n\geq 0}$，使得$X_n=Y_n+Z_n\ (\forall n\geq 0)$，则称$X$具有***Risez*分解**。

注 1.3.17 如果上鞅$\{X_n\}$具有*Risez*分解，则这种分解唯一。

证明：假设此分解不唯一，即$X_n=Y_n+Z_n=Y_n^{'}+Z_n^{'}$，则$Y_n-Y_n^{'}=Z_n-Z_n^{'}$

由于$\{Z_n\}$，$\{Z_n^{'}\}$是位势，所以$Z_n^{'}-Z_{n_{n\geq 0}}$一致可积

$$Y_n-Y_n^{'}=E[(Y_{n+m}-Y_{n+m}^{'})|\mathcal{F}_n]=E[Z_{n+m}^{'}-Z_{n+m}|\mathcal{F}_n]\quad m\geq 0$$

由$Z_n^{'}-Z_n$的一致可积性以及$Z_{n+m}^{'}-Z_{n+m}\xrightarrow{L^1}0\quad(m\to\infty)$

所以$Y_n-Y_n^{'}=\lim\limits_{m\to\infty}E[Z_{n+m}^{'}-Z_{n+m}|\mathcal{F}_n]=0\ a.\ s.$

定理 1.3.18 (Riesz分解定理) *1)*上鞅$\{X_n\}_{n\geq 0}$具有*Risez*分解，当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}EX_n>-\infty$

2)$\{X_n\}_{n\geq 0}$为非负上鞅，则其*Risez*分解中的鞅部分$\{Y_n\}_{n\geq 0}$非负

*3)*假设$\{X_n\}_{n\geq 0}$为一致可积上鞅，则$X_n\xrightarrow{L^1}X_\infty$

*(*令$Y_n\doteq E[X_\infty|\mathcal{F}_n]$，$Z_n=X_n-Y_n$则$X_n=Y_n+Z_n$为*Risez*分解*)*

问题 1.3.19 请读者自行完成定理的证明。

定义 1.3.20 (右闭鞅) 一个鞅*(*或一个上鞅*)*$(X_n)_{n\geq 0}$称为**可右闭的**，如果存在

一个可积的随机变量X_∞，$(X_\infty \in \mathcal{F}_\infty)$,使得

$$\forall\, n \geq 0 \quad E[X_\infty|\mathcal{F}_n] = X_n \quad (\text{或}E[X_\infty|\mathcal{F}_n] \leq X_n) \quad a.\ s.$$

此时$\{X_n\}_{n\in\overline{N}}$称为**右闭鞅（或右闭上鞅）**。

定理 1.3.21 $\{X_n\}_{n\geq 0}$是一个上鞅，则$\{X_n\}$是右闭的**当且仅当**$\{X_n^-\}_{n\geq 0}$一致可积。

证明：必要性

$$X_n^+ - X_n^- = X_n \geq E[X_\infty|\mathcal{F}_n] \geq -E[X_\infty^-|\mathcal{F}_n] \quad a.\ s.$$

$$X_n^- \leq E[X_\infty^-|\mathcal{F}_n] \quad a.\ s.$$

由于$\xi_n \doteq E[X_\infty^-|\mathcal{F}_n]$一致可积，所以$\{X_n^-\}$一致可积。

充分性

$\{X_n\}$为上鞅

$$\forall\, A \in \mathcal{F}_n, \quad \int_A X_n dP \geq \int_A X_{n+m} dP = \int_A X_{n+m}^+ dP - \int_A X_{n+m}^- dP$$

而$\{X_n^-\}$为一致可积上鞅$\Rightarrow \sup\limits_n E[X_n^-] < \infty$ 由于$\lim\limits_{m\to\infty} X_{n+m}^- = X_\infty^-$，所以有

$$\lim_{m\to\infty} \int_A X_{n+m}^- dP = \int_A \lim_{m\to\infty} X_{n+m}^- dP = \int_A X_\infty^- dP$$

另一方面，$X_{n+m}^+ \to X_\infty^+ a.\ s.$，由Fatou引理有$\int_A \lim\limits_{m\to\infty} X_{n+m}^+ dP \leq \lim\limits_{m\to\infty} \int_A X_{n+m}^+ dP$

$$E[I_A X_n] \geq \lim_{m\to\infty} E[I_A X_{n+m}] \geq E[I_A X_\infty]$$

由条件期望的定义有$X_n \geq E[X_\infty|\mathcal{F}_n] \quad a.\ s.$

定理得证。

$\{X_n\}_{n\geq 0}$为鞅(上鞅)，$S \leq T$为有界停时，则$E[X_T|\mathcal{F}_S] = X_S(\leq X_S)$。这一结果为以下结论的特殊情况。

定理 1.3.22 (选择抽样定理（optional sampling theorem）) $\{X_n\}_{n\in\overline{N}}$为鞅(上鞅)，$S,T$为两个停时，则$X_S$和$X_T$是可积的，且

$$E[X_T|\mathcal{F}_S] = X_{S\wedge T}(\leq X_{S\wedge T}) \quad a.\ s.$$

定理 1.3.23 *1)*$\{X_n\}_{n\geq 0}$为鞅，S,T为两个有限停时，则$E[X_T|\mathcal{F}_S] = X_{S\wedge T}\ a.\ s.$的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n I_{(T\geq n)}|\mathcal{F}_S] = 0\ a.\ s.$

2)$\{X_n\}_{n\geq 0}$为上鞅，S,T为两个有限停时，如果X_T可积，及$\limsup\limits_{n\to\infty} E[X_n I_{[T\geq n]}|\mathcal{F}_S] = 0\ a.\ s.$，则$E[X_T|\mathcal{F}_S] \leq X_{S\wedge T}\ a.\ s.$

定义 1.3.24 (可料对偶投影) $\{M_n\}_{n\geq 0}$为一平方可积鞅，一般情况下M_n^2为下鞅，存在唯一的单调增的可料过程A_n，使得$M_n^2 - A_n$是鞅，则称A_n为M_n的<>过程，或可料对偶投影。

§1.4 连续时间鞅

定义 1.4.1 (鞅（上鞅，下鞅）) $\{X_t\}_{t\in R_+}$是鞅(上鞅，下鞅)，如果$\{X_t\}_{t\in R_+}$可积，且对$\forall\, s \leq t$，$E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s(\leq X_s, \geq X_s)$。

$\{X_t\}_{t\in R_+}$为一个过程，$u = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$是$R_+$的一个子集，记$\cup_a^b(X,u)$表示$X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}$上穿$[a,b]$的次数。

对于R_+的任意子集D，定义$\cup_a^b(X,D) = \sup\limits_u\{\cup_a^b(X,u), u$为$D$的有限子集$\}$。

$D=\{t_1,\cdots\}$为R_+的稠子集，$u_n=\{t_1,\cdots,t_n\}$，$\cup_a^b(X,D)=\lim\limits_{n\to\infty}\cup_a^b(X,u_n)$

定理 1.4.2 $\{X_t\}_{t\geq 0}$为一个上鞅，$D\subseteq R_+$是一个可数稠子集，则对$\forall 0\leq r<s<\infty$，$a<b$为常数，以及$\lambda>0$有：

$$1)\quad \lambda P[\sup_{t\in D\cap[r,s]}|X_t|\geq\lambda]\leq EX_r+2EX_s^-$$

$$2)\quad E[\bigcup_a^b[X,D\cap[r,s]]]\leq\frac{1}{b-a}E[(X_s-a)^-]$$

如果$\{X_t\}_{t\geq 0}$的几乎所有轨道是右连续的，则上述的$D\cap[r,s]$可由$[r,s]$代替。

定理 1.4.3 $\{X_t\}_{t\geq 0}$是一个$\mathcal{F}_t$上鞅，且右连续，则$\{X_t\}_{t\geq 0}$也是$\mathcal{F}_{t+}$上鞅，且$\{X_t\}_{t\geq 0}$几乎所有轨道右连左极。

推论 1.4.4 如果$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$是右连续的，则任何的$\mathcal{F}_t$鞅都具有右连续修正。

定理 1.4.5 (收敛性) $\{X_t\}_{t\geq 0}$是一个右连续上鞅，如果$\sup\limits_{t\geq 0}EX_t^-<\infty(\sup\limits_{t\geq 0}E|X_t|<\infty)$，则$X_t a.\ s.$收敛于一个可积的随机变量$X_\infty$。如果$\{X_t\}_{t\geq 0}$同时具有一致可积下界（比如：$X_t\geq 0$），则$\{X_t\}_{t\in\overline{R_+}}$为上鞅。

定理 1.4.6 (Doob不等式) $\{X_t\}_{t\geq 0}$是一个非负右连续下鞅，$X^*=\sup_{t\geq 0}\{X_t\}$，则有：

$$\textit{1)}\qquad E[X^*]\leq\frac{e}{e-1}[1+\sup_{t\geq 0}E(X_t\log^+X_t)]$$

$$\textit{2)}\quad \|X^*\|_p\leq q\cdot\sup_{t\geq 0}\|X_t\|_p\quad (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1，\text{其中}\|X\|_p=E^{\frac{1}{p}}|X|^p)$$

问题 1.4.7 $\{X_t\}_{t\geq 0}$为一个平方可积鞅，$i.\ e.\sup\limits_{t\geq 0}EX_t^2<\infty$，则$X^*$可积，$\{X_t\}_{t\geq 0}$一致可积。

定义 1.4.8 (Riesz分解) $\{Z_t\}_{t\geq 0}$是非负上鞅，如果$\lim\limits_{t\to\infty} EZ_t = 0$，称$\{Z_t\}_{t\geq 0}$为一个位势。$\{X_t\}_{t\geq 0}$是上鞅，如果存在鞅$\{Y_t\}_{t\geq 0}$和一个位势$\{Z_t\}_{t\geq 0}$，使得$X_t = Y_t + Z_t$，则称$\{X_t\}_{t\geq 0}$具有*Riesz*分解。

定理 1.4.9 (Riesz分解) $\{\mathcal{F}_t\}$为右连续，$\{X_t\}_{t\geq 0}$为右连续上鞅

1)$\{X_t\}$具有*Riesz*分解，当且仅当$\lim\limits_{t\to\infty} EX_t > -\infty$

2)$\{X_t\}$非负，则$\{Y_t\}$也非负

3)$\{X_t\}$为一致可积上鞅，则$X_t \xrightarrow{L^1} X_\infty$，此时$\{Y_t\}$为$E[X_\infty|\mathcal{F}_t]$的右连续修正，$Z_t = X_t - Y - t$为一个位势。

定义 1.4.10 (类(D)过程) $\mathcal{T}$为所有停时的全体，一个可测过程$\{X_t\}_{t\geq 0}$称为类*(D)*过程，如果$\{X_T, T\in\mathcal{T}\}$一致可积。

定理 1.4.11 (Doob-Meyer分解) $\{X_t\}_{t\geq 0}$为右连续类*(D)*过程，则其可以唯一分解成$X_t = M_t - A_t$，其中$\{M_t\}$为一致可积鞅，A_t为单调增可料过程，且$A_0 = 0$，称为类*(D)*上鞅的*Doob-Meyer*分解。

定义 1.4.12 (二次变差过程) $\{M_t\}_{t\geq 0}$是一个$\mathcal{F}_t$平方可积鞅，A_t是单调增的可料过程，$A_0 = 0$，若$M_t^2 - A_t$是鞅，则A_t称为M_t的二次可料变差过程。

$\{M_t\}$,$\{N_t\}$为两个平方可积鞅，则$<M, N> \doteq \frac{1}{2}[<M+N> - <M> - <N>]$，称为$\{M_t\}$和$\{N_t\}$的二次可料变差过程。

定理 1.4.13 $\{M_t\}, \{N_t\} \in \mathcal{M}^2$（平方可积鞅），则$<M, N>_t$是唯一使得$M_tN_T - <$

$M, N >_t$为一致可积鞅的可料过程，且$< M, N >_0 = 0$。

定义 1.4.14 (二次协变差过程) $\{M_t\}, \{N_t\} \in \mathcal{M}^2$（平方可积鞅），$M_t = M_t^c + M_t^d$，$N_t = N_t^c + N_t^d$，其中$M_t^c, N_t^c$是连续鞅部分，$M_t^d, N_t^d$是离散鞅部分。定义

$$[M, N]_t = M_0 N_0 + < M^c, N^c >_t + \sum_{s \le t} \Delta M_s \Delta N_s \quad t \ge 0$$

称为M和N的二次协变差过程，或者[ ]过程。（这里$\Delta X_t \doteq X_t - X_{t^-}$）

定理 1.4.15 $\{M_t\}, \{N_t\} \in \mathcal{M}^2$（平方可积鞅），$[M, N]$是能使得$M_t N_t - [M, N]_t$是初值为零的一致可积鞅的唯一适应过程，且$\Delta[M, N] = \Delta M \Delta N$。

§1.5 独立增量过程

定义 1.5.1 $\{X_t\}_{t\ge 0}$是定义在概率空间$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上的一个过程，如果对于$\forall\, 0 \le t_1 < t_2 \cdots < t_n < \infty$，有$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$是独立的，称$\{X_t\}_{t\ge 0}$为独立增量过程。如果对于$s, t \ge 0$，$X_{t+s} - X_t$的分布只依赖于$s$，即增量的分布仅与时间间隔有关，则称$\{X_t\}_{t\ge 0}$为平稳过程

定义 1.5.2 (poisson过程) 以N_t来记时间$[0, t]$上某类事件发生的次数，并进一步假定:

1）$P(N_t = 1) = \lambda t + o(t)$

2）$\forall t_1 \le t_2 \le t_3$，$N_{t_2} - N_{t_1}$与$N_{t_3} - N_{t_2}$独立

3）$P(N_t \ge 2) = o(t)$

从而有$P(N_t=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \quad k\geq 0$，它的一个右连左极修正，仍记为$\{N_t\}$，称$\{N_t\}_{t\geq 0}$为齐次的poisson过程。

不妨假定$\{N_t\}$是右连续的，如果$\mathcal{F}_t=\sigma N_s, 0\leq s\leq t$，那么$\{N_t\}$是$\mathcal{F}_t$适应的，定义$\widetilde{N_t}=N_t-\lambda t$，则$\widetilde{N_t}$为$\mathcal{F}_t$-鞅（平方可积鞅），成为**补偿poisson鞅**。

证明：

$$\forall t>s \quad E[\widetilde{N_t}|\mathcal{F}_s]=E[\widetilde{N_s}+(\widetilde{N_t}-\widetilde{N_s})|\mathcal{F}_s]=\widetilde{N_s}+E[(\widetilde{N_t}-\widetilde{N_s})|\mathcal{F}_s]$$

而$\widetilde{N_t}-\widetilde{N_s}=N_t-N_s-\lambda(t-s)$与$\sigma(N_u, 0\leq u\leq s)$是独立的，那么有

$$E[(\widetilde{N_t}-\widetilde{N_s})|\mathcal{F}_s]=E[\widetilde{N_t}-\widetilde{N_s}]=E[N_t-N_s]-\lambda(t-s)=0$$

$$E[\widetilde{N_t}|\mathcal{F}_s]=\widetilde{N_s}$$

所以$\widetilde{N_t}$为$\mathcal{F}_t$-鞅。

问题 1.5.3 在满足poisson过程定义中的条件1),2),3)的假定下，N_t是poisson过程，当且仅当$\lambda(t)$是确定性函数。

问题 1.5.4 求$<\widetilde{N}>_t$，$[\widetilde{N}]_t$。

第二章　Brown运动

§2.1　定义

定义 2.1.1 (Gassian随机变量) X称为$Gauss$随机变量，如果X为退化的随机变量，或者其密度函数为

$$f(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$$

其中，退化分布的密度函数可以记为

$$f(x,\mu,\sigma)=\delta_\mu(x)=\begin{cases}\infty & : \quad x=\mu\\ 0 & : \quad x\neq\mu\end{cases} \qquad \int\delta_\mu(x)dx=1$$

定义 2.1.2 d维随机变量X称为***Gauss*随机向量**，如果$\forall\ a\in R^d$，$E[e^{<a,X>}]=\exp\{<a,EX>+\frac{1}{2}a^TK(X)a\}$成立。这里$<a,x>=\sum\limits_{i=1}^{d}a_ix_i$，$K(X)$为$X$的协方差矩阵。

随机过程$\{X_t\}_{t\geq 0}$称为***Gauss*随机过程**，如果$\forall\ 0\leq t_1<t_2<\cdots<t_n$，$(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n})$是$Gauss$随机向量。

定义 2.1.3 $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F},P)=\{\xi:\xi$为随机变量$,E\xi^2<\infty\}$，$\mathcal{H}\subseteq\mathcal{L}^2$由所有零均值的$Gauss$随机变量组成，该闭子空间被称为***Gauss*空间**。

$\{X_t\}$是Gauss随机过程，与之相关联的Gauss空间为$\mathcal{H}(X)\doteq span\{<a,X_t-EX_t>,t\in R_+\}$

定义 2.1.4 (标准Brown运动) 标准$Brown$运动$\{B_t\}_{t\geq 0}$是满足如下性质的一个

连续随机过程:

(1) $B_0=0;\quad \forall\, 0\le s\le t\quad B_t-B_s\sim N(0,t-s)$

(2) 对$\forall\, n\ge 1, t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\quad \{B_{t_2}-b_{t_1},B_{t_3}-b_{t_2},\cdots,B_{t_n}-b_{t_{n-1}}\}$是独立的随机变量。

注 2.1.5 如果n只取固定有限个(比如*3*),则满足上述条件的过程存在但不是$Brown$运动,我们称之为伪$Brown$运动。

命题 2.1.6 *1)*$\{B_t\}_{t\ge 0}$是$Brown$运动,当且仅当它是零均值的连续$Gauss$过程,且$\forall\, s,t\ge 0,\ EB_tB_s=s\wedge t$

2)$\{B_t\}_{t\ge 0}$是$Brown$运动,则$\forall\, C>0,\ \{C^{-1}B_{C^2t}\}$是$Brown$运动;

$\widehat{B}_t=\begin{cases} tB_{t^{-1}} & t>0\\ 0 & t=0\end{cases}$ 也是$Brown$运动。

证明:

1)"$\Longrightarrow$" 取$k\in N$,$0=t_0<t_1<\cdots<t_k$,由于$(B_{t_1},B_{t_2},\cdots,B_{t_k})$是$(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_k}-B_{t_{k-1}})$的一个线性变换,故其为Gauss随机向量,$\{B_t\}$为Gauss过程;

$s\le t$时,$B_t=(B_t-B_s)+B_s$,$EB_tB_s=E(B_t-B_s)B_s+EB_s^2=EB_s^2=s$,即$EB_tB_s=s\wedge t$。

"$\Longleftarrow$" $\{B_t\}$满足1)中条件,显然$B_0=0$;

B_t-B_s为Gauss随机变量,且$Var(B_t-B_s)=E(B_t-B_s)^2=EB_t^2-2EB_tB_s+EB_s^2=t-s$,故$B_t-B_s\sim N(0,t-s)$;

对$\forall\ 0 < t_1 < t_2 \cdots < t_k$，$(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$是协方差阵为对角阵的k维Gauss向量，则$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$相互独立；所以$\{B_t\}$为标准Brown运动。

2),应用1)的结论，证明$EB_tB_s = s \wedge t$即可。

命题 2.1.7 对$\forall\ t > 0$，$0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n = t$，定义$V_t^n(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2$，则当$\delta_n = \max\{t_i - t_{i-1}, i = 1, \cdots, n\} \to 0$，$V_t^n \xrightarrow{L^2} t$。

证明：

$$EV_t^n(B) = E(\sum_{i=1}^{n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2) = \sum_{i=1}^{n} E|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 = \sum_{i=1}^{n} (t_i^n - t_{i-1}^n) = t$$

$$\begin{aligned}
Var(V_t^n(B)) &= \sum_{i=1}^{n} Var(|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} (t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \\
&\leq 2\sup_i (t_i^n - t_{i-1}^n) \sum_{i=1}^{n} (t_i^n - t_{i-1}^n) \\
&= 2t \sup_i (t_i^n - t_{i-1}^n) \\
&\to 0 \quad a.\ s.\ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

如果把B用连续可微的确定性函数f代替，则

$$V_t^n(f) \leq \| f \| \sup_i |f_{t_i^n} - f_{t_{i-1}^n}| \to 0$$

这里$\| f \| = \sup\limits_{0=t_1<\cdots<t_n=t} \sum_{i=1}^{n} |f_{t_i} - f_{t_{i-1}}|$。我们可以发现$\{B_t\}$是处处连续，点点不可微的。

定理 2.1.8 (Winner积分) 给定一个$Brown$运动$\{B_t\}_{t\geq 0}$，对$\forall f\in\mathcal{L}^2(R_+)$，则存在一个平方可积随机变量，记为$B(f)=\int_{R_+}f(t)dB_t$，满足:

1)$f=I_{(u,v]}\quad(0\leq u\leq v)$，则$B(f)=B_v-B_u$

2)$f\longrightarrow B(f)$为线性保范映射，即$\forall f_1,f_2\in\mathcal{L}^2(R_+)$，

$$EB(f_1)B(f_2)=<f_1,f_2>=\int_{R_+}f_1(t)f_2(t)dt$$

称该随机变量为f关于$\{B_t\}$的***Winner*积分**。$\mathcal{H}(B)=\{B(f):f\in\mathcal{L}^2(R_+)\}$为$Gauss$空间。$Winner$积分满足: *1)*$B(f)\in\mathcal{H}(B)$，*2)*$EB_tB(f)=\int_0^t f(s)ds$

证明: 用Λ表示$\mathcal{L}^2(R_+)$中所有简单函数构成的子集。

$$f=\sum_{i=1}^{R_+}a_iI_{(t_{i-1},t_i]}\quad a_i,i=1,\cdots,k\text{为常数}\quad 0=t_0<t_1<\cdots<t_k$$

对上述的子类定义$B(f)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})$。

若$f=I_{(t_{i-1},t_i]}=I_{(t_{i-1},u]}+I_{(u,t_i]}$，则$B(f)=B_{t_i}-B_{t_{i-1}}$，$B(I_{(t_{i-1},u]}+I_{(u,t_i]})=B_u-B_{t_{i-1}}+B_{t_i}-B_u=B_{t_i}-B_{t_{i-1}}$，可见$B(f)$可以在$\Lambda$上唯一定义。

$B(f)$的线性性，可以由线性性定义直接验证。即$(\forall f_1,f_2\in\Lambda\ a,b\in R\ B(af_1+bf_2)=aB(f_1)+bB(f_2))$

进一步有$EB(f)=0$

$$\begin{aligned}EB(f)^2&=E(\sum_{i=1}^{k}a_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}))^2\\&=Var(\sum_{i=1}^{k}a_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}))\\&=\sum_{i=1}^{k}a_i^2(t_i-t_{i-1})\end{aligned}$$

$$= \int_{R_+} f^2(t)dt$$

由于Λ在$\mathcal{L}^2(R_+)$中是稠密的。上述映射$f \rightarrow B(f) : \Lambda \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega, P)$可以线性延拓成$\mathcal{L}^2(R_+) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega, P)$，且满足

$$\forall\ f \in \mathcal{L}^2(R_+) \quad EB(f) = 0, EB^2(f) = \int_{R_+} f^2(t)dt = < f, f >$$

$$\begin{aligned} EB(f_1)B(f_2) &= \frac{1}{2}E[[B(f_1) + B(f_2)]^2 - B^2(f_1) - B^2(f_2)] \\ &= \frac{1}{2}E[B^2(f_1 + f_2) - B^2(f_1) - B^2(f_2)] \\ &= \frac{1}{2}(\| f_1 + f_2 \| - \| f_1 \| - \| f_2 \|) \\ &= < f_1, f_2 > \end{aligned}$$

$\mathcal{H}(B)$是$\{B(f), f \in \mathcal{L}^2\}$的闭包。$B_t = B(I_{[0,t]})$

$$EB_tB(f) = EB(I_{[0,t]})B(f) = \int_{R_+} I_{[0,t]}f(t)dt = \int_0^t f(s)ds$$

命题 2.1.9 $f \in C^1(R_+), T > 0$，$\int_0^T f(s)dB_s + \int_0^T f'(s)B_sds = f(T)B_T$；如果$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$，且$\int_{R_+} |f'(t)|\sqrt{t}dt < \infty$，则$\int_{R_+} f(t)dB_t + \int_{R_+} f'(t)B_tdt = 0$。

证明留做练习。

（提示：$\forall\ 0 < S \leq T \quad E[(\int_0^T f(t)dB_t + \int_0^T f'(t)B_tdt)B_S] = f(T)S$或者$\int_0^S f(t)dt + \int_0^T f'(t)\min(S,t)dt = f(T)S$）

§2.2 Brown运动的存在性

分析：$\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$为$\mathcal{L}^2(R_+)$的一组标准正交基。如果Brown运动存在，我们可以

定义Winner积分$\{\xi_n = B(\varphi_n)\}_{n\geq 1}$，这些是独立同分布的标准正态分布。另外，由前面的论述知$B_s = B(I_{[0,s]})$，而$I_{[0,s]}(t) = \sum\limits_n \widetilde{\varphi}_n(s)\varphi_n(t)$(这里$\widetilde{\varphi}_n(s) =< I_{[0,s]}, \varphi_n >= \int_0^s \varphi_n(u)du$)，那么$B_s = \sum\limits_n \widetilde{\varphi}_n(s)\xi_n$。这将为我们证明Brown运动的存在性提供思路。

定理 2.2.1 (Brown运动存在性) 取$\mathcal{L}^2(R_+)$的一组标准正交基$\{\varphi_n\}$，以及独立同分布的标准正态随机变量$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$。对$t \in R_+$定义$B_t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{\varphi}_n(t)\xi_n$，其中$\widetilde{\varphi}_n(t) = \int_0^t \varphi_n(u)du$，则$\{B_t\}$为$Brown$运动。

证明：由极限理论的三基数定理，我们知道$\sum\limits_{n=1}^{N} \widetilde{\varphi}_n(t)\xi_n$是$a.\ s.$收敛的，所以$B_t$的定义是有意义的，$\{B_t\}$是Gauss过程。$EB_t = 0$

$$VarB_t = \sum_{n=1}^{\infty} E(\widetilde{\varphi}_n(t)\xi_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\varphi}_n^2(t)E\xi_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\varphi}_n^2(t) = t$$

$$(I_{[0,t]} = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\varphi}_n(t)\varphi_n(t) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\varphi}_n^2(t) =< I_{[0,t]}, I_{[0,t]} >= t)$$

$$EB_tB_s = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\varphi}_n(t)\widetilde{\varphi}_n(s) =< I_{[0,t]}, I_{[0,s]} >= s \wedge t$$

由命题2.1.0.6的1），我们只需证明这个定义的B_t是$a.\ s.$连续的即可。

为此，我们取一组特殊的正交基$\{\varphi_n(t)\}_{n\geq 1}$。

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0, \frac{1}{2}] \\ -1 & t \in (\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

对$\forall\ n, k \in N$，定义

$$\varphi_{n,k}(t) = 2^{-\frac{n}{2}}\varphi(2^n t - k)\ (t \geq 0)$$

如果$t \overline{\in} [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$则$\varphi_{n,k}(t) = 0$。

再定义$\psi_k(t) = I_{(k,k+1]}(t)\ (k \in N)$。

$\{\psi_k,(k\in N)\varphi_{n,k},(n,k\in N)\}$构成了$\mathcal{L}^2(R_+)$上的一组标准正交基(Haar基)。

注意到

$$\widetilde{\varphi}(t)=\begin{cases} t & t\in(0,\frac{1}{2}] \\ 1-t & t\in(\frac{1}{2},1] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$\widetilde{\varphi}_{n,k}(t)=\int_0^t\varphi_{n,k}(s)ds=2^{-\frac{n}{2}}\widetilde{\varphi}(2^nt-k)\ (t\geq 0)$在$[k2^{-n},(k+1)2^{-n}]$之外为零，

$\widetilde{\psi}_k(t)=\int_0^t\psi_k(s)ds$。

我们定义$\beta_t=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{\psi}_k(t)\eta_k$，$B_t^n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{\varphi}_{n,k}(t)\xi_{n,k}$，$B_t=\beta_t+\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_t^n$。(其中$\{\xi_{n,k},\eta_k\}$是独立同分布的标准正态随机变量。)$\{B_t\}$就是零均值的Gauss过程。

首先对$[0,T]\subset R_+$，β_t和$\{B_t^n\}$是有限个连续函数的线性组合，所以均为连续的。那么要证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_t^n$在$[0,T]$上连续，就只需证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_t^n$是一致收敛的。

对于$k2^{-n}\leq t\leq(k+1)2^{-n}$，$B_t^n=\widetilde{\varphi}_{n,k}(t)\xi_{n,k}$，所以

$$\max_{0\leq t\leq T}|B_t^n|=2^{(-1-\frac{n}{2})}\max_{0\leq k\leq T2^n}|\xi_{n,k}|$$

$$P(\max_{0\leq t\leq T}|B_t^n|\geq a2^{-\frac{n}{2}})=P(\max_{0\leq k\leq T2^n}|\xi_{n,k}|\geq 2a)\leq 2^nTP(|\xi|\geq 2a)$$

$$P(|\xi|\geq 2a)\leq(2a)^{-1}E[|\xi|I_{[|\xi|\geq 2a]}]=(a\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-2a^2}$$

特别地，取$a=\sqrt{n}$，$\sum\limits_{n\geq 1}P(\max\limits_{0\leq t\leq T}|B_t^n|\geq\sqrt{n}2^{-\frac{n}{2}})\leq T\sum\limits_{n\geq 1}(2e^{-2})^n<\infty$

由Borel-Cantelli引理，$a.\ s.$存在$n(\omega)$使得当$n\geq n(\omega)$时，$\max\limits_{0\leq t\leq T}|B_t^n|\leq\sqrt{n}2^{-\frac{n}{2}}$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_t^n$是几乎处处一致收敛的。

因此如上定义的$\{B_t\}$是连续。进而证明了其为Brown运动。

定义 2.2.2 (Brown运动(2)) 在给定的一个概率空间$\{\Omega,\mathcal{F},P\}$以及一个σ域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$上，一个连续随机过程$\{B_t\}_{t\geq 0}$满足:

1)B_t是$\mathcal{F}_t$-适应*(*可测*)*的*;*

2)$\forall\ 0 < s \leq t$，$B_t - B_s$与$\mathcal{F}_s$独立，且$B_t - B_s \sim N(0, t-s)$*;*

那么该随机过程称为$\mathcal{F}_t$-*Brown*运动。

问题 2.2.3 证明: $\mathcal{F}_t$-*Brown*运动$\{B_t\}_{t\geq 0}$按前一定义仍为*Brown*运动, 反过来如果定义$\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, \quad 0 \leq s \leq t)$，则在前一定义中的*Brown*运动$\{B_t\}_{t\geq 0}$也是$\mathcal{F}_t$-*Brown*运动。

§2.3 Brown运动的轨道性质

命题 2.3.1 $\{B_t\}$是一个标准*Brown*运动，则*:*

*a)*其几乎所有轨道处处不可微

*b)*对$\forall\ 0 < \alpha < \frac{1}{2}$，几乎所有轨道都是$\alpha$阶$H\ddot{o}lder$连续。

证明：

a)如果函数$f : R_+ \to R$在$[0, T]$上至少一个点可微，则存在一个自然数a，使得对于充分大的n及$[0, 2^n T]$上至少三个连续的正整数，有

$$|f(\frac{k+1}{2^n}) - f(\frac{k}{2^n})| \leq \frac{a}{2^n}$$

成立。

定义

$$F_{a,n} = \bigcup_{0 \leq l \leq 2^n T} \bigcap_{k=l-1,l,l+1} \{|B_{(k+1)2^{-n}} - B_{k2^{-n}}| \leq a2^n\}$$

$$P(F_{a,n}) \le 2^n T(P(|\xi_n| \le a2^{-2}))^3 \quad |\xi_n| \sim N(0, 2^{-n})$$

所以存在与n无关的$c < \infty$，使得$P(F_{a,n}) \le c2^{-\frac{n}{2}}$，进而$\sum\limits_{n\ge1} PF_{a,n} < \infty$。

由Borel-Cantelli引理，$F_{a,n}$只有有限次发生，$i.\ e.$当n充分大时，$P(F_{a,n}) = 0$。因此，

$\{B_t\}$的几乎所有轨道在$[0,T]$上都是点点不可微的。

b)回忆Brown运动的构造方法

对于$s, t \in [0,T]$有

$$|\beta_t - \beta_s| \le |t-s| \max_{0\le k\le T} |\eta_k|$$

$$|B_t^n - B_s^n| \le 2^{\frac{n}{2}} |t-s| \max_{0\le k\le 2^n T} |\xi_{n,k}|, \quad n \in N$$

注意到$|B_t^n - B_s^n| \le 2 \max\limits_{0\le \mu\le T} |B_\mu^n| = 2^{-\frac{n}{2}} \max\limits_{0\le k\le 2^n T} |\xi_{n,k}|$ ，同时$a.\ s.$存在$n(\omega)$，使得

当$n > n(\omega)$时$\max\limits_{0\le k\le 2^n T} |\xi_{n,k}| \le 2\sqrt{n}$

$$\begin{aligned}
|B_t - B_s| &\le |\beta_t - \beta_s| + \sum_n |B_t^n - B_s^n| \\
&\le |\beta_t - \beta_s| + \sum_{n\le n(\omega)} |B_t^n - B_s^n| + f(t-s)
\end{aligned}$$

$f(u) = \sum\limits_{n>n(\omega)} 2\sqrt{n} \min(2^{-\frac{n}{2}}, u2^{\frac{n}{2}}) \quad u \in R_+$，显然$f(u) = o(u^\alpha) \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}$

因此Brown运动的几乎所有轨道都是α阶$H\ddot{o}lder$连续的。

例 2.3.2 $X(t)$表示t时刻粒子的空间位置，外立场为$f(t)$。

$$\ddot{X}(t) + b\dot{X}(t) + cX(t) = f(t)$$

如果$f(t)$为确定性函数时，有

$$\dot{X}(t) = e^{-bt}X(0) + \int_0^t e^{-b(t-s)} f(s) ds$$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \dot{X}(s)ds$$

如果外力$f(t)$是在时刻$\frac{k}{n}$ $(k \in n)$的随机作用（即f为一个随机过程）

$$\int_0^t f(u)du = \sum_{0 \le \frac{k}{n} \le t} \xi_k^n$$

其中$\xi_k^n = \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_k$,$\{\xi_k\}iid \sim N(0, \sigma^2)$,

令$n \to \infty$,$\int_0^t f(u)du \to \sigma(B_t - B_s)$，此时，方程变为

$$\ddot{X}(t) + b\dot{X}(t) + cX(t) = \sigma\dot{B}(t)$$

进一步形式上写为:

$$\dot{X}(t) - \dot{X}(s) + b(X(t) - X(s)) + c\int_s^t X_u du = \sigma(B(t) - B(s))$$

或者

$$d\dot{X}(t) + b\dot{X}(t)dt + cX(t)dt = \sigma dB_t$$

不失一般性，取$c = 0$，我们得到随机微分方程

$$\dot{X} = V(t), \quad V(t) = e^{-bt}V_0 + \int_0^t e^{-b(t-s)\sigma dB_s}$$

称这一过程为***O-U***过程

§2.4 Markov性

定义 2.4.1 (d维Brown运动) d为一个正数，μ是在$(R^d, \mathcal{B}(R^d))$上的一个概率测度，$B = \{B_t, \mathcal{F}_t; t \ge 0\}$是一个定义在$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上的连续适应过程。这个过程称

为初始分布为μ的d维$Brown$运动，如果:

1) $P[B_0 \in \Gamma] = \mu(\Gamma), \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(R^d)$;

2) 对于$0 \le s < t$，$B_t - B_s$是独立于$\mathcal{F}_s$的正态随机向量。均值为零，协方差矩阵为$(t-s)I_d$。其中I_d为d维单位矩阵。

如果μ退化为一个点x，称B为从x点出发的d维$Brown$运动。

若已知定义在概率空间$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$及域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$上的Brown运动$\{B_t\}$，在拥有到$s$时刻为止的所有历史信息的条件下，$B_t$的分布如何呢？

因为$B_t = (B_t - B_s) + B_s$，$B_s \in \mathcal{F}_s$及$B_t - B_s$与$\mathcal{F}_s$独立，我们有

$$
\begin{aligned}
P^0(B_t < x|\mathcal{F}_s) &= P^0(B_t - B_s + B_s < x|\mathcal{F}_s) \\
&= P^0(B_t - B_s + B_s < x|B_s) \\
&= P^0(B_t - B_s + B_s < x|B_s = y) \\
&= \Phi(\frac{x-y}{\sqrt{t-s}}) \\
&= P^y(B_{t-s} < x)
\end{aligned}
$$

这里$P^0 = P^{(1)} \times \cdots \times P^{(d)}$为$(C[0,\infty)^d, \mathcal{B}(C[0,\infty)^d))$上的测度，称$d$维Wiener测度。其中$P^{(i)}$为$(C[0,\infty), \mathcal{B}(C[0,\infty)))$的Wiener测度。$P^y(F) = P^0(F-y),\ F \in \mathcal{B}(C[0,\infty)^d)$也为$(C[0,\infty)^d, \mathcal{B}(C[0,\infty)^d))$上的测度（$F - y = \{\omega \in C[0,\infty)^d; \omega(\cdot) + y \in F\}$）。

在P^0下，$B_t(\omega) \doteq \omega(t)$是从原点出发的$d$维Brown运动；在$P^x$下，$B_t(\omega)$是从$x$点出发的$d$维Brown运动。进一步我们定义$P^\mu(F) = \int_{R^d} P^x(F)\mu(dx)$。

从上面的分析可以发现，对于标准Brown运动而言，知道s前所有信息$(\mathcal{F}_s)$对于其后

随机性的贡献与仅知道s时刻的状态B_s对其后随机性的贡献相同。即这样一个过程对历史无记忆性。我们把这一性质称为Markov性。

定义 2.4.2 (Markov过程) $\{X_t\}_{t\geq 0}$是$\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P\}$上$d$维随机过程。$\mu$为$(R^d, \mathcal{B}(R^d))$上的有限测度。不失一般性，取$\mu(R^d)=1$，$\mu$ 就是一个概率测度。如果:

1)$P^{\mu}[X_0 \in \Gamma] = \mu(\Gamma), \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(R^d)$;

2) $\forall\, s, t \geq 0 \quad \Gamma \in \mathcal{B}(R^d); \quad P^{\mu}[X_{s+t} \in \Gamma | \mathcal{F}_s] = P^{\mu}(X_{s+t} \in \Gamma | X_s)$

我们称之为初始分布为μ的*Markov*过程。

定义 2.4.3 (Universally Measurable) $(\mathcal{S}, \rho)$为一个度量空间，$\mathcal{B}(\mathcal{S})$为其上所有开集所组成的σ-域。μ是$(\mathcal{S}, \rho)$上的一个有限测度，$\overline{\mathcal{B}(\mathcal{S})}^{\mu}$是$\mathcal{B}(\mathcal{S})$在$\mu$下的完备化。定义$\mathcal{U}(\mathcal{S}) \doteq \bigcap\limits_{\mu\text{有限}} \overline{\mathcal{B}(\mathcal{S})}^{\mu}$。可测映射$f : (\mathcal{S}, \mathcal{U}(\mathcal{S})) \to (R^d, \mathcal{B}(R^d))$称为*Universally Measurable*。

定义 2.4.4 (Brown运动族) d维*Brown*运动族是指一个d维适应过程$\{B_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$及一族概率测度$\{P^x\}_{x\in R^d}$。它们满足:

1) 对于$\forall\, F \in \mathcal{F}$，$x \to P^x(F)$是*Universally Measurable*

2) $\forall\, x \in R^d$，$P^x(B_0 = x) = 1$

3) 在P^x下，$\{B_t\}_{t\geq 0}$是从x点出发的d维*Brown*运动

定义 2.4.5 (Markov族) 一个d维随机过程族$\{X_t, \mathcal{F}_t, \{P^x\}_{x\in R^d}\}$满足:

1) $\forall\, F \in \mathcal{F}$，$x \to P^x(F)$是*Universally Measurable*

2) $\forall\, x \in R^d$，$P^x(X_0 = x) = 1$

3) $\forall x \in R^d \quad s,t \geq 0 \quad \Gamma \in \mathcal{B}(R^d) \quad P^x[X_{t+s} \in \Gamma|\mathcal{F}_s] = P^x[X_{t+s} \in \Gamma|X_s]$

4) $\forall x \in R^d \quad s,t \geq 0 \quad \Gamma \in \mathcal{B}(R^d)$

$$P^x[X_{t+s} \in \Gamma|X_s = y] = P^y[X_t \in \Gamma] \quad P^x X_s^{-1} a.\ e.y$$

称其为$Markov$族。

命题 2.4.6 标准$Brown$运动$\{B_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$是$Markov$过程;

$Brown$运动族$\{B_t, \mathcal{F}_t, \{P^x\}\}_{t\geq 0}$是$Markov$族。

命题 2.4.7 f是R^d有界可测函数，$\{X_t, \mathcal{F}_t, \{P^x\}\}_{t\geq 0}$是$Markov$族，定义$(u_t f)(X) = E^x f(X_t)$。那么，在$Markov$族的定义中，3)与4)等价于

5)$\forall x \in R^d \quad s,t \geq 0 \quad \Gamma \in \mathcal{B}(R^d)$

$$P^x[X_{t+s} \in \Gamma|\mathcal{F}_s] = (u_t I_\Gamma)(X_s) \quad P^x\text{- } a.\ s.$$

问题 2.4.8 $M_t = \mu t + \sigma B_t(\sigma > 0, \mu \in R$为常数)，称为带有漂移的$Brown$运动，$\mu$称为漂移系数，$\sigma$称为扩散系数。试证明$M_t$是$Markov$过程。

（提示：参看$Brown$运动是$Markov$过程的证明）

$\{B_t\}_{t\geq 0}$是一个标准Brown运动，$b > 0$为常数。定义$T_b = \inf\{t \geq 0, B_t = b\}$，可以证明$T_b$是一个停时，那么$T_b$的分布如何呢？

$$\begin{aligned} P^0(T_b < t) &= P^0(T_b < t, B_t > b) + P^0(T_b < t, B_t < b) \\ &= P^0(B_t > b) + P^0(B_t < b, T_b < t) \end{aligned}$$

这是因为$\{T_b < t, B_t > b\} = \{B_t > b\}(\{T_b < t, B_t > b\} \subset \{B_t > b\}$且$\{B_t > b\} \Rightarrow$

$\{T_b < t\}$)。

进一步，由所谓“反射原理”得到：

$$P^0(T_b < t, B_t < b) = P^0(T_b < t, B_t > b) = P^0(B_t > b)$$

$$P^0(T_b < t) = 2P^0(B_t > b) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_b^{\infty} e^{-\mu^2/2t} d\mu$$

$$P^0(T_b \in dt) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-b^2/2t} dt$$

在应用“反射原理”时，我们假定对于停时T，$\{B_{T+t} - B_T\}$仍是标准Brown运动。

为了证明这一点，我们引出下面强Markov性的概念。

定义 2.4.9 (强Markov过程) $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$是$d$维循序可测过程，$\mu$为$(R^d, \mathcal{B}(R^d))$上的概率测度。如果:

1) $\forall \Gamma \in \mathcal{B}(R^d) \quad P^\mu(X_0 \in \Gamma) = \mu(\Gamma)$;

2) $\forall \Gamma \in \mathcal{B}(R^d)$及$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$的任意可选时$S$

$$P^\mu[X_{S+t} \in \Gamma | \mathcal{F}_{S^+}] = P^\mu[X_{S+t} \in \Gamma | X_S] \quad P^u\text{-}a.\ s.\ on\{S < \infty\}$$

我们称$\{X_t\}$是$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上的一个初始分布为$\mu$的强*Markov*过程。

定义 2.4.10 (强Markov族) 一个d维循序可测随机过程$\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$，及一族$(\Omega, \mathcal{F})$上的概率测度$\{P^x\}_{x\in R^d}$，满足:

1) $\forall F \in \mathcal{F}$，$x \to P^x(F)$是*Universally Measurable*

2) $\forall x \in R^d$，$P^x(X_0 = x) = 1$

3) $\forall x \in R^d \quad t \geq 0 \quad \Gamma \in \mathcal{B}(R^d)$ 及$\{\mathcal{F}_t\}$的任一个可选时S

$$P^x[X_{S+t} \in \Gamma | \mathcal{F}_{S^+}] = P^x[X_{S+t} \in \Gamma | X_S] \quad P^x\text{-}a.\ s.\ on\{S < \infty\}$$

4) $\forall x \in R^d \quad t \geq 0 \quad \Gamma \in \mathcal{B}(R^d)$ 及$\{\mathcal{F}_t\}$的任一个可选时S

$$P^x[X_{S+t} \in \Gamma | X_S = y] = P^y[X_t \in \Gamma] \quad P^x X_S^{-1} a.\ e.y$$

称其为强$Markov$族。

问题 2.4.11 强$Markov$性$\Longrightarrow$$Markov$性，反之不然。（举出反例）

反例：$\{B_t, \mathcal{F}_t, \{P^x\}\}_{t\geq 0}$是一族Brown运动，它们以一条直线上的点作为出发点。现在我们仅在一点作改变：

$$\begin{cases} \xi_t = B_t & : \quad B_0 \neq 0 \\ \xi_t = 0 & : \quad B_0 = 0 \end{cases}$$

可以证明$\{\xi_t, \mathcal{F}_t, \{P^x\}\}_{t\geq 0}$是Markov族，但不是强Markov族。

事实上，$\forall\, A \in \mathcal{F}_{\leq t}, \Gamma \in \mathcal{B}^1$及$h \geq 0$，我们有：

$$P^x[A \bigcap \{\xi_{t+h} \in \Gamma\}] = \int_A p(h, \xi_t, \Gamma) P^x(d\omega) = \int_A (u_h I_\Gamma)(\xi_t) P^x(d\omega)$$

其中

$$p(t, x, \Gamma) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_\Gamma e^{-(y-x)^2/2t} dy & : \quad x \neq 0 \\ \delta_0(\Gamma) & : \quad x = 0 \end{cases}$$

即$\{\xi_t\}$是Markov族。

另一方面，它不是强Markov族。因为如果我们取$x \neq 0$，定义$\tau = \min\{t : \xi_t = 0\}$，$\eta = (1-\tau) \bigvee 0$，并取$A = \{\tau \leq 1\}$，$\Gamma = R\backslash\{0\}$，得到：

$$P^x[\xi_\tau + t \in \Gamma | \xi_\tau = 0] \geq P^x[\tau \leq 1, \xi_1 \neq 0] = P^x[\tau \leq 1] = 2[1 - \Phi(|x|)] > 0$$

而$P^0[\xi_t \in \Gamma] = 0$。不满足强Markov族定义中的第四条。

命题 2.4.12 标准$Brown$运动（$Brown$运动族）是强$Markov$过程（强$Markov$族）。

§2.5 几种常见Brown泛函的分布

命题 2.5.1 $\{B_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$是一个$Brown$运动。$b$为不等于零的实数，定义$T_b = \inf\{t \geq 0, B_t = b\}$，则

$$P^0(T_b \in dt) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-b^2/2t} dt$$

让$t \to \infty$，我们有

$$P^0(T_b < \infty) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{b}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = 1$$

命题 2.5.2 $\{B_t, \mathcal{F}_t, \{P^x\}_{x\in R^d}\}_{t\geq 0}$是一个$Brown$运动族。定义$M_t = \max\limits_{0\leq s\leq t}\{B_s\}$称为运转最大值。则对于$t > 0$，$a \leq b$，$b \geq 0$有

$$P^0[B_t \in da, M_t \in db] = \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} exp\{-\frac{(2b-a)^2}{2t}\} dadb$$

证明：由Brown运动的对称性，有$P^b[B_{t-s} \leq a] = P^b[B_{t-s} \geq (2b-a)]$，即：

$$(u_{t-s} I_{(-\infty,a]})(b) = (u_{t-s} I_{[2b-a,\infty)})(b) \quad \forall s \leq t$$

利用Brown运动的强Markov性，有

$$\begin{aligned} P^0[B_t \leq a | \mathcal{F}_{T_b^+}] &= u_{t-T_b} I_{(-\infty,a]})(B_{T_b}) \\ &= (u_{t-T_b} I_{[2b-a,\infty)})(b) \\ &= P^0[B_t \geq 2b-a | \mathcal{F}_{T_b^+}] \end{aligned}$$

把等式两端在$\{T_b<t\}$上积分，并注意到$\{T_b\le t\}=\{M_t\ge b\}$，得到：

$$\begin{aligned}P^0[B_t\le a,M_t\ge b] &= P^0[B_t\ge 2b-a,M_t\ge b]\\ &= P^0[B_t\ge 2b-a]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{(2b-a)/\sqrt{t}}^{\infty}e^{-\frac{\mu^2}{2}}d\mu\\ P^0[B_t\le a,M_t\le b] &= P^0[B_t\le a]-P^0[B_t\le a,M_t\ge b]\end{aligned}$$

其中利用了$\{B_t\ge 2b-a\}\Rightarrow\{B_t\ge b\}\Rightarrow\{M_t\ge b\}$。

两端对a,b求微分可得结论。

进一步，由以上的联合分布易得M_t的边际分布

$$P^0[M_t\in db]=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{b^2}{2t}\}db$$

与$|B_t|$和M_t-B_t都是同分布的。

命题 2.5.3 T_b的*Lapalace*变换为$Ee^{-\alpha T_b}=e^{-b\sqrt{2\alpha}}(b>0,\alpha>0)$

证明：$\lambda\neq 0$是一个常数，B_t是标准Brown运动，定义$X_t=\exp\{-\frac{1}{2}\lambda^2t+\lambda B_t\}$，

则$\{X_t,\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$是一个鞅。

事实上，$\frac{X_t}{X_s}=\exp\{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)+\lambda(B_t-B_s)\}(\forall s\le t)$，由$B_t-B_s$与$\mathcal{F}_s$独立有

$$\begin{aligned}E[\frac{X_t}{X_s}|\mathcal{F}_s] &= E[\exp\{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)+\lambda(B_t-B_s)\}|\mathcal{F}_s]\\ &= E[\exp\{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)+\lambda(B_t-B_s)\}]\end{aligned}$$

$$B_t-B_s\sim N(0,t-s)\Rightarrow Ee^{\lambda(B_t-B_s)}=e^{\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)}$$

因此$E[\frac{X_t}{X_s}|\mathcal{F}_s]=1$即$\{X_t,\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$是鞅。

停时$S\leq T$，我们有$E[X_T|\mathcal{F}_S]=X_S$，即$EX_T=EX_S$。

取$T=T_b,S=0$，$EX_{T_b}=1$

$$X_{T_b}=\exp\{-\frac{1}{2}\lambda^2T_b+\lambda B_{T_b}\}=\exp\{-\frac{1}{2}\lambda^2T_b+\lambda b\}$$

取$\lambda=\sqrt{2\alpha}$得到$E[e^{b\sqrt{2\alpha}-\alpha T_b}]=1$即命题结论。(在这里若取$\lambda=-\sqrt{2\alpha}$则上面定义的$X_t$就不再是鞅)

命题 2.5.4 $\{B_t,\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$是从$x(\ x>0\ )$点出发的$Brown$运动，$T_0=\inf\{t\geq 0,B_t=0\}$。考虑在原点被吸收的$Brown$ 运动$\{B_{t\wedge T_0},\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$，那么：

$$P^x[B_t\in dy,T_0>t]=p_-(t;x,y)dy=(p(t;x,y)-p(t;x,-y))dy$$

其中p是$Gauss$核，$p(t;x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(x-y)^2/2t}(t>0,x,y\in R)$。

证明：

$$P^x[B_t\leq y,T_0>t]=P^x[B_t\leq y]-P^x[B_t\leq y,T_0\leq t]$$

$$P^x[B_t\leq y|\mathcal{F}_{T_0^+}]=(u_{t-T_0}I_{(-\infty,y]})(B_{T_0})=P^x[B_t\geq -y|\mathcal{F}_{T_0^+}]$$

$$\begin{aligned}
P^x[B_t\leq y,T_0\leq t] &= P^x[B_t\geq -y,T_0\leq t]\\
&= P^x[B_t\geq -y,M_t\geq 0]\\
&= P^x[B_t\geq -y]\\
P^x[B_t\leq y,T_0>t] &= P^x[B_t\leq y]-P^x[B_t\geq -y]
\end{aligned}$$

等式两边对y求微分得到：

$$P^x[B_t \in dy, T_0 > t] = p_-(t; x, y)dy$$

命题 2.5.5 T_b是首达时，M_t是运转最大值，定义$\underline{\theta}_t = \inf\{s \leq t; B_s = M_t\}$，$\overline{\theta}_t = \sup\{s \leq t; B_s = M_t\}$。$\underline{\theta}_t$是$\{B_t\}$第一次达到$M_t$的时间，而$\overline{\theta}_t$是$\{B_t\}$最后一次取到$M_t$的时间。则：

$$P^0[B_t \in da, M_t \in db, \overline{\theta}_t \in ds] = \frac{b(b-a)}{\pi\sqrt{s^3(t-s)^3}} \exp[-\frac{b^2}{2s} - \frac{(b-a)^2}{2(t-s)}]dadbds$$

且$\underline{\theta}_t$与$\overline{\theta}_t$同分布，$P(\underline{\theta}_t = \overline{\theta}_t) = 1$

命题 2.5.6 $\{B_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$是标准*Brown*运动，定义*Brown*桥运动$X_t = B_t - tB_t(t \in [0,1])$则：

1) X_t是一个*Gauss*过程，且$EX_t = 0$ $EX_tX_s = \begin{cases} t(1-s) & : & t \leq s \\ (1-t)s & : & t > s \end{cases}$

2) 在$B_1 = 0$的条件下，X_t与B_t同分布。

定义 2.5.7 (可料（选）对偶投影) $\{M_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$是一个平方可积鞅*(i.e.*$EM_t^2 < \infty$*)*，$A_t$是单调增的可料过程，$A_0 = 0$。若$M_t^2 - A_t$是鞅，则$A_t$称为$M_t$的二次可料变差过程，或可料对偶投影，或$< \cdot >$过程。记为$< M >_t$

如果仅要求A_t是单调增适应过程，则A_t称为M_t的二次可选变差过程，或可选对偶投影，或$[\cdot]$过程。记为$[M]_t$。

可以证明：

1) 如果M_t连续，则$[M]_t =< M >_t$；

2) $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$为$[0,t]$的一个分割，定义$A_t^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2$；

当$\delta_n = \max\{t_k - t_{k-1}\} \to 0$时，$A_t^{(n)} \xrightarrow{L^1} [M]_t$

特别地，$M_t = B_t$为标准Brown运动时，$A_t^{(n)} \xrightarrow{L^2} t$，即$[B]_t =< B >_t= t$。

命题 2.5.8 (Lévy刻画) $\{M_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$为连续平方可积鞅，它是*Brown*运动的充要条件是$< M >_t= t$。

第三章　随机积分

§3.1　对于Brown运动的Itô积分

$\{B_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$为概率空间$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上的Brown运动。

以$\mathcal{L}_0$记所有简单过程构成的类。即若$\varphi(t) \in \mathcal{L}_0$，则存在$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$使得$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i I_{(t_{i-1}, t_i]}(t) + X_0$ 其中$\xi_i \in \mathcal{F}_{t_{i-1}}$平方可积。

以$\mathcal{L}^*$记$\forall T > 0$满足$E\int_0^T H_s^2 ds < \infty$的所有循序可测过程构成的子集。对于$\phi, \varphi \in \mathcal{L}^*$，我们定义内积

$$< \phi, \varphi >= \int \phi\varphi P(d\omega)dt = E\int_0^\infty \phi(t)\varphi(t)dt$$

定义 3.1.1 对于简单过程$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i I_{(t_{i-1}, t_i]}(t) + X_0$，我们定义基于*Brown*运动的*Itô*积分

$$B_t(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1}\wedge t}) \doteq \int_0^t \varphi(s)dB_s$$

引理 3.1.2 如果$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i I_{(t_{i-1}, t_i]}(t) + X_0 \in \mathcal{L}_0$，则$\forall t > 0$有$E[B_t(\varphi)] = 0, E[B_t^2(\varphi)] = E\int_0^t \varphi^2(s)ds$；更一般地，对$\forall 0 \leq s < t$有

$$\begin{aligned} E[B_t(\varphi) - B_s(\varphi)|\mathcal{F}_s] &= 0 \\ E[(B_t(\varphi) - B_s(\varphi))^2|\mathcal{F}_s] &= E[\int_s^t \varphi^2(\tau)d\tau|\mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

证明： $\xi_i(B_{t_i\wedge t}-B_{t_{i-1}\wedge t})$是两个独立随机变量的乘积，且每一个随机变量的方差都存在，其中之一均值为零，所以$EB_t(\varphi)=0$。

$$E[\xi_i(B_{t_i\wedge t}-B_{t_{i-1}\wedge t})\xi_{t_j}(B_{t_j\wedge t}-B_{t_{j-1}\wedge t})]=0 \quad i<j$$

$$\begin{aligned}
E[B_t^2(\varphi)] &= E[(\sum_{i=1}^n \xi_i(B_{t_i\wedge t}-B_{t_{i-1}\wedge t}))^2] \\
&= E[\sum_{i=1}^n \xi_i^2(B_{t_i\wedge t}-B_{t_{i-1}\wedge t})^2] \\
&= E[\sum_{i=1}^n E[\xi_i^2(B_{t_i\wedge t}-B_{t_{i-1}\wedge t})^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \\
&= E[\sum_{i=1}^n \xi_i^2 E(B_{t_i\wedge t}-B_{t_{i-1}\wedge t})^2] \\
&= E[\sum_{i=1}^n \xi_i^2(t_i\wedge t-t_{i-1}\wedge t)] \\
&= E\int_0^t \varphi^2(s)ds
\end{aligned}$$

$\{B_t(\varphi)\}_{t\geq 0}$是连续的平方可积鞅。

引理 3.1.3 $\forall \varphi\in\mathcal{L}^*$，存在$\{\varphi_n\}_{n\geq 1}\subseteq\mathcal{L}_0$使得对于$\forall T>0$

$$\text{在}\mathcal{L}^*\text{中}\quad \varphi_n(t)I_{[0,T]}(t)\to\varphi(t)I_{[0,T]}(t)$$

证明： a)考虑$\mathcal{L}^2(R^+)$上的线性算子P_n

$$(P_nf)(t)=n\sum_{i-1}^{n^2}(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(s)ds)I_{(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]}(t)$$

在$(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$上，$P_nf=n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f(s)ds$，即$f$在$(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$上的平均。

由Cauchy-Schwarz不等式，有$(P_nf)^2(t)\leq n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f^2(s)ds$ $(t\in(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}])$。于是$\int_{R^+}(P_nf)^2(t)dt\leq\int_{R^+}f^2(t)dt$，即$\|P_nf\|_{\mathcal{L}^2(R^+)}\leq\|f\|_{\mathcal{L}^2(R^+)}$。$P_n$为压缩映射。

当$f \in \mathcal{L}^2(R^+)$，易得$|P_n f - f\|_{\mathcal{L}^2(R^+)} \to 0$a.s. $n \to \infty$

b)$\varphi \in \mathcal{L}^*$，对固定的$\omega$有：

$$\begin{aligned}\|P_n\varphi(\omega) - \varphi(\omega)\|_{\mathcal{L}^2(R^+)} &\to 0 \\ \|P_n\varphi - \varphi\|_{\mathcal{L}^2(R^+)} &\to 0 \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

由$\|P_n f\|_{\mathcal{L}^2(R^+)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(R^+)}$知道$\|P_n\varphi - \varphi\|^2_{\mathcal{L}^2(R^+)} \leq 4\|\varphi\|^2_{\mathcal{L}^2(R^+)}$，用控制收敛定理有$\|P_n\varphi - \varphi\|_{\mathcal{L}^*} \to 0$。

命题 3.1.4 *$\forall \varphi \in \mathcal{L}^*$，存在一个连续鞅$B_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s$满足:*

1) $EB_t(\varphi) = 0$

2) $EB_t^2(\varphi) = E\int_0^t \varphi_s^2 ds$，对$\forall\, 0 \leq s < t$，$E[(B_t(\varphi) - B_s(\varphi))^2|\mathcal{F}_s] = E[\int_s^t \varphi^2(z)dz|\mathcal{F}_s]$

同时当$t \to \infty$，$B_t(\varphi) \to B_\infty(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(s)dB_s$($a.s.$收敛，$\mathcal{L}^2$收敛)

提示：$\varphi \in \mathcal{L}^*$，则存在$\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{L}_0$使得在$\mathcal{L}^*$中$\varphi_n \to \varphi$。前面已经定义了$B_t(\varphi_n)$，以$B_t(\varphi_n)$的极限来定义$B_t(\varphi)$。

我们称$B_t(\varphi)$为φ关于$\{B_t\}$的**Itô积分**。

§3.2 多维情形

定义 3.2.1 *$B_t = (B_1(t), B_2(t), \cdots, B_k(t))$为$k$维标准Brown 运动，$\{\varphi_t\}_{d\times k}$是矩阵值的循序可测过程，定义*

$$B_t(\varphi)^i = \sum_{j=1}^k \int_0^t \varphi_{ij}(s)dB_j(s) \quad 1 \leq i \leq d, t \geq 0$$

则称$B_t(\varphi) = (B_t(\varphi)^1, B_t(\varphi)^2, \cdots, B_t(\varphi)^d)'$为$\varphi$关于$\{B_t\}$的Itô积分。

命题 3.2.2 $\varphi, \psi \in (\mathcal{L}^*)^{d\times k}$，对$\forall\, 0 \le s < t$有：

1) $B_t(\varphi)$是d维$\mathcal{F}_t$适应随机变量；

2) $B_t(\varphi) = 0$，这里0表示d维零向量；

3) $E[(B_t(\varphi) - B_s(\varphi))(B_t(\psi) - B_s(\psi))'|\mathcal{F}_s] = E[\int_s^t \varphi(r)\psi'(r)dr|\mathcal{F}_s]$

4) $E[< B_t(\varphi) - B_s(\varphi), B_t(\psi) - B_s(\psi) > |\mathcal{F}_s] = E[\int_s^t tr(\varphi_r \psi_r')dr|\mathcal{F}_s]$

证明：只需验证，$\forall\, \varphi, \psi \in (\mathcal{L}^*)^{d\times k}$

$$E[(B_t(\varphi)^i - B_s(\varphi)^i)(B_t(\psi)^j - B_s(\psi)^j)] = 0(i \neq j)$$

进一步仅验证对$\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{L}_0$上式成立即可。或者等价地验证

$$\forall\, X, Y \in \mathcal{F}_s \quad E[XY(B_t^i - B_s^i)(B_t^j - B_s^j)|\mathcal{F}_s] = 0(i \neq j)$$

其中B_t^i表示k维标准Brown运动B_t的第i个分量。由各分量的独立性容易验证。

定义$\mathcal{L}^2_{\text{loc}}(T) = \{\varphi(t); \int_0^T \varphi_s^2 ds < \infty, \text{a.s.}\}$，$\mathcal{L}^2_{\text{loc}} = \bigcap\limits_{T>0} \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(T)$，那么对于$\varphi \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$是否可以定义类似的积分运算呢？

答案是肯定的。

证明：对$\varphi \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$和给定的$n$，定义$\tau_n = \inf\{t \ge 0, \int_0^t \varphi_s^2 ds > n\}$，则$\tau_n$是停时。

$\{I_{[0,\tau]}(t), t \ge 0\}$是循序可测的。容易验证$\varphi^n(t) = \varphi(t)I_{[0,\tau_n]} \in \mathcal{L}^*$，且$\int_0^\infty (\varphi^n(t))^2 dt = \int_0^{\tau_n} \varphi^2(s)ds = n$。可以定义$\varphi^n(t)$关于$B_t$的Itô积分，记为$B_t^n(\varphi) = \int_0^t \varphi I_{[0,\tau_n]}(s)dB_s(t \ge 0)$。

只需证明对每个$T > 0, t \in [0, T], B_t^n(\varphi)$a.s.一致收敛，并把极限记为$B_t(\varphi) \doteq \int_0^t \varphi(s)dB_s(t \ge 0)$。要证上述的收敛性要应用以下的引理：

引理 3.2.3 $\varphi \in \mathcal{L}^*$，$\tau$是停时，那么$\varphi I_{[0,\tau]}(t) \in \mathcal{L}^*$且$\int_0^t \varphi(s) I_{[0,\tau]} dB_s = \int_0^{t\wedge\tau} \varphi(s) dB_s$

若$n < m, \tau_n < \tau_m$

$$
\begin{aligned}
B_t^n(\varphi) &= \int_0^t I_{[0,\tau_n]}\varphi(s)dB_s \\
&= \int_0^t I_{[0,\tau_n]} I_{[0,\tau_m]}\varphi(s)dB_s \\
&= \int_0^{t\wedge\tau_n} I_{[0,\tau_m]}\varphi(s)dB_s
\end{aligned}
$$

给定$T > 0$，定义$\Omega_n = \{\tau_n \geq T\}$。

在Ω_n上，$B_t^m(\varphi)$是常变量，$\lim\limits_{m\to\infty} B_t^m(\varphi) = B_t^n(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s$。同时注意到$\Omega_n \to \Omega$a.s.，在$\Omega$上$\lim\limits_{n\to\infty} B_t^n(\varphi) = \int_0^t \varphi(s)dB_s$ a.s.。

引理的证明：

1) $I_{[0,\tau]} \in \mathcal{L}^*$显然；

2) 只需对τ有界的情形证明：任意有界停时可以视为一组在有界集合中取值的单调下降停时列的极限。

事实上，对给定的n，及$k \leq N$ $N = \sup\limits_k \{k; t_n^k < t\}$其中$t_n^k = \frac{k}{2^n}, t_n^{N+1} = t$，定义$\tau_n = \sum\limits_{k=1}^{N+1} I_{A_n^k(\omega)} t_n^k$其中$A_n^k = \{t_n^{k-1} < \tau \wedge t \leq t_n^k\}$，那么$\tau_n \downarrow \tau \wedge t$。

因为$0 \leq s < t, \forall A \in \mathcal{F}_s, \forall \varphi \in \mathcal{L}^*$有$\int_s^t I_A \varphi(u)dB_u = I_A \int_s^t \varphi(u)dB_u$。所以：

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_n^k}^t I_{A_n^k}\varphi(s)dB_s = I_{A_n^k}\int_{t_n^k}^t \varphi(s)dB_s \\
\Rightarrow \quad &\text{对每个n} \int_0^t I_{[\tau_n,t]}(s)\varphi(s)dB_s = \int_{t\wedge\tau_n}^t \varphi(s)dB_s
\end{aligned}
$$

命题 3.2.4 对$\varphi \in \mathcal{L}_{loc}^2$，存在一个随机过程$B_t(\varphi) = \int_0^t \varphi(s)dB_s (t \geq 0)$使得对$n \in N$及$\tau_n = \inf\{t \geq 0, \int_0^t \varphi_s^2 ds > n\}$，$B_t^n(\varphi) = \int_0^{\tau_n\wedge t} \varphi(s)dB_s$是一个鞅。$B_t(\varphi)$不

必可积，但是$E|B_t(\varphi)|^2 \le E\int_0^t \varphi^2(s)ds$。

进一步，如果$\varphi \in \mathcal{L}^2_{loc}(R^+)$，有$t \to \infty, B_t(\varphi) \xrightarrow{a.s.} B_\infty(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(s)dB_s$

证明：前半部分的证明由构造法直接可得。

当$\varphi \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(R^+)$，定义$B^{\tau_n}_\infty(\varphi) = \int_0^{\tau_n} \varphi(s)dB_s$，及$\Omega_n = \{\tau_n = +\infty\} \uparrow \Omega$，则可定义$B_\infty(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} B^{\tau_n}_\infty(\varphi)$

命题 3.2.5 对$\varphi \in \mathcal{L}^2_{loc}(T)$，$T > 0$，$\forall M, a > 0$常数有:

$$P[\sup_{0\le t\le T} |B_t(\varphi)| \ge a] \le P[\int_0^T \varphi^2(t)dt > M] + \frac{1}{a^2}E[\min\{M, \int_0^T \varphi^2(t)dt\}]$$

证明：$\tau_M = \inf\{t; \int_0^t \varphi^2(s)ds > M\}$，那么$\{\tau_M < T\} = \{\int_0^T \varphi^2(s)ds > M\}$。

$\{\sup_{0\le t\le T} |B_t(\varphi)| \ge a\} \subset \{\tau_M < T\} \bigcup (\{\sup_{0\le t\le T} |B_t(\varphi)| \ge a\} \bigcap \{\tau_M \ge T\})$

$$\begin{aligned}
P\{\sup_{0\le t\le T} |B_t(\varphi)| \ge a, \{\tau_M \ge T\} &\le P\{\sup_{0\le t\le T} |B_t(\varphi^M)| \ge a\} \quad \varphi^M = \varphi I_{[0,\tau_M]} \\
&\le \frac{1}{a^2}E[\sup_{0\le t\le T} |B_t(\varphi^M)|^2] \\
&\le \frac{1}{a^2}\sup_{0\le t\le T} E[|B_t(\varphi^M)|^2] \\
&\le \frac{1}{a^2}E[\int_0^T \varphi^2(s)I_{[0,\tau_M]}(s)ds] \\
&\le \frac{1}{a^2}E[\min\{M, \int_0^T \varphi^2(t)dt\}]
\end{aligned}$$

结论成立。

定理 3.2.6 $\{\varphi^n_t\}_{n\in N} \in \mathcal{L}^2_{loc}(T)$及$\varphi \in \mathcal{L}^2_{loc}(T)$，若$\int_0^T |\varphi^n_t - \varphi(t)|^2 dt \xrightarrow{P} 0$，那么$\sup\limits_{0\le t\le T} |B_t(\varphi^n) - B_t(\varphi)| \xrightarrow{P} 0$

§3.3 Itô积分的推广

在第一节，我们定义了基于标准Brown运动$\{B_t\}_{t\geq 0}$的Itô积分。那么上述定义的随机积分可以推广到什么框架呢？

1) 将$\{B_t\}_{t\geq 0}$推广为一般过程；

2) 将被积过程推广为一般情况。

关于连续平方可积鞅的积分

接下来，将$\{B_t\}_{t\geq 0}$推广为一般的连续平方可积鞅。

$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上的$\sigma$-域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$满足通常条件。$M = \{M_t\}_{t\geq 0}$是$\mathcal{F}_t$连续平方可积鞅，记为$M \in \mathcal{M}_{2,c}$。$\langle M \rangle_t$是$M$的可料对偶投影。$\{X_t\}_{t\geq 0}$是一类过程。

下面研究$\{X_t\}$关于$\{M_t\}_{t\geq 0}$的随机积分，即$I_T^M(X) = \int_0^T X_t dM_t$。问题是：1) 如何定义才是合理的；2) $\{X_t\}$需要满足的条件；3) 随机积分的性质；4) 连续平方可积鞅M的推广。

首先，以$\mathcal{L}_0$记所有简单过程构成的类。即若$X_t \in \mathcal{L}_0$，则存在$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$使得$X_t = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i I_{(t_{i-1}, t_i]}(t) + X_0$ 其中$\xi_i \in \mathcal{F}_{t_{i-1}}$。可以自然定义$I_T^M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i (M_{t_i \wedge t} - M_{t_{i-1} \wedge t})$。

可以验证：

1) $I_0^M(X) = 0$ a.s.

2) $I_t^M(X)$是$\mathcal{F}_t$鞅，$E[I_t^M(X)|\mathcal{F}_s]=I_s^M(X)$

3) $E[I_T^M(X)]^2=E\int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s=[X]_T^2$，即$I:X\to I(X)$是保范映射

4) 映射满足线性性，即$I_T^M(\alpha X+\beta Y)=\alpha I_T^M(X)+\beta I_T^M(Y)$

接下来定义$[X]_T^2=E\int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s(\forall T\in R^+)$。并以$\mathcal{L}(M)$记所有满足$\forall T\in R^+,[X]_T^2<\infty$的$\mathcal{F}_t$可测适应过程的类，以$\mathcal{L}^*(M)$记所有满足$\forall T\in R^+,[X]_T^2<\infty$的$\mathcal{F}_t$循序可测过程的类。

引理 3.3.1 X是有界可测$\mathcal{F}_t$适应过程，则存在$\{X_t^m\}\subseteq\mathcal{L}_0$使得

$$\sup_{T>0}\lim_{m\to\infty}E\int_0^T|X_t^m-X_t|dt\to 0$$

命题 3.3.2 $M\in\mathcal{M}_{2,c}$，如果$t\to\langle M\rangle_t$关于t绝对连续，即$\langle M\rangle_t=\int_0^t\rho(s)ds$。则在度量$[X]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}(1\wedge[X]_n)$之下，$\mathcal{L}_0$在$\mathcal{L}^*(M)$中稠密。

命题 3.3.3 $\{A_t\}$是单调上升连续适应过程，如果X_t是满足$E\int_0^T X_t^2 dA_t<\infty(\forall T\in R^+)$的循序可测过程，则存在一列简单过程$\{X_t^m\}_{m\geq 1}$使得

$$\sup_{T>0}\lim_{m\to\infty}E\int_0^T|X_t^m-X_t|dA_t\to 0$$

特别地取$A_t=\langle M\rangle_t$就有$\mathcal{L}_0$在$\mathcal{L}^*(M)$中稠密。

对于$X_t\in\mathcal{L}^*(M)$及收敛到X_t的简单过程$\{X_t^m\}_{m\geq 1}$，

$$当m,n\to\infty\quad\|I_T^M(X^m)-I_T^M(X^n)\|=\|I_T^M(X^m-X^n)\|=\|X^m-X^n\|_T\to 0$$

即$\{I_T^M(X^m)\}_{m\geq 1}$是Cauchy列。以$I_T^M(X)$记其极限，称为X_t关于M的随机积分。可以证明$I_T^M(X)$的定义与简单过程$\{X_t^m\}_{m\geq 1}$的选取无关。

事实上，设$\{X_t^m\}_{m\geq 1},\{Y_t^m\}_{m\geq 1}\subseteq \mathcal{L}_0\to X_t$，定义

$$Z_t^m=\begin{cases} X_t^m & : \ m\text{为奇数} \\ Y_t^m & : \ m\text{为偶数}\end{cases}$$

可以证明$\{Z_t^m\}$也是Cauchy列，那么$I_T^M(Z^m)$也是Cauchy列。于是$\lim\limits_{m\to\infty} I_T^M(X^m)=\lim\limits_{m\to\infty} I_T^M(Y^m)$

命题 3.3.4 $X_t\in\mathcal{L}^*(M)$，$I_T^M(X)$满足:

1) $I_0^M(X)=0\ a.s.$

2) $I_t^M(X)$是$\mathcal{F}_t$鞅，$E[I_t^M(X)|\mathcal{F}_s]=I_s^M(X)$

3) $E[I_T^M(X)]^2=E\int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s=[X]_T^2$，即$I:X\to I(X)$是保范映射

4) 映射满足线性性，即$I_T^M(\alpha X+\beta Y)=\alpha I_T^M(X)+\beta I_T^M(Y)$

如果$M_t=B_t$，$I_T^M(X)$就成为$\{X_t\}$关于$\{B_t\}$的Itô积分。

关于连续局部鞅的积分

定义 3.3.5 (局部鞅) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$为概率空间$\{\Omega,\mathcal{F},P\}$上的$\sigma$域流，且满足通常条件。$M_t\in\mathcal{F}_t$。存在一族单调上升的停时列$\{\tau_n\}_{n\geq 1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=\infty(a.s.)$，并定义

$$M_t^{\tau_n}=M_{t\wedge\tau_n}=\begin{cases} M_t & : \ t<\tau_n \\ M_{\tau_n} & : \ t\geq\tau_n\end{cases}$$

如果每个$M_t^{\tau_n}$均是$\mathcal{F}_t$鞅，则称M_t为$\mathcal{F}_t$局部鞅。

命题 3.3.6 M_t是局部鞅，对$\forall t, M_t\geq -a$，其中$a\in R^+$的常数，则M_t是上鞅。

命题 3.3.7 局部鞅M_t是鞅的充要条件是存在一个局部化停时列$\{\tau_n\}$使得对$\forall t>0,\{|M_{\tau_n\wedge t}|,n\in N\}$为一致可积族。

证明： $\Longleftarrow$

由假定知道$\forall\, n \in N, M^{\tau_n} = \{M_{\tau_n \wedge t, t\in R^+}\}$为鞅，且$\lim\limits_{n\to\infty} M_{\tau_n\wedge t} = M_t\, a.s.$。

由条件期望的连续性，令下面等式中$n \to \infty$

$$M_{\tau_n\wedge s} = E[M_{\tau_n\wedge t|\mathcal{F}_s}] \Rightarrow M_s = E[M_t|\mathcal{F}_s]$$

即M_t为鞅。

$\Longrightarrow$

若M_t是右连续鞅，则$|M|$为非负右连续下鞅，因而对$\forall\, t \in R^+$有

$$0 \le |M_{\tau_n\wedge t}| \le E[|M_t|\mathcal{F}_{\tau_n\wedge t}] \quad a.s.$$

显然$\{|M_{\tau_n\wedge t}|, n \in N\}$是一致可积的。

如果M_t是一个连续局部鞅，即$M \in \mathcal{M}^c_{\text{loc}}$，则$M_t$也是局部平方可积鞅，即存在停时列$\{\tau_n\}_{n\ge 1}$，$\tau_n \uparrow \infty a.s.$使得$M_t^{\tau_n} \in \mathcal{M}^{2,c}$。

定义$\mathcal{P} = \{X : X_t$关于$\mathcal{F}_t$可测，且$P(\int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty) = 1\}$

$\mathcal{P}^* = \{X : X_t$关于$\mathcal{F}_t$循序可测，且$P(\int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty) = 1\}$

M是连续局部鞅，$X \in \mathcal{P}^*(M)$，定义

$$R_n = n \wedge \inf\{0 \le t < \infty, \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s \ge n\}$$

$\{S_n\}$是使得$\{M_t^{S_n}\}_{t\ge 0}$为鞅的那个停时序列。

$T_n = S_n \bigwedge R_n$。显然$T_n \uparrow \infty (n \to \infty)$，且在$[0, T_n]$上$M_t$和$\int_0^t X_s d\langle M\rangle_s$均有界，即$M_t^{T_n} \in \mathcal{M}^{2,c}, E[\int_0^{T_n\wedge t} X_s^2 d\langle M\rangle_s] < \infty$。

因此$I^M_{t\wedge T_n}(X) = \int_0^{T_n\wedge t} X_s^2 dM_s$有定义。对$m \geq n, T_m \geq T_n$，在$[0,T_n]$上$M_t^{T_m} = M_t^{T_n}, X_t^{T_m} = X_t^{T_n}$，故$t\in[0,T_n], I_t^{M^{T_m}}(X) = I_t^{M^{T_n}}(X)$。定义$I_t^M(X) = I_t^{M^{T_n}}(X), t\in[0,T_n]$，称为$X$关于$M$的Itô积分。

§3.4 其他形式的积分

$\{B_t,\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$为定义在概率空间$\{\Omega,\mathcal{F},P\}$上的标准Brown运动。$\{\varphi(B)\}$为满足$\forall T\in R^+, E\int_0^T \varphi^2(s)dB_s<\infty$的一个循序可测过程。由Itô积分的定义知道$B_t(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n \varphi_{t^n_{i-1}}(B_{t_i^n} - B_{t^n_{i-1}})$这里$t_i^n = \frac{i}{n}t$。

那么任取$t_i^{n*}\in(t_{i-1}^n, t_i^n]$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\varphi(t_{i-1}^{n*})(B_{t_i^n}-B_{t_{i-1}^n})$是否存在；如果存在，是否等于$B_t(\varphi)$?

例 3.4.1 取$\varphi(t) = B_t$，$B_t(B) = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$，另一方面，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n B_{\frac{t_{i-1}^n+t_i^n}{2}}(B_{t_i^n} - B_{t^n_{i-1}}) = \frac{1}{2}B_t^2$。

解:

$$
\begin{aligned}
B_t(B) &= \int_0^t B_s dB_s \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n B_{t^n_{i-1}}(B_{t_i^n} - B_{t^n_{i-1}}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n[B^2_{t_i^n} - B^2_{t^n_{i-1}}] - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(B_{t_i^n} - B_{t^n_{i-1}})^2 \\
&= \frac{1}{2}B_t^2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(B_{t_i^n} - B_{t^n_{i-1}})^2 \\
S_n &= \sum_{i=1}^n B_{\frac{t_{i-1}^n+t_i^n}{2}}(B_{t_i^n} - B_{t^n_{i-1}}) \quad \text{记} u_i^n = \frac{t_{i-1}^n + t_i^n}{2} \\
&= \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(B_{t_i^n} - B_{t^n_{i-1}})^2 + \sum_{i=1}^n(B_{u_i^n} - B_{t^n_{i-1}})^2
\end{aligned}
$$

$$+ \quad \sum_{i=1}^{n}(B_{t_i^n} - B_{u_i^n})(B_{u_i^n} - B_{t_{i-1}^n})$$

当$n \to \infty$ $\sum\limits_{i=1}^{n}(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \xrightarrow{\mathcal{L}^2} t$（即均方收敛）。

事实上，简记$\pi_t^n = \sum\limits_{i=1}^{n}(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2$，$\Delta_i^n = (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 - (t_i^n - t_{i-1}^n)$，则$E[\Delta_i^n|\mathcal{F}_{t_{i-1}^n}] = 0$，$E[\Delta_i^n]^2 = 2(t_i^n - t_{i-1}^n)^2$，所以

$$E[(\pi_t^n - t)^2] = E[(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^n)^2] = \sum_{i=1}^{n}E[\Delta_i^n]^2 = 2\sum_{i=1}^{n}(t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \le 2\delta(\pi_t^n)t \to 0$$

这里$\delta(\pi_t^n)$为分割区间的最大值。

类似地，由$E[\sum\limits_{i=1}^{n}(B_{u_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2] = \sum\limits_{i=1}^{n}(u_i^n - t_{i-1}^n)$可以知道

$$\sum_{i=1}^{n}(B_{u_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \frac{1}{2}t \quad (n \to \infty)$$

于是得到$B_t(B) = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t + 0 = \frac{1}{2}B_t^2$。

定义 3.4.2 (Stratonovich积分) $\{\varphi_t\} \in \mathcal{L}_{loc}^2$，$\lim\limits_{\delta_n\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(\frac{t_{i-1}^n + t_i^n}{2})(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})$称为$\{\varphi(t)\}$关于$\{B_t\}$的*Stratonovich*积分，记为$\int_0^t \varphi(s)\circ dB_s$。

§3.5 随机积分的性质

命题 3.5.1 (Kunita-Watanabe不等式) $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}, X \in \mathcal{L}^*(M), Y \in \mathcal{L}^*(N)$及$\xi = \langle M, N\rangle$，有

$$\int_0^t |X_s Y_s| d\xi_s \le (\int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s)^{1/2}(\int_0^t Y_s^2 d\langle N\rangle_s)^{1/2}$$

证明： 定义$\varphi(\omega, t) = \frac{1}{2}(\langle M\rangle_t + \langle N\rangle_t)$，则$\langle M\rangle_t, \langle N\rangle_t, \langle M, N\rangle_t$关于$\varphi(\omega, t)$绝对连续。

即对于$\forall\, A \in \mathcal{B}(0, t) \times \mathcal{F}_t$，$\varphi_t(A) = 0 \Rightarrow \langle M\rangle_t(A) = \langle N\rangle_t(A) = \langle M, N\rangle_t(A) = 0$。

由此知道，存在$f_i, i=1,2,3$使得

$$\langle M\rangle_t = \int f_1(s)d\varphi(s),\quad \langle N\rangle_t = \int f_2(s)d\varphi(s),\quad \langle M,N\rangle_t = \int f_3(s)d\varphi(s)$$

平方可积鞅

$\alpha,\beta \in R, t \geq s$有$\underline{\langle \alpha M + \beta N\rangle_t} - \langle \alpha M + \beta N\rangle_s \geq 0$，即$\int_s^t(\alpha^2 f_1(u) + 2\alpha\beta f_3(u) + \cancel{2}\beta^2 f_2(u))d\varphi(u) \geq 0$。由$s,t$的任意性及$\varphi(t)$的单调性，$\alpha^2 f_1(u) + 2\alpha\beta f_3(u) + \cancel{2}\beta^2 f_2(u) \geq 0$(a.s.)。

特别地取$\hat{\alpha} = \alpha X_t(\omega), \hat{\beta} = \beta Y_t(\omega)$得到

$$\alpha^2 X^2(t) f_1(u) + 2\alpha X_t \beta Y_t f_3(u) + \cancel{2}\beta^2 Y^2(t) f_2(u) \geq 0$$

对$d\varphi(t)$作积分，得到

$$\alpha^2\int_0^t X^2(u)f_1(u)d\varphi(u) + 2\alpha\beta\int_0^t X(u)Y(u)f_3(u)d\varphi(u) + \beta^2\int_0^t Y^2(u)f_2(u)d\varphi(u) \geq 0$$

$$\text{即}\alpha^2\int_0^t X_u^2 d\langle M\rangle_u + 2\alpha\beta\int_0^t X_uY_u d\langle M,N\rangle_u + \beta^2\int_0^t Y_u^2 d\langle N\rangle_u \geq 0$$

由α,β的任意性，立得$\int_0^t |X_sY_s|d\xi_s \leq (\int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s)^{1/2}(\int_0^t Y_s^2 d\langle N\rangle_s)^{1/2}$

命题 3.5.2 $M,N \in \mathcal{M}^{2,c}, X \in \mathcal{L}^*(M)$。如果$\{X_t^{(n)}\}_{n\geq 1}$是一组循序可测的简单过程，使得

$$\forall T > 0 \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^T |X_t^{(n)} - X_t|^2 d\langle M\rangle_t = 0 \quad a.s.$$

$$\text{则}\langle I^M(X),N\rangle_t = \lim_{n\to\infty}\langle I^M(X^{(n)}),N\rangle_t,\ \lim_{n\to\infty} I_t^M(X^{(n)}) = I_t^M(X) = I_t^M(\lim X_n)$$

即极限运算可以和$\langle\rangle$运算交换。

证明：

$$|\langle I^M(X^{(n)}) - I^M(X),N\rangle_t| = \underbrace{|\langle I^M(X^{(n)}-X),N\rangle_t| \leq \int_0^t |X_s^{(n)}-X_s|^2 d\langle M\rangle_s}_{\text{利用上面不等式}}\cdot\langle N\rangle_t \to 0$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\langle I^M(X^{(n)}),N\rangle_t=\langle I^M(X),N\rangle_t$

命题 3.5.3 $M,N\in\mathcal{M}^{2,c},X\in\mathcal{L}^*(M),Y\in\mathcal{L}^*(N)$。则

$$\forall\, t>0\quad \langle I^M(X),N\rangle_t=\int_0^t X_u d\langle M,N\rangle_u (a.s.)\quad \langle I^M(X),I^N(Y)\rangle_t=\int_0^t X_uY_ud\langle M,N\rangle_u(a.s.)$$

定理 3.5.4 $M\in\mathcal{M}^{2,c},X\in\mathcal{L}^*(M)$，则$I_t^M(X)$是唯一的平方可积鞅$\phi_t$使得

$$\forall\, N\in\mathcal{M}^{2,c}\quad \langle\phi,N\rangle_t=\int_0^t X_u d\langle M,N\rangle_u$$

证明：如果取$\phi=I_t^M(X)$结论成立。

反过来，若存在$\phi\in\mathcal{M}^{2,c}$使得$\langle\phi,N\rangle_t=\int_0^t X_u d\langle M,N\rangle_u$成立。

则对$\forall\, N\in\mathcal{M}^{2,c}$有$\langle\phi,N\rangle_t=\langle I^M(X),N\rangle_t$，即$\langle\phi-I^M(X),N\rangle_t=0$。

特别地取$N_t=\phi_t-I_t^M(X)$，应有$\phi_t=I_t^M(X)$。

推论 3.5.5 $M\in\mathcal{M}^{2,c},X\in\mathcal{L}^*(M),N=I^M(X),Y\in\mathcal{L}^*(N)$，则

$$I^N(Y)=\int_0^t X_uY_udM_u=I^M(XY)\quad a.s.$$

$$=\int_0^t Y_u d\left(\int_0^u X_s ds\right)$$

证明：$N=\int_0^t X_udM_u$，则$\langle N\rangle_t=\int_0^t X_u^2d\langle M\rangle_u$，

$$E\int_0^T X_u^2Y_u^2d\langle M\rangle_u=E\int_0^T Y_u^2d\langle N\rangle_u<\infty$$

即$X_tY_t\in\mathcal{L}^*(M)$。

因为$\forall\,\widetilde{N}\in\mathcal{M}^{2,c}\quad d\langle N,\widetilde{N}\rangle_t=X_td\langle M,\widetilde{N}\rangle_t$，所以

$$\langle I^M(XY),\widetilde{N}\rangle_t\quad=\quad\int_0^t X_uY_ud\langle M,\widetilde{N}\rangle_u$$

$$= \int_0^t Y_u d\langle N, \widetilde{N}\rangle_u$$

$$= \langle I^N(Y), \widetilde{N}\rangle_t$$

由$\widetilde{N}$的任意性$\Rightarrow I^M(XY) = I^N(Y) \quad a.s.$。

推论 3.5.6 $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}, X \in \mathcal{L}^*(M), Y \in \mathcal{L}^*(N)$,$T$是一个停时，如果$X_{t\wedge T} = Y_{t\wedge T}, M_{t\wedge T} = N_{t\wedge T}$，则$\int_0^{t\wedge T} X_u dM_u = \int_0^{t\wedge T} Y_u dN_u$

定理 3.5.7 $M \in \mathcal{M}^{2,c}$，X_t是一个循序可测过程，且X_t关于M_t可积，则$\int_0^t X_u dM_u$是鞅的充要条件是$E(\int_0^T X_u^2 d\langle M\rangle_u)^{1/2} < \infty$

§3.6 Itô公式

定义 3.6.1 (半鞅(Semimaringale)) $X_t = X_0 + M_t + A_t$，其中$M_t \in \mathcal{M}^c_{loc}$，

一特殊

A_t是局部有限变差过程，那么X_t称为半鞅。

定理 3.6.2 (Itô公式) $f : R^d \to R$为可测映射。若$f \in \mathcal{C}^2$，那么

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dM_s + \int_0^t f'(X_s)dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle M\rangle_s$$

成立。称之为$It\hat{o}$公式。

证明：第一步：局部化（条件特殊化）

$$\tau_n = \begin{cases} 0 & : \quad |X_0| \geq n \\ \inf\{t \geq 0, |M_t| \geq n\text{或}|A_t| \geq n\text{或}\langle M\rangle_t \geq n\} & : \quad |X_0| < n \\ \infty & : \quad \text{其他情况} \end{cases}$$

可以证明τ_n是停时，且当$n\to\infty$时，$\tau_n\uparrow\infty\, a.s.$

记$X_t^{(n)}=X_{t\wedge\tau_n}$，以下先对$X_t^{(n)}$证明所求的结果，然后通过让$n\to\infty$取极限证明一般情形。

在$[0,\tau_n]$上，$|X_t|\le 3n$，不失一般性，可以假定X_t为有界半鞅。此时$f(X_t)$只在$[-3n,3n]$上需要定义即可，不失一般性，假定f具有紧支撑，f,f',f''均有界。

第二步：Tayler展开

假定π是$[0,t]$的一个分割，即$\pi=\{t_0,t_1,\cdots,t_m\},0=t_0<t_1<\cdots<t_m=t$。

若$\delta(\pi)\ll 1,|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}|\ll 1\, a.s.$，由Tayler展开得到

$$f(X_{t_k})-f(X_{t_{k-1}})=f'(X_{t_{k-1}})(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})+\frac{1}{2}f''(\eta_k)(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})^2$$

其中$\eta_k=X_{t_{k-1}}+\theta_k(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})(0\le\theta_k\le 1)$

$$\begin{aligned}
f(X_t)-f(X_0) &= \sum_{k=1}^m (f(X_{t_k})-f(X_{t_{k-1}}))\\
&= \sum_{k=1}^m f'(X_{t_{k-1}})(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m f''(\eta_k)(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})^2\\
&= J_1(\pi)+J_2(\pi)+\frac{1}{2}J_3(\pi)\\
\text{其中}\quad J_1(\pi) &= \sum_{k=1}^m f'(X_{t_{k-1}})(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})\\
J_2(\pi) &= \sum_{k=1}^m f'(X_{t_{k-1}})(A_{t_k}-A_{t_{k-1}})\\
J_3(\pi) &= \sum_{k=1}^m f''(\eta_k)(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})^2
\end{aligned}$$

由于f'有界，$E[\int_0^t|f'(X_t)|^2d\langle M\rangle_s]<\infty(\forall\, t>0)$，此时$\lim\limits_{\delta(\pi)\to 0}J_1(\pi)=\int_0^t f'(X_t)dM_s$。

而A_t是有界变差过程，$A_t = A_t^+ - A_t^-$为测度，$\lim\limits_{\delta(\pi)\to 0} J_2(\pi) = \int_0^t f'(X_t)dA_s$

$$
\begin{aligned}
J_3(\pi) &= J_4(\pi) + J_5(\pi) + J_6(\pi) \\
\text{其中} \quad J_4(\pi) &= \sum_{k=1}^m f''(\eta_k)(A_{t_k} - A_{t_{k-1}})^2 \\
J_5(\pi) &= 2\sum_{k=1}^m f''(\eta_k)(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})(A_{t_k} - A_{t_{k-1}}) \\
J_6(\pi) &= \sum_{k=1}^m f''(\eta_k)(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2
\end{aligned}
$$

注意到f''有界，A_t是有界变差过程，M_t连续，有

$$
\lim_{\delta(\pi)\to 0} J_4(\pi) = 0 \qquad \lim_{\delta(\pi)\to 0} J_5(\pi) = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\text{定义} \quad J_6^*(\pi) &= \sum_{k=1}^m f''(X_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \\
J_7(\pi) &= \sum_{k=1}^m f''(X_{t_{k-1}})(\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}}) \\
|J_6(\pi) - J_6^*(\pi)| &= \sum_{k=1}^m (f''(\eta_k) - f''(X_{t_{k-1}}))(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \to 0 \quad \delta(\pi)\to 0 \\
E[J_6^*(\pi) - J_7(\pi)]^2 &= E[\sum_{k=1}^m f''(X_{t_{k-1}})((M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - (\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}}))]^2 \\
&= E\sum_{k=1}^m |f''(X_{t_{k-1}})|^2[(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - (\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}})]^2 \\
&\le 2\|f''\|_\infty^2 E[(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4 + (\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}})^2] \\
&\le 2\|f''\|_\infty^2 E[V^4(\pi) + \langle M\rangle_t \max_k(\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}})] \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

这是因为由$M_t, \langle M\rangle_t$的有界性，有

$$
\lim_{\delta(\pi)\to 0} EV^4(\pi) = 0 \qquad \lim_{\delta(\pi)\to 0} E\langle M\rangle_t \max_k(\langle M\rangle_{t_k} - \langle M\rangle_{t_{k-1}}) = 0
$$

$$另外\quad J_7(\pi)=\sum_{k=1}^{m} f''(X_{t_{k-1}})(\langle M\rangle_{t_k}-\langle M\rangle_{t_{k-1}})\to\int_0^t f''(X_s)d\langle M\rangle_s$$

$$故\quad f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_s)dM_s+\int_0^t f'(X_s)dA_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle M\rangle_s$$

第三步：对于一般情形，应用控制收敛定理，Fatou引理可得。

从形式上，上式可以写成$df(X_t)=f'(X_t)dX_t+\frac{1}{2}f''(X_t)d\langle M\rangle_t$。

若取$\Phi\in\mathcal{C}^2(R)$，则

$$\Phi(B_t)=\Phi(0)+\int_0^t\Phi'(B_s)dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t\Phi''(B_s)ds\quad a.s.$$

而对于**Itô扩散过程**$X_t=X_0+\int_0^t\psi_s ds+\int_0^t\varphi_s dB_s$

(其中$X_0\in\mathcal{F}_0,\varphi\in\mathcal{L}^2_{\text{loc}},\int_0^t|\psi_s|ds<\infty$)，则

$$\Phi(X_t)=\Phi(X_0)+\int_0^t\Phi'(X_s)\psi_s ds+\int_0^t\Phi'(X_s)\varphi_s dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t\Phi''(X_s)\varphi_s^2 ds\quad a.s.$$

命题 3.6.3 $X_t=X_0+\int_0^t\psi_s ds+\int_0^t\varphi_s dB_s$是$d$维$It\hat{o}$扩散过程。$X_0\in\mathcal{F}_0,\psi_{n\times1}$满足$\int_0^t|\psi_s|ds<\infty(a.s.),\varphi^{d\times k}\in(\mathcal{L}^2_{loc})^{d\times k},\Phi\in\mathcal{C}^{1,2}(R^+,R^d)$。相应的$It\hat{o}$公式为

$$\begin{aligned}\Phi(t,X_t)&=\Phi(0,X_0)+\int_0^t\frac{\partial\Phi}{\partial s}(s,X_s)ds+\int_0^t\langle\bigtriangledown_x\Phi(s,X_s),\psi_s\rangle ds\\&+\int_0^t\langle\bigtriangledown_x\Phi(s,X_s),\varphi_s dB_s\rangle+\frac{1}{2}\int_0^t tr(\partial^2_{xx}\Phi(s,X_s)\varphi\varphi^\tau)ds\end{aligned}$$

例 3.6.4 θ_t是一个$\mathcal{F}_t$循序可测过程，且$P[\int_0^t|\theta_s|^2ds<\infty]=1$，则$Z_t=\exp\{-\frac{1}{2}\int_0^t\theta_s^2ds+\int_0^t\theta_s dB_s\}$是$\mathcal{F}_t$局部鞅。

证明： $X_t = -\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds + \int_0^t \theta_s dB_s$，记$M_t = \int_0^t \theta_s dB_s, A_t = -\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds, \langle M\rangle_t = \int_0^t \theta_s^2 ds$。对$e^{X_t}$应用Itô公式

$$\begin{aligned} de^{X_t} &= e^{X_t}dX_t + \frac{1}{2}e^{X_t}d\langle M\rangle_t \\ &= e^{X_t}(\theta_t dB_t - \frac{1}{2}\theta_t^2 dt) + \frac{1}{2}e^{X_t}\theta_t^2 dt \\ &= \theta_t e^{X_t} dB_t \end{aligned}$$

Z_s对于有限时间和给定的ω是有界的，$P[\int_0^t \theta_s^2 Z_s^2 ds < \infty] = 1$。因此$e^{X_t}$是局部鞅。

命题 3.6.5 如果$F \in \mathcal{C}^1(R)$，则

$$\begin{aligned} \int_0^t F(B_s)\circ dB_s &= \lim_{\delta_n\to 0}\sum_{i=1}^n F(B_{\frac{t_i^n+t_{i-1}^n}{2}})(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}) \\ &= \int_0^t F(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t F'(B_s)ds \end{aligned}$$

如果$\Phi \in \mathcal{C}^2(F)$，则

$$\Phi(B_t) = \Phi(0) + \int_0^t \Phi'(B_s)\circ dB_s$$

定理 3.6.6 (Davis-Barkholder-Gundy不等式) $\{B_t\}_{t\geq 0}$是d维标准$Brown$运动。对于任意$p > 0$，存在常熟$C_p, c_p > 0$使得

$$c_p E[\int_0^\infty |\varphi_s|^2 ds]^{\frac{p}{2}} \leq E\sup_{t\geq 0}|\int_0^t \varphi_s dB_s|^p \leq C_p E[\int_0^\infty |\varphi_s|^2 ds]^{\frac{p}{2}}$$

证明：

(1) $p \geq 2$时，存在常熟$C_p > 0$使得对于任何循序可测且局部平方可积的过程φ(即$\exists\{\tau_n\}_{n\geq 1}\uparrow\infty, E[\int_0^{\tau_n}\varphi_s^2 ds] < \infty$)都有

$$E\sup_{t\geq 0}|\int_0^t \varphi_s dB_s|^p \leq C_p E[\int_0^\infty |\varphi_s|^2 ds]^{\frac{p}{2}}$$

(1)的证明：

$M_t=\int_0^t\langle\varphi_s,dB_s\rangle$，$p\geq 2$时$X\to|X|^p\in\mathcal{C}^2$，对$|M_t|^p$应用Itô公式

$$\begin{aligned}|M_t|^p &= p\int_0^t|M_s|^{p-1}sign(M_s)dM_s+\frac{p(p-1)}{2}\int_0^t|M_s|^{p-2}|\varphi_s|^2ds\\ &= p\int_0^t|M_s|^{p-1}sign(M_s)\langle\varphi_s,dB_s\rangle+\frac{p(p-1)}{2}\int_0^t|M_s|^{p-2}|\varphi_s|^2ds\end{aligned}$$

其中 $sign(x)=\begin{cases}1 & : \quad x>0\\ 0 & : \quad x=0\\ -1 & : \quad x<0\end{cases}$

$\tau_n=\{s\geq 0,|M_s|\geq n\}$，在上述式子中用$t\wedge\tau_n$取代$t$

$$|M_{t\wedge\tau_n}|^p=p\int_0^{t\wedge\tau_n}|M_s|^{p-1}sign(M_s)\langle\varphi_s,dB_s\rangle+\frac{p(p-1)}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n}|M_s|^{p-2}|\varphi_s|^2ds$$

两边取期望，令$n\to\infty$，并注意到鞅部分期望为零，有

$$\begin{aligned}E|M_t|^p &\leq \frac{p(p-1)}{2}E[\int_0^t|M_s|^{p-2}|\varphi_s|^2ds]\\ &\leq \frac{p(p-1)}{2}E|M_t^*|^{p-2}\int_0^t|\varphi_s|^2ds\\ &\leq \frac{p(p-1)}{2}\|\sup_{s\leq t}|M_s|^{p-2}\|_{\frac{p}{p-2}}\|\int_0^t|\varphi_s|^2ds\|_{\frac{p}{2}} \quad \text{Hölder不等式}\end{aligned}$$

应用Doob不等式$\|\sup_{s\leq t}|M_s|\|_p\leq\frac{p}{p-1}\|M_t\|_p$得到

$$\begin{aligned}(\frac{p-1}{p})^pE\sup_{s\leq t}|M_s|^p &\leq \frac{p(p-1)}{2}E^{\frac{p-2}{p}}\sup_{s\leq t}|M_s|^pE^{\frac{2}{p}}(\int_0^t|\varphi_s|^2ds)^{\frac{p}{2}}\\ \Rightarrow E\sup_{s\leq t}|M_s|^p &\leq C_pE(\int_0^t|\varphi_s|^2ds)^{\frac{p}{2}}\end{aligned}$$

令$n\to\infty$，应用Fatou引理得到

$$E\sup_{t\geq 0}|\int_0^t\varphi_sdB_s|^p\leq C_pE[\int_0^\infty|\varphi_s|^2ds]^{\frac{p}{2}}$$

(2)$p \geq 4$时，存在常数$c_p > 0$，使得$\forall \varphi \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$有

$$E(\int_0^\infty |\varphi_s|^2 ds)^{\frac{p}{2}} \leq c_p E[\sup_{t\geq 0} |\int_0^t \langle \varphi_s, dB_s\rangle|^p]$$

(2)的证明：

由Itô公式，$M_t^2 = 2\int_0^t M_s\langle\varphi_s, dB_s\rangle + \int_0^t |\varphi_s|^2 ds$。再利用Cr不等式，存在常数$c > 0$使得

$$E(\int_0^\infty |\varphi_s|^2 ds)^{\frac{p}{2}} \leq cE[\sup_{t\geq 0}|M_t|^p + \sup_{t\geq 0}|\int_0^t M_s\langle\varphi_s, dB_s\rangle|^{\frac{p}{2}}]$$

$\frac{p}{2} \geq 2$利用(1)的结论有

$$\begin{aligned}
E\sup_{t\geq 0}|\int_0^t M_s\langle\varphi_s, dB_s\rangle|^{\frac{p}{2}} &\leq C_p E[\int_0^\infty M_s^2|\varphi_s|^2 ds]^{\frac{p}{4}} \\
&\leq C_p E[\sup_{t\geq 0}|M_t|^{\frac{p}{2}}(\int_0^\infty |\varphi_s|^2 ds)^{\frac{p}{4}}] \\
\text{利用} ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}(\varepsilon > 0) \qquad &\leq C_p[\varepsilon E(\int_0^\infty |\varphi_s|^2 ds)^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{4\varepsilon}E\sup_{t\geq 0}|M_t|^p]
\end{aligned}$$

特别地，取$\varepsilon = (2cC_p)^{-1}$得到

$$\begin{aligned}
E(\int_0^\infty |\varphi_s|^2 ds)^{\frac{p}{2}} &\leq cE\sup_{t\geq 0}|M_t|^p + 2E(\int_0^\infty |\varphi_s|^2 ds)^{\frac{p}{2}} + \frac{c^2C_p^2}{2}E\sup_{t\geq 0}|M_t|^p \\
E(\int_0^\infty |\varphi_s|^2 ds)^{\frac{p}{2}} &\leq c_p E\sup_{t\geq 0}|M_t|^p
\end{aligned}$$

接下来对其他$p > 0$加以证明。为此引入如下引理

引理 3.6.7 连续循序可测过程$X_t \geq 0$被一个连续单调上升过程A_t所控制，是指对任何有界停时τ，$EX_\tau \leq EA_\tau$。而且

1) 对任意$x, y > 0$有$P[\sup_{t\geq 0} X_t > x, A_\infty \leq y] \leq \frac{1}{x}E(A_\infty \wedge y)$

2) 对任意$k \in (0,1)$有$E[\sup_{t\geq 0} X_t]^k \leq \frac{2-k}{1-k}EA_\infty^k$

引理的证明： 1) 由Fatou引理，只需证明对每一个n

$$P[\sup_{t\le n} X_t > x, A_n \le y] \le \frac{1}{x} E(A_n \wedge y)$$

定义停时$\tau = \inf\{t, A_t > y\} \wedge n, \eta = \inf\{t, X_t > x\} \wedge n$，并注意到$\{\tau = n\} = \{A_n \le y\}$

$$\begin{aligned}
P[\sup_{t\le n} X_t > x, A_n \le y] &= P[\sup_{t\le n} X_t > x, \tau = n] = P[\eta < n, \tau = n] \\
&\le P[X_{\tau\wedge\eta} = x] \le \frac{1}{x} E X_{\tau\wedge\eta} \\
&\le \frac{1}{x} E A_{\tau\wedge\eta} \le \frac{1}{x} E(A_n \wedge y)
\end{aligned}$$

2) $F : R^+ \to R^+$为连续增函数，$F(0) = 0$。由Fubini定理和1)的结论有

$$\begin{aligned}
E[F(\sup_{t\ge 0} X_t)] &= E \int_0^\infty I_{(\sup_{t\ge 0} X_t > x)} F(dx) \\
&\le \int_0^\infty (P[\sup_{t\ge 0} X_t > x, A_\infty \le x] + P[A_\infty > x]) F(dx) \quad \text{Fubini定理} \\
&\le \int_0^\infty (\frac{1}{x} E[A_\infty \wedge x] + P[A_\infty > x]) F(dx) \\
&\le \int_0^\infty (2P[A_\infty > x] + \frac{1}{x} E A_\infty I_{A_\infty \le x}) F(dx) \\
&= 2EF(A_\infty) + EA_\infty \int_{A_\infty}^\infty \frac{F(dx)}{x} \quad \text{Fubini定理} \\
&= E\widetilde{F}(A_\infty) \\
\widetilde{F}(x) &= 2F(x) + x \int_x^\infty \frac{F(dx')}{x'}
\end{aligned}$$

取$F(x) = x^k$，则$E(\sup_{t\ge 0} X_t)^k \le \frac{2-k}{1-k} EA_\infty^k$。

(3) $p < 2$时，取$X_t = |\int_0^t \langle \varphi_s, dB_s \rangle|^2, A_t = c_2 \int_0^t |\varphi_s|^2 ds$。对任意有界停时$\tau$

$$\widetilde{\varphi}(t) = \varphi(t) I_{[0,\tau]}(t) = \begin{cases} \varphi_t & : \ t \le \tau \\ 0 & : \ \text{其它} \end{cases}$$

由$p \geq 2$时(1)的结论知道，X_t被A_t控制。应用引理2)就证明了D-B-G不等式的右端对$p < 2$成立。

$p < 4$时，取$X_t = (\int_0^t |\varphi_s|^2 ds)^2, A_t = c_4 \sup\limits_{s\leq t} |\int_0^s \langle \varphi_s, dB_s \rangle|^4$。由$p \geq 4$时(2)的结论知道，$X_t$被$A_t$控制。应用引理2)就证明了D-B-G不等式的左端对$p < 4$成立。

因此定理得证。

定义 3.6.8 (Bassel过程) $\{B_t, \mathcal{F}_t, \{P^x\}\}_{t\geq 0}$是$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上$d$维的$Brown$运动族（$d \geq 2$），$\{B_t\}_{t\geq 0}$是从$x$点出发的$d$维$Brown$运动。$r = \|x\|, R_t = (\sum\limits_{i=1}^d B_i^2(t))^{1/2} = \|B_t\|, R_0 = \|x\| = r$，对$R_t$应用多维$It\hat{o}$公式得到

$$\begin{aligned} dR_t &= \sum_{i=1}^d F_{B_i}(B_1 \cdots B_d) dB_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d F_{B_i B_j}(B_1 \cdots B_d) d\langle B_i, B_j \rangle_t \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{B_i(t)}{R_t} dB_i(t) + \frac{d-1}{2R_t} dt \end{aligned}$$

其中$F(x) = \|x\| = (\sum\limits_{i=1}^d x_i^2)^{1/2}$

定义$\sigma_i(t) = \dfrac{B_i(t)}{R_t}, \sum\limits_{i=1}^d \sigma_i^2(t) = 1, \widehat{B}_t = \int_0^t \sum\limits_{i=1}^d \sigma_i(t) dB_i(t)$ 则$\langle \widehat{B} \rangle_t = \sum\limits_{i=1}^d \int_0^t \sigma_i^2(t) dt = t$由$L\acute{e}vy$刻画知道$\widehat{B}_t$是$Brown$运动。

$R_t = r + \int_0^t \dfrac{d-1}{2R_s} ds + \widehat{B}_t$，这一过程称为$d$维$Bassel$过程。

命题 3.6.9 $d \geq 2, \|x\| \geq 0, \{B_t\}, \{R_t\}$定义如前，则$P[R_t > 0, \forall 0 < t < \infty] = 1$。若定义$m = \inf\limits_{0\leq t<\infty} \{R_t\}$，则$P(m \leq c) = (\frac{c}{\|x\|})^{(d-2)} (c \leq \|x\|)$。

因此$d = 2$时$P(m \leq c) = 1$说明从原点出发的二维Brown运动不可能回到原点，但是可以非常接近原点；

$d > 2$时$P(m \leq c) < 1$说明从原点出发的多维Brown运动不可能回到原点，而且以

一定概率无法接近原点。

§3.7 鞅表示定理

定义 3.7.1 (Brown运动的自然σ域流) $\{B_t\}_{t\geq 0}$是定义在$\{\Omega,\mathcal{F},P\}$上的d维$Brown$运动，$\mathcal{F}_t^B=\sigma(B_s,s\leq t)$称为$B_t$的自然$\sigma$域流。

$\{\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t^B\}_{t\geq 0},P\}$上的循序可测过程$\varphi_t$满足$E\int_0^T\varphi_s^2ds<\infty$，即$\varphi_t\in\mathcal{L}^*$。则由Itô积分的性质，$B_t(\varphi)=\int_0^t\varphi_s dB_s$是鞅。

相反的问题是，如果已知$\{M_t\}_{t\geq 0}$是$\mathcal{F}_t^B$平方可积鞅，是否可以将之写成关于B_t的积分，即$M_t=M_0+\int_0^t\varphi_s dB_s$呢？

答案是肯定的！

定理 3.7.2 $\{M_t\}_{t\geq 0}$是一个初值为零的平方可积鞅，则存在唯一$\{\varphi_t\}_{t\geq 0}\in\mathcal{L}^*$（即满足$\forall T>0, E\int_0^T\varphi_s^2ds<\infty$的循序可测过程）使得$M_t=\int_0^t\varphi_s dB_s\ a.s.$

证明：唯一性

假设存在$\{\varphi\},\{\varphi'\}$同时满足条件，则$M_t=\int_0^t\varphi_s dB_s=\int_0^t\varphi_s' dB_s$

$$N_t=\int_0^t(\varphi_s-\varphi_s')dB_s=0\quad\Rightarrow\quad\langle N\rangle_t=\int_0^t(\varphi_s-\varphi_s')^2ds=0\quad\forall t>0$$

$$\Rightarrow\quad\varphi_s=\varphi_s'\quad a.s.$$

存在性

只需证明对$\forall T>0$存在$\varphi\in\mathcal{L}^*(T)$使得$M_T=\int_0^T\varphi_t dB_t$。

定义$\mathcal{H}=\{c+\int_0^T\varphi_t dB_t; c\in R,\varphi\in\mathcal{L}^*(T)\}$，只需证明$\mathcal{H}=\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$，为此只需

证明$\mathcal{H}$在$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ 中稠密，且为闭集。

a) $\mathcal{H}$是闭集

$\{c_n\}_{n\geq 1} \subset R, \{\varphi_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{L}^*(T)$定义$\xi_n = c_n + \int_0^T \varphi^n(t)dB_t$。

假设在$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$中$\xi_n \to \xi$，那么$E\xi_n \to E\xi$(即$c_n \to E\xi = c$)

$$n, m \to \infty \quad Var(\xi_n - \xi_m) = E[\int_0^T (\varphi_n(t) - \varphi_m(t))^2 dt] \to 0$$

所以$\{\varphi_n\}$是$\mathcal{L}^*(T)(\mathcal{L}^2(\Omega\times[0,t], \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}[0,t], dP\times dt))$的Cauchy序列，存在$\varphi \in \mathcal{L}^*(T)$使得$\lim\limits_{n\to\infty} E\int_0^T (\varphi_n(t) - \varphi(t))^2 dt = 0$。因此$\xi = c + \int_0^T \varphi(t)dB_t \in \mathcal{H}$

b) $\mathcal{H}$在$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$中稠密

假设$\rho(t) \in \mathcal{L}^2([0,T], R^d)$，定义$X_t^\rho = -\frac{1}{2}\int_0^t |\rho_s|^2 ds + \int_0^t \rho_s dB_s, \varepsilon_t^\rho = \exp\{X_t^\rho\}, \varepsilon^\rho = \varepsilon_T^\rho$。由Itô公式有$\varepsilon^\rho = 1 + \int_0^T \varepsilon_t^\rho \rho_t dB_t$，由于$\{X_t^\rho\}_{t\geq 0}$是Gauss过程，易证$E\int_0^T |\varepsilon_t^\rho \rho_t|^2 dt < \infty$，故$\varepsilon^\rho \in \mathcal{H}$。

以下证明：如果$Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$满足$\forall\, \rho \in \mathcal{L}^2([0,T], R^d), EZ\varepsilon^\rho = 0$，那么$Z = 0, a.s.$

因$EZ\varepsilon^\rho = cEZ\exp\{\int_0^T \rho_s dB_s\}$，故$\forall\, \rho \in \mathcal{L}^2([0,T], R^d), EZ\exp\{\int_0^T \rho_s dB_s\} = 0$

取$\rho_t = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i I_{[t_{i-1}, t_i)}(t), \lambda_i \in R, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$，则

$$EZ\exp\{\int_0^T \rho_s dB_s\} = EZ\exp\{\lambda_1 B_{t_1} + \cdots + \lambda_n(B_t - B_{t_{n-1}})\} = 0$$

即$\forall\, u_1, \cdots, u_n \in R, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$有$EZ\exp\{u_1 B_{t_1} + \cdots + u_n B_{t_n}\} = 0$。

记$u = (u_1, \cdots, u_n)^\tau, Y = (B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})^\tau$有$\forall\, u \in R^n, EZe^{\langle u, Y\rangle} = 0$。

定义$g(Y) = E[Z|Y]$那么$Eg(Y)e^{\langle u, Y\rangle} = 0$，取$u = 0$，$Eg^+(Y) = Eg^-(Y) = c$。

如果$c = 0 \Rightarrow g(Y) = 0, a.s.$；

如果$c>0$定义

$$
\begin{aligned}
Q^{+}(dy) &= \frac{1}{c}g^{+}(y)P_Y(dy) \\
Q^{-}(dy) &= \frac{1}{c}g^{-}(y)P_Y(dy)
\end{aligned}
$$

Q^{+},Q^{-}是两个概率测度。

$$
\text{因为} \qquad \int_{R^n} e^{\langle u,y\rangle}Q^{+}(dy)=\int_{R^n} e^{\langle u,y\rangle}Q^{-}(dy), \quad u\in R^n
$$

故两个概率测度Q^{+},Q^{-}的Laplase变换一样，$Q^{+}=Q^{-}$，$g(Y)=0$a.s.。因此$E[Z|B_{t_1},\cdots,B_{t_n}]=0$。

定义$\mathcal{A}=\bigcup\limits_{0=t_0<t_1\cdots<t_n=t}\sigma(B_{t_1},\cdots,B_{t_n})$。对$\forall\,A\in\mathcal{A},EZI_A=0$，而且$\forall\,A\in\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{F}_T,EZI_A=0$，因此$Z=0$a.s.。

进一步可以证明$\mathcal{H}$在$\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$中稠密。

注: 如果$\{X_t\}\in\mathcal{M}^2_{\text{loc}}$,则$M_t=\int_0^t\varphi_s dX_s$在$\varphi$满足一定条件时为一个鞅，而且$\mathcal{H}(M)=\{c+\int_0^T\varphi_s dX_s\}\subseteq\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$。只有在$X_t$为Brown运动时，上述两个集合才等价。

推论 3.7.3 $T>0,\xi\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$，那么存在唯一的循序可测过程$\varphi_t$满足$E\int_0^T\varphi_s^2ds<\infty,\xi=E\xi+\int_0^T\varphi_s dB_s$。

命题 3.7.4 $T>0$，$\xi\in\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{F}_T,P)(p>1)$，那么存在唯一的循序可测过程$\varphi_t\in\mathcal{L}^2_{loc}(T)$满足$E(\int_0^T|\varphi_s|^2ds)^{(p/2)}<\infty$并使得$\xi=E\xi+\int_0^T\varphi_s dB_s$。

证明： 假设满足条件的φ存在，由D-B-G不等式和Doob不等式有

$$
c_pE(\int_0^T\varphi_s^2ds)^{\frac{p}{2}}\le E(\sup_{o\le t\le T}|\int_0^t\varphi_s dB_s|)^p\le C_pE|\xi-E\xi|^p
$$

唯一性易得。

存在性：

由前一推论知，$p \geq 2$时显然。

对于$1 < p < 2$，$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$在$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$中稠密。

存在$\xi_n \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$使得在$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$中$\xi_n \to \xi$。由上一个推论知道，存在$\{\varphi_n\} \in \mathcal{L}^*(T)$使得$\xi_n = E\xi_n + \int_0^T \varphi_n(s)dB_s$。

对于$m, n; \xi_n - \xi_m = E[\xi_n - \xi_m] + \int_0^T (\varphi_n(s) - \varphi_m(s))dB_s$，由上面的不等式有

$$E(\int_0^T |\varphi_n(s) - \varphi_m(s)|^2 ds)^{p/2} \leq \overline{c_p} E|\xi_n - \xi_m - E[\xi_n - \xi_m]|^p$$

所以$\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$是$\mathcal{L}^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}[0,T], dP \times dt)$上的Cauchy列，那么存在$\varphi$使得在$\mathcal{L}^p(\Omega \times [0,T], \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}[0,T], dP \times dt)$中$\varphi_n \to \varphi$。

因此，存在φ使得$\xi = E\xi + \int_0^T \varphi(s)dB_s$。

注：若在命题中放松对ξ的可积要求，则存在性仍然成立，但是唯一性不成立。

因为若取$T = \infty$，并定义$\tau = \{t > 0, B_t = 0\}, \varphi(t) = I_{[0,\tau]}(t)$，则$\int_0^\infty \varphi(t)dB_t = B_\tau - B_0 = 0$。对于$\xi \in \mathcal{F}_\infty$，存在$\psi$满足$\xi = c + \int_0^\infty \psi(t)dB_t$，那么$\psi + n\varphi$也满足$\xi = c + \int_0^\infty (\psi(t) + n\varphi(t))dB_t$，故唯一性不再成立。

命题 3.7.5 *对于任何$a.s.$有限的随机变量$\xi \in \mathcal{F}_T$，存在$\varphi \in \mathcal{L}^2_{loc}(T)$使得$\xi = \int_0^T \varphi_s dB_s$。*

定理 3.7.6 *$\{M_t\}_{t\geq 0}$是$\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P\}$上的一个$d$维连续局部鞅，且对于$\forall 1 \leq i, j \leq d, \langle M^{(i)}, M^{(j)}\rangle_t$关于$t$绝对连续。则存在一个延拓的概率空间$\{\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P}\}$，$\sigma$域流$\{\widetilde{\mathcal{F}_t}\}_{t\geq 0}$及*

定义其上的一个d维$Brown$运动$(B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^d)$和一个适应过程$\{X_t\}_{t\geq 0}$，满足$P(\int_0^T |X_t|^2 dt < \infty) = 1$并使得$M_t = \int_0^t \langle X_s, dB_s \rangle$。

命题 3.7.7 给定$\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t^B\}, P\}$，若$M_t$是$\mathcal{F}_t^B$局部鞅，则$M_t$连续。

定理 3.7.8 $\{N_t\}_{t\geq 0}$是定义在概率空间$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上的强度为$\lambda(t)$的$poisson$过程，$\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s, s \leq t)$。若$M_t$是$\mathcal{F}_t^N$平方可积鞅，则存在唯一的可料过程$\varphi(t)$满足$E\int_0^t \varphi_s^2 dN_s < \infty$使得

$$M_t = EM_t + E\int_0^t \varphi_s d(N_s - \int_0^s \lambda(u)du) = M_0 + \int_0^t \varphi_s d\widetilde{N_s}$$

其中$\widetilde{N_t} = N_t + \int_0^t \lambda(s)ds$为补偿$poisson$鞅。

M_t为概率空间$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上的平方可积鞅，$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^M = \sigma(M_s, s \leq t)$。若$\widetilde{M_t}$也是$\mathcal{F}_t$平方可积鞅，那么是否存在可料过程$\varphi(t)$使得$\widetilde{M_t} = E\widetilde{M_0} + \int_0^t \varphi_s dM_s$？

答案是否定的。

命题 3.7.9 M_t为概率空间$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上的平方可积鞅，$\mathcal{F}_t^M = \sigma(M_s, s \leq t)$，鞅表示定理成立当且仅当$X_t$是$Lévy$过程。即$X_t = \alpha_t + \int_0^t \beta_s dB_s + \int_0^t \gamma_s d\widetilde{N_s}$，其中$\alpha, \beta, \gamma$是确定性函数，$\{B_t\}_{t\geq 0}$是$Brown$运动，$\widetilde{N_s}$是补偿$poisson$鞅。

命题 3.7.10 M_t是$\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P\}$上的连续局部鞅，$\langle M \rangle_t$是$M_t$的可料对偶投影，满足$\lim\limits_{t\to\infty} \langle M \rangle_t = \infty a.s.$，定义$T(s) = \inf\{t > 0; \langle M \rangle_t > s\}, \mathcal{G}_s = \mathcal{F}_{T(s)}, B_s = M_{T(s)}$则$B_s$是$\mathcal{G}_s$标准$Brown$运动。特别地$M_t = B_{\langle M \rangle_t} = \int_0^{\langle M \rangle_t} dB_s$。

§3.8 测度变换

定义 3.8.1 (Radon-Nikodym导数) P, Q是$\{\Omega, \mathcal{F}\}$上两个概率测度，如果对于$\forall A \in \mathcal{F}$有$P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0$，则称$Q$关于$P$绝对连续。若$P$也关于$Q$绝对连续，称$P$和$Q$等价。

Q关于P绝对连续，则存在唯一的$\xi \geq 0 a.s.$使得$\forall A \in \mathcal{F}, Q(A) = E_P[\xi I_A]$。$\xi = \frac{dQ}{dP}$称为*Radon-Nikodym*导数。$E\xi = 1$。

引理 3.8.2 *1)* $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$，则存在唯一的可料局部可积增过程$\langle M\rangle_t$，使得$M_t^2 - \langle M\rangle_t \in \mathcal{M}_{loc}$

2) $M, N \in \mathcal{M}^2_{loc}$，则存在唯一的可料局部可积变差过程$\langle M, N\rangle_t$，使得$M_t N_t - \langle M, N\rangle_t \in \mathcal{M}_{loc}$

证明：2)假设$M, N \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$，$\{\tau_n\}$是它们共同的局部化停时序列，即对于每一个$n$，$M^{\tau_n}$和$N^{\tau_n}$是平方可积鞅，那么$\langle M^{\tau_n}, N^{\tau_n}\rangle_t$均有定义，则

$$\langle M, N\rangle_t = M_0 N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle (M - M_0)^{\tau_n}, (N - N_0)^{\tau_n}\rangle I_{(\tau_{n-1}, \tau_n]}(t)$$

X_t, Y_t是两个连续半鞅，则存在唯一的Doob-Mayer分解

$$X_t = X_0 + M_t^X + A_t^X \quad Y_t = Y_0 + M_t^Y + A_t^Y$$

定义$\langle X, Y\rangle_t = \langle M^X, M^Y\rangle_t$

引理 3.8.3 (Bayes规则) $L_t \geq 0$为$\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P\}$鞅，$L_0 = 1$，定义$Q(A) =$

$E_P[L_T I_A](T\geq 0)$。$Y\in\mathcal{F}_t, E_Q Y<\infty$，则$s<t\leq T$有

$$E_Q[Y|\mathcal{F}_s]=\frac{1}{L_s}E_P[YL_t|\mathcal{F}_s]\quad a.s.P,Q$$

称为随机形式的$Bayes$规则。

注：Y_t是Q鞅，则$Y_sL_s=E[Y_tL_t|\mathcal{F}_s]$，即$Y_tL_t$是$P$鞅；反之也成立。

$$Y_t\text{是}Q\text{鞅}\Leftrightarrow Y_tL_t\text{是}P\text{鞅}$$

证明：由条件期望的定义，有$\forall\, A\in\mathcal{F}_s$

$$\begin{aligned}E_Q[I_A\frac{1}{L_s}E_P[YL_t|\mathcal{F}_s]] &= E_P[L_TI_A\frac{1}{L_s}E_P[YL_t|\mathcal{F}_s]]\\ &= E_P[E_P[L_T|\mathcal{F}_s]I_A\frac{1}{L_s}E_P[YL_t|\mathcal{F}_s]]\\ &= E_P[I_AE_P[YL_t|\mathcal{F}_s]]\\ &= E_P[I_AYL_t]\\ &= E_Q[I_AY]\end{aligned}$$

故$E_Q[Y|\mathcal{F}_s]=\frac{1}{L_s}E_P[YL_t|\mathcal{F}_s]$。

特别地，取$L_t=\exp\{-\frac{1}{2}\int_0^t|\theta|^2ds+\int_0^t\theta_sdB_s\}$，其中$\forall\, t>0, \int_0^t|\theta_s|^2ds<\infty$a.s.。$L_t$是一个连续局部鞅，由Itô公式有$\begin{cases}dL_t &= L_t\theta_tdB_t\\ L_0 &= 1\end{cases}$。

命题 3.8.4 M_t, N_t是$\{\Omega,\mathcal{F},P\}$上的平方可积鞅。$[M,N]_t$是二次变差过程。可以证明，如果Q和P等价，则在Q之下

$$M_t=\widetilde{M}_t+A_t\qquad N_t=\widetilde{N}_t+B_t$$

其中$\widetilde{M}_t,\widetilde{N}_t$是$Q$鞅，$A_t,B_t$是有限可积变差过程。且$[\widetilde{M},\widetilde{N}]_t=[M,N]_t$。

引理 3.8.5 $\{L_t\}_{t\geq 0}$是鞅，对$\forall A\in\mathcal{F}_t$定义$P_t(A)=E_P I_A L_t$，由$Bayes$规则有$P_t|\mathcal{F}_s=P_s$，则在$\{\Omega,\mathcal{F}\}$上存在唯一的概率测度$Q$使得$\forall T>0, Q|\mathcal{F}_t=P_t$

定理 3.8.6 (Girsanov定理) $\begin{cases} dL_t &= L_t\theta_t dB_t \\ L_0 &= 1 \end{cases}$ 为鞅，定义$\widehat{B}_t=B_t-\int_0^t\theta_s ds$，则其在$Q(A)=E_P[L_T I_A]$下是$Brown$运动。

证明：$d\widehat{B}_t=dB_t-\theta_t dt$，对$L_t\widehat{B}_t$应用Itô公式

$$\begin{aligned}
dL_t\widehat{B}_t &= L_t d\widehat{B}_t+\widehat{B}_t dL_t+d\langle L,\widehat{B}\rangle_t \\
&= L_t dB_t-L_t\theta_t dt+\widehat{B}_t\theta_t L_t dt+\theta_t L_t dt \\
&= (L_t+\widehat{B}_t\theta_t L_t)dB_t \\
&= \psi_t dB_t
\end{aligned}$$

$\int_0^t\psi_s^2 ds<\infty a.s.$，所以$L_t\widehat{B}_t$是$P$鞅，根据Bayes规则的注，知道$\widehat{B}_t$是$Q$鞅。同时$[\widehat{B}]_t=[B]_t=t$，由Lévy刻画，$\{\widehat{B}_t\}_{t\geq 0}$是$Q$-Brown运动。

问题：在什么情况下，L_t才是鞅呢？

命题 3.8.7 (Novikov条件) 如果$Ee^{\frac{1}{2}\int_0^t|\theta_s|^2 ds}<\infty$，则$EL_t=1$，$L_t$为鞅。这一条件称为$Novikov$条件。

可以给出反例，即使$E(d^{(\frac{1}{2}-\varepsilon)\int_0^t|\theta_s|^2 ds})<\infty(\varepsilon>0)$也不能保证$L_t$是鞅。

问题 3.8.8 $\begin{cases} X_t &= \mu t+\sigma B_t \\ X_0 &= 1 \end{cases}$ $b\neq 0$，定义停时$\tau_b=\inf\{t>0, X_t=b\}$，求$P(\tau_b\leq t)$

解: $X_t=\sigma(B_t+\frac{\mu}{\sigma}t)=\sigma\widehat{B}_t$，我们希望得到一个与$P$等价的概率测度$Q$，使得在$Q$下，$\widehat{B}_t$是标准Brown运动。根据Girsanov定理，我们取$\theta_t=\frac{\mu}{\sigma}$，$L_t=E[\frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_t]=\exp\{-\frac{1}{2}(\frac{\mu}{\sigma})^2t-\frac{\mu}{\sigma}B_t\}$，则在$Q$下，$\widehat{B}_t$是标准Brown运动。

不失一般性，取$b>0,\sigma>0$，有

$$\begin{aligned}
P(\tau_b\le t) &= P(\max_{s\le t}X_s\ge b)\\
&= P(\max_{s\le t}\widehat{B}_t\ge\frac{b}{\sigma})\\
&= E_P I_{\{\widehat{B}_t^*\ge\frac{b}{\sigma}\}}\\
&= E_Q[L_t^{-1}I_{\{\widehat{B}_t^*\ge\frac{b}{\sigma}\}}]\\
&= e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}t}E_Q[e^{\frac{\mu}{\sigma}\widehat{B}_t}I_{\{\widehat{B}_t^*\ge\frac{b}{\sigma}\}}]
\end{aligned}$$

可以在第二章第五节Brown泛函的分布查到$f(B_t,M_t)$，进一步得到$P(\tau_b\le t)$。

§3.9 局部时

半鞅$X_t=X_0+M_t+A_t,M_t\in\mathcal{M}_{\text{loc}}^c,A_t$是局部有限变差。对$f\in\mathcal{C}^2$，利用Itô公式有$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_s)dX_s+\int_0^t f''(X_s)d\langle M\rangle_s$。

对此加以推广：

1) 不要求$f\in\mathcal{C}^2$，保持X_t连续；

2) $f\in\mathcal{C}^2$，但X_t不连续；

3) 不要求$f\in\mathcal{C}^2$,且X_t不连续。

以下研究B_t在x附近的停留时间。

$\tau_x = \inf\{t > 0, B_t = x\}$是一维Brown运动的停时，$P(\tau_x < \infty) = 1, E\tau_x = \infty$。

定义$\mathcal{L}_\omega(x) = \{0 \le t < \infty, B_t(\omega) = x\}$，可以证明，$means\mathcal{L}_\omega(x) = 0, P - a.e.\omega \in \Omega$（$\mathcal{L}_\omega(x)$的Lebesgue测度为零）。

P.Lévy引入了$L_t(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4\varepsilon} means\{0 \le s \le t, |B_s - x| \le \varepsilon\}$，并证明该极限存在有限不为零。对于固定的$x$，$L_t(x)$是$t$的严格单调上升函数，$\frac{d}{dt}(L_t(x))$存在并几乎处处为零（对Lebesgue测度而言），同时$L_t(x)$为奇异连续函数。那么B_t在$B \in \mathcal{B}(R)$的停留时间的Lebesgue测度应该是

$$\Gamma_t(B, \omega) = \int_B 2L_t(x, \omega)dx, 0 \le t < \infty$$

$\{B_t, \mathcal{F}_t\}_{t \ge 0}, \{P^z\}_{z \in R}$是$(\Omega, \mathcal{F})$上的一维Brown运动族。延用第二章第四节的记号定义$P^z(F) = P^0(F - z), F \in \mathcal{F}$，其中$P^0$为Brown运动在$\mathcal{C}[0, \infty)$上导出的Wiener测度。

定义 3.9.1 (Brown局部时) $L = \{L_t(x, \omega), (t, x) \in [0, \infty) \times R, \omega \in \Omega\}$为取值于$[0, \infty)$上的随机场，且对于参数$(t, x)$的每一组固定值来说，随机变量$L_t(x)$是$\mathcal{F}_t$可测。假设$\Omega^* \in \mathcal{F}$，对$\forall z \in R, P^z(\Omega^*) = 1$，而$\forall \omega \in \Omega^*, L_t(x, \omega) : (t, x) \to R$是连续的并满足$\Gamma_t(B, \omega) = \int_B 2L_t(x, \omega)dx, 0 \le t < \infty$，则称$L$为$Brown$局部时。

命题 3.9.2 $\Gamma_t(B, \omega) = \int_B 2L_t(x, \omega)dx$成立等价于

$$\int_0^t f(B_s(\omega))ds = 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)L_t(x, \omega)dx$$

其中$f : R \to [0, \infty)$为任一$Borel$可测函数。

特别地，取Dirac函数$f(x) = \delta(x-a), a \in R$，则$2L_t(a) = \int_0^t \delta(B_s-a)ds$。考虑非降凸函数$u(x) = (x-a)^+$，其在$R\backslash\{a\}$上连续可微，且在分布意义下的二阶导数为$\delta(x-a)$。假定可以对这种情况应用Itô公式，得到

$$\begin{aligned}(B_t-a)^+ &= (Z-a)^+ + \int_0^t I_{(a,\infty)}(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \delta(B_s-a)ds \quad P^z a.s.(\forall\, z \in R) \\ \Rightarrow L_t(a) &= (B_t-a)^+ - (z-a)^+ - \int_0^t I_{(0,\infty)}(B_s)dB_s \quad P^z a.s.(\forall\, z \in R)\end{aligned}$$

命题 3.9.3 如果*Brown*运动的局部时存在，则$L_t(a)$是单调连续随机场，且

$$\begin{aligned}L_t(a) &= (B_t-a)^+ - (z-a)^+ - \int_0^t I_{(0,\infty)}(B_s)dB_s \quad 0 \le t < \infty \\ L_t(a) &= (B_t-a)^- - (z-a)^- - \int_0^t I_{(-\infty,a]}(B_s)dB_s \quad 0 \le t < \infty \\ 2L_t(a) &= |B_t-a| - |z-a| - \int_0^t sign(B_s-a)dB_s \quad 0 \le t < \infty\end{aligned}$$

$a.s.\ P^z(\forall\, z \in R)$

定理 3.9.4 *Brown*局部时是存在的。

引理 3.9.5 (Skorohod等式) $z \ge 0$，$y(t)$是连续函数，$y(0) = 0$，则存在唯一的连续函数$k(t)$满足:

1) $x(t) = z + y(t) + k(t) \ge 0; 0 \le t < \infty$

2) $k(0) = 0$，且$k(t)$为非降函数

3) $\int_0^\infty I_{\{x(s)>0\}}dk(s) = 0$，即$k(t)$只在$x(t) = 0$的那些$t$处有增长，其他处为零

这一函数为$k(t) = \max[0, \max\limits_{0\le s\le t}\{-z-y(s)\}]$。

接下来，将其推广到Brown运动框架下

命题 3.9.6 $z \geq 0$, $\{W_t, \mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$是概率空间$\{\Theta, \mathcal{G}, Q\}$上的一个$Brown$运动，$Q[W_0 = 0] = 1$。如果存在一个连续过程$k(t)$使得对$Q-a.e.\theta \in \Theta$有：

1) $X_(\theta) = z - W_t(\theta) + k_t(\theta); 0 \leq t < \infty$

2) $k_0(\theta) = 0, t \to k_t(\theta)$是非降的

3) $\int_0^\infty I_{(0,\infty)}(X_s(\theta))dk_s(\theta) = 0$

那么在Q下$\{X_t\}_{t\geq 0}$有着和P^z下$\{|B_t|\}_{t\geq 0}$相同的分布。

由引理知$k_t(\omega) = \max[0, \max\limits_{0\leq s\leq t} -z - W_s(\omega)]$。特别取$z=0$有$k_t = \max\limits_{0\leq s\leq t} W_s = M_t^W$。由Skorohod等式的唯一性，有$|B_t| = M_t^W - W_t, 2L_t(0) = M_t^W$，进一步有下面的定理。

定理 3.9.7 $(M_t - B_t, M_t)$与$(|B_t|, 2L_t(0))$在P^0下同分布，其中$M_t = \max\limits_{0\leq s\leq t} B_s$。

定理 3.9.8 假设$f: R \to R$是一个凸函数，对$\forall -\infty < a < b < \infty$定义二阶微分测度$\mu([a,b)) = D^- f(b) - D^- f(a)$，其中$D^\pm f(x) = \lim\limits_{h\to 0^\pm} \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)]$，则有下面的$It\hat{o}$公式

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t D^- f(B_s)dB_s + \int_{-\infty}^\infty L_t(x)\mu(dx)$$

第四章　随机微分方程

§4.1　Feynman-Kac公式

假设$u(t,x)\in\mathcal{C}^{1,2}$满足如下偏微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+ku &= \dfrac{1}{2}\Delta u+g \quad onR^+\times R^d \\ u(0,x) &= f(x) \quad x\in R^d \end{cases}$$

则u被称为方程的解。

现在只考虑$[0,T]$时间段，并取$v(t',x)=u(t,x)$其中$t'=T-t$，得到如下定义。

定义 4.1.1 考虑连续函数$f:R^d\to R,k:R^d\to[0,\infty),g:[0,T]\times R^d\to R$。假定$v$是$[0,T]\times R^d$上实值连续函数，$\in\mathcal{C}^{1,2}([0,T)\times R^d)$，而且满足如下的偏微分方程

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial t}+kv &= \dfrac{1}{2}\Delta v+g \quad on[0,T)\times R^d \\ v(T,x) &= f(x) \quad x\in R^d \end{cases}$$

则v称为倒向热传导方程柯西问题的解。

定理 4.1.2 (Feynman(1948),Kac(1949)) v是倒向热传导方程柯西问题的解，并假定

$$\max_{0\le t\le T}|v(t,x)|+\max_{0\le t\le T}|g(t,x)|\le Ke^{a\|x\|^2};\quad \forall x\in R^d$$

$K>0$为常数，$0<a<1/2Td$。那么v有着如下的随机表示

$$\begin{aligned} v(t,x) &= E^x[f(B_{T-\tau})\exp\{-\int_0^{T-t}k(B_s)ds\}] \\ &\quad +E^x[\int_0^{T-t}g(t+\theta,B_\theta)\exp\{-\int_0^{\theta}k(B_s)ds\}d\theta];\quad 0\le t\le T,x\in R^d \end{aligned}$$

特别地，这样的解是唯一。

证明: $\{B_t\}_{t\geq 0}$是标准Brown运动，$W_u = x+(B_u-B_t)$就成为t时刻从x点出发的Brown运动。我们假设经典解$v(t,x)$存在，定义$Y_s = v(s,W_s)$。对$\{Y_s\}_{s\geq t}$应用Itô公式有

$$
\begin{aligned}
dY_s &= dv(s,W_s) \\
&= \frac{\partial v}{\partial t}(s,W_s)ds + \langle \frac{\partial v}{\partial x}, dW_s\rangle + \frac{1}{2}\Delta v(s,W_s)ds \\
&= (kv+g)ds + \langle \bigtriangledown v, dW_s\rangle \\
&= (kY_s+g)ds + \langle \bigtriangledown v, dW_s\rangle
\end{aligned}
$$

定义$\widetilde{Y_s} = Y_s e^{-\int_0^s k(W_u)du}$，有

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{Y_s} &= -ge^{-\int_0^s k(W_u)du}ds + e^{-\int_0^s k(W_u)du}\langle \bigtriangledown v, dW_s\rangle \\
\widetilde{Y_T} - \widetilde{Y}_t &= -\int_t^T g(s,W_s)e^{-\int_0^s k(W_u)du}ds + \int_t^T \langle Z_s, dW_s\rangle \\
E^{(t,x)}[\widetilde{Y_T} - \widetilde{Y}_t] &= -E^{(t,x)}\int_t^T g(s,W_s)e^{-\int_0^s k(W_u)du}ds \\
v(t,x)e^{-\int_0^t k(W_u)du} &= E^{(t,x)}[f(W_T)e^{-\int_0^T k(W_u)du}] \\
&\quad +E^{(t,x)}[\int_t^T g(s,W_s)e^{-\int_0^s k(W_u)du}ds] \\
\Rightarrow v(t,x) &= E^{(t,x)}[f(W_T)e^{-\int_t^T k(W_u)du}] \\
&\quad +E^{(t,x)}[\int_t^T g(s,W_s)e^{-\int_t^s k(W_u)du}ds] \\
&= E^x[f(B_{T-\tau})\exp\{-\int_0^{T-t} k(B_s)ds\}] \\
&\quad +E^x[\int_0^{T-t} g(t+\theta,B_\theta)\exp\{-\int_0^\theta k(B_s)ds\}d\theta
\end{aligned}
$$

定理 4.1.3 (Kac(1951)) $f: R\to R, k: R\to [0,\infty)$是分段连续的函数，对某些固

定常数$\alpha > 0$，满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+y)| e^{-|y|\sqrt{2\alpha}} dy < \infty; \quad \forall x \in R$$

定义函数$z(x) = E^x[\int_0^\infty f(B_t)\exp\{-\alpha t - \int_0^t k(B_s)ds\}dt]$，则$z(x)$分段二次连续可微，

且满足

$$(\alpha + k)z = \frac{1}{2}z'' + f; \quad x \in R\backslash(D_f D_k)$$

其中D_f表示f的不连续点集合。

§4.2 SDE的强解

$\{B_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$是$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$上的Brown运动，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$满足通常条件。

$b(t), \sigma(t)$是循序可测过程，满足$\forall t \geq 0, \int_0^t |b(s)|ds < \infty a.s., \int_0^t |\sigma_s^2|ds < \infty a.s.$，

则$\int_0^t \sigma(s)dB_s$和$\int_0^t b(s)ds$有定义。记$X_t = X_0 + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB_s$，或者形式上

写为$\begin{cases} dX_t &= b(t)dt + \sigma(t)dB_t \\ X|_{t=0} &= X_0 \end{cases}$

如果$b(t, X_t) = b(t, \omega, X(t, \omega)), \sigma(t, X_t) = \sigma(t, \omega, X(t, \omega))$有

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X|_{t=0} &= X_0 \end{cases}$$

这样的X_t在何种意义下存在呢？性质和应用如何呢？

定义 4.2.1 (随机微分方程) $B(t)$是d维标准$Brown$运动，$b(t) \in R^m, \sigma(t) \in R^m \times d$

$$\begin{cases} dX_t &= b(t)dt + \sigma(t)dB_t \\ X|_{t=0} &= X_0 \end{cases}$$

称为随机微分方程（SDE）。$b(t)$称为X_t的漂移项，$\sigma(t)$称为$X(t)$的扩散矩阵。

若$b(t,x),\sigma(t,x)(x\in R^m)$是$Borel$可测函数，对于适应过程$W_t$，$b(t,W_t),\sigma(t,W_t)$也是适应的，相应的$SDE$

$$\begin{cases} dX_t &= b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t \\ X|_{t=0} &= X_0 \end{cases}$$

称为$Markov$型的SDE。

如果$\sigma=0$随机微分方程退化为常微分方程$dX_t=b(t,X_t)dt$。

定义 4.2.2 (强解) 随机微分方程

$$\begin{cases} dX_t &= b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t \\ X|_{t=0} &= \xi \end{cases}$$

其中B_t为给定概率空间$\{\Omega,\mathcal{F},P\}$上的$Brown$运动。

若存在连续适应过程$\{X_t\}_{t\geq 0}$使得$P[\int_0^t|(|b(s,X_s)|+\|\sigma(s,X_s)\|^2)ds<\infty]=1$，并满足微分方程或者相应的积分方程，则$X_t$称为$SDE$的强解。

定义 4.2.3 (解的唯一性) $X_t,\widetilde{X}_t$都是给定SDE的强解，如果$P(X_t=\widetilde{X}_t,t<\infty)=1$，称$SDE$的解在轨道意义下是唯一的（或者称为强唯一性），即$X_t=\widetilde{X}_t,a.s.$;如果$X_t$与$\widetilde{X}_t$同分布，称$SDE$的解在分布意义下唯一。

注 4.2.4 轨道唯一⇒分布唯一；反之，不然！

定理 4.2.5 (解的存在唯一性) 随机微分方程

$$\begin{cases} dX_t &= f(t,X_t)dt+g(t,X_t)dB_t \quad (t\geq 0) \\ X_t|_{t=0} &= x \end{cases}$$

中B_t是k维标准Brown运动，$f: R^+ \times R^d \to R^d, g: R^+ \times R^d \to R^{d\times k}$是可测函数，

若f, g满足:

1)（整体Lipschitz连续）$\|f(t,x) - f(t,y)\| + \|g(t,x) - g(t,y)\| \le K\|x - y\|$

2)（线形增长）$\|f(t,x)\|^2 + \|g(t,x)\|^2 \le K^2(1 + \|x\|^2)$

则SDE存在唯一强解。

证明：定义$\Phi : (\mathcal{M}^2)^d \to (\mathcal{M}^2)^d$，

$$\Phi(u_s) = x + \int_0^t f(s, u_s)ds + \int_0^t g(s, u_s)dB_s$$

对$u, u' \in (\mathcal{M}^2)^d, \overline{u} = u - u', \overline{f}_t = f(t, u_t) - f(t, u'_t), \overline{g}_t = g(t, u_t) - g(t, u'_t), \overline{\Phi}_t = \Phi(u_t) - \Phi(u'_t)$ 接着对$e^{-\beta t}|\overline{\Phi}(t)|^2$应用Itô公式，有

$$\begin{aligned}
e^{-\beta T}|\overline{\Phi}(T)|^2 + \beta\int_0^T e^{-\beta s}|\overline{\Phi}(s)|^2 ds &= 2\int_0^T e^{-\beta t}\langle\overline{\Phi}(s), \overline{f}(s)\rangle ds \\
&+ 2\int_0^T e^{-\beta t}\langle\overline{\Phi}(s), \overline{g}(s)\rangle dB_s \\
&+ \int_0^T e^{-\beta t} tr(\overline{g}(s)\overline{g}^\tau(s))ds
\end{aligned}$$

由于u与$u' \in (\mathcal{M}^2)^d$，f, g满足整体Lipschitz连续和线形增长，所以

$\int_0^T e^{-\beta s}\langle\overline{\Phi}(s), \overline{g}(s)\rangle dB_s$是一个鞅。

等式两边取期望有

$$\begin{aligned}
\beta E\int_0^T e^{-\beta s}|\overline{\Phi}(s)|^2 ds &\le 2E\int_0^T e^{-\beta t}\langle\overline{\Phi}(s), \overline{f}(s)\rangle ds \\
&\quad +E\int_0^T e^{-\beta t} tr(\overline{g}(s)\overline{g}^\tau(s))ds \\
&\le E\int_0^T e^{-\beta s}|\overline{\Phi}(s)|^2 ds
\end{aligned}$$

$$+K^2E\int_0^T e^{-\beta s}|\overline{u}_s|^2ds+K^2E\int_0^T e^{-\beta s}|\overline{u}_s|^2ds$$

取$\beta=1+4K^2$有

$$E\int_0^T e^{-\beta s}|\overline{\Phi}(s)|^2ds\le\frac{1}{2}E\int_0^T e^{-\beta s}|\overline{u}_s|^2ds$$

在$(\mathcal{M}^2)^d$上定义范数$\|\varphi(t)\|_\beta=(E\int_0^t e^{-\beta s}|\varphi_s|^2)^{1/2}$，则$\Phi:(\mathcal{M}^2)^d\to(\mathcal{M}^2)^d$是一个压缩映射，故存在唯一的不动点。

即存在X_t满足$\Phi(X_t)=X_t$，$X_t=x+\int_0^t f(s,X_s)ds+\int_0^t g(s,X_s)dB_s$。SDE有唯一强解。

注 4.2.6 若*SDE*: $dX_t=\xi+\int_0^t f(s,X_s)ds+\int_0^t g(s,X_s)dB_s$中$\xi$非退化，且$E|\xi|^2<\infty$，则上述定理的证明可以平凡构造，得到$X_t$的存在唯一性。

引理 4.2.7 (Gronwall不等式) $t\to\Phi(t):R^+\to R$，$a,b\in R^+$满足$\varphi(t)\le a+b\int_0^t\varphi(s)ds$，那么$\forall\, t>0,\varphi(t)\le ae^{bt}$。

证明：由已知条件有

$$\frac{d}{dt}(e^{-bt}\int_0^t\varphi(s)ds)\le ae^{-bt}$$

两边积分$e^{-bt}\int_0^t\varphi(s)ds\le\frac{a}{b}(1-e^{-bt})$，故$[a+b\int_0^t\varphi(s)ds]e^{-bt}\le a$即$\varphi(t)=a+b\int_0^t\varphi(s)ds\le ae^{bt}$。

注 4.2.8 若$\varphi(t)\le a(t)+b(t)\int_0^t\varphi(s)ds$，其中$a(t),b(t)$为增的正函数，则有$\varphi(t)\le a(t)e^{b(t)t}$

命题 4.2.9 假设随机微分方程

$$\begin{cases} dX_t &= f(t,X_t)dt + g(t,X_t)dB_t \quad (t \geq 0) \\ X_t|_{t=0} &= \xi \end{cases}$$

中f, g满足整体$Lipschitz$连续和线形增长，$p \leq 2, E|\xi|^p < \infty$，那么存在一个常数$c_p >$ 0使得

$$E \sup_{0\leq s\leq t} |X_s|^p \leq c_p(1+E|\xi|^p)(1+t^p)(e^{c_p(t^{\frac{p}{2}}+t^p)})$$

证明： $X_s = \xi + \int_0^s f(u,X_u)du + \int_0^s g(u,X_u)dB_u$

由$|\sum X_i|^p \leq a'_p(\sum |X_i|^p)$及Hölder不等式有

$$\sup_{0\leq s\leq t} |X_s|^p \leq c'_p(|\xi|^p + t^{p-1}\int_0^t |f(s,X_s)|^p ds + \sup_{0\leq s\leq t} |\int_0^s g(u,X_u)dB_u|^p)$$

不等式两边取期望，应用D-B-G不等式，Hölder不等式，并注意到f, g满足整体Lipschitz连续和线形增长，得到

$$\begin{aligned} E\sup_{0\leq s\leq t} |X_s|^p &\leq c_pE[|\xi|^p + t^p + t^{p-1}\int_0^t |X_s|^p ds + t^{\frac{p}{2}} + t^{\frac{p}{2}-1}\int_0^t |X_s|^p ds] \\ &\leq c_pE[|\xi|^p + t^{\frac{p}{2}} + t^p] + c_p(t^{\frac{p}{2}-1} + t^{p-1})\int_0^t E\sup_{u\leq s} |X_u|^p ds \\ &= a(t) + b(t)\int_0^t E\sup_{u\leq s} |X_u|^p ds \end{aligned}$$

由Gronwall不等式，$E|\xi|^p < \infty$，有

$$E\sup_{s\leq t} |X_s|^p \leq a(t)e^{b(t)t} \leq c_p(1+E|\xi|^p)(1+t^p)(e^{c_p(t^{\frac{p}{2}}+t^p)})$$

定理 4.2.10 (Yamada & Watanabe(1971)) 一维随机微分方程

$$\begin{cases} dX_t &= b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \\ X_t|_{t=0} &= x \end{cases}$$

中b,σ满足$\forall\, t>0$有

$$\begin{aligned} |b(t,x)-b(t,y)| &\le K|x-y| \\ |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| &\le h(|x-y|) \end{aligned}$$

其中K是正常数，h单调上升$h(0)=0, \forall\,\varepsilon>0, \int_{(0,\varepsilon)} h^{-2}(u)du=\infty$。则$SDE$解的强唯一性成立。

证明：由h满足的条件可以发现，存在单调减序列$\{a_n\}_{n\ge 0}, a_0=1, \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，使得$\int_{a_n}^{a_{n-1}} h^{-2}(u)du=n$；

在(a_n,a_{n-1})上可定义一个函数ρ_n，使得

1) 对$x\in(a_n,a_{n-1})$有$\rho_n(x)\neq 0$，其它情况$\rho_n(x)=0$

2) $0\le\rho_n(x)\le\dfrac{2}{nh^2(x)}, \quad \int_{a_n}^{a_{n-1}}\rho_n(x)dx=1$

定义$\psi_n(x)=\int_0^{|x|}dy\int_0^y\rho_n(u)du$，可见$\psi_n$是二次连续可微的偶函数，$\{\psi_n\}_{n\ge0}$单调非降，$|\psi_n'(x)|\le 1, \lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)=|x|$。

假设$X^{(1)}$和$X^{(2)}$都是SDE的解，$X_0^{(1)}=X_0^{(2)}a.s.$，以下只需证明在$E\int_0^t|\sigma(s,X_s^{(i)})|^2ds<\infty, \forall\, 0\le t<\infty, i=1,2$条件下，$X^{(1)}$和$X^{(2)}$不可区分。

定义$\Delta_t=X_t^{(1)}-X_t^{(2)}=\int_0^t(b(s,X_s^{(1)})-b(s,X_s^{(2)}))ds+\int_0^t(\sigma(s,X_s^{(1)})-\sigma(s,X_s^{(2)}))dB_s$

对$\psi_n(\Delta_t)$应用Itô公式，有

$$\begin{aligned} \psi_n(\Delta_t) &= \int_0^t\psi_n'(\Delta_s)d\Delta_s+\frac{1}{2}\int_0^t\psi_n''(\Delta_s)d\langle\Delta\rangle_s \\ &= \int_0^t\psi_n'(\Delta_s)[b(s,X_s^{(1)})-b(s,X_s^{(2)})]ds \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_0^t\psi_n''(\Delta_s)[\sigma(s,X_s^{(1)})-\sigma(s,X_s^{(2)})]^2ds \end{aligned}$$

$$+\int_0^t \psi_n'(\Delta_s)[\sigma(s,X_s^{(1)})-\sigma(s,X_s^{(2)})]dB_s$$

由ψ_n和$\sigma(t,X_t^{(i)})$的性质知，等式右端的随机积分项是一个鞅，期望为零，两端取期望有

$$\begin{aligned} E\psi_n(\Delta_t) &\le E\int_0^t \psi_n'(\Delta_s)[b(s,X_s^{(1)})-b(s,X_s^{(2)})]ds+\frac{1}{2}E\int_0^t \psi_n''(\Delta_s)h^2(|\Delta_s|)ds \\ &\le E\int_0^t \psi_n'(\Delta_s)[b(s,X_s^{(1)})-b(s,X_s^{(2)})]ds+\frac{t}{n} \\ &\le K\int_0^t E|\Delta_s|ds+\frac{t}{n};\quad t\ge 0, n\ge 1 \end{aligned}$$

由ψ_n的非负性和单调性，两端同时令$n\to\infty$，有

$$\lim_{n\to\infty}E\psi_n(\Delta_t)=E\lim_{n\to\infty}\psi_n(\Delta_t)=E|\Delta_t|\le K\int_0^t E|\Delta_s|ds$$

由Gronwall不等式，有$E|\Delta_t|=0$，故$P(X_t^{(1)}\ne X_t^{(2)})=0$

命题 4.2.11 函数f,g满足整体*Lipschitz*连续和线形增长，随机微分方程的积分形式为

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x+\int_t^s f(u,X_u^{t,x})du+\int_t^s g(u,X_u^{t,x})dB_u \quad (s\le t) \\ X_s^{t,x} = x \quad (s\le t) \end{cases}$$

对于给定的(t,x)，解唯一。

$T>0, p\ge 2$为常数，则存在另一个常数$C(p,T)>0$使得

$$E[\sup_{0\le s\le T}|X_s^{t,x}-X_s^{t',x'}|^p]\le C(p,T)(1+|x|^p+|x'|^p)(|t-t'|^{\frac{p}{2}}+|x-x'|^p)$$

证明：不失一般性，假设$t'<t$，并简记$X_s=X_s^{t,x}, X_s'=X_s^{t',x'}$

1) 如果$s\le t'$，$|X_s-X_s'|=|x-x'|$；

2) 如果$t' \le s \le t$，$|X_s - X'_s|^p = |x - x' - \int_{t'}^s f(u, X'_u)du - \int_{t'}^s g(u, X'_u)dB_u|^p$

与命题1.2.0.12的证明相类似，有

$$\begin{aligned} E\sup_{t' \le s \le t}|X_s - X'_s|^p &\le c_pE[|x - x'|^p + |t - t'|^{p-1}\int_{t'}^t (1 + |X'_s|^p)ds] \\ &+c_pE[(t - t')^{\frac{p}{2}-1}\int_{t'}^t (1 + |X'_s|^p)ds] \end{aligned}$$

由于$E|X'_r|^p \le c(p, T)(1 + |x'|^p)$，有

$$E\sup_{t' \le s \le t}|X_s - X'_s|^p \le C(p, T)(1 + |x'|^p)(|t - t'|^{\frac{p}{2}} + |x - x'|^p)$$

3) 如果$s > t$

$$|X_s - X'_s| = |(X_t - X'_t) + \int_t^s [f(u, X_u) - f(u, X'_u)]du + \int_t^s [g(u, X_u) - g(u, X'_u)]dB_u|^p$$

存在a_p使得

$$\begin{aligned} |X_s - X'_s|^p &\le a_p[|X_t - X'_t|^p + |\int_t^s (f(u, X_u) - f(u, X'_u))du|^p] \\ &+a_p[|\int_t^s [g(u, X_u) - g(u, X'_u)]dB_u|^p] \\ \Rightarrow E\sup_{t \le s \le T}|X_s - X'_s|^p &\le a_pE[|X_t - X'_t|^p + K^pt^{p-1}\int_t^T |X_s - X'_s|^pds] \\ &+a_pE[K^pt^{\frac{p}{2}-1}\int_t^T |X_s - X'_s|^pds] \end{aligned}$$

存在常数$c(p, T)$使得$E\sup_{t \le s \le T}|X_s - X'_s|^p \le c(p, T)E|X_t - X'_t|^p$，然后利用2)中$s = t$时$E|X_t - X'_t|^p$的估计，可得最终结论。

命题 4.2.12 (比较定理) $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \ge 0}, \{B_t\}_{t \ge 0}$给定，$X_t^i, i = 1, 2$分别是下列方程的强解

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_i(s, X_s^i)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^i)dB_s \quad i = 1, 2$$

如果:

1) $b_i(t,x), \sigma(t,x), i=1,2$是$[0,\infty)\times R$上的连续实函数;

2) $\sigma(t,x)$满足$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\le h(|x-y|)$，其中$h(0)=0, \int_{(0,\varepsilon)} h^{-2}(u)du=\infty$;

3) $0\le t<\infty, x\in R, \quad b_1(t,x)\le b_2(t,x)$;

4) b_1, b_2至少一个满足整体Lipschitz连续;

5) $P[X_0^1\le X_0^2]=1$

那么$P[X_t^1\le X_t^2, 0\le t<\infty]=1$。

例 4.2.13

$$\begin{cases} dZ_t &= aZ_tdt+cZ_tdB_t \\ Z_0 &= 1 \end{cases}$$

解: 对$Y_t=\log Z_t$应用Itô公式，

$$\begin{aligned}
dY_t &= \frac{1}{Z_t}dZ_t-\frac{1}{2Z_t^2}c^2Z_t^2dt \\
&= adt+cdB_t-\frac{1}{2}c^2dt \\
&= (a-\frac{c^2}{2})dt+cdB_t \\
Y_t &= \int_0^t(a-\frac{c^2}{2})dt+\int_0^t cdB_t \\
&= (a-\frac{c^2}{2})t+cB_t \\
Z_t &= \exp\{(a-\frac{c^2}{2})t+cB_t\}
\end{aligned}$$

问题 4.2.14 如果$a(t), c(t)$是给定的适应随机过程，那么上例中$Z_t=$?

例 4.2.15

$$\begin{cases} dX_t &= (aX_t+b)dt+(cX_t+d)dB_t \\ X_0 &= x \end{cases}$$

解：令$dZ_t = Z_t(adt+cdB_t)$，对$Y_t = \frac{X_t}{Z_t}$应用Itô公式，

$$dY_t = \frac{1}{Z_t}dX_t - \frac{X_t}{Z_t^2}dZ_t + \frac{1}{2}[f_{xx}d\langle X\rangle_t + 2f_{xz}d\langle X,Z\rangle_t + f_{zz}d\langle Z\rangle_t]$$

其中$f(x,z)=\frac{x}{z}, f_{xx}=0, f_{xz}=-\frac{1}{z^2}=f_{zx}, f_{zz}=\frac{2x}{z^3}$，于是有

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{Z_t}[(aX_t+b)dt+(cX_t+d)dB_t] - \frac{X_t}{Z_t}[adt+cdB_t] \\ &\quad + \frac{1}{2}[-2\frac{1}{Z_t^2}(cX_t+d)cZ_tdt + \frac{2X_t}{Z_t^3}c^2Z_t^2dt] \\ &= \frac{1}{Z_t}(b-cd)dt + \frac{d}{Z_t}dB_t \\ Y_t &= x + \int_0^t \frac{b-cd}{Z_s}ds + \int_0^t \frac{d}{Z_s}dB_s \\ X_t &= Y_tZ_t \\ &= xZ_t + Z_t\int_0^t \frac{b-cd}{Z_s}ds + Z_t\int_0^t \frac{d}{Z_s}dB_s \end{aligned}$$

§4.3 SDE的弱解

定义 4.3.1 (弱解) 随机微分方程$X_t = \xi + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s$的弱解是指满足如下几点的三元组$\{\Omega,\mathcal{F},P\},\{X_t,B_t\}_{t\geq 0},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$:

1) $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$是一个概率空间，$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$，$\sigma$域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$满足通常条件;

2) $\{X_t\}_{t\geq 0}$是$\mathcal{F}_t$连续适应过程，$\{B_t\}_{t\geq 0}$是$\mathcal{F}_t$*Brown*运动;

3) $\int_0^t b(s,X_s)ds < \infty a.s.\quad \int_0^t \|\sigma(s,X_s)\|^2ds < \infty a.s.$;

4) X_t, B_t满足随机微分方程。

定义 4.3.2 (轨道唯一性) $\{\Omega,\mathcal{F},P\},\{X_t,B_t\}_{t\geq 0},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$;

$\{\Omega,\mathcal{F},P\},\{\widetilde{X}_t,B_t\}_{t\geq 0},\{\widetilde{\mathcal{F}}_t\}_{t\geq 0}$是$SDE$在同一概率空间$\{\Omega,\mathcal{F},P\}$下的两个弱解，而且$P[X_0=\widetilde{X}_0]=1$，若$X_t$与$\widetilde{X}_t$不可区分，即$P[X_t=\widetilde{X}_t, 0\leq t<\infty]=1$，则称$SDE$的弱解具有轨道唯一性。

定义 4.3.3 (分布唯一性) $\{\Omega,\mathcal{F},P\},\{X_t,B_t\}_{t\geq 0},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$;

$\{\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P}\},\{\widetilde{X}_t,\widetilde{B}_t\}_{t\geq 0},\{\widetilde{\mathcal{F}}_t\}_{t\geq 0}$是$SDE$的两个弱解，如果

$$\forall\,\Gamma\in\mathcal{B}(R^d), t\geq 0,\quad P[X_t\in\Gamma]=\widetilde{P}[\widetilde{X}_t\in\Gamma]$$

即$\{X_s\}_{s\geq t}$和$\{\widetilde{X}_s\}_{s\geq t}$在各自的概率测度下分布相同，则称$SDE$的弱解具有分布唯一性。

问题：那么轨道唯一性和分布唯一性的关系，弱解和强解的关系如何？

轨道唯一性$\Rightarrow$ 分布唯一性；强解$\Rightarrow$弱解。但是反之都不成立。请看下面的例子。

例 4.3.4

$$X_t=\int_0^t sgn(X_s)dB_s;\quad 0\leq t<\infty$$

$$\text{其中}\quad sgn(x)=\begin{cases} 1 & : \ x>0\\ -1 & : \ x\leq 0\end{cases}$$

解：假设$\{\Omega,\mathcal{F},P\},\{X_t,B_t\}_{t\geq 0},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$是SDE的一个弱解。

$\{X_t,\mathcal{F}_t\}$是平方可积鞅，$\langle X\rangle_t=\int_0^t(sgn(X_s))^2ds=t$，由Lévy刻画知，在$P$下$\{X_t\}$是$\mathcal{F}_t$-Brown运动。因此弱解分布意义下的唯一性是成立的。

令$Y_t=-X_t$，在原概率空间$\{\Omega,\mathcal{F},P\},\{B_t\}_{t\geq 0},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$中$Y_t=\int_0^t sgn(Y_s)dB_s$，则$\{\Omega,\mathcal{F},P\},\{Y_t,B_t\}_{t\geq 0},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$也

是SDE的一个弱解。因此轨道意义下的唯一性不成立。

下面构造SDE的一个弱解：

取$\{\Omega,\mathcal{F},P\}$及其上的一个Brown运动$\{X_t\}$，记$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t^X=\sigma(X_s,s\le t)$。$B_t=\int_0^t sgn(X_s)dX_s$仍然是一个Brown运动，则$dB_t=sgn(X_t)dX_t, dX_t=sgn(X_t)dB_t$，即$X_t=\int_0^t sgn(X_s)dB_t$。

因此$\{\Omega,\mathcal{F},P\},\{X_t,B_t\}_{t\ge0},\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$是SDE的弱解。

但是，SDE的强解不存在。

利用反证法，假设SDE的强解存在。记X_t为给定$\{\Omega,\mathcal{F},P\},\{B_t\}_{t\ge0},\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$的强解。

$X_t=\int_0^t sgn(X_s)dB_s$，显然$\mathcal{F}_t^X\subseteq\mathcal{F}_t^B$。应用凸函数的Itô公式并注意到$X_t$为Brown运动，有

$$
\begin{aligned}
|X_t| &= \int_0^t sgn(X_s)dX_s+2L_t^X(0)\\
B_t &= \int_0^t sgn(X_s)dX_s=|X_t|-2L_t^X(0)\\
&= |X_t|-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\varepsilon}means\{0\le s\le t,|X_s|\le\varepsilon\}\\
\Rightarrow \mathcal{F}_t^B &\subseteq \mathcal{F}_t^{|X|}\\
\Rightarrow \mathcal{F}_t^X &\subseteq \mathcal{F}_t^{|X|}
\end{aligned}
$$

这与$\mathcal{F}_t^{|X|}\subseteq\mathcal{F}_t^X$矛盾，因此假设不成立，SDE的强解不存在。

§4.4 SDE和鞅问题

若随机微分方程$X_t=\xi+\int_0^t f(s,X_s)ds+\int_0^t g(s,X_s)dB_s$的强解存在唯一，则$\{X_t\}_{t\ge0}$具有强Markov性。

定义 4.4.1 (无穷小算子（生成元）) $\{X_t\}_{t\geq 0}$是一个$Markov$过程，f为有界函数，且$Ef(X_t)<\infty$，定义

$$\mathcal{A}f=\lim_{t\to 0}\frac{E^x f(X_t)-f(x)}{t}\quad x\in R^d$$

称$\mathcal{A}$为X_t的生成元或者无穷小算子。

命题 4.4.2 在一定的正则性条件下，算子和$Markov$过程可以存在一一对应关系。

例 4.4.3 求标准$Brown$运动$\{B_t\}_{t\geq 0}$的无穷小算子。

解： $f\in\mathcal{C}_b^2$（二次连续有界函数），由Itô公式有

$$f(B_t)=f(0)+\int_0^t f'(B_s)dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{i=1}^d\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(B_s)ds$$

进一步

$$\mathcal{A}f(x)=\lim_{t\to 0}\frac{E^x f(X_t)-f(x)}{t}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\frac{1}{2}\Delta f$$

其中Δ代表Laplace算子。

例 4.4.4 $X_t=x+\int_0^t b(X_s)ds+\int_0^t\sigma(X_s)dB_s$，求$\{X_t\}$的无穷小算子。

解:$f\in\mathcal{C}_b^2$，由Itô公式有

$$\begin{aligned}
df(X_t) &= f'(X_t)dX_t+\frac{1}{2}f''(X_t)d\langle X\rangle_t\\
&= f'(X_t)(b(X_t)dt+\sigma(X_t)dB_t)+\frac{1}{2}f''(X_t)\sigma^2(X_t)dt\\
&= [f'(X_t)b(X_t)+\frac{1}{2}f''(x_t)\sigma^2(X_t)]dt+f'(X_t)\sigma(X_t)dB_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}f(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{E^x f(X_t)-f(x)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}E^x\int_0^t[f'(X_t)b(X_t)+\frac{1}{2}f''(x_t)\sigma^2(X_t)]ds\\ &= b(x)f'(x)+\frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)\end{aligned}$$

故$\mathcal{A}=b(x)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$。

如果$X_t\in R^d, B_t\in R^m, b\in R^d, \sigma\in R^{d\times m}$，则

$$\mathcal{A}=\sum_{i=1}^d b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\sigma_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

其中$(\sigma_{ij})=\sigma\sigma^\tau$

命题 4.4.5 假设$\{X_t,B_t\},\{\Omega,\mathcal{F},P\},\{\mathcal{F}_t\}$是随机微分方程

$$X_t=x+\int_0^t b(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)dB_s$$

的弱解，X_t的无穷小算子为

$$\mathcal{A}_t f(x)=\sum_{i=1}^d b_i(t,x)\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\sigma_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$$

对$\forall\, f(t,x)\in\mathcal{C}^{1,2}(R^+,R^d)$（对第一个分量一阶连续可微，对第二个分量二阶连续可微）应用$It\hat{o}$公式知

$$M_t=\int_0^t H_s dB_s=f(t,X_t)-f(0,x)-\int_0^t(\frac{\partial}{\partial s}+\mathcal{A}_s)f(s,X_s)ds$$

是一个局部鞅。

由此引出如下定义：

定义 4.4.6 (局部鞅问题) Y_t是$\{\Omega,\mathcal{F}\}=\{\mathcal{C}^d[0,\infty),\mathcal{B}(\mathcal{C}^d[0,\infty))\}$中的一个元，$b_i(t,x),\sigma_{ij}(t,x):[0,\infty)\times\mathcal{C}[0,\infty)^d\to R$是循序可测泛函，$\mathcal{A}_t$是给定的算子

$$\mathcal{A}_t=\sum_{i=1}^d b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\sigma_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

所谓**局部鞅问题**是指是否存在一个$\{\Omega,\mathcal{F}\}$上概率测度P使得$\forall f\in\mathcal{C}^2, M_t^f=f(Y_t)-f(Y_0)-\int_0^t\mathcal{A}_sf(Y_s)ds$是$\mathcal{F}_t$局部鞅。如果存在，称$P$为与$\mathcal{A}_t$相关联的局部鞅问题的解。

命题 4.4.7 P是$\{\mathcal{C}^d[0,\infty),\mathcal{B}(\mathcal{C}^d[0,\infty))\}$上的一个概率测度，如果对$f(x)=x_i$和$f(x)=x_ix_j(i,j=1,\cdots,d)$都有$M_t^f$是$P$局部鞅，则存在一个标准$r$维$Brown$运动$\{B_t\}_{t\geq 0}$使得$\{Y_t,B_t\},\{\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},P\},\{\widetilde{\mathcal{F}}_t\}$是随机微分方程$X_t=X_0+\int_0^t b(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)dB_s$的弱解。

其中$\{\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}}\}$为$\{\mathcal{C}^d[0,\infty),\mathcal{B}(\mathcal{C}^d[0,\infty))\}$在$P$下的完备化。

证明：由假设，对于$f(x)=x_i$有$M_t^i=Y_t^i-Y_0^i-\int_0^t b_i(s,Y_s)ds$是局部鞅；

对于$f(x)=x_ix_j$有$M_t^{ij}=Y_t^iY_t^j-Y_0^iY_0^j-\int_0^t[b_i(s,Y_s)Y_s^j+b_j(s,Y_s)Y_s^i+\sigma_{ij}(s,Y_s)]ds$也是连续局部鞅；

应用Itô公式$X_tY_t=X_0Y_0+\int_0^t X_sdY_s+\int_0^t Y_sdX_s+\langle X,Y\rangle_s$，不难验证

$$\begin{aligned}M_t^iM_t^j &= \int_0^t\sigma_{ij}(s,Y_s)ds+M_t^{ij}-Y_0^iM_t^j-Y_0^jM_t^i\\ &- \int_0^t[\int_0^s b_j(s,Y_s)ds]dM_s^i-\int_0^t[\int_0^s b_i(s,Y_s)ds]dM_s^j\end{aligned}$$

即$M_t^iM_t^j-\int_0^t\sigma_{ij}(s,Y_s)ds$是$P$局部鞅，且$\langle M^i,M^j\rangle_t=\int_0^t\sigma_{ij}(s,Y_s)ds$。

由鞅表示定理，存在一个d维Brown运动$\{B_t\}_{t\geq 0}$及一个$d\times d$循序可测矩阵过程$\rho(t,Y_t)$使

得$M_t^i = \int_0^t \langle \rho^i(s,Y_s), dB_s\rangle$，即

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(s,Y_s)ds + \int_0^t \rho(s,Y_s)dB_s$$

以下要设法验证ρ可以取成σ，即验证存在一个r维Brown运动$\{W_t\}_{t\geq 0}$使得

$$\int_0^t \rho(s,Y_s)dB_s = \int_0^t \sigma(s,Y_s)dW_s$$

不失一般性，只需要对$r = d$的情况验证即可。

由于$\sigma\sigma^\tau = (\sigma_{ij}) = \rho\rho^\tau$，所以存在一个$d$维正交矩阵$R$使得$\sigma = R\rho$。

取$W_t = \int_0^t R_s^\tau dB_s$，知$\langle W^i, W^j\rangle_t = t\delta_{ij}$, 其中$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : & i = j \\ 0 & : & i \neq j \end{cases}$。

由Lévy刻画，$\{W_t\}_{t\geq 0}$是d维Brown运动，并同时满足

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(s,Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s,Y_s)dW_t$$

因此，$\{Y_t, W_t\}, \{\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, P\}, \{\widetilde{\mathcal{F}}_t\}$是随机微分方程的弱解。

推论 4.4.8 与$\mathcal{A}$相应的局部鞅问题的可解性同随机微分方程

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s$$

的弱解存在性相等价；而局部鞅问题解的唯一性同随机微分方程弱解的分布唯一性相等价。

定义 4.4.9 (Stroock,Varadhan(1969)鞅问题) P是$\{\mathcal{C}^d[0,\infty), \mathcal{B}(\mathcal{C}^d[0,\infty))\}$上的一个概率测度，如果$\forall f \in \mathcal{C}^2$，$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{A}_s f(X_s)ds$是$P$鞅，$P$称为与$\mathcal{A}_t$相关的鞅问题的解。

考虑以下命题：

（A）初始分布为μ的随机微分方程$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$的弱解存在；

（B）与$\mathcal{A}_t$相关的局部鞅问题的解P存在，且$P[X(0) \in \Gamma] = \mu(\Gamma), \Gamma \in \mathcal{B}(R^d)$；

（C）与$\mathcal{A}_t$相关的鞅问题的解P存在，且$P[X(0) \in \Gamma] = \mu(\Gamma), \Gamma \in \mathcal{B}(R^d)$；

命题 4.4.10 $A \Leftrightarrow B$,$C \Rightarrow A$。考虑:

（*A.1*）对$\forall\, 0 < T < \infty$有

$$\|\sigma(t, x)\| \leq K_T; \quad 0 \leq t \leq T, x \in \mathcal{C}[0, \infty)^d$$

其中K_T是基于T的常数;

（*A.2*）任意$\sigma_{ij}(t, x) = \widetilde{\sigma}_{ij}(t, x(t))$，$\widetilde{\sigma}_{ij} : [0, \infty) \times R^d \to R$是在紧集上有界的*Borel*可测函数;

则A+$A.1$$\Rightarrow$$C$, A+$A.2$$\Rightarrow$$C$

定义 4.4.11 (well posed) 如果对$\forall x \in R$, 随机微分方程$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$存在分布意义下唯一的弱解，则称该*SDE*是*well posed*。

其中$b(X_t), \sigma(X_t)$是状态可测的（与t无关）。

X_t是随机微分方程$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$的弱解，其生成元为

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

定义 4.4.12 $b(x), \sigma(x)$在R^d的紧子集上有界，P为$\{\Omega, \mathcal{F}\}$上的一个概率测度，

若

$$E^P[f(y(t)) - f(y(s)) - \int_s^t \mathcal{A}f(y(u))du|\mathcal{F}_s] = 0 \quad \forall\, s \le t \quad a.s.$$

称P为时齐鞅问题的解。

定义 4.4.13 (漂移算子) $\theta_s : \Omega \to \Omega$是$\mathcal{F}/\mathcal{F}$可测映射，且满足

$$X_{s+t}(\omega) = X_t(\theta_s\omega); \quad \forall\, \omega \in \Omega, \quad s, t \ge 0$$

称为漂移算子。

如果S是可选时，可以定义随机漂移算子$\theta_S : \{S < \infty\} \to \Omega$

$$在\{S = s\}上 \quad (\theta_S\omega)(t) = (\theta_s\omega)(t)$$

则$X_{S(\omega)+t}(\omega) = X_t(\theta_S(\omega))$，$\{X_{S+\cdot} \in E\} = \theta_S^{-1}\{X_{\cdot} \in E\}$

命题 4.4.14 $b(x), \sigma(x)$在R^d的任意紧子集上有界，且时齐的随机微分方程$well$ $posed$，则对于任意停时T及任意$F \in \mathcal{B}(\mathcal{C}[0,\infty)^d)$有

$$P^x[\theta_T^{-1}F|\mathcal{F}_T] = P^{T(\omega)}[F] \quad P^x - a.s.\ on T < \infty$$

θ_T为随机漂移算子。即$\{X_t\}_{t\ge0}$具有强$Markov$性。

然而$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$不再是Markov过程，

为此我们定义$Y_t = \begin{pmatrix} t \\ X_t \end{pmatrix}, \widehat{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}, \widehat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$，那么

$Y_t = y + \int_0^t \widehat{b}(Y_s)ds + \int_0^t \widehat{\sigma}(Y_s)dB_s$具有强Markov性。

定理 4.4.15

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

假设对于$\forall f \in \mathcal{C}^2$，如下的偏微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \mathcal{A}u \\ u(0,x) & = & f(x) \end{cases}$$

存在解u_f，则$\forall x \in R^d$时齐鞅问题最多只有一个解。

§4.5 线性随机微分方程

考虑线性方程

$$\begin{cases} dX_t & = & [A(t)X_t + a(t)]dt + \sigma(t)dB_t \\ X_0 & = & \xi \end{cases}$$

其中$\{B_t\}_{t\geq 0}$是r维Brown运动，$A \in R^{d\times d}, a \in R^d, \sigma \in R^{d\times r}$均是时间$t$的确定性函数，且局部有界。

为了得到X_t的表达式，设$\xi(t)$满足

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) & = & A(t)\xi(t) + a(t) \\ \xi_0 & = & \xi \end{cases}$$

上述方程的解存在唯一；

进一步，设矩阵函数$\Phi(t) \in R^{d\times d}$满足

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) & = & A(t)\Phi(t) \\ \Phi(0) & = & I_{d\times d} \end{cases}$$

$\Phi(t)$亦存在唯一，且对任意$t \geq 0$，$\Phi(t)$非奇异。

利用$\Phi(t)$可得到常微分方程的解$\xi(t)$的表达式

$$\xi(t) = \Phi(t)[\xi(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(s)a(s)ds]$$

类似地定义

$$X_t = \Phi(t)[\xi + \int_0^t \Phi^{-1}(s)a(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dB_s]$$

应用Itô公式，容易验证X_t满足线性随机微分方程。

例 4.5.1 求解如下的随机微分方程

$$\begin{cases} dX_t &= \dfrac{b - X_t}{T - t}dt + dB_t \quad 0 \le t < T \\ X_0 &= a \end{cases}$$

a, b是常数。

解： $A(t) = -\dfrac{1}{T-t}, a(t) = \dfrac{b}{T-t}, \sigma(t) = 1$利用上面的结果，容易得到

$$X_t = a(1 - \frac{t}{T}) + b\frac{t}{T} + (T - t)\int_0^t \frac{dB_s}{T - s}, \quad t < T$$

可以证明

$$Y_t = \begin{cases} (T-t)\int_0^t \frac{dB_s}{T-s} & ; \quad 0 \le t < T \\ 0 & ; \quad t = T \end{cases}$$

是Gauss过程。

进一步

$$X_t = \begin{cases} a(1-\frac{t}{T}) + b\frac{t}{T} + (T-t)\int_0^t \frac{dB_s}{T-s} & ; \quad 0 \le t < T \\ b & ; \quad t = T \end{cases}$$

也是有着连续路径的Gauss过程，并且有限维分布为

$$P[X_{t_1} \in dx_1, \cdots, X_{t_n} \in dx_n] = \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}; x_{i-1}, x_i)\frac{p(T - t_n; x_n, b)}{p(T; a, b)}dx_a \cdots dx_n$$

定义 4.5.2 (Brown桥) 定义在$[0, T]$上的一个几乎处处连续过程，若有着如上的有限维分布，则称其为在$[0, T]$上从a到b的$Brown$桥。

§4.6 SDE与PDE的联系

考虑如下的随机微分方程

$$\begin{cases} dX_t &= b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t \\ X_0 &= \xi \end{cases}$$

假设:

1）b,σ是连续函数，且满足线性增长条件

$$\|b(t,x)\|^2+\|\sigma(t,x)\|^2 \le K^2(1+\|x\|^2), K\text{为正常数}$$

2）对任一组(t,x)，方程$X_s^{(t,x)}=x+\int_t^s b(\theta,X_\theta^{(t,x)})d\theta+\int_t^s\sigma(\theta,X_\theta^{(t,x)})dB_\theta$的弱解存在；

3）方程的弱解具有分布唯一性。

首先研究b,σ为不依赖于t的函数的情形

定义 4.6.1 $\{X_t\}_{t\ge 0}$的无穷小算子$\mathcal{A}=\sum\limits_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^d\sigma_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$

若$(\sigma_{ij})=\sigma\sigma^\tau>0$（即$\sigma\sigma^\tau$正定），称$\mathcal{A}$为椭圆算子。

若$(\sigma_{ij})=\sigma\sigma^\tau\ge\delta I$，其中$\delta>0, I$为$d$维单位矩阵，称$\mathcal{A}$为一致椭圆算子。

$D\subseteq R^d$，若$\mathcal{A}$在D上任一点为椭圆算子，则称$\mathcal{A}$在区域D上是椭圆的；相应的，若$\mathcal{A}$在D上任一点为一致椭圆算子，则称$\mathcal{A}$在区域D上是一致椭圆的。

命题 4.6.2 设随机微分方程

$$\begin{cases} dX_t &= b(X_t)dt+\sigma(X_t)dB_t \\ X_0 &= x \end{cases}$$

的解X_t的生成元$\mathcal{A}$在有界开区域D上是椭圆的。

$k:\overline{D}\to[0,\infty), g:\overline{D}\to R, f:\partial D\to R$ 是连续函数。u是如下$Dirichlet$问题

$$\left\{\begin{array}{rcll}\mathcal{A}u-ku & = & -g & x\in D\\ u(x) & = & f(x) & x\in\partial D\end{array}\right.$$

的解。定义$\tau_D=\inf\{t\geq 0;X_t\overline{\in}D\}$，如果$\forall x\in D, E^x\tau_D<\infty$，且$Dirichlet$问题的经典解存在唯一，则

$$u(x)=E^x[f(X_{\tau_D})\exp\{-\int_0^{\tau_D}k(X_s)ds\}+\int_0^{\tau_D}g(X_t)\exp\{-\int_0^t k(X_s)ds\}dt]$$

证明：对$Y_t=u(X_t)$应用Itô公式，

$$\begin{aligned}dY_t &= \sum_{i=1}^d\frac{\partial u(X_t)}{\partial x_i}dX_t^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial^2u(X_t)}{\partial x_i\partial x_j}d\langle X^i,X^j\rangle_t\\ &= [\sum_{i=1}^d b_i\frac{\partial u(X_t)}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\sigma_{ij}\frac{\partial^2u(X_t)}{\partial x_i\partial x_j}]dt+dM_t\\ &= (\mathcal{A}u(X_t))dt+dM_t\\ &= (k(X_t)u(X_t)-g(X_t))dt+dM_t\\ &= (k(X_t)Y_t-g(X_t))dt+dM_t\end{aligned}$$

其中M_t是一个局部鞅。

接下来，对$\widetilde{Y}_t=Y_te^{-\int_0^t k(X_s)ds}$应用Itô公式

$$\begin{aligned}d\widetilde{Y}_t &= -g(X_t)e^{-\int_0^t k(X_s)ds}dt+e^{-\int_0^t k(X_s)ds}dM_t\\ &= -g(X_t)e^{-\int_0^t k(X_s)ds}dt+d\widetilde{M}_t\\ d\widetilde{M}_t &= d[\widetilde{Y}_t+\int_0^t g(X_s)e^{-\int_0^s k(X_v)dv}ds]\end{aligned}$$

即$Z_t=\widetilde{Y}_t+\int_0^t g(X_s)e^{-\int_0^s k(X_v)dv}ds$是一个局部鞅。

因为$E^x\tau_D<\infty$，故Z_t在$[0,\tau_D]$上是鞅

$$
\begin{aligned}
Z_0 &= E^x Z_{\tau_D} \\
&= E^x[\widetilde{Y}_{\tau_D}+\int_0^{\tau_D} g(X_s)e^{-\int_0^s k(X_v)dv}ds] \\
&= E^x[u(X_{\tau_D})e^{-\int_0^{\tau_D} k(X_s)ds}+\int_0^{\tau_D} g(X_s)e^{-\int_0^s k(X_v)dv}ds] \\
&= E^x[f(X_{\tau_D})e^{-\int_0^{\tau_D} k(X_s)ds}+\int_0^{\tau_D} g(X_s)e^{-\int_0^s k(X_v)dv}ds]
\end{aligned}
$$

$Z_0=\widetilde{Y}_0=Y_0=u(X_0)=u(x)$。因此，如果Dirichlet问题的解存在，则其解一定可以写成如上的概率形式。

注 4.6.3 反过来，若右端的概率形式存在，则其一定是原方程在某种意义下的解（粘性解），但是不一定是经典解。

例 4.6.4 $\{B_t\}_{t\geq 0}$是从x点出发的$Brown$运动，其生成元为$\frac{1}{2}\Delta$，定义$T(t)=\int_0^t I_{[0,\infty)}(B_s)ds$，$T(t)$表示在$[0,t]$时间区间内$B_t$取正值的总时间。

求$P^0[T(t)\leq\theta]$

解：取$k(x)=\alpha+\beta I_{[0,\infty)}(x),g(x)=1$，由刚刚证明的命题，有

$Z(x)=E^x\int_0^\infty \exp\{-\alpha s-\beta\int_0^s I_{[0,\infty)}(B_v)dvds\}$满足

$$
\begin{cases}
\alpha Z(x) = \frac{1}{2}Z''(x)-\beta Z(x)+1 \quad x>0 \\
\alpha Z(x) = \frac{1}{2}Z''(x)+1 \quad x<0
\end{cases}
$$

$$Z(0^+)=Z(0^-),Z'(0^+)=Z'(0^-)$$

解方程得

$$Z(x) = \begin{cases} A \cdot e^{-x\sqrt{2(\alpha+\beta)}} + \dfrac{1}{\alpha+\beta} & x > 0 \\ B \cdot e^{x\sqrt{2\alpha}} + \dfrac{1}{\alpha} & x < 0 \end{cases}$$

于是得到$T(t)$的Laplace变换，最后

$$P^0[T(t) \leq \theta] = \int_0^{\theta/t} \frac{ds}{\pi\sqrt{s(1-s)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{\frac{\theta}{t}}$$

命题 4.6.5 随机微分方程

$$\begin{cases} dX_\theta &= b(\theta, X_\theta)d\theta + \sigma(\theta, X_\theta)dB_\theta \quad \theta > t \\ X_t &= x \end{cases}$$

的解X_θ的生成元$\mathcal{A}_\theta = \sum\limits_{i=1}^{d} b_i(\theta, x)\dfrac{\partial}{\partial x_i} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(\theta, x)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$。

如果抛物方程的$Cauchy$问题

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \mathcal{A}_t u(t,x) + ku(t,x) &= g \quad (t,x) \in [0,T] \times R^d \\ u(T,x) &= f(x) \end{cases}$$

的解存在，且满足多项式增长

$$\text{对某些} M > 0, \mu \geq 1 \qquad \max_{0 \leq t \leq T} |u(t,x)| \leq M(1 + |x|^{2\mu})$$

则

$$u(t,x) = E^{t,x}[f(X_T)\exp\{-\int_t^T k(s, X_s)ds\} + \int_t^T g(s, X_s)\exp\{-\int_t^s k(\theta, X_\theta)d\theta)ds\}]$$

证明：对$Y_\theta = u(\theta, X_\theta)$应用Itô公式

$$\begin{aligned} dY_\theta &= \frac{\partial u(\theta, X_\theta)}{\partial \theta}d\theta + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u(\theta, X_\theta)}{\partial x_i}dX_\theta^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 u(\theta, X_\theta)}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X^i, X^j\rangle_\theta \\ &= (\frac{\partial u(\theta, X_\theta)}{\partial \theta} + \mathcal{A}_\theta u(\theta, X_\theta))d\theta + dM_\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [k(\theta,X_\theta)u(\theta,X_\theta)-g(\theta,X_\theta)]d\theta+dM_\theta \\
&= [k(\theta,X_\theta)Y_\theta-g(\theta,X_\theta)]d\theta+dM_\theta \\
dM_\theta &= dY_\theta-k(\theta,X_\theta)Y_\theta d\theta+g(\theta,X_\theta)d\theta
\end{aligned}
$$

两边乘以$e^{-\int_t^\theta k(s,X_s)ds}$，由Itô公式有

$$e^{-\int_t^\theta k(s,X_s)ds}dM_\theta=d[Y_\theta e^{-\int_t^\theta k(s,X_s)ds}+\int_t^\theta g(s,X_s)e^{-\int_t^\theta k(v,X_v)dv}ds]$$

即$Y_\theta e^{-\int_t^\theta k(s,X_s)ds}+\int_t^\theta g(s,X_s)e^{-\int_t^\theta k(v,X_v)dv}ds$是一个局部鞅。

定义$\tau_n=\inf\{t'>t;|X_{t'}|\geq n\}$，由Doob选择定理

$$Y_t=u(t,x)=E^{t,x}[Y_{\tau_n}e^{-\int_t^{\tau_n}k(s,X_s)ds}+\int_t^{\tau_n}g(s,X_s)e^{\int_t^s k(v,X_v)dv}ds]$$

分为$\{\tau_n>T\}$和$\{\tau_n\leq T\}$两种情况讨论

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= E^{t,x}[\int_t^{\tau_n\wedge T}g(s,X_s)e^{\int_t^s k(v,X_v)dv}ds]+E^{t,x}[Y_{\tau_n}e^{-\int_t^{\tau_n}k(s,X_s)ds}I_{\{\tau_n\leq T\}}] \\
&+ E^{t,x}[f(X_T)e^{-\int_t^T k(s,X_s)ds}I_{\{\tau_n>T\}}] \\
&= I_1^{(n)}+I_2^{(n)}+I_3^{(n)}
\end{aligned}
$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\int_t^{\tau_n\wedge T}g(s,X_s)e^{\int_t^s k(v,X_v)dv}ds=\int_t^T g(s,X_s)e^{\int_t^s k(v,X_v)dv}ds \quad a.s.$$

由控制收敛定理有$I_1^{(n)}\to E^{t,x}\int_t^T g(s,X_s)e^{\int_t^s k(v,X_v)dv}ds$；

同理$I_3^{(n)}\to E^{t,x}[f(X_T)e^{-\int_t^T k(s,X_s)ds}]$；

下面考虑第二项，X_θ是随机微分方程的解，有$m\geq 1$

$$E^{t,x}[\max_{t\leq s\leq\theta}|X_s|^{2m}] \leq C(1+|x|^{2m})e^{C(\theta-t)}$$

$$
\text{则}\quad P^{t,x}[\tau_n \leq T] = P^{t,x}[\max_{t\leq s\leq T}|X_s| \geq n] \leq n^{-2m}E^{t,x}[\max_{t\leq s\leq T}|X_s|^{2m}] \leq Cn^{-2m}(1+|x|^{2m})e^{C(T-t)}
$$

取$m > \mu$有$E^{t,x}u(\tau_n, X_{\tau_n})I_{\{\tau_n\leq T\}} \leq M(1+n^{2\mu})P[\tau_n \leq T] \to 0$。

问题 4.6.6 在满足某种技术条件下，求如下方程解的概率表达形式

$$
\begin{cases}
-\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \mathcal{A}_t u(t,x) + ku(t,x) = g & (t,x)\in[0,T)\times D \\
u(T,x) = f(x) & x\in D \\
u(t,x) = h(t) & x\in\partial D
\end{cases}
$$

其中D是R^d中的有界区域。

问题 4.6.7 (Newman边值问题) D是R^d中的有界区域，$\partial D\in\mathcal{C}^\infty$，$\overrightarrow{n}$是$\partial D$上的法线向量场，$\mathcal{A}$是一个椭圆算子，求以下方程解的概率表达形式

$$
\begin{cases}
\mathcal{A}u = ku & x\in D \\
u(x) = f(x) & x\in\partial D \\
\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}} = h(x) & x\in\partial D
\end{cases}
$$

第五章　倒向随机微分方程

§5.1　解的存在唯一性

定义 5.1.1 (BSDE) 已知$\{B_t\}_{t\geq 0}$是$\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B\}_{t\geq 0}, P\}$上的$Brown$运动，$\mathcal{L}[0,T]$记$E\int_0^T |x(s)|^2 ds < \infty (\forall x \in \mathcal{L}[0,T])$的$\mathcal{F}_t$循序可测过程构成的类。考虑如下的方程

$$\begin{cases} dX_t &= -f(t, Y_t, Z_t)dt + \langle Z_t, dB_t \rangle \\ Y_T &= \xi \end{cases}$$

1）终端时间$T > 0$;

2）终端条件$\xi \in \mathcal{F}_T, \xi \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$;

3）$f(t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times R^d \times R^{d\times k} \to R^d$是可测映射，且满足以下条件，其中$\overline{f}_t$是$\overline{R^+}$取值的循序可测过程，常数$K > 0, \mu > 0$

i）$\forall y, z \quad f(\cdot, y, z)$是循序可测的;

ii）$\forall y, z \quad |f(t, y, z)| \leq \overline{f}_t + K(\|y\| + \|z\|) a.s.$;

iii）$E\int_0^T |\overline{f}_t|^2 dt < \infty$;

iv）$\forall t, y, z, z' \quad |f(t, y, z) - f(t, y, z')| \leq K\|z - z'\|$，其中$\|z\| = |tr(zz^\tau)|^{1/2}$;

v）$\forall t, y, y', z \quad \langle y - y', f(t, y, z) - f(t, y', z) \rangle \leq \mu \|y - y'\|^2$;

vi）$\forall t, z \quad y \to f(t, y, z)$连续;

称方程为倒向随机微分方程（$BSDE(f, \xi)$）。

定义 5.1.2 (BSDE的解) $BSDE(f,\xi)$的解(Y_t,Z_t)是循序可测过程，满足:

$i)$ $E\int_0^T \|Z_s\|^2 ds < \infty$，即$Z \in (\mathcal{L}[0,T])^{d\times k}$;

$ii)$ (Y_t,Z_t)满足方程，即$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s$。

命题 5.1.3 在$BSDE$定义的假定条件下，如果(Y_t,Z_t)是方程的解，则存在仅依赖T的常数$C>0$使得

$$E[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2 + \int_0^T |Z_t|^2 dt] \le CE[|\xi|^2 + \int_0^T |f(t,0,0)|^2 dt]$$

（Y的可积性隐含其中）

证明: (Y,Z)是方程的解，$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_0^t \langle Z_s, dB_s\rangle$。

对$\forall n\in N$，定义$\tau_n = \inf\{0\le t\le T, |Y_t|\ge n\}$，$Y_t^n = Y_{t\wedge\tau_n}$有界，则$|Y_t^n| \le nV|Y_0|$及

$$\begin{aligned}
Y_t^n &= Y_0^n - \int_0^t I_{[0,\tau_n]}(s) f(s,Y_s^n,Z_s)ds + \int_0^t I_{[0,\tau_n]}(s)\langle Z_s, dB_s\rangle \\
|Y_t^n|^2 &\le c[|Y_0^n|^2 + |\int_0^t I_{[0,\tau_n]}(s) f(s,Y_s^n,Z_s)ds|^2 + |\int_0^t I_{[0,\tau_n]}(s)\langle Z_s, dB_s\rangle|^2] \\
E|Y_t^n|^2 &\le c'[|Y_0^n|^2 + |\int_0^t E|f(s,Y_s^n,Z_s)|^2 ds + \int_0^t |Z_s|^2 ds] \\
&\le C(1 + \int_0^t E|Y_s^n|^2 ds)
\end{aligned}$$

由Gronwell不等式，有$E|Y_t^n|^2 \le Ce^{Ct}$; 由Fatou引理，有$E|Y_t|^2 < Ce^{Ct}$; 再由D-B-G不等式，有$E\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2 < \infty$;

$$\begin{aligned}
E\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \langle Y_s, Z_s dB_s\rangle &\le cE(\int_0^T |Z_s Y_s|^2)^{1/2} \\
&\le cE[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|(\int_0^T |Z_s|^2)^{1/2}] \\
&\le \frac{c}{2}E[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2 + \int_0^T |Z_s|^2 ds]
\end{aligned}$$

$$< \quad \infty$$

故有$\int_0^t \langle Y_s, Z_s dB_s\rangle$是$[0,T]$上的一致可积鞅，即$E\int_t^T \langle Y_s, Z_s dB_s\rangle = 0$。

对$|Y_t|^2$应用Itô公式

$$\begin{aligned}
d|Y_t|^2 &= 2Y_t dY_t + d\langle Y\rangle_t \\
&= 2Y_t(-f(t,Y_t,Z_t)dt + \langle Z_t, dB_t\rangle) + |Z_t|^2 dt \\
|Y_T|^2 - |Y_t|^2 &= 2\int_t^T Y_s(-f ds + Z_s dB_s) + \int_t^T |Z_s|^2 ds \\
\int_t^T |Z_s|^2 ds + |Y_t|^2 &= |\xi|^2 + 2\int_t^T Y_s f(s,Y_s,Z_s)ds - 2\int_t^T \langle Y_s, Z_s dB_s\rangle \\
E\int_t^T |Z_s|^2 ds + E|Y_t|^2 &= E|\xi|^2 + 2E\int_t^T Y_s f(s,Y_s,Z_s)ds
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t Y_s f(s,Y_s,Z_s)ds\right| &\leq \int_0^t |Y_s||f(s,Y_s,Z_s)|ds \\
&\leq c\int_0^t |Y_s|(|f(s,Y_s,0)| + K|Z_s|)ds \\
&\leq c'\int_0^t [\mu|Y_s|^2 + |Y_s||f(s,0,0)| + K|Y_s||Z_s|]ds \\
&\leq c''\int_0^t [|f(s,0,0)|^2 + |Y_s|^2 + |Z_s|^2]ds
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
E\int_t^T |Z_s|^2 ds + E|Y_t|^2 &\leq E|\xi|^2 + E\int_t^T |f(s,0,0)|^2 ds \\
&\quad + cE\int_t^T |Y_s|^2 ds + cE\int_t^T |Z_s|^2 ds \\
E\int_t^T |Z_s|^2 ds + E|Y_t|^2 &\leq C[E|\xi|^2 + E\int_t^T |f(s,0,0)|^2 ds]
\end{aligned}$$

再应用D-B-G不等式，得到结论。

命题 5.1.4 假定$f(t,y,z)$关于y一致$Lipschitz$连续，即

iv'）$\forall t,y,y',z \quad |f(t,y,z)-f(t,y',z)| \le K|y-y'|a.s.$

若$BSDE$满足定义中的*1*)，*2*)，f满足i)，ii)，iii)，iv')，则$BSDE$存在唯一解(Y,Z)。

证明：记$\mathcal{B}^2=(\mathcal{L}[0,T])^d\times(\mathcal{L}[0,T])^{d\times k}$

定义$\mathcal{B}^2\to\mathcal{B}^2$的映射$\Phi$如下：$(Y,Z)=\Phi(U,V)(\forall(U,V)\in\mathcal{B}^2)$

其中$Y_t=E[\xi+\int_t^T f(s,U_s,V_s)ds|\mathcal{F}_t]$，$Z_t$是$\xi+\int_0^T f(s,U_s,V_s)ds$的鞅表示中的被积过程，即

$$\xi+\int_0^T f(s,U_s,V_s)ds=E(\xi+\int_0^T f(s,U_s,V_s)ds)+\int_0^T\langle Z_s,dB_s\rangle$$

两边对$\mathcal{F}_t$取条件期望，容易验证，(Y_t,Z_t)满足

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,U_s,V_s)ds-\int_t^T\langle Z_s,dB_s\rangle$$

与上面的命题证明类似，根据D-B-G不等式，$E\sup\limits_{0\le t\le T}|Y_t|^2<\infty,E\int_0^T|Z_s|^2ds<\infty$，

进而$\int_0^t\langle Y_s,Z_sdB_s\rangle$是一致可积鞅，$E\int_0^t\langle Y_s,Z_sdB_s\rangle=0$。

假设$(U,V),(U',V')\in\mathcal{B}^2$，$(Y,Z)=\Phi(U,V),(Y',Z')=\Phi(U',V'),(\overline{U},\overline{V})=(U-U',V-V'),(\overline{Y},\overline{Z})=(Y-Y',Z-Z')$

对$e^{\gamma t}|\overline{Y}_t|^2,(\gamma\in R)$应用Itô公式，并取期望有

$$\begin{aligned}E(e^{\gamma t}|\overline{Y}_t|^2+\int_t^T e^{\gamma t}(\gamma|\overline{Y}_s|^2+|\overline{Z}_s|^2)ds) &\le 2KE[\int_t^T e^{\gamma t}|\overline{Y}_s|(|\overline{U}_s|+|\overline{V}_s|)ds]\\ &\le 4K^2E\int_t^T e^{\gamma t}|\overline{Y}_s|^2ds\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}E\int_t^T e^{\gamma t}(|\overline{U}_s|^2+|\overline{V}_s|^2)ds$$

取$\gamma=4K^2+1$，有

$$E\int_t^T e^{\gamma t}(|\overline{Y}_s|^2+|\overline{Z}_s|^2)ds\le\frac{1}{2}E\int_t^T e^{\gamma t}(|\overline{U}_s|^2+|\overline{V}_s|^2)ds$$

在$\mathcal{B}^2$上定义范数$\|(Y,Z)\|_\gamma^2=E\int_t^T e^{\gamma t}(|\overline{Y}_s|^2+|\overline{Z}_s|^2)ds$，则$\Phi$是$\|\cdot\|_{4K^2+1}$下的压缩映射，故存在唯一的不动点，即BSDE解存在唯一。

定理 5.1.5 *在$BSDE$定义的六条假设条件下，$BSDE(f,\xi)$存在唯一解(Y,Z)。*

证明：唯一性：

假设$(Y,Z),(Y',Z')$均是$BSDE(f,\xi)$的解，对$|Y_t-Y_t'|^2$应用Itô公式，然后取期望有

$$\begin{aligned}
&E(|Y_t-Y_t'|^2+\int_t^T\|Z_s-Z_s'\|^2ds)\\
=\ &2E\int_t^T\langle Y_s-Y_s',f(s,Y_s,Z_s)-f(s,Y_s',Z_s')\rangle ds\\
\le\ &2E\int_t^T[\mu|Y_s-Y_s'|^2+K|Y_s-Y_s'|\|Z_s-Z_s'\|]ds\\
\le\ &(2\mu+K^2)E\int_t^T|Y_s-Y_s'|^2ds+E\int_t^T\|Z_s-Z_s'\|^2ds
\end{aligned}$$

$$E(|Y_t-Y_t'|^2)\le(2\mu+K^2)E\int_t^T|Y_s-Y_s'|^2ds$$

因为$0\le f(t)\le b\int_0^t f(s)ds\Rightarrow f(t)=0$，故$E|Y_t-Y_t'|^2=0$即$Y_t=Y_t',a.s.$。

同理有$E\int_0^T\|Z_s-Z_s'\|^2ds,Z_t=Z_t',a.s.$。因此，唯一性成立。

存在性：首先注意到(Y_t,Z_t)是BSDE(f,ξ)的解，当且仅当$(e^{\lambda t}Y_t,e^{\lambda t}Z_t)$是BSDE $(\overline{f},e^{\lambda T}\xi)$的解。其中$\overline{f}(t,y,z)=e^{\lambda t}f(t,e^{-\lambda t}y,e^{-\lambda t}z)-\lambda y$。

若取$\lambda=\mu$，$\overline{f}$满足

v'）$\langle y-y',\overline{f}(t,y,z)-\overline{f}(t,y',z)\rangle \le 0$

不失一般性，可以认为f也满足v'）即假定$\mu=0$。

先承认如下命题：

命题 5.1.6 给定$V\in(\mathcal{L}[0,T])^{d\times k}$，存在唯一的循序可测过程$(Y_t,Z_t)$使得

$$E\int_0^T \|Z_s\|^2 ds<\infty,\quad Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,V_s)ds-\int_t^T Z_s dB_s$$

由此，可以构造$\mathcal{B}^2\to\mathcal{B}^2$的映射$\Phi$如下：

$\forall\,(U,V)\in\mathcal{B}^2\quad (Y,Z)=\Phi(U,V)$是BSDE

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,V_s)ds-\int_t^T Z_s dB_s\quad 0\le t\le T$$

的解。

假设$(U,V),(U',V')\in\mathcal{B}^2$，$(Y,Z)=\Phi(U,V),(Y',Z')=\Phi(U',V'),(\overline{U},\overline{V})=(U-U',V-V'),(\overline{Y},\overline{Z})=(Y-Y',Z-Z')$

对$e^{\gamma t}|\overline{Y}_t|^2,(\gamma\in R)$应用Itô公式，并取期望有

$$\begin{aligned}
& E(e^{\gamma t}|\overline{Y}_t|^2+\int_t^T e^{\gamma t}(\gamma|\overline{Y}_s|^2+\|\overline{Z}_s\|^2)ds) \\
= \;& 2E\int_t^T e^{\gamma s}\langle\overline{Y}_s,f(s,Y_s,V_s)-f(s,Y'_s,V'_s)\rangle ds \\
\le \;& 2E\int_t^T e^{\gamma s}|\overline{Y}_s|\|\overline{V}_s\|ds \\
\le \;& E\int_t^T e^{\gamma s}(2|\overline{Y}_s|^2+\frac{1}{2}\|\overline{V}_s\|^2)ds
\end{aligned}$$

取$\gamma=3$，并移项

$$E\int_t^T e^{3s}(|\overline{Y}_s|^2+\|\overline{Z}_s\|^2)ds \quad\le\quad \frac{1}{2}E\int_t^T e^{3s}\|\overline{V}_s\|^2 ds$$

$$\leq \quad \frac{1}{2}E\int_t^T e^{3s}(|\overline{U}_s|^2+\|\overline{V}_s\|^2)ds$$

特别地取$t=0$，上述不等式亦成立

$$E\int_0^T e^{3s}(|\overline{Y}_s|^2+\|\overline{Z}_s\|^2)ds \leq \frac{1}{2}E\int_0^T e^{3s}(|\overline{U}_s|^2+\|\overline{V}_s\|^2)ds$$

在$\mathcal{B}^2$上定义范数$\|(Y,Z)\|^2=E\int_0^T e^{3t}(|\overline{Y}_s|^2+|\overline{Z}_s|^2)ds$，则$\Phi$是$\|\cdot\|$下的压缩映射，

故存在唯一的不动点，即BSDE

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds-\int_t^T Z_s dB_s$$

存在唯一解。

命题的证明：

唯一性由定理中相关部分直接可得；

只需证明存在性，记$f(t,y)=f(t,y,v)$，可以验证，f满足以下条件，其中$\overline{f}_t$是$\overline{R^+}$取

值的循序可测过程，常数$K>0$

i）$\forall y \quad f(\cdot,y)$是循序可测的；

ii'）$\forall y \quad |f(t,y)|\leq \overline{f}_t+K(\|y\|+\|v_t\|)a.s.$；

iii'）$E\int_0^T|f(t,0)|^2dt<\infty$；

iv）$\forall t,y,v,v' \quad |f(t,y,v)-f(t,y,v')|\leq K\|v-v'\|$，其中$\|v\|=|tr(vv^\tau)|^{1/2}$；

v"）$\forall t,y,y' \quad \langle y-y',f(t,y)-f(t,y')\rangle\leq 0$；

vi"）$\forall t \quad y\to f(t,y)$a.s.连续；

为完成证明，首先用$\{\overline{f_n}\}_{n\geq 1}$来逼近$f$，要求其满足v"）和vi"），

$$|\overline{f_n}| \quad \leq \quad \|f\|\bigwedge[\overline{f}_t+K(\|V_t\|+n)]$$

$$\overline{f_n}(t,y) \quad = \quad f(t,y), \quad |y| \leq n$$

然后定义$f_n(t,y) = (\rho_n * \overline{f_n}(t,\cdot))(y)$，其中$\rho_n : R^d \to R^+$是光滑函数，且收敛于在0点的Dirac测度，即$\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n(x) = \delta_{\{0\}}(x)$（例如，正态分布函数序列）。

对于给定的n，f_n是Lipschitz连续的，因此根据前面的命题有BSDE

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f_n(s, Y_s^n) ds - \int_t^T Z_s^n dB_s$$

存在唯一解(Y^n, Z^n)。

对$|Y_t^n|^2$应用Itô公式

$$|Y_t^n|^2 + \int_t^T \|Z_s^n\|^2 ds = |\xi|^2 + 2\int_t^T \langle Y_s^n, f_n(s, Y_s^n)\rangle ds - 2\int_t^T \langle Y_s^n, Z_s^n dB_s\rangle$$

取期望

$$E|Y_t^n|^2 + E\int_t^T \|Z_s^n\|^2 ds \leq E|\xi|^2 + cE\int_t^T (1 + |Y_s^n|^2) ds$$

$$\Rightarrow \sup_n E[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t^n|^2 + \int_0^T \|Z_s^n\|^2 ds] < \infty$$

记$u_t^n = f_n(t, Y_t^n)$，由上述估计和条件ii'），iii'）有$\sup_n E\int_0^T |u_t^n|^2 dt < \infty$。

因此存在一个子序列，仍记为(Y^n, Z^n, u^n)，在$\mathcal{L}^2(\Omega\times[0,T], dp\times dt)$中弱收敛于$(Y, Z, u)$。

对于随机积分项，假设η是$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P, R^d)$中的任一元素，则存在唯一的循序可测过程$\{\varphi_t\}$使得$\eta = E\eta + \int_0^T \varphi_s dB_s$，因此

$$E\langle \eta, \int_t^T Z_s^n dB_s\rangle = E\int_t^T tr(Z_s^n \varphi_s^\tau) ds \to E\int_t^T tr(Z_s)\varphi_s^\tau) ds = E\langle \eta, \int_t^T Z_s dB_s\rangle$$

即$\int_t^T Z_s^n dB_s$在$\mathcal{L}^2(\Omega\times[0,T], dp\times dt)$中弱收敛于$\int_t^T Z_s dB_s$。

对$Y_t^n = \xi + \int_t^T u_s^n ds - \int_t^T Z_s^n dB_s$ 取弱极限，得$Y_t = \xi + \int_t^T u_s ds - \int_t^T Z_s dB_s$。

最后仅需证明$u_t = f(t, Y_t)$

假设$X \in (\mathcal{L}[0,T])^d$，由$f_n$的定义，$f_n$满足v"）且$f_n(\cdot, X)$均方收敛于$f(\cdot, X)$

$$\limsup_{n\to\infty} E\int_0^T \langle Y_t^n - X_t, f_n(t, Y_t^n) - f(t, X_t)\rangle dt \le 0$$

对$|Y_t^n|^2$应用Itô公式，在$[0,T]$上积分并取期望有

$$2E\int_0^T \langle Y_t^n, f_n(t, Y_t^n)\rangle dt = |Y_0^n|^2 - E|\xi|^2 + E\int_0^T \|Z_t^n\|^2 dt$$

Y_0^n在R^d中弱收敛于Y_0，映射$Z \to E\int_0^T \|Z_s\|^2 ds$是在$\mathcal{L}^2(\Omega \times [0,T], dp \times dt, R^{d\times k})$强拓扑上凸连续的（弱下半连续），所以

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} 2E\int_0^T \langle Y_t^n, f_n(t, Y_t^n)\rangle dt &\ge |Y_0|^2 - E|\xi|^2 + E\int_0^T \|Z_s\|^2 ds \\ &= 2E\int_0^T \langle Y_s, u_s\rangle ds\end{aligned}$$

由弱收敛性

$$E\int_0^T \langle Y_t - X_t, u_t - f(t, X_t)\rangle dt \le \limsup_{n\to\infty} E\int_0^T \langle Y_t^n - X_t, u_t^n - f(t, X_t)\rangle dt \le 0$$

取$X_t = Y - t - \varepsilon(u_t - f(t, X_t))$，代入上式，两边除以$\varepsilon$，并令$\varepsilon \to 0$有

$$E\int_0^T |u_t - f(t, Y_t)|^2 dt \le 0$$

故$u_t = f(t, Y_t)(t \in [0,T])$a.s.。

因此$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s) ds - \int_t^T \langle Z_s, dB_s\rangle$。

定理 5.1.7 $(Y, Z), (Y', Z')$分别是$BSDE$

$$\begin{aligned} Y_t &= \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T \langle Z_s, dB_s\rangle \\ Y'_t &= \xi' + \int_t^T f'(s, Y'_s, Z'_s) ds - \int_t^T \langle Z'_s, dB_s\rangle \end{aligned}$$

的解，f, f'满足定义中的条件i)-vi)。存在依赖于f'的$Lipschitz$系数和单调系数的常数$C > 0$，使得

$$\begin{aligned}
& E[\sup_{0\le t\le T}|Y_t - Y_t'|^2 + \int_0^T \|Z_s - Z_s'\|^2 ds] \\
\le \quad & CE[|\xi - \xi'|^2 + \int_0^T |f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y_s, Z_s)|^2 ds]
\end{aligned}$$

证明：在$[t, T]$上对$|Y_s - Y_s'|^2$应用Itô公式有

$$\begin{aligned}
|Y_t - Y_t'|^2 + \int_t^T \|Z_s - Z_s'\|^2 ds \quad &= \quad |\xi - \xi'|^2 - 2\int_t^T \langle Y_s - Y_s', (Z_s - Z_s')dB_s\rangle \\
&+ \quad 2\int_t^T \langle Y_s - Y_s', f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y_s', Z_s')\rangle ds
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
& \langle Y_s - Y_s', f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y_s', Z_s')\rangle \\
\le \quad & \langle Y_s - Y_s', f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y_s, Z_s) + f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y_s', Z_s')\rangle \\
\le \quad & |Y_s - Y_s'| \times |f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y_s, Z_s)| \\
+ \quad & |Y_s - Y_s'| \times (f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y_s', Z_s) + f'(s, Y_s', Z_s) - f'(s, Y_s', Z_s')) \\
\le \quad & |Y_s - Y_s'| \times (|f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y_s, Z_s)| + K'\|Z_s - Z_s'\|) + \mu'|Y_s - Y_s'|^2
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
E[|Y_t - Y_t'|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T \|Z_s - Z_s'\|^2 ds] \quad &\le \quad E|\xi - \xi'|^2 \\
&+ \quad E\int_t^T |f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y_s, Z_s)|^2 ds \\
&+ \quad (1 + 2\mu' + 2(K')^2)E\int_t^T |Y_s - Y_s'|^2 ds
\end{aligned}$$

由Gronwall不等式知道不取sup的解的估计形式成立，再利用D-B-G不等式可得结论。

回到一维情况

定理 5.1.8 若$\xi \leq \xi' a.s.$，$\forall y, z, f(t,y,z) \leq f'(t,y,z) a.s.$则$Y_t \leq Y_t'(0 \leq t \leq T) a.s.$

如果同时有$Y_0 = Y_0'$，那么$\forall t \leq T, Y_t = Y_t' a.s.$

特别地，如果$P(\xi < \xi') > 0$或者$f(t,y,z) < f'(t,y,z)$在一个$dt \times d\mu$正测集上成立，那么$Y_0 < Y_0'$

证明：定义

$$\alpha_t = \begin{cases} (Y_t - Y_t')^{-1}(f(t,Y_t,Z_t) - f(t,Y_t',Z_t)) & \text{若} Y_t \neq Y_t' \\ 0 & \text{若} Y_t = Y_t' \end{cases}$$

R^d过程β_t定义如下：

$1 \leq i \leq d$，$Z_t^i \in R^d$表示前i个分量取为Z_t'的前i个分量，其他$d-i$个分量取为Z_t相应分量。

$$\beta_t^i = \begin{cases} ((Z_t')^i - Z_t^i)^{-1}(f(t,Y_t,Z_t^i) - f(t,Y_t,Z_t^{i-1})) & \text{若} Z_t^i \neq (Z_t')^i \\ 0 & \text{若} Z_t^i = (Z_t')^i \end{cases}$$

注意到$\{\alpha_t\}, \{\beta_t\} = (\beta_t^1, \cdots, \beta_t^d)$循序可测，且$\alpha_t \leq \mu, |\beta_t| \leq K$，其中$\mu, K$为单调系数和Lipschitz系数。

对$0 \leq s \leq t \leq T$定义

$$\Gamma_{s,t} = \exp\{\int_s^t (\alpha_r - \frac{1}{2}|\beta_r|^2) dr + \int_s^t \langle \beta_r, dB_r \rangle\}$$

记$(\overline{Y},\overline{Z})=(Y'-Y,Z'-Z),\overline{\xi}=\xi'-\xi,u_t=f'(t,Y'_t,Z'_t)-f(t,Y'_t,Z'_t)$，由假设$(\overline{Y},\overline{Z})$满足

$$\overline{Y}_t=\overline{\xi}+\int_t^T(\alpha_s\overline{Y}_s+\langle\beta_s,\overline{Z}_s\rangle)ds+\int_t^T u_s ds-\int_t^T\langle\overline{Z}_s,dB_s\rangle$$

由Itô公式，对$0\leq s\leq t\leq T$

$$\begin{aligned}\overline{Y}_s &= \Gamma_{s,t}\overline{Y}_t+\int_s^t\Gamma_{s,r}u_r dr-\int_s^t\Gamma_{s,r}(\overline{Z}_r+\overline{Y}_r\beta_r)dB_r\\ &= E[\Gamma_{s,t}\overline{Y}_t+\int_s^t\Gamma_{s,r}u_r dr|\mathcal{F}_s]\end{aligned}$$

特别地取$t=T$，由于$\overline{Y}_T=\overline{\xi}\geq 0,u_r\geq 0,\Gamma_{s,t}\geq 0$，因此$\overline{Y}_s\geq 0$即$Y'_s\geq Y_s$a.s.

后两个结论证明略。

注 5.1.9 假定

$$\begin{aligned}Y_t &= \xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds-\int_t^T\langle Z_s,dB_s\rangle\\ Y'_t &= \xi'+\int_t^T V_s ds-\int_t^T\langle Z'_s,dB_s\rangle\end{aligned}$$

若$\xi\leq\xi',f(t,Y_t,Z_t)\leq V_t a.s.$

定义$f'(t,y,z)=f(t,y,z)+V_t-f(t,Y'_t,Z'_t)$，由比较定理有$Y_t\leq Y'_t$。

命题 5.1.10 假定(Y_t,Z_t)是$BSDE(f,\xi)$的解，$\tau\leq T$是停时，若

a）$\xi\in\mathcal{F}_\tau$

b）$\forall t\in(\tau,T]\quad f(t,y,z)=0a.s.$

则在$(\tau,T]$上$Y_t=Y_{t\wedge\tau},Z_t=0$

证明：由于$Y_\tau = \xi - \int_\tau^T Z_s dB_s$，

$$Y_\tau = E[\xi - \int_\tau^T Z_s dB_s|\mathcal{F}_\tau] = E[\xi|\mathcal{F}_\tau] = \xi \quad a.s.$$

同时

$$\begin{aligned}
|Y_\tau|^2 + \int_\tau^T |Z_t|^2 dt &= |\xi|^2 - 2\int_\tau^T \langle Y_s, Z_s dB_s\rangle \\
|Y_\tau|^2 + E[\int_\tau^T |Z_t|^2 dt|\mathcal{F}_\tau] &= |\xi|^2 \\
E[\int_\tau^T |Z_t|^2 dt] &= 0
\end{aligned}$$

即在$(\tau, T]$上$Z_t = 0$a.s.

§5.2 BSDE与PDE

考虑BSDE(f,ξ)，$T<\infty$，把理论限定在Markov框架下，f,ξ可以写成某一SDE的解的“显式”表达形式，$\xi = g(B)$为Borel可测函数，$f(t,y,z)$为Brown泛函。

假设可测函数$b(t,x):[0,T]\times R^d \to R^d, \sigma(t,x):[0,T]\times R^d \to R^{d\times d}$对$x$为一致全局Lipschitz连续，且局部有界。

$X_s^{t,x}$表示如下SDE的解

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})ds + \int_t^s \langle \sigma(r, X_r^{t,x}), dB_r\rangle$$

考虑BSDE

$$Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr - \int_s^T \langle Z_r^{t,x}, dB_r\rangle \quad t\le s\le T$$

其中$g: R^d \to R^k, f:[0,T]\times R^d\times R^k\times R^{k\times d} \to R^k$连续，对于常数$K,\mu,p>0$，满足如下条件：

i）$|g(x)| \leq K(1+|x|^p)$

ii）$|f(t,x,y,z)| \leq K(1+|x|^p+|y|+\|z\|)$

iii）$\langle y-y', f(t,x,y,z)-f(t,x,y',z)\rangle \leq \mu|y-y'|^2$

iv）$|f(t,z,y,z)-f(t,z,y,z')| \leq K\|z-z'\|$

由假设SDE和BSDE的解均存在唯一。

注 5.2.1 *1*）对于$t \leq s \leq T$，$Y_s^{t,x} \in \mathcal{F}_s^t = \sigma(B_r - B_t, t \leq r \leq s)\bigvee \mathcal{N}$，$Y_t^{t,x}$是常数，其中$\mathcal{N}$表示$\mathcal{F}$中所有$P$零测集；

2）根据$BSDE$解的唯一性，有$Y_{t+h}^{t,x} = Y_{t+h}^{t+h, X_{t+h}^{t,x}}$。

$\{X_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$的无穷小算子为$\mathcal{L}_t = \sum\limits_{i=1}^d b_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^\tau)_{ij}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$。考虑如下Cauchy问题：$1 \leq i \leq k$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \mathcal{L}_t u_i + f_i(t,x,u,(\triangledown u\sigma)) & = & 0 \quad (t,x) \in [0,T]\times R^d \\ u(T,x) & = & g(x) \quad x \in R^d \end{array}\right.$$

其中$u = (u_1, \cdots, u_k)^\tau$。

定理 5.2.2 假设$u(t,x) \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times R^d)$是上述$PDE$的经典解，并对常数$C, q>0$有

$$|\triangledown_x u(t,x)| \leq C(1+|x|^q)$$

则对$\forall\,(t,x) \in [0,T]\times R^d$，$\{Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x}), \triangledown u(s, X_s^{t,x})\sigma\}$是$BSDE$的解。

证明： 对$Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$应用Itô公式，考虑$u$满足的条件有

$$E\int_t^T \|\triangledown_x u(s, X_s^{t,x}\sigma\|^2 ds < \infty$$

定义 5.2.3 (粘性解) a）$u(t,x)\in\mathcal{C}([0,T]\times R^d)$，如果$\forall x\in R^d, u(T,x)\le g(x)$，且对$1\le i\le k,\varphi\in\mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times R^d)$及$u_i-\varphi$的局部极大值$(t,x)$有

$$-\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)-\mathcal{L}_t\varphi(t,x)-f_i(t,x,u(t,x),(\bigtriangledown\varphi\sigma)(t,x))\le 0$$

则称$u(t,x)$为PDE的粘性下解。

b）$u(t,x)\in\mathcal{C}([0,T]\times R^d)$，如果$\forall x\in R^d, u(T,x)\ge g(x)$，且对$1\le i\le k,\varphi\in\mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times R^d)$及$u_i-\varphi$的局部极小值$(t,x)$有

$$-\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)-\mathcal{L}_t\varphi(t,x)-f_i(t,x,u(t,x),(\bigtriangledown\varphi\sigma)(t,x))\ge 0$$

则称$u(t,x)$为PDE的粘性上解。

c）若$u(t,x)$既为上解，又是下解，则称为PDE的粘性解。

定理 5.2.4 在上述的前提条件下，$Y_t^{t,x}=u(t,x)$关于(t,x)连续，具有多项式增长，且为PDE的粘性解。

证明: $Y_s^{t,x}$关于(t,x)的连续性可由$X_s^{t,x}$关于(t,x)的连续性和g,f的连续性得到；而多项式增长可由$X_s^{t,x}$的矩估计和f,g满足的条件得到；

以下证明$u(t,x)$为PDE的粘性解：

取$1\le i\le k,\varphi\in\mathcal{C}^{1,2},u_i-\varphi$在$(t,x)$达到局部极大，不失一般性$u_i(t,x)=\varphi(t,x)$

应用反证法，假设

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)+\mathcal{L}_t\varphi(t,x)+f_i(t,x,u(t,x),(\bigtriangledown\varphi\sigma)(t,x))<0$$

取$0<\alpha<T-t$，使得对所有$t\le s\le t+\alpha, |y-x|\le\alpha$有

$$\begin{aligned} u_i(s,y) &\le \varphi(s,y) \\ \frac{\partial}{\partial t}\varphi(s,y)+\mathcal{L}_t\varphi(s,y) &+ f_i(s,y,u(s,y),(\bigtriangledown\varphi\sigma)(s,y))<0 \end{aligned}$$

定义$\tau=\inf\{s>t,|X_s^{t,x}-x|\ge\alpha\}\bigwedge(t+\alpha)$，$(\overline{Y}_s,\overline{Z}_s)=((Y_{s\wedge\tau}^{t,x})^i, I_{[0,\tau]}(s)(Z_s^{t,x})^i)$

那么易见$(\overline{Y}_s,\overline{Z}_s)$是一维BSDE

$$\overline{Y}_s=u_i(\tau,X_\tau^{t,x})+\int_s^{t+\alpha}I_{[0,\tau]}(r)f_i(r,X_r^{t,x},u(r,X_r^{t,x}),\overline{Z}_r)dr-\int_s^{t+\alpha}\langle\overline{Z}_r,dB_r\rangle$$

的解。

由Itô公式，$(\widehat{Y}_s,\widehat{Z}_s)=(\varphi(s,X_s^{t,x}),(\bigtriangledown_x\varphi\sigma)(s,X_s^{t,x}))$满足

$$\widehat{Y}_s=\varphi(\tau,X_\tau^{t,x})+\int_s^{t+\alpha}I_{[0,\tau]}(r)[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathcal{L}_t\varphi](r,X_r^{t,x})dr-\int_s^{t+\alpha}\langle\widehat{Z}_r,dB_r\rangle$$

注意到$u_i(\tau,X_\tau^{t,x})\le\varphi(\tau,X_\tau^{t,x})$，$\tau,\alpha$的选取和比较定理，应有$\overline{Y}_0<\widehat{Y}_0$即$u_i(t,x)<\varphi(t,x)$。

这与$u_i(t,x)=\varphi(t,x)$矛盾，因此假设不成立，即u为粘性下解。

进一步，可以证明其为粘性上解。

§5.3 随机终端时间的BSDE

定义 5.3.1 (随机终端时间的BSDE) 考虑

$$\left\{\begin{array}{lcl} Y_t &=& Y_T+\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau}f(s,Y_s,Z_s)ds-\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau}Z_sdB_s \quad t\le T \\ Y_t &=& \xi \quad \{\tau\le t\} \end{array}\right.$$

a）终端时间τ为$\mathcal{F}_t$停时;

b）终端条件$\xi\in\mathcal{F}_\tau$,$Ee^{\lambda\tau}|\xi|^2<\infty$（即在$\{\tau=\infty\}$上$\xi=0$），且

$E\int_0^\tau e^{\lambda t}|f(t,\xi_t,\eta_t|^2dt<\infty$其中$\xi_t=E[\xi|\mathcal{F}_t],\xi=E\xi+\int_0^\infty \eta_s dB_s$;

c）$f:\Omega\times R\times R^k\times R^{k\times d}\to R^k$满足以下条件，其中$\overline{f}_t$是某个$R^+$循序可测过程，$\mu,\lambda,K,K'$是常数，$K,K'>0$，$2\mu+K^2<\lambda$:

i）$\forall y,z\quad f(\cdot,y,z)$是循序可测的;

ii）$\forall t,y,z,z'\quad |f(t,y,z)-f(t,y,z')|\le K\|z-z'\|$，其中$\|z\|=|tr(zz^\tau)|^{1/2}$;

iii）$\forall t,y,y',z\quad \langle y-y',f(t,y,z)-f(t,y',z)\rangle\le\mu\|y-y'\|^2$;

iv）$\forall y,z\quad |f(t,y,z)|\le\overline{f}_t+K'(\|y\|+\|z\|)a.s.$;

v）$E[\int_0^\tau e^{\lambda t}|\overline{f}_t|^2dt]<\infty$;

vi）$\forall t,z\quad y\to f(t,y,z)$连续;

称方程为随机终端时间的$BSDE$（τ,ξ,f）。

定义 5.3.2 (方程的解) $BSDE$（τ,ξ,f）的解(Y_t,Z_t)是$R^k\times R^{k\times d}$上的一对过程，满足:

j）$t>\tau,Z_t=0$，且$E\int_0^\tau e^{\lambda t}\|Z_t\|^2dt<\infty$

jj）$Y_t=Y_T+\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau}f(s,Y_s,Z_s)ds-\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau}Z_sdB_s\quad t\le T$

jjj）在$\{\tau\le t\}$上$Y_t=\xi$。

注 5.3.3 直觉上应该有$Y_t=Y_T+\int_{t\wedge\tau}^{\tau}f(s,Y_s,Z_s)ds-\int_{t\wedge\tau}^{\tau}Z_sdB_s$，但当$\{\tau=+\infty\}$时就出现了问题。

定理 5.3.4 在上述的所有条件下，$BSDE(\tau,\xi,f)$存在唯一解(Y,Z)，且

$$E[\sup_{0\le t\le T} e^{\lambda t}|Y_t|^2+\int_0^{\tau} e^{\lambda t}(|Y_t|^2+\|Z_t\|^2)dt]\le CE[e^{\lambda\tau}|\xi|^2+\int_0^{\tau} e^{\lambda t}|f(t,\xi_t,\eta_t)|^2dt]$$

证明：唯一性

假设$(Y,Z),(Y',Z')$均为BSDE(τ,ξ,f)的解，并记$(\widehat{Y},\widehat{Z})=(Y-Y',Z-Z')$，对$e^{\lambda t}|\widehat{Y}_t|^2$应用Itô公式有

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda(t\wedge\tau)}|\widehat{Y}_{t\wedge\tau}|^2+\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s}(|\widehat{Y}_s|^2+\|\widehat{Z}_s\|^2)ds\\
\le\ & e^{\lambda(t\wedge\tau)}|Y_{t\wedge\tau}|^2+2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s}[\mu|\widehat{Y}_s|^2+K|\widehat{Y}_s|\|Z_s\|]ds\\
-\ & 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s}\langle\widehat{Y}_s,\widehat{Z}_s dB_s\rangle
\end{aligned}$$

注意到$2K|\widehat{Y}_s|\|Z_s\|\le K^2|\widehat{Y}_s|^2+\|Z_s\|^2$,$\lambda>2\mu+K^2$，对$t<T$两端取期望有

$$Ee^{\lambda(t\wedge\tau)}|\widehat{Y}_{t\wedge\tau}|^2\le Ee^{\lambda(T\wedge\tau)}|Y_{T\wedge\tau}|^2$$

同样的讨论知道，上述不等式对于$2\mu+K^2<\lambda'<\lambda$均成立，故

$$Ee^{\lambda'(t\wedge\tau)}|\widehat{Y}_{t\wedge\tau}|^2\le e^{(\lambda'-\lambda)T}E[e^{\lambda(T\wedge\tau)}|Y_{T\wedge\tau}|^2]$$

令$T\to\infty$有$Ee^{\lambda'(t\wedge\tau)}|\widehat{Y}_{t\wedge\tau}|^2=0$，那么$\widehat{Y}=0$a.s.

存在性：由压缩映射原理可得。

(Y_t^n,Z_t^n)是BSDE

$$Y_t^n=\xi+\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} f(s,Y_s^n,Z_s^n)ds-\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} Z_s^n dB_s$$

的解。

$$\begin{cases} Y_t^n &= E[\xi|\mathcal{F}_n] + \int_t^n I_{[o,\tau)}(s) f(s, Y_s^n, Z_s^n) ds - \int_t^n Z_s^n dB_s \quad t \le n \\ Y_t^n &= E[\xi|\mathcal{F}_t], Z_t^n = \eta_t \quad t > n \end{cases}$$

对(Y_t^n, Z_t^n)进行先验估计

注意到对$\forall \varepsilon > 0, \rho < 1, C = \varepsilon^{-1}$有

$$2\langle y, f(t, y, z)\rangle \le (2\mu + \rho^{-1}K^2 + \varepsilon)|y|^2 + \rho\|z\|^2 + C|f(t, 0, 0)|^2$$

对$e^{\lambda t}|Y_t^n|^2$运用Itô公式有

$$\begin{aligned} & e^{\lambda(t\wedge\tau)}|Y_{t\wedge\tau}^n|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda s}(\overline{\lambda}|Y_s^n|^2 + \overline{\rho}\|Z_s^n\|^2) ds \\ \le \quad & e^{\lambda\tau}|\xi|^2 + C\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda s}|f(s, 0, 0)|^2 ds - 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda s}\langle Y_s^n, Z_s^n dB_s\rangle \end{aligned}$$

其中$\overline{\lambda} = \lambda - 2\mu - \rho^{-1}K^2 - \varepsilon > 0, \overline{\rho} = 1 - \rho > 0$。

由D-B-G不等式有

$$\begin{aligned} & E\sup_{t\ge s} e^{\lambda(t\wedge\tau)}|Y_{t\wedge\tau}^n|^2 + E\int_{s\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda r}(|Y_r^n|^2 + \|Z_r^n\|^2) dr \\ \le \quad & Ee^{\lambda\tau}|\xi|^2 + CE\int_{s\wedge\tau}^{\tau} |f(r, 0, 0)|^2 dr \end{aligned}$$

对于$m > t \ge n$，记$\triangle Y_t = Y_t^m - Y_t^n, \triangle Z_t = Z_t^m - Z_t^n$有

$$\begin{aligned} & e^{\lambda t}|\triangle Y_t|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\lambda s}(\lambda|\triangle Y_s|^2 + \|\triangle Z_s\|^2) ds \\ = \quad & 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\lambda s}\langle\triangle Y_s, f(s, Y_s^m, Z_s^m)\rangle ds - 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\lambda s}\langle\triangle Y_s, \triangle Z_s dB_s\rangle \\ \le \quad & 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\lambda s}(\mu|\triangle Y_s|^2 + K|\triangle Y_s|\|\triangle Z_s\|) ds \\ + \quad & 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\lambda s}|\triangle Y_s||f(s, \xi_s, \eta_s)| ds - 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\lambda s}\langle\triangle Y_s, \triangle Z_s dB_s\rangle \end{aligned}$$

当$n\to\infty$，有

$$\begin{aligned} & E\sup_{n\le t\le m} e^{\lambda t}|\triangle Y_t|^2+E\int_{n\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\lambda s}(|\triangle Y_s|^2+\|\triangle Z_s\|^2)ds \\ \le\ & CE\int_{n\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda s}|f(s,\xi_s,\eta_s)|^2 ds \\ \to\ & 0 \quad a.s. \end{aligned}$$

对于$t\le n$有

$$\triangle Y_t=\triangle Y_n+\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau}(f(s,Y_s^m,Z_s^m)-f(s,Y_s^n,Z_s^n))ds-\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau}\triangle Z_s dB_s$$

利用唯一性证明中的讨论手法有

$$\begin{aligned} E(e^{\lambda(\tau\wedge t)}|\triangle Y_t|^2) &\le E[e^{\lambda(\tau\wedge n)}|\triangle Y_n|^2] \\ &\le CE\int_{\tau\wedge n}^{\tau} e^{\lambda s}|f(s,\xi_s,\eta_s)|^2 ds \\ &\to 0 \quad a.s. \quad n\to\infty \end{aligned}$$

$\{Y_t^n,Z_t^n\}$是在范数$\|(Y,Z)\|=(E\int_0^\tau e^{\lambda t}(|Y_s|^2+\|Z_s\|^2)ds)^{1/2}$下的Cauchy列，$(Y,Z)$记为其极限，为BSDE$(\tau,\xi,f)$的解。因此估计不等式成立。

§5.4 BSDE和半线性椭圆PDE

X_t^x表示如下SDE的解

$$X_t^x=x+\int_0^t b(X_s^x)ds+\int_0^t\sigma(X_s^x)dB_s$$

其中$b:R^d\to R^d,\sigma:R^d\to R^{d\times d}$满足全局Lipschitz连续。

考虑BSDE

$$Y_t^x=Y_T^x+\int_t^T f(X_s^x,Y_s^x,Z_s^x)ds-\int_t^T Z_s^x dB_s$$

其中$f(x,y,z)$满足如下条件：

i）$|f(x,y,z)|\le K'(1+|x|^p+|y|+|z|)\quad K',p>0$的常数；

ii）$\langle y-y',f(x,y,z)-f(x,y',z)\rangle\le\mu|y-y'|^2\quad \mu>0$的常数；

iii）$|f(x,y,z)-f(x,y,z')|\le K\|z-z'\|\quad \|z\|=|tr(zz^\tau)|^{1/2}$；

进一步假定，对$\lambda>2\mu+K^2$及所有$x\in R^d$有

$$E\int_0^\infty e^{\lambda t}|f(X_t^x,0,0)|^2dt<\infty$$

由BSDE解的存在唯一性有$Y_t^x=Y_0^{X_t^x}(t>0)$。

X_t^x的无穷小算子为$\mathcal{L}=\sum\limits_{i=1}^d b_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^d(\sigma\sigma^\tau)_{ij}(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$，研究方程

$$\mathcal{L}u_i(x)+f_i(x,u(x),(\bigtriangledown u\sigma)(x))=0\quad x\in R^d,1\le i\le k$$

的分析方法。

定理 5.4.1 若$u\in\mathcal{C}^2$是椭圆*PDE*的一个经典解，并使得

$$E\int_0^\infty e^{\lambda t}|(\bigtriangledown u\sigma)(X_t^x)|^2dt<\infty$$

则对于$\forall x\in R^d$，$\{u(X_t^x),(\bigtriangledown u\sigma)(X_t^x)\}_{t\ge0}$是上述*BSDE*的解。$u(x)=Y_0^x$。

下面从相反的方向进行讨论，目标是给出PDE的某种解。

定义 5.4.2 (粘性解) a）$u(x)\in\mathcal{C}(R^d,R^k)$，如果对$1\le i\le k,\varphi\in\mathcal{C}^2(R^d,R^k)$及$u_i-\varphi$的局部极大值$x$有

$$-\mathcal{L}\varphi(x)-f_i(x,u(x),(\bigtriangledown\varphi\sigma)(x))\ge 0$$

则称$u(x)$为PDE的粘性下解。

b）$u(x)\in\mathcal{C}(R^d,R^k)$，如果对$1\le i\le k,\varphi\in\mathcal{C}^2(R^d,R^k)$及$u_i-\varphi$的局部极小值$x$有

$$-\mathcal{L}\varphi(x)-f_i(x,u(x),(\bigtriangledown\varphi\sigma)(x))\le 0$$

则称$u(x)$为PDE的粘性上解。

c）若$u(x)$既为上解，又是下解，则称为PDE的粘性解。

定理 5.4.3 在以上的假定条件下，$u(x)=Y_0^x$是连续函数，并对任何$\lambda>2\mu+K^2$满足$|Y_0^x|\le C\sqrt{E\int_0^\infty e^{\lambda t}|f(X_t^x,0,0)|^2dt}$，同时其也是椭圆$PDE$的粘性解。

证明：连续性来自$\{Y_t^x\}$关于x的均方连续性；

下证其为粘性下解

取$1\le i\le k,\varphi\in\mathcal{C}^2,u_i-\varphi$在$x$达到局部极大，不失一般性$u_i(x)=\varphi(x)$

应用反证法，假设

$$\mathcal{L}\varphi(x)+f_i(x,u(x),(\bigtriangledown\varphi\sigma)(x))<0$$

取$0<\alpha$，使得对所有$|y-x|\le\alpha$有

$$\begin{aligned} u_i(y) &\le \varphi(y) \\ \mathcal{L}\varphi(y) &+ f_i(y,u(y),(\bigtriangledown\varphi\sigma)(y))<0 \end{aligned}$$

对于$T>0$，定义$\tau=\inf\{t,|X_t^x-x|\geq\alpha\}\bigwedge T$，$(\overline{Y}_t,\overline{Z}_t)=\{(Y_{t\wedge\tau}^x)^i,I_{[0,\tau)}(t)(Z_t^x)^i)$

可以验证$(\overline{Y}_s,\overline{Z}_s)$满足

$$\overline{Y}_t=u_i(X_\tau^x)+\int_t^T I_{[0,\tau)}(s)f_i(X_s^x,u(X_s^x),\overline{Z}_s)ds-\int_t^T\langle\overline{Z}_s,dB_s\rangle\quad 0\leq t\leq T$$

由Itô公式，$(\widehat{Y}_t,\widehat{Z}_t)=(\varphi(X_{t\wedge\tau}^x),I_{[0,\tau)}(t)(\bigtriangledown\varphi\sigma)(X_t^x))$满足

$$\widehat{Y}_t=\varphi(X_\tau^x)+\int_t^T I_{[0,\tau)}(s)\mathcal{L}\varphi(X_s^x)ds-\int_t^T\langle\widehat{Z}_s,dB_s\rangle$$

注意到$u_i(X_{t\wedge\tau}^x)\ \leq\ \varphi(X_{t\wedge\tau}^x)$，及$\tau,\alpha$的定义和比较定理，应有$\overline{Y}_t\ <\ \widehat{Y}_t$，即$u_i(x)\ <\ \varphi(x)$。

这与$u_i(x)=\varphi(x)$矛盾，因此假设不成立，u为粘性下解。

进一步，可以证明其为粘性上解。

G是R^d中的有界开集，$\partial G\in\mathcal{C}^2$，对$\forall\,x\in\overline{G}=G\cup\partial G$，定义$\tau_x=\inf\{t>0,X_t^x\overline{\in}\overline{G}\}$。假定$\forall\,x\in\overline{G},P(\tau_x<\infty)=1,\Gamma=\{x,x\in\partial G,P(\tau_x>0)=0\}$为闭集。对于$\lambda>2\mu+K^2,\forall\,x\in\overline{G},Ee^{\lambda\tau_x}<\infty$

$(Y_t^x,Z_t^x)_{0\leq t\leq\tau_x}$是$Y_t^x=g(X_{\tau_x}^x)+\int_{t\wedge\tau}^\tau f(X_s^x,Y_s^x,Z_s^x)ds-\int_{t\wedge\tau}^\tau Z_s^x dB_s$的解，其中$g\in\mathcal{C}(R^d)$。

命题 5.4.4 在有关Γ的假设条件下，若$x\to\tau_x$在$\overline{G}$上$a.s.$连续，则$u(x)=Y_0^x$连续。

考虑椭圆方程的Dirichlet问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + f(x, u, (\bigtriangledown u\sigma)(x)) &= 0 \quad x \in G \\ u(x) &= g(x) \quad x \in \partial G \end{cases}$$

其中算子$\mathcal{L} = \sum\limits_{i=1}^{d} b_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{d}(\sigma\sigma^\tau)_{ij}(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$为$X_t$的无穷小算子。

若X_t满足$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$，$Y_{t\wedge\tau}$满足

$$Y_{t\wedge\tau} = g(X_\tau) + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(X_s, Y_{s\wedge\tau}, Z_{s\wedge\tau})ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_{s\wedge\tau}dB_s$$

其中$\tau = \inf\{t \geq 0, X_t \overline{\in} G\}$，则$u(x) = Y_0(x)$是Dirichlet问题的粘性解。

$B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^d)$是$d$维标准Brown运动，$P_t = (P_t^1, \cdots, P_t^{k-1})$是$k-1$维标准Poisson过程。

B_t与P_t独立，$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, P_s, s \leq t) = \mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{F}_t^P$，$M_t = (M_t^1, \cdots, M_t^{k-1}) = (P_t^1 - t, \cdots, P_t^{k-1} - t)$是补偿Poisson鞅。

(N_t^i, X_t^i)定义如下：

$$\begin{aligned} N_t^i &= \begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} \sum_{l=1}^{k-1} l P_t^l \\ X_t^{i,x} &= x + \int_0^t b_{N_s^i}(X_s^{i,x})ds + \int_0^t \sigma_{N_s^i}(X_s^{i,x})dB_s \end{aligned}$$

其中表示

对$1 \leq i \leq k$，f_i满足以前的常规条件；进一步，对$\lambda > 2\mu + K^2, 1 \leq i \leq k, x \in R^d$有$E\int_0^\infty e^{\lambda t}|f_{N_t^i}(X^{i,x}, 0, 0)|^2 dt < \infty$。

命题 5.4.5 在上述条件下，方程

$$Y_t^{i,x} = Y_T^{i,x} + \int_t^T f_{N_s^i}(X_s^{i,x}, Y_s^{i,x}, Z_s^{i,x}, V_s^{i,x})ds - \int_t^T Z_s^{i,x} dB_s - \int_t^T V_s^{i,x} dP_s$$

存在唯一解$(Y^{i,x}, Z^{i,x}, V^{i,x})$且$E\int_0^\infty e^{\lambda t}(\|Z_t^{i,x}\|^2 + \|V_t^{i,x}\|^2)dt < \infty$