Cálculo Integral En Una Variable

José Juan Hernández Cervantes

Julio-Diciembre 2017

Chapter 1

Propiedades de los Números Reales

1.1 Axioma Del Supremo.

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.
Definición: Supremo.
Sea $A \supseteq \mathbb{R}$ ($A \neq \varnothing$) un conjunto acotado superiormente. Diremos que $\bar{x}$ es el supremo de A (y lo denotamos por $SupA$) si cumple:

1. $\bar{x}$ es cota superior de A.

2. Si z es cota superior de A, ocurre $\bar{x} \leq z$.

Teorema: Unicidad del supremo.
Si $\bar{x}$ es el supremo de A, $\bar{x}$ es único.
Demostración
Supongamos $\bar{x}$ y $\bar{y}$ supremos de A. Entonces, por definición de supremo ocurre:
$\bar{x} \leq \bar{y} \wedge \bar{y} \leq \bar{x}$
$\therefore \bar{x} = \bar{y}$
Q.E.D

1.2 Propiedad Arquimedeana.

Para todo par de números $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.
Demostración: por reducción a lo absurdo.
Supongamos $\forall$ $n \in \mathbb{N}, nx \leq y$. Si $y \leq 0$ entonces $x \leq 0$, contradicción con la hipótesis $x > 0$. Si $y > 0$, sea $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. Trivialmente $A \subseteq \mathbb{R}$ y $A \neq \varnothing$ pues $x \in A$, además A está acotado superiormente por y. Invocando el axioma del supremo, existe $\bar{x} = SupA$. Como $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow \bar{x} - x < \bar{x}$. Con lo que $\bar{x} - x$ no es cota superior de A. Entonces existe a tal que $\bar{x} - x < a$.

Esto es, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{x} - x < xn = a$. Equivalentemente $\bar{x} < (n+1)x$. Como $(n+1)x \in A$, llegamos a una contradicción con la definicion de supremo.
$\therefore\ \exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y\ \forall\ x > 0, y \in \mathbb{R}$.
Q.E.D

1.3 Principio Del Buen Orden.

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene elemento mínimo.
$\forall A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \varnothing,\ \exists\ a_0 : a_0 \leq a\ \forall a \in A$.

1.4 Principio De Inducción Matemática Fuerte.

Si $A = \{P(j) : j \in \mathbb{N}\}$ es una colección de enunciados con las siguientes propiedades:

1. *P(1)* es verdadero.

2. *P(n+1)* es verdadero siempre que *P(n),P(n-1),...,P(2),P(1)* sean verdaderos.

Entonces *P(j)* es verdadero $\forall j \in \mathbb{N}$

1.4.1 El principio de inducción matemática fuerte implica el principio de buen orden.

Demostración: por reducción a lo absurdo.
Supongamos que existe $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$, tal que no existe $a_0 \in A \quad con \quad a_0 \leq a\ \forall\ a \in A$. Sea $B = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}$. Entonces $1 \notin A$, pues $1 \leq n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $1 \in B$ $(B \neq \varnothing)$. Supongamos $k \in B$, entonces *1,2,...,k-1,k* $\notin A$. Luego $k+1 \notin A$, de lo contrario *k+1* sería el elemento más pequeño de A. Por el Principio De Inducción Matemática Fuerte tenemos $B = \mathbb{N}$, como $A \subseteq \mathbb{N} = B$ ocurre $A = \varnothing$. Contradicción con la hipótesis.
$\therefore\ \forall\ A \subseteq \mathbb{N}\ y\ A \neq \varnothing\ \exists\ a_0 : a_0 \leq a\ \forall\ a \in A$.
Q.E.D

1.4.2 El principio de buen orden implica el principio de inducción matemática fuerte.

Demostración: por reducción a lo absurdo.
Supongamos $P = \{P(n)/n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de propiedades tales que:

1. *P(1)* es verdadero.

2. Siempre que para un $K \in \mathbb{N}, P(K)$ es verdadero, entonces *P(K+1)* es verdadero.

Supongamos falso que *P(n)* es verdadero $\forall\ n \in \mathbb{N}$.*(*)*
Entonces existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que *P(r)* es falso.
Sea $A = \{K \in \mathbb{N} : P(K)$ es falso $\}$ luego $A \subseteq \mathbb{N}\ y\ A \neq \varnothing$, ya que $r \in A$.
Por el principio del buen orden, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 \leq k\ \forall\ k \in A$.
Observemos que $k_0 > 1$, pues por hipótesis *P(1)* es verdadero, entonces $k_0 - 1 \in \mathbb{N}\ y\ k_0 - 1 < k_0$ luego $k_0 - 1 \notin A$.
Entonces $P(k_0 - 1)$ es cierto,luego,por hipótesis, $P(k_0)$ es verdadero.Contradicción, pues $k_0 \in A$.
Llegamos a una contradicción al suponer falso *(*)*.

1.5 Teorema Del Binomio De Newton.

Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R} \wedge \forall\ n \in \mathbb{N}$ se tiene: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Demostración: Por inducción sobre n.
$P(0) : (a+b)^0 = 1$.
Por otro lado, $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.
$\therefore$ *P(0)* es verdadero.
Supongamos *P(r)* verdadero, es decir $(a+b)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a^k b^{r-k}$. Por demostrar *P(r+1)* verdadero.
$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k\ (a+b) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a^k b^{r-k}\ (a+b)$