Cálculo Integral En Una Variable

José Juan Hernández Cervantes

Julio-Diciembre 2017

Chapter 1

Propiedades de los Números Reales

1.1 Axioma Del Supremo

Todo subconjunto no vacío de R acotado superiormente tiene supremo.

Definición : Supremo

Sea $A \supseteq \mathbb{R}$ y $A \neq \varnothing$ acotado superiormente.

Diremos que $\bar{x}$ es el supremo de A si cumple:

1.- $\bar{x}$ es cota superior de A

2.- Si z es cota superior de A, ocurre $\bar{x} \leq z$

Teorema : Unicidad del supremo.

Si $\bar{x}$ es el supremo de A, $\bar{x}$ es único.

Demostración

Supongamos $\bar{x}$ y $\bar{y}$ supremos de A. Entonces, por definición de supremo ocurre:

$\bar{x} \leq \bar{y} \wedge \bar{y} \leq \bar{x}$

$\therefore \bar{x} = \bar{y}$

Q.E.D

1.2 Propiedad Arquimedeana.

Para todo par de números $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$

Demostración : por reducción a lo absurdo

Supongamos $\forall n \in \mathbb{N}, nx \leq y$.

Si $y \leq 0$ entonces $x \leq 0$, contradicción con la hipótesis $x > 0$.

Si $y > 0$ sea $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$.

Trivialmente $A \subseteq \mathbb{R}$ y $A \neq \varnothing$pues$x \in A$,además A está acotado superiormente por y.

Invocando el axioma del supremo, existe $\bar{x} = SupA$.

Como $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow \bar{x} - x < \bar{x}$.

Con lo que $\bar{x}-x$ no es cota superior de A. Entonces existe a tal que $\bar{x}-x < a$.

Esto es $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{x} - x < xn = a$. Equivalentemente $\bar{x} < (n+1)x$.

Como $(n+1)x \in A$, llegamos a una contradicción con la definicion de supremo.

$\therefore \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y \ \forall x > 0, y \in \mathbb{R}$

1.3 Principio Del Buen Orden

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene elemento más pequeño.

$\forall A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $\exists a_0 : a_0 \leq a \ \forall a \in A$.

1.4 Principio De Inducción Matemática Fuerte

Si $A := \{P(j) : j \in \mathbb{N}\}$ es una colección de enunciados con las siguientes propiedades:

1.-$P(1)$ es verdadero.

2.-*P(n+1)* es verdadero siempre que *P(n),P(n-1),...,P(2),P(1)* sean verdaderos.

Entonces *P(j)* es verdadero $\forall j \in \mathbb{N}$

1.4.1 El principio de inducción matemática fuerte implica el Principio de Buen Orden

Demostración : por reducción a lo absurdo

Supongamos que existe $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$