

Cálculo Integral En Una Variable

José Juan Hernández Cervantes

Julio-Diciembre 2017

Chapter 1

Propiedades de los Números Reales

1.1 Axioma Del Supremo.

Todo subconjunto no vacío de \mathbb{R} acotado superiormente tiene supremo.

Definición: Supremo.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ ($A \neq \emptyset$) un conjunto acotado superiormente. Diremos que \bar{x} es el supremo de A (y lo denotamos por $\text{Sup}A$) si cumple:

1. \bar{x} es cota superior de A .
2. Si z es cota superior de A , ocurre $\bar{x} \leq z$.

Teorema: Unicidad del supremo.

Si \bar{x} es el supremo de A , \bar{x} es único.

Demostración

Supongamos \bar{x} y \bar{y} supremos de A . Entonces, por definición de supremo ocurre:

$$\bar{x} \leq \bar{y} \wedge \bar{y} \leq \bar{x}$$

$$\therefore \bar{x} = \bar{y}$$

Q.E.D

1.2 Propiedad Arquimedean.

Para todo par de números $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

Demostración: por reducción a lo absurdo.

Supongamos $\forall n \in \mathbb{N}, nx \leq y$. Si $y \leq 0$ entonces $x \leq 0$, contradicción con la hipótesis $x > 0$. Si $y > 0$, sea $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. Trivialmente $A \subseteq \mathbb{R}$ y $A \neq \emptyset$ pues $x \in A$, además A está acotado superiormente por y . Invocando el axioma del supremo, existe $\bar{x} = \text{Sup}A$. Como $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow \bar{x} - x < \bar{x}$. Con lo que $\bar{x} - x$ no es cota superior de A . Entonces existe a tal que $\bar{x} - x < a$.

Esto es $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{x} - x < xn = a$. Equivalentemente $\bar{x} < (n+1)x$. Como $(n+1)x \in A$, llegamos a una contradicción con la definición de supremo.
 $\therefore \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y \ \forall x > 0, y \in \mathbb{R}$.
Q.E.D

1.3 Principio Del Buen Orden.

Todo subconjunto no vacío de \mathbb{N} tiene elemento más pequeño.
 $\forall A \subseteq \mathbb{N}, A \neq \emptyset, \exists a_0 : a_0 \leq a \ \forall a \in A$.

1.4 Principio De Inducción Matemática Fuerte.

Si $A = \{P(j) : j \in \mathbb{N}\}$ es una colección de enunciados con las siguientes propiedades:

1. $P(1)$ es verdadero.
2. $P(n+1)$ es verdadero siempre que $P(n), P(n-1), \dots, P(2), P(1)$ sean verdaderos.

Entonces $P(j)$ es verdadero $\forall j \in \mathbb{N}$

1.4.1 El principio de inducción matemática fuerte implica el principio de buen orden.

Demostración: por reducción a lo absurdo.

Supongamos que existe $A \subseteq \mathbb{N}, A \neq \emptyset$ tal que no existe $a_0 \in A$ con $a_0 \leq a \ \forall a \in A$. Sea $B = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}$. Entonces $1 \notin A$, pues $1 \leq n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $1 \in B$ ($B \neq \emptyset$). Supongamos $k \in B$, entonces $1, 2, \dots, k-1, k \notin A$. Luego $k+1 \notin A$, de lo contrario $k+1$ sería el elemento más pequeño de A . Por el Principio De Inducción Matemática Fuerte tenemos $B = \mathbb{N}$, como $A \subseteq \mathbb{N} = B$ ocurre $A = \emptyset$. Contradicción con la hipótesis.
 $\therefore \forall A \subseteq \mathbb{N}$ y $A \neq \emptyset \exists a_0 : a_0 \leq a \ \forall a \in A$.
Q.E.D

1.4.2 El principio de buen orden implica el principio de inducción matemática fuerte.

Demostración pendiente.

1.5 Teorema Del Binomio De Newton.

$\forall a, b \in \mathbb{R} \wedge \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Demostración: Por inducción sobre n.

$P(0) : (a+b)^0 = 1$ por otro lado $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$
 $\therefore P(0)$ es verdadero.

Supongamos $P(r)$ verdadero, es decir $(a+b)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} a^k b^{r-k}$. Por demostrar $P(r+1)$.

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} a^k b^{r-k} (a+b)$$