1

s

Cálculo Integral En Una Variable

José Juan Hernández Cervantes

Julio-Diciembre 2017

Chapter 1

Propiedades de los Números Reales

1.1 Axioma Del Supremo

Todo subconjunto no vacío de R acotado superiormente tiene supremo.
Definición : Supremo
Sea $A \supseteq \mathbb{R}$ y $A \neq \varnothing$ acotado superiormente. Diremos que $\bar{x}$ es el supremo de A si cumple:
1.- $\bar{x}$ es cota superior de A
2.- Si z es cota superior de A, ocurre $\bar{x} \leq z$
Teorema : Unicidad del supremo.
Si $\bar{x}$ es el supremo de A, $\bar{x}$ es único.
Demostración
Supongamos $\bar{x}$ y $\bar{y}$ supremos de A. Entonces, por definición de supremo ocurre:
$\bar{x} \leq \bar{y} \wedge \bar{y} \leq \bar{x} \therefore \bar{x} = \bar{y}$ *Q.E.D*

1.2 Propiedad Arquimedeana.

Para todo par de números $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$
Demostración : por reducción a lo absurdo
Supongamos $\forall n \in \mathbb{N}, nx \leq y$. Si $y \leq 0$ entonces $x \leq 0$, contradicción con la hipótesis $x > 0$. Si $y > 0$ sea $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. Trivialmente $A \subseteq \mathbb{R}$ y $A \neq \varnothing$pues$x \in A$,además A está acotado superiormente por y. Invocando el axioma del supremo, existe $\bar{x} = SupA$. Como $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow \bar{x} - x < \bar{x}$. Con lo que $\bar{x} - x$ no es cota superior de A. Entonces existe a tal que $\bar{x} - x < a$. Esto es $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{x} - x < xn = a$. Equivalentemente $\bar{x} < (n+1)x$. Como $(n+1)x \in A$, llegamos a una contradicción con la definicion de supremo.
$\therefore \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$ $\forall x > 0, y \in \mathbb{R}$.

1.3 Principio Del Buen Orden

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene elemento más pequeño. $\forall A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $\exists a_0 : a_0 \leq a \ \forall a \in A$.

1.4 Principio De Inducción Matemática Fuerte

Si $A := \{P(j) : j \in \mathbb{N}\}$ es una colección de enunciados con las siguientes propiedades:
1.-$P(1)$ es verdadero.
2.-*P(n+1)* es verdadero siempre que *P(n),P(n-1),...,P(2),P(1)* sean verdaderos.
Entonces *P(j)* es verdadero $\forall j \in \mathbb{N}$

1.4.1 El principio de inducción matemática fuerte implica el principio de buen orden

Demostración : por reducción a lo absurdo
Supongamos que existe $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$ tal que no existe $a_0 \in A$ con $a_0 \leq a$ $\forall a \in A$ Sea $B = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}$. Entonces $1 \notin A$, pues $1 \leq n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $1 \in B$ $(B \neq \varnothing)$. Supongamos $k \in B$, entonces *1,2,...,k-1,k* $\notin A$. Luego $k+1 \notin A$, de lo contrario *k+1* sería el elemento más pequeño de A. Por el Principio De Inducción Matemática Fuerte tenemos $B = \mathbb{N}$, como $A \subseteq \mathbb{N} = B$ ocurre $A = \varnothing$. Contradicción con la hipótesis.
$\therefore \forall A \subseteq \mathbb{N}$ y $A \neq \varnothing \ \exists \ a_0 : a_0 \leq a \ \forall a \in A$.
Q.E.D

1.4.2 El principio de buen orden implica el principio de inducción matemática fuerte

Demostración pendiente.

1.5 Teorema Del Binomio De Newton

$\forall a, b \in \mathbb{R} \wedge \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene:
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Demostración : Por inducción sobre n
$P(0) : (a+b)^0 = 1$ por otro lado $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$
$\therefore$ *P(0)* es verdadero.
Supongamos *P(r)* verdadero, es decir $(a+b)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a^k b^{r-k}$. Por demostrar *P(r+1)*.
$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k \ (a+b) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a^k b^{r-k} \ (a+b)$