Cálculo Integral En Una Variable

José Juan Hernández Cervantes

2019

Índice general

Capítulo 1

Propiedades de los Números Reales.

1.1. Supremo.

Definición 1.1.1 (Supremo de un conjunto) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío acotado superiormente. Diremos que $\bar{x}$ es el supremo de A (y lo denotamos por $Sup(A)$) si cumple:

1. $\bar{x}$ es cota superior de A.

2. Si z también es cota superior de A, ocurre $\bar{x} \leq z$.

Axioma del supremo
Todo subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente admite supremo.

Teorema 1.1.1 (Unicidad del supremo) Si existe $\bar{x}$ supremo de A, $\bar{x}$ es único.

Demostración:
Por definición de supremo, si $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son supremos de A, entonces ocurre: $\bar{x} \leq \bar{y}$ y $\bar{y} \leq \bar{x}$
Por tricotomía se tiene $\bar{x} = \bar{y}$. ■

Teorema 1.1.2 (Propiedades del supremo) Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente:

1. $\bar{x}$ es supremo de A si dado $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $\bar{x} - \epsilon < a$
2. $Sup(A \cup B) = max\{Sup(A), Sup(B)\}$
3. Si $a + A := \{a + x : x \in A\}$ entonces $Sup(a + A) = a + Sup(A)$

Demostración:
Sea $\bar{x} = Sup(A)$ entonces $x \leq \bar{x}$ $\forall x \in A$, luego $a + x \leq a + \bar{x}$ con lo que $a + \bar{x}$ es una cota superior de $a + A$. Se sigue $Sup(a + A) \leq a + \bar{x}$, ahora, si z es cota superior de $a + A$ entonces $a + x \leq z$ $\forall x \in A$ consecuentemente $x \leq z - a$ entonces $z - a$ es una cota superior de A, asi $\bar{x} \leq z - a \Rightarrow a + \bar{x} \leq z \Rightarrow a + \bar{x} \leq Sup(a + A)$.Probando 3. La prueba de 1 y 2 se deja como buen ejercicio para el lector. ■

1.2. Propiedad Arquimedeana.

Para todo par de números $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$,existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.
Demostración:
Procederemos por reducción a lo absurdo. Supongamos $\forall$ $n \in \mathbb{N}, nx \leq y$.
Si $y \leq 0$ entonces $x \leq 0$, contradicción con la hipótesis $x > 0$.
Si $y > 0$, sea $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. Es claro que $A \subseteq \mathbb{R}$ y $A \neq \varnothing$ pues $x \in A$, además A está acotado superiormente por y. Invocando el axioma del supremo, existe $\bar{x} = SupA$.
Como $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow \bar{x} - x < \bar{x}$. Con lo que $\bar{x} - x$ no es cota superior de A.
Entonces existe $a \in A$ tal que $\bar{x} - x \leq a$. Es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{x} - x < xn = a$. Equivalentemente $\bar{x} < (n + 1)x$. Como $(n + 1)x \in A$, llegamos a una contradicción con la definicion de supremo. ■

1.3. Principio Del Buen Orden.

Definición 1.3.1 (Elemento mínimo) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Decimos que x es el elemento mínimo de A si ocurre:

1. $x \in A$
2. $\forall$ $y \in A$, $x \leq y$

Teorema 1.3.1 (Principio del buen orden) Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene elemento mínimo.

1.4. Principio De Inducción Matemática Fuerte.

Si $A = \{P(j) : j \in \mathbb{N}\}$ es una colección de enunciados con las siguientes propiedades:

1. *P(1)* es verdadero.

2. *P(n+1)* es verdadero siempre que *P(n),P(n-1),...,P(2),P(1)* sean verdaderos.

Entonces *P(j)* es verdadero $\forall j \in \mathbb{N}$

1.5. Inducción implica Buen orden.

Demostración:
Procederemos por reducción a lo absurdo. Supongamos que existe $A \subseteq \mathbb{N}$, no vacío tal que no tiene elemento mínimo. Sea $B = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}$. Entonces $1 \notin A$, pues $1 \leq n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $1 \in B$ $(B \neq \varnothing)$. Supongamos $k \in B$, entonces *1,2,...,k-1,k* $\notin A$. Luego $k + 1 \notin A$, de lo contrario *k+1* sería el elemento más pequeño de A. Por el Principio De Inducción Matemática Fuerte tenemos $B = \mathbb{N}$, como $A \subseteq \mathbb{N} = B$ ocurre $A = \varnothing$. Contradicción con la hipótesis. ■

1.6. Buen orden implica Inducción.

Demostración:
Procederemos por reducción a lo absurdo. Supongamos $P = \{P(n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de propiedades tales que:

1. *P(1)* es verdadero.

2. Siempre que para un $K \in \mathbb{N}, P(K)$ es verdadero, entonces *P(K+1)* es verdadero.

Supongamos falso que *P(n)* es verdadero $\forall \ n \in \mathbb{N}$.
Entonces existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que *P(r)* es falso.
Sea $A = \{K \in \mathbb{N} : P(K) \text{ es falso } \}$ luego $A \subseteq \mathbb{N}$ *y* $A \neq \varnothing$, ya que $r \in A$.

Por el principio del buen orden, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 \leq k \ \forall \ k \in A$.
Observemos que $k_0 > 1$, pues por hipótesis *P(1)* es verdadero, entonces $k_0 - 1 \in \mathbb{N} \ y \ k_0 - 1 < k_0$ luego $k_0 - 1 \notin A$.
Entonces $P(k_0 - 1)$ es cierto,luego,por hipótesis, $P(k_0)$ es verdadero.
Contradicción, pues $k_0 \in A$. $\blacksquare$

1.7. Teorema Del Binomio De Newton.

Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Demostración: Por inducción sobre n.
Vereficación del caso base:
$(a+b)^0 = 1$.
Por otro lado,

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

Con lo que *P(0)* es verdadero.
Supongamos *P(n)* verdadero, es decir

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Por demostrar *P(n+1)* verdadero.
$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \ (a+b) = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
$= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$
$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$
$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{k+1-r} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0}$
$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (\binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}) + b^{n+1}$
$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k+1} (\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}) + b^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1}$
$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}$ $\blacksquare$

Capítulo 2

Sucesiones de números reales.

2.1. Definiciones y primeros resultados.

Definición 2.1.1 Una sucesión de números reales es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

En la practica se representa a f como la lista de sus valores. Es decir, en vez de escribir $(f(1), f(2), \dots)$ escribimos $(a_1, a_2, \dots)$.
Es común adoptar el símbolo (a_j) donde a_j es llamado término general de la sucesión.

Definición 2.1.2 (Progresión aritmética) Una progresión aritmética es una sucesión de números (a_j) tales que la diferencia de cualquier par de términos sucesivos de la sucesión es una constante d, dicha cantidad es llamada diferencia de la progresión. Se puede obtener el valor de un elemento arbitrario de la sucesion a_j mediante la expresión $a_j = a_1 + (n-1)d$.

Definición 2.1.3 (Progresión geométrica) Una progresión geométrica es una sucesión de números reales (a_j) en la que el elemento siguiente se obtiene multiplicando el elemento anterior por una constante r denominada razón. Se puede obtener el valor de un elemento arbitrario de la sucesion a_j mediante la expresión $a_j = a_1(r^{j-1})$. Para obtener la razón de una progresión geométrica se divide un término cualquiera entre el término anterior, es decir, $r = \frac{a_j}{a_{j-1}}$.

Definición 2.1.4 (Límite de una sucesión) Decimos que $\lim_{j\to\infty}(a_j) = L$ si dado $\epsilon > 0$ existe $J(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_j - L| < \epsilon \ \forall j \geq J(\epsilon)$.
En tal caso decimos que (a_j) converje a L y escribimos $(a_j) \to L$.

Teorema 2.1.1 (Unicidad del límite) Si (a_j) tiene límite, éste es único.

Demostración:
Procederemos por reducción a lo absurdo. Supongamos L_1 y L_2 limites de (a_j) con $L_1 \neq L_2$. Sin perder generalidad podemos suponer $L_1 < L_2$. Entonces, por definición de límite, dado $\epsilon > 0$ tenemos:
$|a_j - L_1| < \epsilon \ \forall \ j \geq J_1(\epsilon)$
$|a_j - L_2| < \epsilon \ \forall \ j \geq J_2(\epsilon)$
Sean $J = max\{J_1(\epsilon), J_2(\epsilon)\}$, $h = L_2 - L_1/2$, $I_1 = (L_1 - h, L_1 + h)$ e $I_2 = (L_2 - h, L_2 + h)$
Entonces para $j \geq J$:
$a_j \in I_1$ y $a_j \in I_2$ pero $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. Llegamos a una contradicción al suponer $L_1 \neq L_2$, debe ser $L_1 = L_2$. ■

Teorema 2.1.2 (Propiedades del límite de una sucesión) Sean (a_j) y (b_j) sucsiones de números reales con límites L y M respectivamentes y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $(\lambda a_j + b_j)$ tiene límite $\lambda L + M$
2. $(a_j b_j)$ tiene límite LM
3. Si además $b_j \neq 0 \ \forall \ j \geq 1$ y $M \neq 0$:
   $(\frac{a_j}{b_j})$ tiene límite $\frac{L}{M}$

Demostración:
Se deja como buen ejercicio para el lector. ■

Definición 2.1.5 Una sucesión de números reales (a_j) se dice que es acotada si existe $M > 0$ tal que $|a_j| \leq M \ \forall j \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.1.3 Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración:
Supongamos $L = \lim_{j \to \infty} (a_j)$ y sea $\epsilon = 1$. Entonces existe $J(1) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_j - L| \leq 1 \ \forall j \geq J(1)$. Luego $|a_j| = |a_j - L + L| \leq |a_j - L| + |L| < 1 + |L|$. Sea $M = Sup(\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{J(1)}|, 1 + |L|\})$. Entonces $|a_j| \leq M \ \forall j \in \mathbb{N}$. ■

2.2. Convergencia.

Definición 2.2.1 (Sucesiones monótonas) Si (a_j) es una sucesión de números reales tal que $a_j \leq a_{j+1}$ $\forall$ $j \geq 1$ decimos que la sucesión es no decreciente (creciente).
Si en la definicion anterior se cambia la condición a $a_j \geq a_{j+1}$ $\forall$ $j \geq 1$, obtenemos la definición de sucesión monótona no creciente (decreciente).

Teorema 2.2.1 (De convergencia monótona) Sea (a_j) una sucesión de números reales monótona creciente acotada superiormente y $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Entonces $(a_j) \to Sup(S)$.

Demostración:
Sea $\bar{s} = Sup(S)$. Entonces, por definición de supremo, $a_j \leq \bar{s}$ $\forall$ j. Luego para $\epsilon > 0$, $\bar{x} - \epsilon$ no es cota superior de S, con lo que existe $J(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{x} - \epsilon \leq a_{J(\epsilon)}$. Asi pues, para $j \geq J(\epsilon)$ se tiene $a_j \in (\bar{s} - \epsilon, \bar{s} + \epsilon)$, es decir $|a_j - \bar{s}| \leq \epsilon$. ■

Corolario 2.2.1 Sea (a_j) una sucesión de números reales monótona decreciente acotada inferiormente y $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.
Entonces $(a_j) \to Inf(S)$.

Teorema 2.2.2 ("Squeezing Theorem") Sean (a_j) tal que $a_j \geq 0$ $\forall$ j y (b_j) tal que $a_j \leq b_j$ $\forall j$ con $(b_j) \to 0$. Entonces $(a_j) \to 0$.

Demostración:
Como $0 \leq a_j \leq b_j$, ocurre $|a_j - 0| \leq |b_j - 0|$ y como $(b_j) \to 0$, existe $J(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|b_j - 0| < \epsilon$ $\forall$ $j \geq J(\epsilon)$, con lo que $|a_j - 0| < \epsilon$. ■

Teorema 2.2.3 ("Sandwich Theorem") Sean $(a_j), (b_j), (c_j)$ sucesiones de números reales tales que $b_j \leq a_j \leq c_j$ $\forall j \geq 1$, con $(b_j), (c_j) \to L$. Entonces $(a_j) \to L$.

Demostración:
Como $b_j \leq a_j \leq c_j$, entonces $0 \leq a_j - b_j \leq c_j - b_j$.
Sean $(d_j) = (a_j - b_j) \geq 0$ y $(e_j) = (c_j - b_j) \geq d_j$.
Luego por el teorema (2.1.2) parte 1, $(e_j) \to 0$ (*). Y por el teorema (2.2.2) $(d_j) \to 0$ (**).
Por (*) existe $J_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|d_j - 0| < \frac{\epsilon}{2}$
Por (**) existe $J_2(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|b_j - L| < \frac{\epsilon}{2}$
Finalmente, si $j \geq max\{J_1(\epsilon), J_2(\epsilon)\}$, se tiene $|a_j - L| = |a_j - b_j + b_j - L| \leq |dj - 0| + |b_j - L| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. ■

Teorema 2.2.4 (Composición de sucesiones y funciones continuas) Sea (a_j) una sucesión de números reales tal que $a_j = f(b_j)$ con f una función continua y $(b_j) \to L$. Entonces $(a_j) \to f(L)$.

Demostración:
Como f continua, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $|f(a) - f(b)| < \epsilon$ para $|a - b| < \delta(\epsilon)$.
Como $(b_j) \to L$, $|b_j - L| < \delta(\epsilon)$ $\forall j \geq J(\epsilon)$
Combinando lo anterior se obtiene $|f(b_j) - f(L)| = |a_j - f(L)| < \epsilon$ $\forall j \geq J(\epsilon)$.$\blacksquare$

2.3. Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Definición 2.3.1 (Subsucesión) Sea (a_j) una sucesión de números reales y $j_1 \leq j_2 \leq \ldots j_k \leq \ldots$ una sucesión de números naturales estrictamente creciente. Entonces la sucesión $(\tilde{a_{j_k}})$ es llamada una subsucesión de (a_j).

Teorema 2.3.1 Si $(a_j) \to L$, cualquier subsucesión $(\tilde{a_{j_k}}) \to L$

Demostración:
Como la sucesión converge, dodo $\epsilon > 0$ existe $J(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq J(\epsilon)$ entonces $|a_j - L| < \epsilon$.
Como $j_1 \leq j_2 \leq \ldots j_k \leq \ldots$ es una sucesión creciente de números naturales, se verifica sin dificultad por inducción que $j_k \geq k$, con lo que si $j \geq J(\epsilon)$ entonces $j_k \geq k \geq J(\epsilon) \Rightarrow |a_{j_k} - L| < \epsilon$. $\blacksquare$

Definición 2.3.2 (Pico) Dada una sucesión (a_j) de números reales, decimos que a_k es un pico de la sucesión si $a_k \geq a_j$ $\forall j \geq k$.

Lema 2.3.1 Toda sucesión (a_j) de números reales admite una subsucesión monótona.

Demostración:
Supongamos que (a_j) tiene una cantidad infinita de picos. Entonces la subsucesión correspondiente a los picos es una sucesión monótona decreciente.
Supongamos ahora que (a_j) tiene una cantidad finita de picos. Sea K el último pico y $k_1 = K + 1$. Luego k_1 no es un pico, lo que implica la existencia de un $k_2 > k_1$ con $a_{k_2} > a_{k_1}$. Nuevamente $k_2 > K$ no es pico lo que implica la existencia de un $k_3 > k_2$ con $a_{k_3} > a_{k_1}$.Repitir este proceso conduce a una subsucesión infinita monótona creciente. $\blacksquare$

Teorema 2.3.2 (Bolzano-Weierstrass) Toda sucesión de numeros reales acotada admite una subsucesión convergente.

Demostración:
Por el lema anterior, dada una sucesión de números reales acotada, ésta admite una subsucesión monótona igualmente acotada y por el teorema (2.2.1), esta subsucesión converge. ■

2.4. Criterio de Cauchy.

Definición 2.4.1 (Sucesión de Cauchy) Sea (a_j) una sucesión de números reales. Decimos que la sucesión es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $J(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_j - a_k| < \epsilon \ \forall \ j, k \geq J(\epsilon)$.

Lema 2.4.1 Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Demostración:
Sea (a_j) una sucesión de Cauchy y $\epsilon = 1$. Entonces si $j \geq J(1)$ entonces $|a_j - a_{J(1)}| < 1$. Luego para $j \geq J(1)$ se tiene $|a_j| \leq |a_{J(1)}| + 1$.
Sea $M = Sup(\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{J(1)}| + 1\})$. Se sigue $|a_j| \leq M \ \forall j \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 2.4.1 (Criterio de convergencia de Cauchy) Una sucesión de números reales (a_j) es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Demostración:
Veamos que es una condición suficiente, es decir, supongamos $(a_j) \to L$ y verifiquemos (a_j) de Cauchy.
Como $(a_j) \to L$, para $\epsilon > 0$ existe $J(\epsilon) \in N$ tal que $|a_j - L| < \frac{\epsilon}{2}$. Con lo que si $j, k \geq J(\epsilon)$ se tiene :
$|a_j - a_k| = |(a_j - L) + (L - a_k)| \leq |a_j - L| + |a_k - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
Veamos ahora que es una condición necesaria, es decir, supongamos (a_j) de Cauchy y verifiquemos (a_j) convergente.
Como (a_j) de Cauchy, por el lema anterior (a_j) es acotada, y por el teorema 2.3.2 existe $(\tilde{a_{j_k}})$ una subsucesión convergente, digamos $(\tilde{a_{j_k}}) \to L$. Mostraremos $(a_j) \to L$.
Como (a_j) de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $J = J(\frac{\epsilon}{2}) \in \mathbb{N}$ tal que si $j, k \geq J$ entonces $|a_j - a_k| < \frac{\epsilon}{2}$.
Luego, como $(\tilde{a_{j_k}}) \to L$, existe $K \geq J$ perteneciente al conjunto $\{a_1, a_2, \ldots\}$ tal que $|a_k - L| < \frac{\epsilon}{2}$.

Finalmente, por la desigualdad triangular

$$|a_j - L| = |a_j - a_k + a_k - L| \leq |a_j - a_k| + |a_k - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

■

2.5. Ejercicios

1. Demuestre $(\frac{1}{j}) \to 0$.*Hint: Utilice la propiedad arquimedeana*
2. Para cada una de las siguientes sucesiones encuentre una expresión para su término general y encuentre su límite cuando exista
   a) $\frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{10}{13}, \frac{13}{17}, \ldots$
   b) $\frac{5}{3}, \frac{10}{9}, \frac{20}{27}, \frac{40}{81}, \ldots$
3. Halla el primer término y la razón de una progresión geométrica, sabiendo que el tercer término es –1 y el sexto es 27.
4. Calcule $\lim\limits_{j\to\infty} \sqrt{j^2+3} - j$ *Hint: multiplique y divida por una expresión adecuada.*
5. Considere la sucesión cuyo término general esta dado por la expresión

   $$a_j = \begin{cases} j+2 \text{ si j es par} \\ \\ \frac{1}{j+2} \text{ si j es impar} \end{cases}$$

   ¿Es una sucesión monótona? ¿converge?
6. Dadas las sucesiones cuyos terminos generales son $a_j = j^2 + 3$ $b_j = \frac{1}{j}$

La idea de una sucesión de números reales se puede extender hacia sucesiones de funciones. En el siguiente capítulo se considerarán únicamente funciones continuas de variable real.
Al conjunto de funciones continuas de $[a, b] \to \mathbb{R}$ se le denota por $C([a, b], \mathbb{R})$.

Capítulo 3

Sucesiones de funciones continuas.

Definición 3.0.1 Una sucesion de funciones continuas es una función $S : \mathbb{N} \to C([a,b],\mathbb{R})$. En la práctica se denota por (f_n).

3.1. Convergencia puntual.

Definición 3.1.1 Dado $x \in I = [a,b]$, se dice que la sucesión de funciones (f_n) converge puntualmente en x si la sucesión de números reales $(f_n(x))$ es convergente.

Definición 3.1.2 (Campo de convergencia puntual) Al conjunto C de todos los puntos $x \in I$ en los que la sucesión de funciones (f_n) converge puntualmente se le llama campo de convergencia puntual. Simbólicamente:

$$C = \{x \in I : (f_n(x)) \; converge\}$$

Definición 3.1.3 Bajo el supuesto $C \neq \varnothing$, la función $f : C \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

es llamada función límite puntual de la sucesión (f_n).

Para entender la definición de convergencia puntual es importante diferenciar entre la sucesión de funciones (f_n) y la sucesión de números reales $(f_n(x))$.

Recuerde que en una sucesión la variable siempre es $n \in \mathbb{N}$ y nunca es $x \in I$. Así la sucesión $(f_n(x))$ es la aplicación que a cada número natural n le asocia el número real $f_n(x)$ donde **x está fijo**.

3.2. Convergencia uniforme.

Definición 3.2.1 Sea I un intervalo no vacío contenido en el campo de convergencia puntual de la sucesión (f_n) y sea f su función límite puntual. Se dice que la sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente a f en I si dado $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$Sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} < \epsilon \; \forall n \geq N(\epsilon)$$

Analicemos la última desigualdad.

$$Sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} < \epsilon \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \; \forall x \in I$$
$$\Leftrightarrow -\epsilon \leq f_n(x) - f(x) \leq \epsilon \Leftrightarrow f(x) - \epsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \epsilon \; \forall x \in I$$

Esto último nos dice que la función f_n se queda dentro de una *banda* centrada en la gráfica de f de anchura 2ϵ.

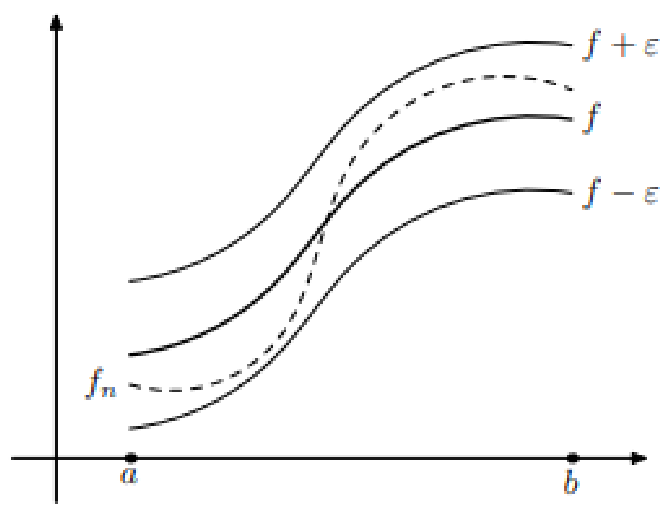

Figura 3.1: Interpretación gráfica de la convergencia uniforme, I=[a,b]

La convergencia uniforme requiere un par de precisiones importantes:

1. La convergencia uniforme se refiere siempre a un conjunto. No tiene sentido decir que la sucesión (f_n) converge uniformemente si no se indica inmediatamente el conjunto en el que se afirma que hay convergencia uniforme. Además siempre hay convergencia uniforme en subconjuntos finitos del campo de convergencia puntual (se recomienda al lector demostrar esto último). Por ello, sólo es de interes estudiar la convergencia uniforme en conjuntos infinitos, por lo general, intervalos.

2. No existe el campo de convergencia uniforme, es decir, el concepto de campo de convergencia puntual no tiene análogo al caso uniforme.

Teorema 3.2.1 (Condición de Cauchy para convergencia uniforme) La sucesión (f_n) converge uniformemente en I a una función f si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ para $n, m \geq N(\epsilon)$.

Demostración:
Veamos que es una condición suficiente, es decir, supongamos que (f_n) converge uniformemente en I. Sea $\epsilon > 0$. Existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq N$ se tiene $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall x \in I$. Entonces $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall x \in I$. Luego
$|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
Veamos ahora que es una condición necesaria. Sea $\epsilon > 0$, por hipótesis, existe $N = N(\epsilon) \in N$ tal que, para $n, m \geq N$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall x \in I$. Esto dice que la sucesión de números reales $(f_n(x))$ es de Cauchy y por lo tanto convergente. Sea $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Fijemos $x \in I$ y $n \geq N$. La desigualdad anterior es válida para todo $m \geq N$. Tomando límite cuando n tiende a infinito se tiene
$|f(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ $\forall n \geq N$ $\forall x \in I$.
Es decir f_n converge uniformemente a f. ■

Teorema 3.2.2 Sean (a_j) una sucesión de números reales convergente y (f_n) una sucesión de funciones $f_n : I \to \mathbb{R}$ que verifica

$$Sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in I\} \leq |a_n - a_m| \ \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Entonces (f_n) converge uniformemente en I.

Demostración:
Como (a_j) es convergente, satisface el criterio de Cauchy, con lo que, dado $\epsilon > 0$ existe $J = J(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ para $n, m \geq J$. Con lo que $|f_n(x) - f_m(x)| \leq Sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in I\} \leq |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$. Lo anterior dice que $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto convergente, es decir, existe $\lim_{n\to\infty}(f_n(x))$. Asi pues, $|\lim_{n\to\infty} f_n(x) - f_m(x)| \leq |L - a_m|$ donde $L = \lim_{j\to\infty}(a_j)$. Sea $f : J \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Entonces existe $N = N(\epsilon) \in N$ tal que, para $n, m \geq N$ se tiene

$$Sup\{|f(x) - f_m(x) : x \in J|\} \leq |L - a_m| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

■

Teorema 3.2.3 Si (f_n) es una sucesión de funciones continuas $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que converge a una función $f : I \to \mathbb{R}$, entonces f es continua.

Demostración:
Sea $a \in I$ y $\epsilon > 0$ como $f_n \to f$ uniformemente en I, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ si } n \geq N$$

Sean $n \geq N$ y $x \in I$, como f_n es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ si } |x - a| < \delta$$

Con lo que, si $|x - a| < \delta$,

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$$

■

Capítulo 4

Series de Números Reales

4.1. Definiciones y propiedades.

Definición 4.1.1 (Suma parcial) Dada una sucesión de números reales (a_j), se denota y define la n-ésima suma parcial de (a_j) como

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Definición 4.1.2 Dada una sucesión de números reales (a_j), se denota y define la serie término general a_j como

$$\sum_{j\geq 1} a_j := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

Cuando el límite existe, se dice que la serie es convergente. Una serie es entonces el resultado de un límite.

Observación : una serie convergente es el límite de la sucesión de sumas parciales (s_n), entonces para estudiar series usaremos todo nuestro conocimiento sobre sucesiones. Es conveniente que el lector recuerde la definición 2.1.4.

Teorema 4.1.1 Sea $\sum_{j\geq 1} a_j$ una serie y $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ la n-ésima suma parcial. Entonces

1. La serie $\sum_{j\geq 1} a_j$ es convergente si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \epsilon$ para cualesquier enteros positivos $n \geq m \geq N$

2. Si la serie $\sum_{j\geq 1} a_j$ es convergente entonces $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Demostración:
La parte 1 se sigue del teorema 2.4.1, tomando $n \geq m \geq N$.
La parte 2 se obtiene aplicando 1 con $m = n + 1$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$

$$\epsilon > |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1}|$$

Lo anterior es la definición del símbolo $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ ■
Observación : La parte 2 del teorema anterior establece que la condición $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ es una condición necesaria para la convergencia de la serie, más no es una condición suficiente. Como contraejemplo tenemos:
La serie armónica : $\sum_{j\geq 1} \frac{1}{j}$
Claramente $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ (ver ejercicio 1 de la seccion 2.5). Por otro lado, observe que

$$|s_{2n} - s_n| = |\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}| > |\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}| > |n\frac{1}{2n}| = \frac{1}{2}$$

Si la serie armónica fuese convergente, para $\epsilon = \frac{1}{3}$ existiria un entero positivo N tal que $|s_m - s_n| < \frac{1}{3}$, pero si consideramos $m = 2n$ y $n \geq N$ obtendríamos $|s_{2n} - s_n| > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$. Lo cual es una contradicción, con lo que la serie armónica no es convergente y la condición dada en 2 no es una condición suficiente.

Teorema 4.1.2 Sea $\sum_{j\geq 1} a_j$ una serie y s_n su n-ésima suma parcial. Entonces

1. Si $a_j \geq 0$ $\forall j$ y $s_n \leq M$ para alguna constante M entonces $\sum_{j\geq 1} a_j$ es convergente.

2. Si $a_j \leq 0$ $\forall j$ y $s_n \geq M$ para alguna constante M entonces $\sum_{j\geq 1} a_j$ es convergente.

4.2. Ejercicios

1. ¿Para cuáles series puede afirmar que no convergen?

$$\text{(a)}\ \sum_{j\geq 1}\frac{3-2j^2}{8+j^2}\quad \text{(b)}\ \sum_{j\geq 1}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\quad \text{(c)}\ \sum_{j\geq 1} j-\frac{j^2(j+1)}{j^2-1}$$

Capítulo 5

Teorema de Taylor.

Definición 5.0.1 (Polinomio de Taylor) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función k veces diferenciable en el punto $a \in \mathbb{R}$. Se denota y define el polinomio de Taylor de orden k de f centrado en el punto a como sigue

$$T_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$

Teorema 5.0.1 (De Taylor) Sean $n \in \mathbb{N}, I = [a,b], f : I \to \mathbb{R}$ tal que f y sus primeras n derivadas son continuas en I y $f^{(n+1)}$ existe en (a,b).
Entonces si $a \in I$, para cualquier $x \in I$ existe un punto ξ entre x y a tal que:

$$f(x) = T_n(a) + R_n(x)$$

Donde $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

A la expresión $R_n(x)$ se le conoce como **forma de Lagrange del residuo**.Este teorema permite obtener aproximaciones polinómicas de una función en un entorno de a en que la función sea diferenciable. Además el teorema permite acotar el error obtenido mediante dicha estimación.
Demostración:
Sean a, x fijos y J el intervalo cerrado con extremos a y x. Definimos la función F en J por

$$F(t) := f(x) - f(t) - (x-t)f'(t) - \cdots - \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)$$

Se verifica sin dificultad que

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$$

Defina ahora G en J como

$$G(t) := F(t) - \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{n+1} F(a)$$

Es claro que $G(a) = G(x) = 0$. Por el teorema de Rolle existe ξ entre x y a tal que

$$0 = G'(\xi) = F'(\xi) + (n+1)\frac{(x-\xi)^n}{(x-a)^{n+1}} F(a)$$

De aqui obtenemos

$$F(a) = -\frac{1}{n+1}\frac{(x-a)^{n+1}}{(x-\xi)^n} F'(\xi) = \frac{1}{n+1}\frac{(x-a)^{n+1}}{(x-\xi)^n}\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Lo que implica el resultado anunciado ■

Observación. El polinomio de Taylor $T_n(x)$ y todas sus derivadas hasta el orden n coinciden con las de la función $f(x)$ en el punto $x = a$.

5.1. Aplicaciones del teorema de Taylor

El término del residuo $R_n(x)$ en el teorema de Taylor se puede usar para estimar el error cometido al aproximar una función con su polinomio de Taylor. Si el número n es dado, entonces surge la pregunta de qué tan precisa es la aproximación. Por otro lado, si se especifica una cierta precisión, entonces la cuestión es encontrar un valor adecuado para n. Los siguientes ejemplos ilustran cómo se responde a estas preguntas.

Ejemplo 5.1.1 Use el teorema de Taylor con $n = 2$ para aproximar $\sqrt[3]{1+x}$.

Sean $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$, $a = 0$, $n = 2$. Como $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$ y $f''(x) = \frac{-2}{9}(1+x)^{-5/3}$, se tiene $f'(0) = \frac{1}{3}$ y $f''(0) = \frac{-2}{9}$ con lo que

$$f(x) = T_2(x) + R_2(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}(1+\xi)^{-8/3}x^3$$

Para algún punto ξ entre 0 y x. Por ejemplo, para $x = 0{,}2$

$$\sqrt[3]{1{,}2} \approx T_2(0{,}2) = \frac{239}{225}$$

Más aún, como en este caso $\xi > 0$, $(1+\xi)^{-8/3} < 1$ con lo que

$$R_2(x) \leq \frac{5}{81}(0{,}2)^3 = \frac{1}{2025} < 5 \times 10^{-4}$$

Con lo que $|\sqrt[3]{1{,}2} - \frac{239}{225}| < 5 \times 10^{-4}$

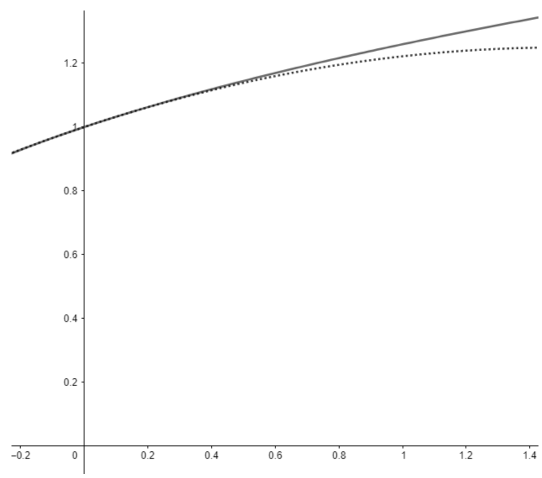

Figura 5.1: En negro la gráfica de f, punteado la gráfica de T_2

Ejemplo 5.1.2 Aproxime el valor del número e con error menor a 10^{-5}.

Considere la función $f(x) = e^x$, $a = 0$ y $x = 1$ en el teorema de Taylor. Necesitamos determinar n tal que $R_n(x) < 10^{-5}$. Para hacerlo vamos a usar el hecho que $f^{(k)}(x) = e^x \ \forall k \in \mathbb{N}$ y que $e^x < 3$ para $0 \leq x \leq 1$. El polinimio de Taylor de grado n de f está dado por

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

y el residuo, para $x = 1$ es $R_n(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}$ para algún $0 < \xi < 1$. Como $e^\xi < 3$, buscamos n tal que $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$. Un cálculo sencillo muestra que $9! = 362880 > 3 \times 10^5$ de modo que el valor $n = 8$ proporciona la precisión deseada, ademas, como $8! = 40320$, ningún valor menor a 9 será suficiente. Con lo que

$$T_8(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{8!} = 2{,}71828$$

aproxima el valor de e con error menor a 10^{-5}.

Ejemplo 5.1.3 e^π *vs* π^e

El lector puede verificar con ayuda del teorema de Taylor que $e^x > 1 + x$ para $x > 0$. Como $\pi > e$, $\frac{\pi}{e} - 1 > 0$, con lo que

$$e^{\frac{\pi}{e}-1} > \frac{\pi}{e} \Rightarrow e^{\frac{\pi}{e}} > \pi \Rightarrow e^\pi > \pi^e$$

5.2. Ejercicios

1. Calcule los polinomios de Taylor de orden 1 y 2 centrados en el punto $a = 0$ para las siguientes funciones

   a) $f(x) = \log(\cos x)$

   b) $f(x) = e^{\sin x}$

   c) $f(x) = \cosh x$

2. Demuestre que si $0 \leq x \leq 0{,}01$ entonces e^x se puede reemplazar por $1 + x$ con un error inferior al 6 % de x. *Hint:* $e^{0{,}01} = 1{,}01$

3. Si reemplazamos $\cos x$ por $1 - \frac{x^2}{2}$ y $|x| < 0{,}5$. ¿Qué error se está cometiendo?