IFT 2125 **Geña Hahn**

Introduction à l'algorithmique

Deuxième EXAMEN INTRA

26 novembre 2012

Durée: 50 minutes

Valeur: 20% de la note totale, 30% si partie du prédoc

Directives:

- Répondez sur le questionnaire, dans l'espace libre qui suit chaque question. Utilisez les dos des pages comme brouillon. **L'espace alloué n'est aucune indication de la longueur de la réponse! Il est souvent beaucoup trop grand.**
- Sauf indication contraire, aucun point ne sera accordé pour une réponse, correcte ou pas, si elle n'est pas accompagnée d'une justification.
- Notez la différence entre *justifier* (argument rapide et court) et *prouver* ou *démontrer* (argument détaillé).
- Vous pouvez vous servir de résultats vus en cours, en TP ou dans des livres à condition de les énoncer précisément.
- Pour répondre à une question, vous pouvez également vous servir de résultats énoncés dans d'autres questions dans l'examen, même si vous ne les avez pas démontrés. Vous pouvez également réclamer cinq points supplémentaires pour avoir lu les instructions; il suffit de le mentionner à la fin.
- Rappels: $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers non négatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^{\geq 0}$ l'ensemble des réels non négatifs et $\mathbb{R}^{>0}$ l'ensemble des réels positifs. Aussi, $\lg n = \log_2 n$ et $\ln n = \log_e n$ (où e est la base du logarithme naturel). Finalement, $\log n$ est le logarithme "générique" : la base peut être n'importe quel $b \in \mathbb{R}^{>1}$. Nos fonctions vont de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^{\geq 0}$.

1. ________	/20	4. ________	/20
2. ________	/20	5. ________	/20
3. ________	/20		

Total: ________ /100

Nom: ______________________________ **Code permanent:** ________________

1. **(20 points)** Soit

$$T(n) = 3T(\lceil\frac{n}{3}\rceil) - 2T(\lceil\frac{n}{9}\rceil)$$

pour $n > 1$ et $T(1) = 1$, $T(3) = 2$. Trouvez la solution exacte pour n une puissance de 3. Si votre solution est $f(n)$, peut-on conclure que $T \in \Theta(f)$ pour tout n? Justifiez votre réponse.

2. **(20 points)** Soit $D = (V, A)$ un graphe simple orienté pondéré par $c : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $u \in V$. Prouvez qu'aucun algorithme ne peut trouver les distances de s vers les autres sommets s'il existe, dans D, un circuit $v_0 \dots v_{k-1}$, $k \geq 3$, tel que $\sum_{i=0}^{k-1} c(v_i v_{i+1}) < 0$ (addition modulo k).

3. **(20 points)** Soit $D = (V, A)$ le graphe simple orienté, pondéré par $c : A \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ suivant, donné par sa matrice de distance $C(G)$ ($C(i,j) = c(ij)$ si $ij \in A$, $A(ij) = \infty$ sinon). On suppose que $V = \{1, \ldots, 8\}$. Soit $s = 3$.

0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1
3	0	2	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	0	1	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	0	5	∞	∞	∞
1	∞	3	∞	0	4	∞	∞
∞	∞	∞	∞	2	0	∞	∞
4	∞	∞	∞	1	1	0	2
∞	2	∞	∞	∞	∞	∞	0

Un tableau D_i contient un triplet $(d_i(j), x_j, y_j)$ dans $D_i(j)$. Il indique que la distance de s vers j après la j-ième itération est $d_i(j)$, que'elle peut être réalisée en passant par le sommet $x_j \in F_i$ et que j est ou n'est pas dans F_i — $y_j = 1$ si $j \in F_i$, $y_j = 0$ sinon. Si $d_i(j) = \infty$, on met $x_j = 0$.

Le tableau suivant est D_3.

D_3:

(7,5,1)	(∞,0,0)	(0,3,1)	(1,3,1)	(6,4,1)	(10,5,1)	(∞,0,0)	(8,1,0)

Remplisser le tableau ci-dessous pour qu'il devienne D_4.

D_4:

4. **(20 points)** Soit $t_i : i = 0, 1, \ldots, 9$ un ensemble de tâches à exécuter. Chacune nécessite un temps unitaire et la tâche t_i doit être complétée au plus tard au moment d_i pour apporter un gain g_i, tel qu'indiqué dans le tableau ci-dessous.

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
g	15	25	33	20	54	15	1	12	13	4
d	2	3	2	5	3	4	7	4	3	8

Quel est l'ordre d'exécution de ces tâches qui maximise le gain et quel est le gain obtenu en utilisant l'agorithme rapide (dit *étudiant*)? Le temps doit également être minimisé.

Ordre:

Gain: ________

5. **(20 points)** Vrai ou faux :

   (a) $\Theta(\sin \frac{1}{n}) = \Theta(1)$

   (b) $\Theta(\cos \frac{1}{n}) = \Theta(1)$

   Justifiez votre réponse (une preuve serait encore mieux).

BONNE
CHANCE

ANNEXE

(1) Soit R la récurrence homogène

$$\sum_{i=0}^{k} a_i t_{n-i} = 0$$

et soit $p(x)$ le polynôme caractéristique de R, avec les racines distinctes $r_1, \ldots, r_\ell$ de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_\ell$. Alors la solution générale de R est

$$\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij} n^j r_i^n.$$

(2) Soit R^* la récurrence non homogène

$$\sum_{i=0}^{k} a_i t_{n-i} = \sum_{i=1}^{s} b_i^n q_i(n)$$

avec $b > 0$ et $q_i(n)$ un polynôme en n de degré d_i, $i = 1, \ldots, s$. Soit $p^*(x)$ le polynôme caractéristique de R^*, avec les racines distinctes $r_1, \ldots, r_\ell$ de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_\ell$,

$$p^*(x) = p(x) \prod_{i=1}^{s} (x - b_i)^{d_i + 1}.$$

Alors la solution générale de R est

$$\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij} n^j r_i^n.$$

(3) Soit la récurrence

$$t(n) = \ell t(\frac{n}{b}) + cn^k$$

quand $\frac{n}{n_0}$ est une puissance de b, avec $b, k, n_0 \in \mathbb{N},\ b \geq 2,\ n_0 \geq 1,\ n > 0,\ c \in \mathbb{R}^{>0}$. Alors

$$t(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{quand } b^k > \ell \\ \Theta(n^{\log_b \ell}) & \text{quand } b^k < \ell \\ \Theta(n^k \log n) & \text{quand } b^k = \ell \end{cases}$$

et les relations semblables sont vraies pour

$$t(n) = \ell t(\frac{n}{b}) + f(n),$$

$f(n) \in \Theta(n^k)$ et, *mutatis mutandis*, $f(n) \in O(n^k), f(n) \in \Omega(n^k)$.

Remarque. Quand on change la variable ou le codomaine, les conditions originales ne disparaissent pas mais sont traduites dans le nouveau paradigme.