IFT2125 - Introduction à l'algorithmique

Programmation dynamique (B&B chapitre 8)

Pierre McKenzie

DIRO, Université de Montréal

Hiver 2018

Deux usages inefficaces de diviser-pour-régner

1) Calcul des coefficients binomiaux, B&B Section 8.1.1

COEFFICIENT BINOMIAL

DONNÉE: entiers $0 \leq k \leq n$

CALCULER: $\binom{n}{k}$

Voici un algo diviser-pour-régner pour COEFFICIENT BINOMIAL :

function $C(n, k)$
    if $k = 0$ **or** $k = n$ **then return** 1
    else return $C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$

Deux usages inefficaces de diviser-pour-régner

2) Probabilité de l'emporter en série mondiale, B&B Section 8.1.2

SÉRIE MONDIALE

DONNÉE: probabilité $0 \leq p \leq 1$ que A batte B lors d'un seul match, entiers $n > 0$ et $0 \leq i, j < i + j < 2n$

CALCULER: probabilité $P(i, j)$ que A gagne n matchs avant B, sachant qu'il manque i victoires à A et j victoires à B

Quel serait un algo diviser-pour-régner ?

Deux usages inefficaces de diviser-pour-régner

2) Probabilité de l'emporter en série mondiale, B&B Section 8.1.2

SÉRIE MONDIALE

DONNÉE: probabilité $0 \leq p \leq 1$ que A batte B lors d'un seul match, entiers $n > 0$ et $0 \leq i, j < i + j < 2n$

CALCULER: probabilité $P(i, j)$ que A gagne n matchs avant B, sachant qu'il manque i victoires à A et j victoires à B

Quel serait un algo diviser-pour-régner ?

function $P(i, j)$
    if $i = 0$ **then return** 1
    else if $j = 0$ **then return** 0
    else return $pP(i-1, j)+qP(i, j-1)$

Contourner l'inefficacité de DPR ?

Possible, au prix de plus de mémoire

Comment ?

À l'aide d'un tableau global qui

- stocke les valeurs déjà calculées
- est consulté avant tout appel récursif.

La “programmation dynamique”

Une fois accepté l’usage d’un tableau, l’identité au coeur d’une stratégie DPR peut servir à construire le tableau “bottom up” : c’est la programmation dynamique !

Cas de la série mondiale :

$$\underbrace{P(i,j) = pP(i-1,j) + (1-p)P(i,j-1)}$$

suggère de remplir un tableau une diagonale à la fois de haut en bas

Série mondiale par programmation dynamique

B&B Section 8.1.2

```
function series(n, p)
    array P[0..n, 0..n]
    q ← 1 − p
    {Fill from top left to main diagonal}
    for s ← 1 to n do
        P[0, s] ← 1;  P[s, 0] ← 0
        for k ← 1 to s − 1 do
            P[k, s − k] ← pP[k − 1, s − k] + qP[k, s − k − 1]
    {Fill from below main diagonal to bottom right}
    for s ← 1 to n do
        for k ← 0 to n − s do
            P[s + k, n − k] ← pP[s + k − 1, n − k] + qP[s + k, n − k − 1]
    return P[n, n]
```

Rendre la monnaie

B&B Section 8.2

- Rappel : bien qu'efficace, l'approche vorace parfois ratait une solution

- L'approche programmation dynamique fonctionne, quelles que soient les valeurs des pièces :
  - Démo du 23 mars
  - L'idée :
    $c[i, j]$ = nombre min de pièces pour rendre j en i dénominations
  - Alors :
    $$\underbrace{c[i, j] = \min(c[i-1, j], 1 + c[i, j - \text{dénom}[i]])}_{\text{suggère à nouveau de remplir par diagonales, de haut en bas}}$$
  - Fonctionne toujours mais...
    ...au prix d'un tableau de "montant à remettre" colonnes !

Principe d'optimalité

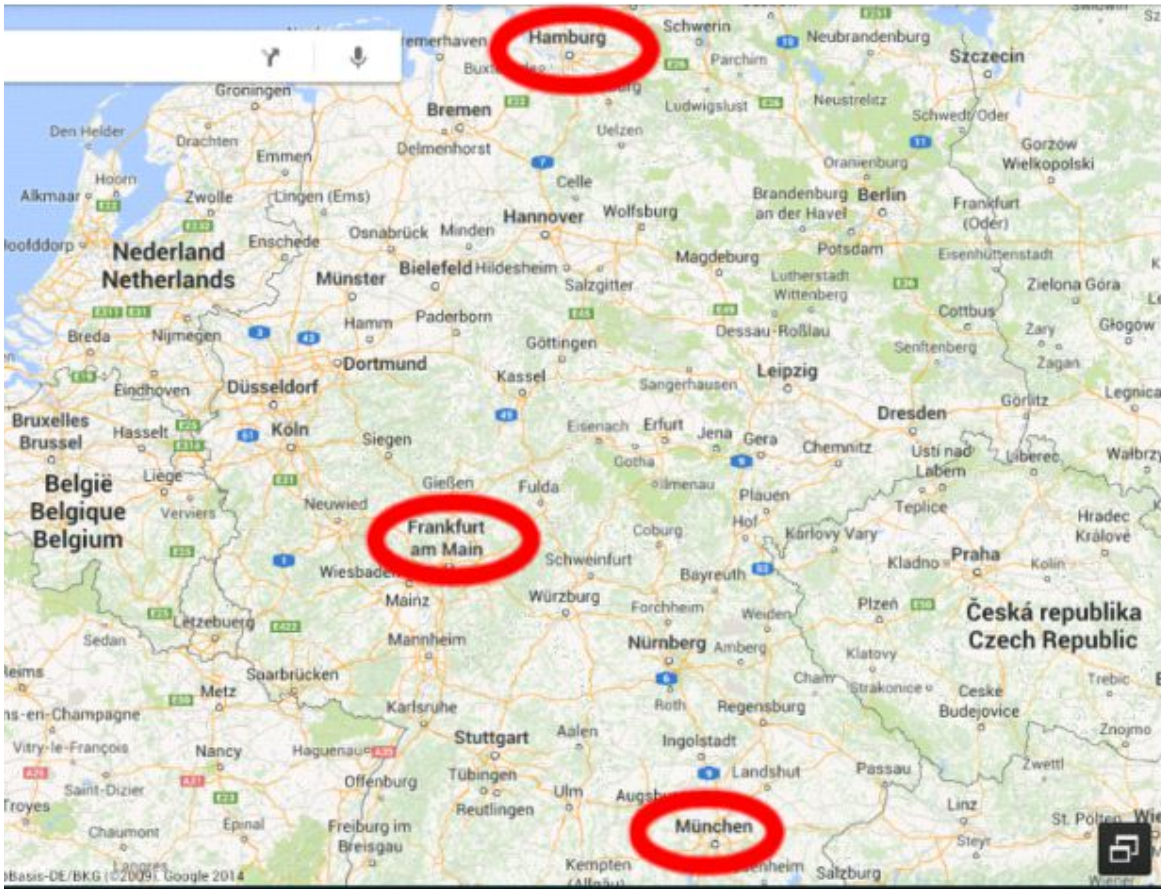
B&B Section 8.3

La programmation dynamique est de mise lorsque

- le problème à résoudre se décompose en sous-problèmes semblables
- ces sous-problèmes ont tendance à se chevaucher
- le principe d'optimalité s'applique : chaque sous-séquence d'une séquence de choix optimale est optimale

Principe d'optimalité

Exemples



- chemin le plus court : oui
- chemin le plus rapide : non
- chemin simple le plus long : non, ex : graphe complet

Sac à dos

B&B Section 8.4

SAC À DOS

DONNÉE: capacité $W \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ et objets $1, 2, \ldots, n$ de poids $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ et de valeurs $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

CALCULER: objets de valeur maximale et de poids n'excédant pas W

- Rappel : bien qu'efficace, l'approche vorace ne parvenait à résoudre que SAC À DOS FRACTIONNAIRE
- L'approche programmation dynamique résoud SAC À DOS Comment ?

Sac à dos

(suite)

- L'idée :
  $V[i, j]$ = valeur max avec objets $\{1, 2, \ldots, i\}$ et capacité $\leq j$
- On cherche : $V[n, W]$

- Alors :

Sac à dos
(suite)

- L'idée :
  $V[i,j]$ = valeur max avec objets $\{1,2,\ldots,i\}$ et capacité $\leq j$
- On cherche : $V[n,W]$

- Alors :
  $\underbrace{V[i,j] = \max(V[i-1,j], v_i + V[i-1,j-w_i])}$
  suffit donc de remplir ligne par ligne, de haut en bas
- L'algorithme détaillé coûtera $\Theta(nW)$ opérations (accès au tableau, sommes, comparaisons)

Plus courts chemins

B&B Section 8.5

PLUS COURTS CHEMINS

DONNÉE: graphe (N, A) avec longueurs non négatives (ou ∞) aux arcs
CALCULER: chemins les plus courts de chaque sommet i à chaque sommet j

- Rappel : Dijkstra (vorace) calculait en $\Theta(|N|^2)$ les distances d'un sommet fixé à tous les autres,
  donc résoud PLUS COURTS CHEMINS en $\Theta(|N|^3)$

- Floyd (programmation dynamique) fournit une solution alternative
  Comment ?

Plus courts chemins

(suite)

- L'idée :
  $D_k[i,j]$ = longueur du pcc de i à j restreint aux sommets $\leq k$
- On cherche : les n^2 entrées de D_n

- Alors $\forall i,j : D_k[i,j] = \min(\ D_{k-1}[i,j]\ ,$

Plus courts chemins

(suite)

- L'idée :
  $D_k[i,j]$ = longueur du pcc de i à j restreint aux sommets $\leq k$
- On cherche : les n^2 entrées de D_n

- Alors $\forall i,j : D_k[i,j] = \min(\ D_{k-1}[i,j]\ ,\ D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\ )$

- L'algo :

Plus courts chemins

(suite)

- L'idée :
  $D_k[i,j]$ = longueur du pcc de i à j restreint aux sommets $\leq k$
- On cherche : les n^2 entrées de D_n

- Alors $\forall i,j : D_k[i,j] = \min(\ D_{k-1}[i,j]\ ,\ D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\ )$

- L'algo :
  - remplir D_1, puis D_2, puis D_3, puis $\cdots$, puis D_n
  - coup de bol : un seul tableau peut stocker $D_1, D_2, \ldots, D_n$

Plus courts chemins

(suite)

```
function Floyd(L[1..n, 1..n]): array [1..n, 1..n]
    array D[1..n, 1..n]
    D ← L
    for k ← 1 to n do
        for i ← 1 to n do
            for j ← 1 to n do
                D[i, j] ← min(D[i, j], D[i, k] + D[k, j])
    return D
```

Produit chaîné de matrices

B&B Section 8.6

ORDONNANCEMENT DE PRODUITS MATRICIELS

DONNÉE: matrices $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de dimensions compatibles

CALCULER: l'ordre optimal dans lequel effectuer les produits pour obtenir $\prod_{i=1}^{n} M_i$

En classe.

```python
def matrices(D):
    m = len(D)-1
    T = [ [0]*m for i in range(m)]
    P = [[-1]*m for i in range(m)]

    for i in reversed(range(m)):
        for j in range(i+1, m):
            c, pos = float("inf"), -1

            for k in range(i, j):
                d = T[i][k] + T[k+1][j] + D[i]*D[k+1]*D[j+1]

                if (d < c):
                    c, pos = d, k

            T[i][j] = c
            P[i][j] = pos

    return P
```

Transformer en DPR est immédiat

B&B Section 8.7

Idée :

- Au lieu d'un tableau comme $T[i,j]$, une fonction récursive $fT[i,j]$
- Au lieu d'accéder à $T[i,j]$, appeler récursivement $fT[i,j]$

- Remplira "top down" au lieu de "bottom up"
- Ré-introduit les recoupements abusifs d'exemplaires
- À moins de...

...faire appel aux “fonctions à mémoire”

B&B Section 8.8

- Un tableau mtab qui mémorise les valeurs $fT[i,j]$ déjà calculées
- Avant de recalculer $fT[i,j]$, vérifier mtab[i.j]
- On récupère (presque) l'efficacité de la programmation dynamique

Exemple pour ORDONNANCEMENT DE PRODUITS MATRICIELS :

```
function fm-mem(i, j)
    if i = j then return 0
    if mtab[i, j] ≥ 0 then return mtab[i, j]
    m ← ∞
    for k ← i to j − 1 do
        m ← min(m, fm-mem(i, k) + fm-mem(k + 1, j)
                                + d[i − 1]d[k]d[j])
    mtab[i, j] ← m
    return m
```