IFT2125-6001 TA: Maëlle Zimmermann

**Démonstration 2**

# 1

**Question:** Soit $0 < \epsilon < 1$. Utiliser les relations $\subset$ et $=$ afin d'ordonner les $O$ des fonctions suivantes et démontrer la solution (en utilisant si nécessaires les théorèmes sur les limites, voir démonstration 1).

$$n \log n \quad n^8 \quad n^{1+\epsilon} \quad (1+\epsilon)^n \quad n^2/\log n \quad (n^2 - n + 1)^4$$

**Solution:** La solution est

$$O(n \log n) \subset O(n^{1+\epsilon}) \subset O(n^2/\log n) \subset O(n^8) = O((n^2 - n + 1)^4) \subset O((1+\epsilon)^n)$$

On peut démontrer chaque inclusion point par point en utilisant les théorèmes vus sur les limites et la règle de L'Hôpital.

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+\epsilon}}{n \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\epsilon}}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon n^{\epsilon-1}}{1/n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \epsilon n^{\epsilon} = +\infty}_{\text{car } \epsilon>0}.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2/\log n}{n^{1+\epsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-\epsilon}}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\epsilon)n^{-\epsilon}}{1/n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} (1-\epsilon)n^{1-\epsilon} = +\infty}_{\text{car } 1-\epsilon>0}.$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^8}{n^2/\log n} = \lim_{n\to\infty} n^6 \log n = +\infty.$$

(d) Ici à la place d'utiliser le calcul de limites qui nécessiterait d'appliquer de nombreuses fois la règle de l'Hôpital, on peut utiliser la définition de $O(f(n))$.

$$\begin{aligned}
(n^2 - n + 1)^4 &= n^8 - 4n^7 + 10n^6 - 16n^5 + 19n^4 - 16n^3 + 10n^2 - 4n + 1 \\
&\leq n^8 + 10n^6 + 19n^4 + 10n^2 + 1 \\
&\leq n^8 + 10n^8 + 19n^8 + 10n^8 + n^8 \\
&= 41n^8.
\end{aligned}$$

Ainsi par définition $(n^2 - n + 1)^4 \in O(n^8)$. De plus,

$$\begin{aligned}
(n^2 - n + 1)^4 &= n^8 - 4n^7 + 10n^6 - 16n^5 + 19n^4 - 16n^3 + 10n^2 - 4n + 1 \\
&\geq n^8 - (4n^7 + 16n^5 + 16n^3 + 4n) \\
&\geq n^8 - 40n^7 \\
&\geq n^8 - (1/2)n^8 \quad \text{car } 80n^7 \leq n^8 \quad \forall n \geq 80 \\
&= (1/2)n^8
\end{aligned}$$

Ainsi $n^8 \leq 2(n^2 - n + 1)^4$ $\forall n \geq n_0 = 80$, et donc $n^8 \in O((n^2 - n + 1)^4)$.

(e) Posons $b = 1 + \epsilon$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n^8} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln b \cdot b^n}{8n^7} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln b)^2 \cdot b^n}{8 \cdot 7n^6} \\
&= \ \ldots \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln b)^8 \cdot b^n}{8!} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

## 2

**Question:** Soit $0 < \epsilon < 1$. Utiliser les relations $\subset$ et $=$ afin d'ordonner les $O$ des fonctions suivantes et démontrer la solution (en utilisant si nécessaires les théorèmes sur les limites, voir démonstration 1).

$$n! \quad (n+1)! \quad 2^n \quad 2^{n+1} \quad 2^{2n} \quad n^n \quad n^{\sqrt{n}} \quad n^{\log n}$$

**Solution:** La solution est

$$O(n^{\log n}) \subset O(n^{\sqrt{n}}) \subset O(2^n) = O(2^{n+1}) \subset O(2^{2n}) \subset O(n!) \subset O((n+1)!) \subset O(n^n)$$

A parté: Il est utile de montrer pour commencer que $\forall d, c \in \mathbb{R}^{>0},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,\ c(\log n) \leq n^d$. En effet, $\forall d, c \in \mathbb{R}^{>0}$ nous avons:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c \log n}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{c/n}{dn^{d-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{dn^d} = 0.$$

Nous pouvons en conclure (par la définition rigoureuse d'une limite) que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,\ \frac{c \log n}{n^d} < \epsilon.$$

En prenant $\epsilon = 1$ on a démontré l'assertion.

On démontre ensuite chaque inclusion point par point comme dans l'exercice précédent.

(a) Nous avons prouvé que $(\forall d, c \in \mathbb{R}^{>0})\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,\ c(\log n) \leq n^d$. Ainsi pour $n$ suffisamment grand, on peut borner $\log n$ par $\frac{1}{2}\sqrt{n}$:

$$0 \leq \frac{n^{\log n}}{n^{\sqrt{n}}} \leq \frac{n^{\frac{1}{2}\sqrt{n}}}{n^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}\sqrt{n}}}$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}\sqrt{n}}} = 0$$

on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\log n}}{n^{\sqrt{n}}} = 0$$

(b) Pour $n$ suffisamment grand:

$$\begin{aligned} n^{\sqrt{n}} &= 2^{\log_2 n \sqrt{n}} \\ &= 2^{c \log n \sqrt{n}} && \text{car } \log_2 n = \log n / \log 2 \\ &\leq 2^{n^{\frac{3}{4}}} && \text{car } c \log n \leq n^{1/4} \text{ pour } n \text{ suff. grand} \end{aligned}$$

Ainsi pour $n$ suffisamment grand:

$$0 \leq \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} \leq \frac{2^{n^{\frac{3}{4}}}}{2^n} = \frac{2^{n^{\frac{3}{4}}}}{2^{n^{\frac{3}{4}} n^{\frac{1}{4}}}} = \frac{1}{2^{n^{\frac{3}{4}}(n^{\frac{1}{4}}-1)}}$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n^{\frac{3}{4}}(n^{\frac{1}{4}}-1)}} = 0$$

on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} = 0.$$

(c) Nous l'avons prouvé lors de la démonstration 1.

(d)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty.$$

(e) Pour $n \geq 4$, nous avons

$$\frac{n!}{4^n} = \frac{n \cdot n-1 \dots 2 \cdot 1}{4 \cdot 4 \dots 4 \cdot 4} \geq \frac{n}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

car $k/4 \geq 1$ pour $4 \leq k \leq n$. Comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = +\infty,$$

on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{4^n} = +\infty.$$

(f)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1}{n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1} = \lim_{n\to\infty} n+1 = +\infty.$$

(g) Nous avons

$$\frac{n^n}{(n+1)!} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{3} \cdots \frac{n}{n+1} \geq \frac{n}{4}$$

car $n/k \geq 1$ pour $3 \leq k \leq n$ et $n/(n+1) \geq 1/2$. Comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4} = +\infty$$

on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} = +\infty$$

## 3

**Question:** Donner explicitement avec preuve deux fonction $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ telles que $f \notin O(g)$ et $g \notin O(f)$.

**Solution:** Soient

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons que $f \in O(g(n))$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^{>0}$ tels que $f(n) \leq cg(n)$, $\forall n \geq n_0$. Soit $k = 2\max(n_0, \lceil c \rceil)$. Alors comme $k$ est pair

$$f(k) = k = 2\max(n_0, \lceil c \rceil) > c = cg(k).$$

Ceci est une contradiction car $k \geq n_0$. Nous concluons que $f \notin O(g)$.

De façon symétrique, on peut prouver que $g \notin O(f)$.

## 4

**Question:** Exécuter l'algorithme intelligent de permutations pour déterminer si (1345) appartient à l'ensemble de permutations généré par $\{(12), (12345)\}$.

**Solution:** Voici la trace de l'exécution de l'algorithme.

Initialisation

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | () | () | () | () | () |
| 2 | () | () | () | () | () |
| 3 | () | () | () | () | () |
| 4 | () | () | () | () | () |
| 5 | () | () | () | () | () |

Tamisage initial

On tamise les permutations (12) et (12345).

| | |
|---|---|
| (12) | insérer en $[1, 2]$ |
| (12345) | (12) déjà en $[1, 2]$ |
| $(12345)(21) = (2345)$ | insérer en $[2, 3]$ |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | () | (12) | () | () | () |
| 2 | () | () | (2345) | () | () |
| 3 | () | () | () | () | () |
| 4 | () | () | () | () | () |
| 5 | () | () | () | () | () |

Itération 1

On tamise les produits de toutes les paires de permutations du tableau.

| | |
|---|---|
| $(12)(12) = \text{id}$ | rien à faire |
| $(12)(2345) = (13452)$ | insérer en $[1,3]$ |
| $(2345)(12) = (12345)$ | déjà tamisée |
| $(2345)(2345) = (24)(35)$ | insérer en $[2,4]$ |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | () | (12) | (13452) | () | () |
| 2 | () | () | (2345) | (24)(35) | () |
| 3 | () | () | () | () | () |
| 4 | () | () | () | () | () |
| 5 | () | () | () | () | () |

Itération 2

Les nouvelles permutations du tableau sont (24)(35) et (13452). Note: il y a deux versions de l'algorithme. Soit nous tamisons les produits des nouvelles paires possibles entre deux permutations du tableau. Soit nous tamisons les produits de la forme $p \cdot p_i$ ou $p_i \cdot p$ où $p$ est une nouvelle permutation du tableau et $p_i$ une permutation initiale. Dans l'itération qui suit c'est la deuxième version qui est appliquée car cela fait moins de produits. Notons par ailleurs que cela revient au même de considérer (12345) ou (2345) comme la permutation initiale car c'est le même tableau qui en résulte après le tamisage initial.

| | |
|---|---|
| $(12)(13452) = (2345)$ | déjà dans le tableau |
| $(13452)(12) = (1345)$<br>$(1345)(25431) = (25)$ | (13452) déjà en $[1,3]$<br>insérer en $[2,5]$ |
| $(12)(24)(35) = (142)(35)$ | insérer en $[1,4]$ |
| $(24)(35)(12) = (124)(35)$<br>$(124)(35)(21) = (24)(35)$ | (12) déjà en $[1,2]$<br>déjà dans le tableau |
| $(2345)(13452) = (135)(24)$<br>$(135)(24)(25431) = (2345)$ | (13452) déjà en $[1,3]$<br>déjà dans le tableau |
| $(13452)(2345) = (142)(35)$ | déjà dans le tableau |
| $(2345)(24)(35) = (2543)$<br>$(2543)(52) = (345)$ | (25) déjà en $[2,5]$<br>insérer en $[3,5]$ |
| $(24)(35)(2345) = (2543)$ | déjà tamisée |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | () | (12) | (13452) | (142)(35) | () |
| 2 | () | () | (2345) | (24)(35) | (25) |
| 3 | () | () | () | () | (354) |
| 4 | () | () | () | () | () |
| 5 | () | () | () | () | () |

Itération 3

| | |
|---|---|
| $(12)(25) = (152)$ | Insérer en $[1, 5]$ |
| $(24)(35)(25) = (2453)$ | $(24)(35)$ déjà en $[2, 4]$ |
| $(2453)(53)(42) = (34)$ | insérer en $[3, 4]$ |
| $(25)(24)(35) = (2354)$ | $(2345)$ déjà en $[2, 3]$ |
| $(2354)(5432) = (345)$ | $(34)$ déjà en $[3, 4]$ |
| $(345)(43) = (45)$ | insérer en $[4, 5]$ |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | () | (12) | (13452) | (142)(35) | (152) |
| 2 | () | () | (2345) | (24)(35) | (25) |
| 3 | () | () | () | (34) | (354) |
| 4 | () | () | () | () | (45) |
| 5 | () | () | () | () | () |

Aucune case en haut de la diagonale ne contient l'identité, il n'y a plus de case à remplir et il est donc inutile de poursuivre. On conclut que $\{(12), (12345)\}$ engendre $S_5$. Ici on peut donc facilement déduire que (1345) appartient bien à l'ensemble généré par $\{(12), (12345)\}$. Dans un cas où le tableau n'est pas entièrement rempli, il faudrait tamiser la permutation dans le tableau pour répondre à la question: si tamiser la permutation modifie le tableau, elle n'appartient pas à l'ensemble généré par les permutations initiales.

On peut implémenter l'algorithme en python comme suit.

```python
def product(p, q):
  return tuple(q[p[i] - 1] for i in range(len(p)))

def inverse(p):
  q = [0] * len(p)
  for i in range(len(p)):
    q[p[i-1]] = i + 1
  return q

def sift(tableau, p):
  IDENTITY = tuple(range(1, len(p)+1))
```

```python
    q = p

    while q != IDENTITY
        i = min(x for x in range(len(q))) if q[x] != x+1)
        j = q[i] - 1
        if tableau[i][j] == IDENTITY:
            tableau[i][j] = q
            return q
        else:
            q = product(q, inverse(tableau[i][j]))
    return None

def appartenance_intelligent(permutations, r):
    IDENTITY = tuple(range(1, len(r)+1))
    tableau = [[IDENTITY] * len(r) for _ in range(len(r))]

    # Tamisage initial / Initial sift
    for p in permutations:
        sift(tableau, p)

    # Remplir tableau / Fill table
    to_sift = [(p, q) for p in permutations for q in permutations]

    while len(to_sift) > 0:
        p, q = to_sift.pop()
        q = sift(tableau, product(p, q))

        if q is not None:
        # q est une nouvelle permutation ajoutee au tableau
            to_sift.extend([(p, q) for p in permutations])
            to_sift.extend([(q, p) for p in permutations])

    # Genere r? / Generates r?
    return sift(tableau, r) is None

# Exemple / Example
a = tuple([2, 1, 3, 4, 5]) # (12)(3)(4)(5)
b = tuple([2, 3, 4, 5, 1]) # (12345)
r = tuple([2, 1, 4, 5, 3]) # (12)(345)

print(appartenance_intelligent(set([a,b]), r))
```