IFT 2125 Automne 2017 **Pierre McKenzie**
Introduction à l'algorithmique

Devoir 3

Remise : le mercredi 15 novembre, au plus tard à la démo, sous forme *papier*
See further down for English translations

1. Donnez un algorithme qui résout le désormais célèbre problème suivant en temps $\Theta(m)$:
   PDG
   DONNÉE: Graphe des m individus présents dans une salle, donné sous forme d'une matrice booléenne M, où $M[i, j] = 1$ ssi l'individu i connaît l'individu j.
   DÉCIDER: Si un *pdg* se trouve dans la salle, où un *pdg* est un individu qui ne connaît personne autre que lui-même mais que tout le monde connaît.
   Indice. Que savez-vous de i et de $j \neq i$ si $M[i, j] = 1$? Si $M[i, j] = 0$?

2. Vous disposez d'une procédure $push(i, j, d)$ qui place les d^2 entrées $A[k, \ell]$, $i \leq k < i + d$, $j \leq \ell < j + d$ d'un tableau A sur une pile et d'une procédure $pull(i', j', d)$ qui dépile un bloc de d^2 entrées et les replace dans A aux positions $A[k, \ell]$, $i' \leq k < i' + d$, $j' \leq \ell < j' + d$. Ces procédures prennent chacune un temps $g(d)$.
   Esquissez (en pseudo-code, sans le programmer) un algorithme diviser-pour-régner qui effectue une rotation de 90 degrés du contenu d'un tableau de dimension $m \times m$, où m est puissance de 2. Notez que vous ne disposez d'aucune mémoire supplémentaire pour le stockage d'un sous-tableau, autre que par l'intermédiaire de la pile.
   Par exemple $\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}}$ devient $\boxed{\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}}$ devient $\boxed{\begin{array}{cccc} 13 & 9 & 5 & 1 \\ 14 & 10 & 6 & 2 \\ 15 & 11 & 7 & 3 \\ 16 & 12 & 8 & 4 \end{array}}$.
   Donnez une récurrence qui décrit le temps d'exécution de votre algorithme en fonction de m et de la fonction g.
   Quelle est l'ordre du temps d'exécution de votre algorithme si $g(d) = d^2$? Si $g(d) = d$?

3. Un *bloc* est un triplet (a, h, b) de nombres naturels tels que $a < b$. Un *panorama* est une suite non nulle de blocs juxtaposés, i.e., une suite $(x_0, h_1, x_1), (x_1, h_2, x_2), (x_2, h_3, x_3), \ldots, (x_{n-1}, h_n, x_n)$. Nous dirons que ce panorama *respecte* le bloc (a, h, b) si et seulement si $x_0 \leq a$, $b \leq x_n$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,
$$\{a, a+1, \ldots, b\} \cap \{x_{i-1}+1, x_{i-1}+2, \ldots, x_i - 2, x_i - 1\} \neq \emptyset \implies h \leq h_i.$$
   Donnez en Python un algorithme résolvant le problème PANORAMIX ci-dessous en un temps qui n'est pas dans $\Omega(n^2)$, et déposez votre méthode sur Studium.
   Quel est le temps d'exécution de votre algorithme ?
   Quel panorama obtenez-vous de l'exécution de votre algorithme sur l'ensemble de blocs
$$\{(8,3,16), (2,3,6), (8,5,11), (25,2,125), (14,3,18), (7,6,10), (14,1,30)\}?$$

   PANORAMIX
   DONNÉE: ensemble E de n blocs.
   CALCULER: panorama $(x_0, h_1, x_1), (x_1, h_2, x_2), \ldots, (x_{m-1}, h_m, x_m)$ qui respecte tous les blocs de E et qui est minimal, i.e., qui minimise la surface $\sum_{1 \leq i \leq m} (x_i - x_{i-1}) h_i$.
   Indice. Pensez d'abord à une méthode qui combine un panorama $\mathcal{P}$ et un panorama $\mathcal{Q}$ en un panorama respectant les blocs de $\mathcal{P}$ et les blocs de $\mathcal{Q}$.

4. Faites le problème 7.32 de Brassard et Bratley (RSA sur un exemple) mais prenez les valeurs

$$\begin{aligned} p &= 31 \\ q &= 47 \\ z &= pq = 1457 \end{aligned}$$

tout en gardant $n = 13$ et $m = 123$.

Question 1. This is the same problem as in the midterm exam, but here you are asked to solve it in time $\Theta(m)$ rather than $\Theta(m^2)$, where m is the number of individuals in the room.
Hint. What do you learn about i and $j \neq i$ when $M[i,j] = 1$? When $M[i,j] = 0$?

Question 2. You have access to a procedure *push*(i, j, d) that pushes the entries $A[k, \ell]$, $i \leq k < i+d$, $j \leq \ell < j+d$ of an array A onto a stack and to a procedure *pull*(i', j', d) that pulls d^2 entries from the stack and uses these to set the positions $A[k, \ell]$, $i' \leq k < i'+d$, $j' \leq \ell < j'+d$ in A. Each of these procedures takes time $g(d)$ where g is a function.

Sketch (use pseudo-code, do not program) a divide-and-conquer algorithm that rotates the content of a table of dimension $m \times m$, where m is a power of 2, by 90 degrees. Note that there is no extra memory available, in particular, no room for the intermediate storing of a sub-table, except via the stack. See the example on page 1.

Give a recurrence that describes the execution time of your algorithm as a function of m and the fonction g.

What is order of the execution time of your algorithm if $g(d) = d^2$? If $g(d) = d$?

Question 3. A *block* is a triple (a, h, b) of natural numbers such that $a < b$. A *panorama* is a non null sequence of contiguous blocks, i.e., a sequence $(x_0, h_1, x_1), (x_1, h_2, x_2), (x_2, h_3, x_3), \ldots, (x_{n-1}, h_n, x_n)$. Such a panorama will be said to *respect* the block (a, h, b) if and only if $x_0 \leq a$, $b \leq x_n$ and for every $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\{a, a+1, \ldots, b\} \cap \{x_{i-1}+1, x_{i-1}+2, \ldots, x_i - 2, x_i - 1\} \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad h \leq h_i.$$

Give a Python algorithm solving the PANORAMIX problem below in a time that is not in $\Omega(n^2)$, and upload your method on Studium.
What is the running time of your algorithm ?
What panorama comes out of your algorithm if you run it on the set of blocs

$$\{(8, 3, 16), (2, 3, 6), (8, 5, 11), (25, 2, 125), (14, 3, 18), (7, 6, 10), (14, 1, 30)\}?$$

<u>PANORAMIX</u>
DONNÉE: set E of n blocks.
CALCULER: panorama $(x_0, h_1, x_1), (x_1, h_2, x_2), \ldots, (x_{m-1}, h_m, x_m)$ that respects every block in E and that is minimal, i.e., that minimizes the area $\sum_{1 \leq i \leq m} (x_i - x_{i-1}) h_i$.

Hint. Start by thinking of a method that combines a panorama $\mathcal{P}$ and a panorama $\mathcal{Q}$ into a panorama that respects the blocks in $\mathcal{P}$ and the blocks in $\mathcal{Q}$.

Question 4. Do problem 7.32 in the Brassard & Bratley book, except using the values prescribed in the French part on top of this page.