IFT2125 - Introduction à l'algorithmique

Diviser pour régner (B&B chapitre 7)

Pierre McKenzie

DIRO, Université de Montréal

Automne 2017

general structure of an algo divide-for-conquer

Structure générale d'un algo diviser-pour-régner

B&B Section 7.2

function $DC(x)$

if x is sufficiently small or simple **then return** $adhoc(x)$

decompose x into smaller instances $x_1, x_2, \ldots, x_\ell$

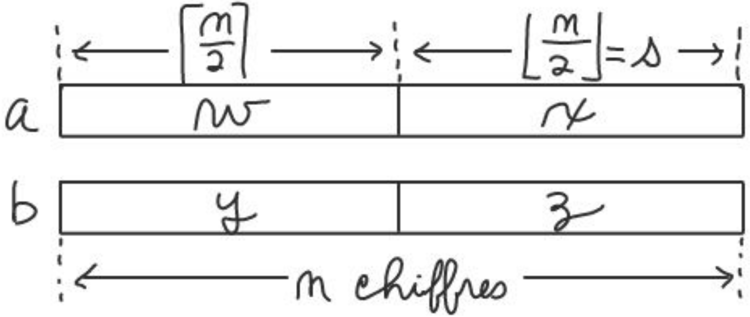
for $i \leftarrow 1$ **to** ℓ **do** $y_i \leftarrow DC(x_i)$

recombine the y_i 's to obtain a solution y for x

return y

Multiplication de grands entiers

B&B Section 7.1



$$
\begin{aligned}
a &= 2^{s} w + x \\
b &= 2^{s} y + z \\
\hline
ab &= 2^{2s} wy + 2^{s}(wz + xy) + xz
\end{aligned}
$$

PRODUIT Product

integer a of n digits, integer b of m digits

DONNÉE: entier a de n chiffres, entier b de m chiffres

CALCULER: $a \times b$

The algo divide and conquer analyzed in course:

- L'algo diviser pour régner analysé en cours :
  $O(\max(n, m) \cdot [\min(m, n)]^{\alpha})$ où $\alpha = \log_2 3 - 1 = 0,58496$

  So Donc $O(n^{1,58496})$ lorsque when $n = m$.

  On peut montrer aussi Θ. We can also show Θ.

  (L'algo classique donnerait $\alpha = 1$: exercice.)
  (The classical algo would give $\alpha = 1$: exercise.)

- B&B problème 7.2 (avec $m = n$) demande de calculer $a \times b$ à l'aide de sommes, de décalages et de 5 produits de nombres de $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ chiffres.
  Coût de cet algo vu en démo ?

  B & B problem 7.2 (with m = n) asks to calculate a × b using sums, offsets and 5 products of numbers of $\lceil n/3 \rceil$ digits. Cost of this algo seen in demo?

PRODUIT Product

integer a of n digits, integer b of m digits

DONNÉE: entier a de n chiffres, entier b de m chiffres

CALCULER: $a \times b$

The algo divide and conquer analyzed in course:

- L'algo diviser pour régner analysé en cours :
  $O(\max(n,m) \cdot [\min(m,n)]^{\alpha})$ où $\alpha = \log_2 3 - 1 = 0,58496$
  So Donc $O(n^{1,58496})$ lorsque when $n = m$.
  On peut montrer aussi Θ. We can also show Θ.
  (L'algo classique donnerait $\alpha = 1$: exercice.)
  (The classical algo would give $\alpha = 1$: exercise.)
- B&B problème 7.2 (avec $m = n$) demande de calculer $a \times b$ à l'aide de sommes, de décalages et de 5 produits de nombres de $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ chiffres.
  Coût de cet algo vu en démo ?
  B & B problem 7.2 (with m = n) asks to calculate $a \times b$ using sums, offsets and 5 products of numbers of $\lceil n/3 \rceil$ digits. Cost of this algo seen in demo?
  $O(n^{\log_3 5}) = O(n^{1,46497})$, donc mieux que $O(n^{\log_2 3})$.
  so better than

binary search of a sorted table

Fouille dichotomique d'un tableau trié

B&B Section 7.3

Reminder (well known):

Rappel (bien connu) :

function *binsearch*($T[1..n], x$)
  if $n = 0$ **or** $x > T[n]$ **then return** $n + 1$
  else return *binrec*($T[1..n], x$)

function *binrec*($T[i..j], x$)
  {Binary search for x in subarray $T[i..j]$
   with the promise that $T[i-1] < x \leq T[j]$}
  if $i = j$ **then return** i
  $k \leftarrow (i + j) \div 2$
  if $x \leq T[k]$ **then return** *binrec*($T[i..k], x$)
         else return *binrec*($T[k+1..j], x$)

binary search: calculation time

Fouille dichotomique : temps de calcul

```
function binsearch(T[1..n], x)
    if n = 0 or x > T[n] then return n + 1
    else return binrec(T[1..n], x)

function binrec(T[i..j], x)
    {Binary search for x in subarray T[i..j]
     with the promise that T[i - 1] < x ≤ T[j]}
    if i = j then return i
    k ← (i + j) ÷ 2
    if x ≤ T[k] then return binrec(T[i..k], x)
                else return binrec(T[k + 1..j], x)
```

We assume unit cost to access the element i

- On suppose coût unitaire pour accéder à l'élément i
- $T(n) \in T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + O(1)$
- $T(n) \in T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \Omega(1)$

Case 3 of Transparency 17 on Algos Analysis:

- Cas 3 du transparent 17 sur l'analyse d'algos :
  $a = 1, b = 2, \varepsilon = 0 \implies T(n) \in \Theta(n^{\log_2 1} \log n) = \Theta(\log n)$.

Merge Sort Recall (merge sort):
Rappel du tri par fusion (merge sort) :

- trier deux demi-tableaux puis fusionner sort two half-tables then merge
- $T(n) \in T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \Theta(n)$
  Case 3 of Transparency 17 on Algos Analysis:
- Cas 3 du transparent 17 sur l'analyse d'algos :
  $a = 2, b = 2, \varepsilon = 0 \Longrightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_2 2} \log n) = \Theta(n \log n)$.

that we will not study further

Quicksort (que nous n'étudierons pas plus à fond) :

- choisir pivot, trier $\{x : x \leq \text{pivot}\}$, trier $\{x : x > \text{pivot}\}$, concaténer
- en pire cas : $T(n) \in T(n-1) + \Omega(n) \Longrightarrow T(n) \in \Omega(n^2)$
- en moyenne (si tableaux équiprobables) : analyse difficile, $O(n \log n)$.

- choose pivot, sort {x: x ≤ pivot}, sort {x: x> pivot}, concatenate

- in the worst case: T (n) ∈ T (n - 1) + Ω (n) = ⇒ T (n) ∈ Ω (n2)

- on average (if equiprobable tables): difficult analysis, O (n log n).

Median

MÉDIANE

table of n elements, unsorted

DONNÉE: tableau de n éléments, non trié

CALCULER: l'élément qui serait le $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ième si le tableau était trié

the element that would be the ⌈n/2⌉-th if the array was sorted

No need to sort the table: we can find the median in Θ (n)!

- Pas besoin de trier le tableau : on peut trouver la médiane en $\Theta(n)$!
- Étonnant et à voir en détail, en cours.

Astonishing and to see in detail, in class.

EXPONENTIATION

DONNÉE: $a, n \in \mathbb{N}$
CALCULER: $\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$

Two contexts:
Deux contextes :

x at unit cost (e.g. products modulo a fixed number m) we will study this case.

- $\times$ à coût unitaire (ex : produits modulo un nombre m fixé)
  nous étudierons ce cas.
- $\times$ à coût qui croît avec le nombre de chiffres
  serait pertinent à l'arithmétique exacte de très grands nombres
  le meilleur ordre s'obtient en combinant dpr pour $a \times b$ et dpr pour a^n

at cost that increases with the number of digits would be relevant to the exact arithmetic of very large numbers
the best order is obtained by combining divide-and-conquer for a × b and divide-and-conquer for a^n

Matrix product
<u>PRODUIT MATRICIEL</u>

Square matrices and

DONNÉE: Matrices carrées $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$

CALCULER: Matrice $A \times B$

Matrix

The naive algorithm uses Ω (n^3) scalar products

- L'algorithme naïf utilise $\Omega(n^3)$ produits scalaires

Suppose scalar products at unit cost

- Supposons produits scalaires à coût unitaire
- Alors Strassen résoud PRODUIT MATRICIEL en $O(m^{\log_2 7})$!

So Strassen solves Matrix product in O (m^{log_2(7)})!

Matrix product

Produit matriciel

L'idée géniale de Strassen (B&B page 242) :

The brilliant idea of Strassen (B & B page 242):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ and } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

be two matrices to be multiplied. Consider the following operations, each of which involves just one multiplication.

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= (a_{21} + a_{22} - a_{11})(b_{22} - b_{12} + b_{11}) \\ m_2 &= a_{11}b_{11} \\ m_3 &= a_{12}b_{21} \\ m_4 &= (a_{11} - a_{21})(b_{22} - b_{12}) \\ m_5 &= (a_{21} + a_{22})(b_{12} - b_{11}) \\ m_6 &= (a_{12} - a_{21} + a_{11} - a_{22})b_{22} \\ m_7 &= a_{22}(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}) \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

We leave the reader to verify that the required product AB is given by the following matrix.

$$C = \begin{pmatrix} m_2 + m_3 & m_1 + m_2 + m_5 + m_6 \\ m_1 + m_2 + m_4 - m_7 & m_1 + m_2 + m_4 + m_5 \end{pmatrix} \tag{7.10}$$

Quelques salves dans la “guerre des décimales”

Some salvos in the "war of decimals"

- Strassen 1969 : $\log_2 7 = 2,8074$
- Pan 1978 : $\log_{70} 143640 = 2,7951$
- Bini et al 1979 : $< 2,78$
- Schönhage 1981 : $< 2,522$
- Romani 1982 : $< 2,517$
- Coppersmith Winograd 1986 : $< 2,496$
- Strassen 1986 : $< 2,479$
- Coppersmith Winograd 1989 : $< 2,376$
- 2012 : $< 2,373$ (record mondial de Virginia Vassilevska Williams[1])
  World Record of Virginia Vassilevska Williams
- 2017 : est-ce que $2 + \varepsilon$ est atteignable ?
  2017: Is 2 + ε attainable?

1. Multiplying matrices in $O(n^{2,373})$ time, Stanford University, juillet 2014, 73 pages.

Task :

La tâche :

Alice wants to secretly send a 500-digit integer to Bob

- Alice veut envoyer en secret un entier a de 500 chiffres à Bob
- N'importe qui peut lire ce qu'enverra Alice
  Anyone can read what Alice will be saying
- Personne d'autre que Bob ne doit pouvoir décoder le message
  No one but Bob can decode the message

La difficulté supplémentaire : Alice et Bob ne doivent pas supposer qu'ils possèdent au préalable un secret quelconque qu'eux seuls partagent.

The added difficulty: Alice and Bob should not assume that they have any secret beforehand that only they share.

Possible ? Étonnamment oui...sous hypothèse calculatoire !

Possible? Surprisingly yes ... under computational hypothesis!

Les outils mathématiques disponibles

The mathematical tools available

1. $\text{pgcd}(a,b) = 1 \implies (\exists s \in \mathbb{N})[\; as \equiv 1 \mod b \;]$

2. (Fermat) :
   p premier et $0 < a < p \implies a^{p-1} \equiv 1 \mod p$
   prime p and 0 < a < p

3. (Euler indicator function, definition)
   (fonction indicatrice d'Euler, définition) :
   $\varphi(z) = |\{a \in [1..z] : \text{pgcd}(a,z) = 1\}|$

4. $0 \leq a < \underbrace{pq}_{\text{premiers}} \implies (\forall x \equiv 1 \mod \varphi(pq))\;[\; a^x \equiv a \mod pq \;]$
   first

Les outils calculatoires (polynomiaux) disponibles
Calculative tools (polynomials) available

1. EULER

   prime numbers p1,. . . , pk (with repetitions)

   DONNÉE: nombres premiers $p_1, \ldots, p_k$ (avec répétitions)

   CALCULER: $\varphi(p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k)$.

   Car $\varphi(p_1 \times \cdots \times p_k) = p_1 \times \cdots \times p_k \times \underbrace{(1 - \frac{1}{p_{i_1}}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{p_{i_\ell}})}_{\text{répétitions supprimées}}$

   Because

   repetitions deleted

   We will only need

   On n'aura besoin que de $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$

2. PUISSANCE Power

   natural

   DONNÉE: naturels a, n, z

   CALCULER: $a^n \mod z$

   Par exponentiation rapide (modulo z à chaque étape).

   By rapid exponentiation (modulo z at each step).

3. INVERSEMOD

   inversemod

   natural a and z such that pgcd(a, z) = 1

   DONNÉE: naturels a et z tels que $\text{pgcd}(a, z) = 1$

   CALCULER: naturel s tel que $as \equiv 1 \mod z$ natural s such that as ≡ 1 mod z

   Par l'algorithme d'Euclide étendu (Introduction, transparent 16).

   By the extended Euclidean algorithm (Introduction, transparent 16).

Le maillon faible de la crypto : hypothèses calculatoires

Fait : aucun algo polynomial pour ci-dessous n'est du domaine public.

Hypothèse : Aucun tel algorithme n'existe !

1. <u>RACINEMOD</u>

   DONNÉE: naturels c, n, z

   CALCULER: naturel a tel que $c \equiv a^n \mod z$ si un tel a existe.

   Doit demeurer difficile même sous la promesse qu'un a existe et que z est "semi-premier", i.e., $z = pq$ avec p, q premiers

2. ni, a fortiori :

   <u>FACTORISATION</u>

   DONNÉE: naturel z

   CALCULER: décomposition de z en produits de nombres premiers

   ("a fortiori" car découvrir $z = pq$ découvre $\varphi(z)$, qui découvre s tel que $ns \equiv 1 \mod \varphi(z)$ et qui résout RACINEMOD en posant $a = c^s$, puisqu'alors $a^n = c^{ns} \equiv c \mod z$)

Le protocole RSA (Rivest, Shamir, Adleman)

The RSA protocol (Rivest, Shamir, Adleman)

1. Bob
   1. choisit deux nombres premiers p et q de 251 chiffres chacun
   2. calcule $z = pq$ et $\phi = (p-1)(q-1)$
   3. choisit un nombre $n \in [1..z-1]$
   4. calcule $s \in [1..z-1]$ tel que $ns = 1 \mod \phi$
      (si échec alors $\text{pgcd}(n, \phi) \neq 1$ alors reprendre le choix de n)
   5. annonce z et n publiquement

1 chooses two prime numbers p and q of 251 digits each
2 calculate z = pq and ϕ = (p-1) (q-1)
3 chooses a number n $\in$ [1..z - 1]
4 calculule s $\in$ [1..z-1] such that ns = 1 mod ϕ
(if failure then pgcd (n, ϕ) != 1 then resume the choice of n)
5 advertises z and n publicly

Public key cryptography

Cryptographie à clef publique

Le protocole RSA (Rivest, Shamir, Adleman)

The RSA protocol (Rivest, Shamir, Adleman)

1. Bob
   1. choisit deux nombres premiers p et q de 251 chiffres chacun
   2. calcule $z = pq$ et $\phi = (p-1)(q-1)$
   3. choisit un nombre $n \in [1..z-1]$
   4. calcule $s \in [1..z-1]$ tel que $ns = 1 \mod \phi$
      (si échec alors $\text{pgcd}(n, \phi) \neq 1$ alors reprendre le choix de n)
   5. annonce z et n publiquement

1 chooses two prime numbers p and q of 251 digits each
2 calculate z = pq and ϕ = (p-1) (q-1)
3 chooses a number n ∈ [1..z - 1]
4 calculule s ∈ [1..z-1] such that ns = 1 mod ϕ
(if failure then pgcd (n, ϕ) != 1 then resume the choice of n)
5 advertises z and n publicly

2. Alice
   1. calcule $m = a^n \mod z$
   2. envoie m (que tous observent) à Bob

1 calculates m = a^n mod z
2 sends m (that all observe) to Bob

Cryptographie à clef publique

Le protocole RSA (Rivest, Shamir, Adleman)

1. Bob
   1. choisit deux nombres premiers p et q de 251 chiffres chacun
   2. calcule $z = pq$ et $\phi = (p-1)(q-1)$
   3. choisit un nombre $n \in [1..z-1]$
   4. calcule $s \in [1..z-1]$ tel que $ns = 1 \mod \phi$
      (si échec alors pgcd$(n, \phi) \neq 1$ alors reprendre le choix de n)
   5. annonce z et n publiquement

1 chooses two prime numbers p and q of 251 digits each
2 calculate z = pq and ϕ = (p-1) (q-1)
3 chooses a number n ∈ [1..z - 1]
4 calculule s ∈ [1..z-1] such that ns = 1 mod ϕ
(if failure then pgcd (n, ϕ) != 1 then resume the choice of n)
5 advertises z and n publicly

2. Alice
   1. calcule $m = a^n \mod z$
   2. envoie m (que tous observent) à Bob

1 calculates m = a^n mod z
2 sends m (that all observe) to Bob

3. Bob
   1. Bob calcule $m^s \mod z = a^{ns} \mod z = a$, le secret d'Alice !
      Bob calculates m^s mod z = a^(ns) mod z = a, Alice's secret!

Les étapes 2.1 et 3.1 ne sont rendues possibles que par diviser-pour-régner.
Steps 2.1 and 3.1 are only made possible by divide-and-conquer.