Introduction à l'algorithmique **Automne 2017**

IFT2125-6001 TA: Maëlle Zimmermann

Démonstration 3

1

Question: Un démonstrateur enseigne initialement à n étudiants. À chaque semaine, au moins le quart de ses étudiants abandonnent le cours. Estimer le nombre de semaines, au maximum, qui s'écouleront avant qu'il ne reste plus personne au cours.

Solution: Le nombre maximum de semaine s'écoulera si le nombre minimum d'étudiants abandonne le cours chaque semaine. Ce nombre minimum est par définition le quart, donc $\lceil \frac{n}{4} \rceil$, car le nombre d'étudiants doit être entier.

Nous définissons une fonction $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui fait correspondre à un nombre d'étudiants initial le nombre de semaines maximal que peut durer le cours avant d'être vide. Nous définissons T récursivement ainsi:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0, \\ T(n - \lceil \frac{n}{4} \rceil) + 1 & \text{if } n > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Comme T est sous forme récursive, il faut l'analyser pour connaître le nombre maximal de semaines en fonction du nombre initial d'étudiants. On note d'abord que $n - \lceil \frac{n}{4} \rceil = \lfloor \frac{3n}{4} \rfloor$.

Idée: montrons, par induction, que pour tout $i \geq 4$ nous avons $T(4^i) \leq 5(i-4) + T(4^4)$.

Cas de base: $i = 4$: Nous avons $T(4^4) \leq 5(4-4) + T(4^4)$.

Etape d'induction: Soit $i > 4$. Supposons que la proposition soit vraie pour $i - 1$. Nous avons

$$
\begin{aligned}
T(4^i) &= T(3 \cdot 4^{i-1}) + 1 && \text{par déf. de } T \\
&= T(3^2 \cdot 4^{i-2}) + 2 && \text{par déf. de } T \\
&= T(3^3 \cdot 4^{i-3}) + 3 && \text{par déf. de } T \\
&= T(3^4 \cdot 4^{i-4}) + 4 && \text{par déf. de } T \\
&= T(3^5 \cdot 4^{i-5}) + 5 && \text{par déf. de } T \\
&= T((\frac{3}{4})^5 4^i) + 5 && \\
&\leq T(4^{i-1}) + 5 && \text{car } T \text{ non décroissante et } (\frac{3}{4})^5 \leq \frac{1}{4} \\
&= 5(i-1-4) + T(4^4) + 5 && \text{par hyp. d'ind.} \\
&= 5(i-4) + T(4^4).
\end{aligned}
$$

Cela conclut la preuve par induction. Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$ tel que $n = 4^i$ pour un certain i, nous avons $T(n) \leq 5(\log_4 n - 4) + T(4^4)$. Nous obtenons donc que $T(n) \in O(\log_4 n : n = 4^i)$. Comme la fonction $\log_4 n$ est 4-harmonieuse et que T est non décroissante, nous concluons que $T(n) \in O(\log_4 n) = O(\log n)$.

2

Question: Est-ce que la fonction $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ suivante

$$
t(n) = \begin{cases} a_0 & \text{si } n = 0, \\ a_1 & \text{si } n = 1 \\ t(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor) + f(n) & \text{si } n > 1 \end{cases}
$$

est éventuellement non décroissante pour tout $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, pour tout $b \in \mathbb{N}$ et pour toute fonction f non décroissante?

Solution: Non. Nous pouvons trouver un contre-exemple. Considérons la fonction suivante:

$$
t(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n = 1 \\ t(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) & \text{si } n > 1 \end{cases}
$$

Montrons par induction sur i que $t(3^i) = 0$ et $t(2 \cdot 3^i) = 1$.

<u>Cas de base: $i = 0$:</u>

$$
\begin{aligned}
t(3^0) &= t(1) = 0 \\
t(2 \cdot 3^0) &= t(2) = t(\lfloor \frac{2}{3} \rfloor) = t(0) = 1
\end{aligned}
$$

Etape d'induction: Soit $i > 0$. Supposons que la proposition est vraie pour $i-1$ et montrons qu'elle est vraie pour i.

$$\begin{aligned}
t(3^i) &= t(3^{i-1}) && \text{par déf. de } t \\
&= 0 && \text{par hyp. d'ind.} \\
t(2 \cdot 3^i) &= t(2 \cdot 3^{i-1}) && \text{par déf. de } t \\
&= 1 && \text{par hyp. d'ind.}
\end{aligned}$$

Cela prouve la proposition par induction. Supposons maintenant par l'absurde que t est éventuellement non décroissante. Par définition, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n, n' \geq n_0$, $n' \geq n \to t(n') \geq t(n)$. Or prenons $n = 2 \cdot 3^{n_0}$ et $n' = 3^{n_0+1}$. Nous avons bien $n' \geq n$. En revanche nous obtenons $0 = t(n') < t(n) = 1$, ce qui est une contradiction.

3

Question: Prouver que la fonction $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ suivante est éventuellement non décroissante:

$$t(n) = \begin{cases} d & \text{si } 0 \leq n \leq n_0, \\ a_1 t(\lceil \frac{n}{b} \rceil) + a_2 t(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor) + cf(n) & \text{si } n > n_0 \end{cases}$$

où $n_0 > 0$, $c, d \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, $a_1, a_2, b \in \mathbb{N}$, $a_1 + a_2 \geq 1$, $b \geq 2$ et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ est non décroissante.

Solution: Montrons par induction sur n que $t(n+1) \geq t(n)$ pour tout $n \geq n_0$.

Cas de base: $n = n_0$:

$$\begin{aligned}
t(n_0+1) &= a_1 t(\lceil \frac{n_0+1}{b} \rceil) + a_2 t(\lfloor \frac{n_0+1}{b} \rfloor) + cf(n_0+1) && \text{par déf. de } t \\
&= a_1 t(k_1) + a_2 t(k_2) + cf(n_0+1) && \text{où } k_1, k_2 \leq n_0 \text{ car } n_0+1 \geq 2 \text{ et } b \geq 2 \\
&= (a_1+a_2)d + cf(n_0+1) && \text{par déf. de } t \\
&\geq (a_1+a_2)d && \text{car } c \geq 0 \text{ et } f \text{ non nég.} \\
&\geq d && \text{car } a_1+a_2 \geq 1 \\
&= t(n_0) && \text{par déf. de } t
\end{aligned}$$

Etape d'induction: Soit $n > n_0$. On suppose que la proposition est vraie pour tout

$n_0 \leq k < n$. Montrons que la proposition est vraie pour n:

$$\begin{aligned}
t(n+1) &= a_1 t(\lceil \frac{n+1}{b} \rceil) + a_2 t(\lfloor \frac{n+1}{b} \rfloor) + cf(n+1) && \text{par déf. de } t \\
&\geq a_1 t(\lceil \frac{n+1}{b} \rceil) + a_2 t(\lfloor \frac{n+1}{b} \rfloor) + cf(n) && \text{car } f \text{ non décroissante} \\
&\geq a_1 t(\lceil \frac{n}{b} \rceil) + a_2 t(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor) + cf(n) && \text{car } n, b \geq 2 \text{ et par hyp. d'ind.} \\
&= t(n) && \text{par déf. de } t
\end{aligned}$$

4

Question: Soit T le tableau résultant de l'algorithme d'appartenance à un groupe de permutations. Sachant qu'une permutation appartenant à ce groupe peut s'exprimer comme

$$T[m, j_m] * T[m-1, j_{m-1}] * \cdots * T[2, j_2] * T[1, j_1]$$

où $T[i, j]$ provient de la ième ligne de la diagonale supérieure du tableau, justifier que cette notation est unique.

Solution: Supposons qu'une permutation puisse s'écrire de deux façons distinctes comme produits d'éléments au dessus de la diagonale du tableau. Nous avons:

$$a_m * a_{m-1} * \cdots * a_2 * a_1 = b_m * b_{m-1} * \cdots * b_2 * b_1$$

où a_k et b_k représentent des permutations de la ligne k. Soit i le plus petit indice de ligne où $a_i \neq b_i$. Alors

$$a_m * a_{m-1} * \cdots * a_i = b_m * b_{m-1} * \cdots * b_i$$

Notons que comme a_i et b_i sont deux permutations différentes de la ligne i du tableau, elles n'envoient pas i sur le même point, c'est-à-dire $i^{a_i} \neq i^{b_i}$. Multiplions ensuite l'égalité par $a_{i+1}^{-1} * \cdots * a_m^{-1}$ de chaque côté:

$$a_i = a_{i+1}^{-1} * \cdots * a_m^{-1} * b_m * b_{m-1} * \cdots * b_{i+1} * b_i$$

Comme les permutations de gauche et de droite sont identiques, elles envoient i sur le même point. Par définition du tableau, les permutations $a_{i+1}, \ldots, a_m, b_{i+1}, \ldots, b_m$ fixent i, et leurs inverses également. Cela implique que l'image de i par $a_{i+1}^{-1} * \cdots * a_m^{-1} * b_m * b_{m-1} * \cdots * b_i$ est i^{b_i} (point sur lequel b_i envoie i). Ainsi $i^{a_i} = i^{b_i}$.

Ceci est une contradiction car a_i et b_i n'envoient pas i sur le même point.