Институт математики с вычислительным центром

УФИЦ РАН

На правах рукописи

Лебедев Михаил Евгеньевич

Стационарные решения уравнения Гросса–Питаевского с периодически модулированной нелинейностью

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ

на соискание ученой степени кандидата наук

по прикладной математике

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Алфимов Георгий Леонидович

Москва – 2021

Работа выполнена в *ИМВЦ УФИЦ РАН*.

Научный руководитель: **Алфимов Георгий Леонидович**
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты: **фамилия имя отчество**
ученая степень, ученое звание

фамилия имя отчество
ученая степень, ученое звание

Ведущая организация: Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН

Защита состоится «____» ____________ 2021 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *шифр совета* при *название организации, при которой создан совет*, расположенном по адресу: *адрес*.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *название организации*, а также по ссылке http://www.xyz.com.

Автореферат разослан «____» ____________ 2021 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент *Самбурский Л. М.*

Общая характеристика работы

Введение. Начиная с 90-х годов прошлого века, нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) с дополнительной пространственной неавтономностью продолжает оставаться объектом пристального изучения. Интерес к этому классу уравнений во многом обусловлен экспериментальными успехами в исследовании конденсата Бозе–Эйнштейна (БЭК). Явление конденсата вещества при сверхнизких температурах было предсказано в работах Бозе и Эйнштейна в 1924 году[1]. Экспериментально такое состояние вещества получено впервые в 1995 году независимо двумя группами исследователей[2]. В 2001 году это открытие было удостоено Нобелевской Премии.

Возможность получение БЭК стимулировала экспериментальные и теоретические исследования по всему миру, открывшие целый ряд потенциальных практических приложений. В частности, ожидается, что использование БЭК должно привести к появлению новых высокочастотных интерферометров[3]. Также БЭК может быть использован для построения квантовых компьютеров[4] и квантовых лазеров[5].

Динамика БЭК в приближении среднего поля описывается уравнением шредингеровского типа с пространственной неавтономностью.

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - U(x)\Psi + P(x)|\Psi^2|\Psi = 0. \tag{1}$$

В контексте теории БЭК уравнение типа (1) носит название *уравнения Гросса – Питаевского*. Здесь $\Psi(t,x)$ представляет обезразмеренную волновую функцию

[1] A. Einstein, “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases”, Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1924.

[2] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, “Observation of Bose–Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor”, Science, (New Series), Vol. 269, P. 198-201, 1995.

[3] C. Gross, T. Zibold, E. Nicklas, J. Esteve, and M. K. Oberthaler, “Nonlinear atom interferometer surpasses classical precision limit”, Nature, Vol. 464, P. 1165–1169, 2010.

[4] D. Jaksch, P. Zoller, “The cold atom Hubbard toolbox”, Annals of Physics, Vol. 315, P. 52–79, 2005.

[5] W. Guerin, J.-F. Riou, J. P. Gaebler, V. Josse, P. Bouyer, and A. Aspect, “Guided Quasicontinuous Atom Laser”, Phys. Rev. Lett., Vol. 97, P. 200402, 2006.

конденсата, функция $U(x)$ описывает потенциал ловушки, удерживающей конденсат, а $P(x)$ соответствует нелинейному потенциалу (или *псевдопотенциалу*). Псевдопотенциал $P(x)$ описывает зависимость длины рассеяния частиц конденсата от пространственной координаты, которая может быть переменной величиной, что достигается различными техниками, как например, использованием так называемого резонанса Фешбаха[6]. Интервалы с положительным значением псевдопотенциала $P(x) > 0$ соответствуют случаю межатомного притяжения, в то время как интервалы с отрицательным значением, $P(x) < 0$, — межатомному отталкиванию частиц конденсата. Классическими модельными примерами потенциала $U(x)$ является гармонический потенциал $U(x) = Ax^2$ (магнитная ловушка) и периодический потенциал $U(x) = A\cos 2x$ (оптическая ловушка). В качестве модельных примеров псевдопотенциала $P(x)$ используются различные периодические функции (нелинейная решетка), как, например, косинусный потенциал $P(x) = A + B\cos \Omega x$[7].

Для физических приложений важную роль играют решения уравнения (1) специального вида — так называемые *стационарные локализованные решения* (*стационарные локализованные моды*, СЛМ). Они получаются в результате подстановки в соответствующее уравнение (1) выражения

$$\Psi(t, x) = u(x)e^{-i\omega t}, \tag{2}$$

где функция $u(x)$ удовлетворяет условию локализации, $u(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$, а ω есть вещественный параметр, имеющий смысл химического потенциала конденсата. Профиль стационарного локализованного решения $u(x)$, действительнозначная функция[8], удовлетворяет уравнению

$$u_{xx} + (\omega - U(x))u + P(x)u^3 = 0. \tag{3}$$

[6] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, "Feshbach resonances in ultracold gases", Rev. Mod. Phys. Vol. 82, P. 1225, 2010.

[7] H. Sakaguchi, B. A. Malomed, "Matter-wave solitons in nonlinear optical lattices", Phys. Rev. E, Vol. 72, P. 046610, 2005.

[8] G. L. Alfimov, V. V. Konotop, and M. Salerno, "Matter solitons in Bose–Einstein condensates with optical lattices", Europhys. Lett., Vol. 58, P. 7–13, 2002

Стоит отметить, что далеко не все локализованные решения уравнения (3) одинаково интересны с физической точки зрения. В частности, особо важным свойством является устойчивость локализованных решений. Если СЛМ является неустойчивой, малые возмущения такого решения приводят к его разрушению при эволюции, описываемой уравнением (1). Поэтому именно устойчивые локализованные решения особенно ценны для различных физических приложений, а сама проверка СЛМ на устойчивость является существенной частью их теоретического исследования.

Постановка проблемы. Итак, при изучении динамики, описываемой уравнением (1), естественным образом возникают следующие вопросы:

1. Возможно ли перечислить *полностью все* стационарные локализованные решения уравнения (1), одновременно существующих при заданных параметрах уравнения?

2. Какие из перечисленных решений являются устойчивыми?

Степень разработанности темы исследования. Стоит отметить, что в большинстве работ, посвящённых данной тематике вопрос о поиске / описании *всех* СЛМ не ставится, и вместо него рассматривается вопрос об отдельных классах СЛМ, соответствующих той или иной физической структуре, см. обзор[9]. В то же время, несмотря на некоторую «амбициозность» вопроса (1), сочетание строгих аналитических утверждений с численным счётом позволяет добиться существенных результатов в этом направлении. Отметим некоторое количество важных результатов.

Для уравнения (3) с потенциалом $U(x)$, имеющего вид бесконечной потенциальной ямы, $U(x) = Ax^2$, для случая отталкивающий взаимодействий, $P(x) \equiv -1$, был предложен метод «доказательных вычислений», позволяющий

[9] Y. V. Kartashov, B. A. Malomed, and L. Torner, "Solitons in nonlinear lattices", Rev. Mod. Phys. Vol. 83, P. 247, 2011.

гарантировать нахождение *всех* ограниченных решений[10]. Разработанный метод впоследствии был обобщен на системы из нескольких связанных уравнений Гросса–Питаевского, в которых соответствующие псевдопотенциалу коэффициенты также не зависят от пространственной координаты[11].

Для периодического потенциала $U(x)$, как, например, $U(x) = A\cos 2x$, в случае исключительно отталкивающих взаимодействий частиц конденсата $P(x) \equiv -1$ предложены достаточные условия, опять же допускающие исчерпывающее описание *всех* ограниченных решений уравнения (3). При этом показано, что выполнения этих условий позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между ограниченными решениями и всевозможными бесконечными в обе стороны последовательностями символов из некоторого конечного алфавита[12]. Последовательности такого рода названы авторами работы *кодами решений*, а сам процесс присвоения кодов – *кодированием решений*. Проверка достаточных условий проводилась авторами работы с помощью численного счёта. Опираясь на результаты предыдущей работы в другой работе[13] был разработан алгоритм, позволяющий по коду решения численно построить его профиль.

Актуальность темы исследования. Актуальной задачей является обобщение результатов приведенных выше работ на случай переменного псевдопотенциала $P(x) \neq \text{const}$. В частности, перспективным направлением исследования является обобщение аппарата кодирования решений на случай периодических потенциала и псевдопотенциала. Детальная классификация решений

[10] G. L. Alfimov, D. A. Zezyulin, “Nonlinear modes for the Gross–Pitaevskii equation — a demonstrative computational approach”, Nonlinearity, Vol. 20, P. 2075–2092, 2007.

[11] G. L. Alfimov, I. V. Barashenkov, A. P. Fedotov, V. V. Smirnov, D. A. Zezyulin, “Global search for localised modes in scalar and vector nonlinear Schrödinger-type equations”, Physica D, Vol. 397, P. 39–53, 2019.

[12] G. L. Alfimov, A. I. Avramenko, “Coding of nonlinear states for the Gross–Pitaevskii equation with periodic potential”, Physica D, Vol. 254, P. 29–45, 2013.

[13] G. L. Alfimov, P. P. Kizin, D. A. Zezyulin, “Gap solitons for the repulsive Gross-Pitaevskii equation with periodic potential: Coding and method for computation”, Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B, Vol. 22, P. 1207–1229, 2017.

уравнения (1) открывает возможность обнаружения новых, ранее неизвестных устойчивых СЛМ.

Цели и задачи диссертационной работы. Основным объектом исследования данной диссертационной работы являются стационарные решения одномерного уравнения Гросса–Питаевского (1) с *периодическим псевдопотенциалом*. Цели и задачи работы можно сформулировать следующим образом:

1. Обобщить подход, связанный с кодированием решений[12], на случай периодического потенциала $U(x)$ и периодического псевдопотенциала $P(x)$. Сформулировать достаточные условия, дающие возможность применить такой подход, а также указать способ проверки этих условий (аналитически или с помощью численного счета).

2. Исследовать множество стационарных решений в случае принципиально нелинейных взаимодействий, когда линейным потенциалом можно пренебречь, $U(x) \equiv 0$,

3. Для случая бесконечной потенциальной ямы $U(x) = Ax^2$ исследовать влияние периодического псевдопотенциала на структуру множества стационарных локализованных решений и их устойчивость.

Методология и методы исследования. Для исследования возможных типов СЛМ в работе используется так называемый «метод исключения сингулярных решений»[12]. Решение уравнения (3) называется *сингулярным*, если оно уходит на бесконечность в конечной точке числовой прямой:

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \infty. \tag{4}$$

При выполнении определенных условий «большая часть» решений уравнения (3) представляет собой сингулярные решения. Множество оставшихся решений, называемых *регулярными*, оказывается достаточно «бедным» и может быть полностью описано в терминах символической динамики.

Решение дифференциального уравнения (3) производится с помощью метода Рунге–Кутта четвертого порядка точности. Для построения локализованных решений уравнения (3) в работе используется метод стрельбы. Устойчивость построенных решений проверяется с помощью метода коллокаций Фурье[14], а также посредством эволюционного моделирования динамики уравнения (1) с помощью консервативной конечно-разностной схемы[15]. Все алгоритмы и численные методы реализованы в среде `MATLAB` с использованием расширения `MEX` для поддержки высокопроизводительных вычислений.

Научная новизна. Доказан ряд общих утверждение, указывающих, когда уравнение (3) допускает существование сингулярных решений, а также, когда все его решения регулярны. В частности, показано, что если псевдопотенциал принимает отрицательное значение хотя бы в одной точке x_0, $P(x_0) < 0$, то существуют два однопараметрических семейства решений, уходящих на бесконечность в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \infty$, а также получены асимптотические формулы для этих семейств.

Метод исключения сингулярный решений получает дальнейшее развитие. В работе предложены достаточные условия существования взаимно-однозначного соответствия между регулярными решениями уравнения (3) и бесконечными последовательностями символов над некоторым алфавитом. В отличии от ранее полученных результатов[12], предложенные достаточные условия могут быть эффективно проверены с помощью численного счета. В диссертации приводится алгоритм их численной проверки, а также его теоретическое обоснование.

Для случая $U(x) \equiv 0$ и модельного периодического псевдопотенциала вида $P(x) = A + B \cos 2x$ было исследовано множество стационарных локализованных решений. Использование выше упомянутых техник позволило эффективно описать множество СЛМ и в конечном счёте обнаружить новое устойчивое ре-

[14] J. Yang, "Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems", Philadelphia: SIAM, 2010.

[15] V. Trofimov, N. Peskov Comparison of finite-difference schemes for the Gross-Pi taevskii equation // Mathematical Modelling and Analysis. — 2009. — Mar. — Vol. 14. — P. 109–126.

шение, которое ранее не обсуждалось в литературе при рассмотрении задач, связанных с уравнением (1). Найденное новое устойчивое решение получило называние *дипольный солитон* [1].

Наконец, в данной работе изучен вопрос о влиянии периодического псевдопотенциала вида $P(x) = A + B\cos\Omega x$ на множество СЛМ в случае бесконечной потенциальной ямы, $U(x) = Ax^2$. Показано, что по сравнению с хорошо изученным случаем $P(x) = \mathrm{const}$, множество стационарных локализованных решений оказывается значительно богаче, а именно, появляются существенно нелинейные решения, которые не существуют в малоамплитудном пределе. Исследована зависимость устойчивости СЛМ от частоты псевдопотенциала Ω. Для псевдопотенциала с нулевой средней, $P(x) = B\cos\Omega x$, показано, что увеличение частоты позволяет стабилизировать малоамплитудные решения, чьи аналоги в модели с $P(x) = \mathrm{const}$ оказываются неустойчивыми.

Положения, выносимые на защиту:

1. Сформулированы и доказаны общие утверждения о наличии и отсутствии сингулярных решений уравнения (3). Показано, что в случае $P(x) > 0$ все решения уравнения (3) регулярны. Если $P(x)$ принимает отрицательное значение хотя бы в одной точке x_0, $P(x_0) < 0$, то существуют два однопараметрических семейства решений, уходящих на бесконечность в точке $x = x_0$; построена асимптотика этих решений. В том случае, когда $Q(x) < 0$ и $P(x) < 0$, показано, что все решения уравнения (3) сингулярны.

2. Сформулированы достаточные условия возможности кодирования регулярных решений уравнения (3) и предложен эффективный алгоритм численной проверки этих условий.

3. Для случая $U(x) \equiv 0$, $P(x) = A + B\cos 2x$ исследовано множество СЛМ и обнаружено новое устойчивое локализованное решение уравнения (1) — *дипольный солитон*.

4. В случае бесконечной потенциально ямы показано, что присутствие периодического псевдопотенциала приводит к появлению новых классов СЛМ, не имеющих аналогов в моделях с $P(x) = \mathrm{const}$. Для псевдопотенциала с нулевой средней установлено, что частота псевдопотенциала существенным образом влияет на устойчивость СЛМ, а именно, увеличение частоты приводит к стабилизации малоамплитудных решений.

Степень достоверности и апробация результатов. Модель Гросса – Питаевского является классической задачей из физики сверхнизких температур и её достоверность не вызывает сомнений. В данной диссертационной работе численно строятся локализованные стационарные решения указанной модели, а также численно исследуется устойчивость таких решений. Построение решений производится при помощи стандартных численных методов с контролируемой точностью. Исследование устойчивости построенных решений производится методом коллокаций Фурье, который хорошо зарекомендовал себя для решения подобных задач. Результаты исследования устойчивости проверяются численным решением эволюционной задачи при помощи конечно-разностной схемы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на различных научных семинарах и конференциях, в числе которых:

1. «Гамильтонова динамика, неавтономные системы и структуры в уравнениях с частными производными», Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород, декабрь, 2014 г.

2. «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», БашГУ, Уфа, сентябрь, 2015 г.

3. «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород, июль, 2016 г.

4. «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Башкортостан, оз. Банное, март, 2018 г.

5. “Nonlinear Phenomena in Bose Condensates and Optical Systems”, Ташкент, Узбекистан, август, 2018 г.

6. «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Башкортостан, оз. Банное, март, 2019 г.

7. «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Башкортостан, оз. Банное, март, 2021 г.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах [1–3] и 7 тезисов докладов на различных конференциях [4—10]. Также за время работы над диссертацией автором было опубликовано 2 статьи[16],[17] и 1 тезис доклада[18] по смежным тематикам.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором с использованием разработанных методов и компьютерных программ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, трёх приложений и библиографии. Общий объем диссертации ? страниц, из них ? страниц текста, включая ? рисунков, четыре таблицы и одну схему алгоритма. Библиография включает ? наименования на ? страницах.

[16] M. E. Lebedev, D. A. Dolinina, K. B. Hong, *et al.*, “Exciton-polariton Josephson junctions at finite temperatures”, Scientific Reports Vol. 7, P. 9515, 2017

[17] D. A. Zezyulin, M. E. Lebedev, G. L. Alfimov, and B. A. Malomed, “Symmetry breaking in competing single-well linear-nonlinear potentials”, Phys. Rev. E, Vol. 98, P. 042209, 2018.

[18] D. A. Zezyulin, M. E. Lebedev, G. L. Alfimov, and B. A. Malomed, “Symmetry breaking in competing single-well linear-nonlinear potentials”, Тезисы доклада на конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Башкортостан, оз. Банное, март, 2019.

Содержание работы

Во введении (Introduction) обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе (Chapter I)

Результаты первой главы опубликованы в работах [2], [4] и [5].

Во второй главе (Chapter II)

Результаты второй главы опубликованы в работах [9] и [10].

В третьей главе (Chapter III)

Результаты третьей главы опубликованы в работах [1], [6] и [8].

В четвертой главе (Chapter IV)

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [3] и [7].

В заключении (Conclusion)

В приложении A (Appendix A)

В приложении B (Appendix B)

В приложении C (Appendix C)

Список публикаций автора по теме диссертации

1. *Lebedev M. E., Alfimov G. L., Malomed B.* Stable dipole solitons and soliton complexes in the nonlinear Schrödinger equation with periodically modulated nonlinearity // Chaos. — 2016. — Vol. 26. — P. 073110.

2. *Alfimov G. L., Lebedev M. E.* On regular and singular solutions for equation $u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3$ // Ufa Mathematical Journal. — 2015. — Vol. 7, no. 2. — P. 3–16.

3. Localized modes in the Gross-Pitaevskii equation with a parabolic trapping potential and a nonlinear lattice pseudopotential / G. L. Alfimov [et al.] // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2019. — Vol. 66. — P. 194–207. — ISSN 1007-5704.

4. *Alfimov G. L., Lebedev M. E.* Coding of stationary modes for the nonlinear Schrödinger equation with periodically modulated nonlinearity // Тезисы доклада на конференции «Гамильтонова динамика, неавтономные системы и структуры в уравнениях с частными производными», Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород. — 2014. — Дек.

5. *Алфимов Г. Л., Лебедев М. Е.* Стационарные моды нелинейного уравнения Шрёдингера в присутствии линейного и нелинейного потенциалов // Тезисы доклада на конференции «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», БашГУ, Уфа. — 2015. — Сент.

6. *Lebedev M. E., Alfimov G. L., Malomed B. A.* Stable dipole solitons and soliton complexes in the nonlinear Schrödinger equation with periodically modulated nonlinearity // Тезисы доклада на конференции «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород. — 2016. — Июль.

7. Steady-states for the Gross-Pitaevskii equation with nonlinear lattice pseudopotential / G. L. Alfimov [и др.] // Тезисы доклада на конференции «Ком-

плексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Башкортостан, оз. Банное. — 2018. — Март.

8. Steady-states for the Gross-Pitaevskii equation with nonlinear lattice pseudopotential / G. L. Alfimov [et al.] // Books of abstracts of conference "Nonlinear Phenomena in Bose Condensates and Optical Systems", Tashkent, Uzbekistan. — 2018. — Aug.

9. *Lebedev M. E.*, *Shipitsyn K. V.* Coding of solutions for the Duffing equation with non-homogeneous nonlinearity // Тезисы доклада на конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Башкортостан, оз. Банное. — 2019. — Март.

10. *M. E. Lebedev G. L. A.* Coding of bounded solutions of equation $u_{xx} - u + \eta(x)u^3 = 0$ with periodic piecewise constant function $\eta(x)$ // Тезисы доклада на конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Башкортостан, оз. Банное. — 2021. — Март.