

# Конденсат Бозе–Эйнштейна в нелинейных решётках: математическое и численное исследование

Лебедев Михаил Евгеньевич  
Научный руководитель: Алфимов Г. Л.

Институт математики с вычислительным центром  
УФИЦ РАН

*gloriouslair@gmail.com*

Уфа – 2021

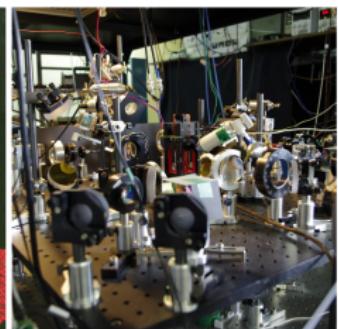
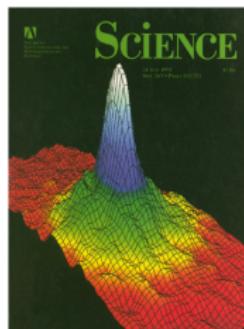
# Актуальность работы

Одномерное уравнение Гросса–Питаевского (УГП):

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - U(x)\Psi + P(x)|\Psi|^2\Psi = 0, \quad U(x), P(x) \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

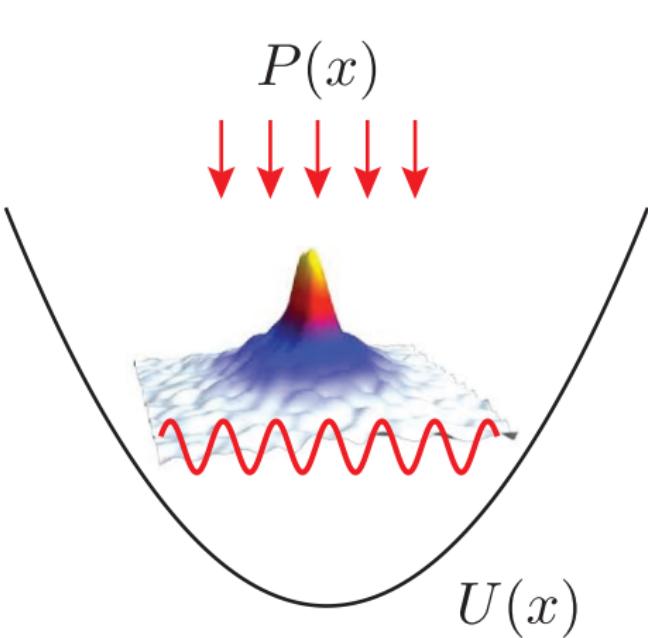
В контексте теории конденсата Бозе–Эйнштейна (БЭК) описывает поведение «сигарообразного» конденсата;  $\Psi(t, x)$  — *волновая функция*.

- БЭК — это состояние вещества, возникающее при сверхнизких температурах.
- Предсказан в 1924 году в работах А. Эйнштейна и С. Бозе.
- Обнаружен в 1995 году в экспериментах Э. Корнелла, К. Вимана.
- 1995–2000-е: эксперименты с различными *потенциалами удержания*  $U(x)$ , при этом  $P(x) \equiv \pm 1$  (притяжение / отталкивание частиц).
- 2000–2010-е: появляются экспериментальные возможности генерации *периодического псевдовопотенциала*  $P(x)$ .



# Актуальность работы

## Резонанс Фешбаха, нелинейная решётка



$a_s = a_s(x)$  — длина рассеяния частиц конденсата есть периодическая функция,  $P(x) \sim a_s(x)$ .

Механизмы создания нелинейной решётки:

- Магнитный резонанс Фешбаха.
- Оптический резонанс Фешбаха.

# Объект исследования

## Стационарные локализованные решения<sup>1</sup>

Решение уравнения (1) называется *стационарным*, если оно представимо в виде

$$\Psi(t, x) = u(x)e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Стационарное УГП имеет вид неавтономного уравнения Дюффинга:

$$u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0, \quad Q(x) = \omega - U(x). \quad (3)$$

Стационарное решение называется *локализованным*, если  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0$ .

## Регулярные и сингулярные решения

Решение уравнения (3) называется *сингулярным*, если  $\exists x_0, \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \infty$ .

Решение, не являющееся сингулярным, называется *регулярным*.

---

<sup>1</sup>Также называемые *стационарными локализованными модами*, СЛМ

# Объект исследования

## Устойчивые стационарные решения

### Устойчивые стационарные решения

Если решение неустойчиво, малые возмущения приводят к его разрушению при эволюции.

$$\Psi(t, x) = \left( u(x) + \tilde{U}(t, x) \right) e^{i\omega t}; \quad |\tilde{U}(t, x)| \ll 1. \quad (4)$$

Именно устойчивые решения важны с точки зрения различных физических приложений.

# Известные результаты

## Исследование специальных классов

1. Y. V. Kartashov, B. A. Malomed, L. Torner, “Solitons in nonlinear lattices” // Rev. Mod. Phys., Vol. **83**, P. 247 (2011).
  - Исчерпывающий обзор физических моделей, в которых возникает переменный псевдопотенциал  $P(x)$ .
2. H. Sakaguchi, B. A. Malomed // Phys. Rev. E, Vol. **72**, P. 046610 (2005).
  - Рассмотрена модель  $U(x) \equiv 0$ ,  $P(x) = A - \cos 2x$ .
  - Исследована устойчивость фундаментального решения методом вариационной аппроксимации.
3. Bludov, Y. V., and V. V. Konotop // Phys. Rev. A, Vol. **74**, P. 043616 (2006).
  - Рассмотрен БЭК смеси бозонов и фермионов;  $U(x)$ ,  $P(x)$  — периодические функции.
  - Произведен численный анализ простейших решений задачи.

# Известные результаты

Полное описание всех имеющихся СЛМ

1. G. L. Alfimov, D. A. Zezyulin // Nonlinearity, Vol. **20**, P. 2075–2092 (2007).
  - Рассмотрен случай  $U(x) = Ax^2$ ,  $P(x) \equiv \pm 1$ .
  - Предложен метод «доказательных вычислений», позволяющий гарантировать нахождение всех регулярных решений.
2. G. L. Alfimov, I. V. Barashenkov, A. P. Fedotov, V. V. Smirnov, D. A. Zezyulin // Physica D, Vol. **397**, P. 39–53 (2019).
  - Обобщение задача на случай системы из нескольких связанных уравнений Гросса–Питаевского.
3. G. L. Alfimov, A. I. Avramenko // Physica D, Vol. **254**, P. 29–45, (2013).
  - Рассмотрен случай  $U(x)$  – периодическая функция,  $P(x) \equiv -1$ .
  - Предложены достаточные условия, допускающие исчерпывающее описание всех ограниченных решений.
  - Показана возможность кодирования решений.
4. G. L. Alfimov, P. P. Kizin, D. A. Zezyulin // Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B, Vol. **22**, P. 1207–1229 (2017).
  - Разработан алгоритм, позволяющий по коду решения численно построить его профиль.

# Известные результаты

Полное описание всех имеющихся СЛМ

1. Ch. Zanini, F. Zanolin // Complexity, Vol. **2018**, Article ID 2101482 (2018).
2. Ch. Zanini, F. Zanolin // Advanced Nonlinear Studies, Vol. **12**, No. 3, P. 481–499 (2012).

- Доказывается существование некоторых типов решений в близких задачах.
- Решения могут быть полностью описаны в терминах нелинейной динамики.
- Подход основан на топологических аргументах.

# Цели и задачи

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - U(x)\Psi + P(x)|\Psi|^2\Psi = 0.$$

1. Обобщение метода кодировки СЛМ на случай периодических  $U(x)$ ,  $P(x)$ .
  - Сформулировать достаточные условия возможности кодирования.
  - Предложить способ проверки достаточных условий.
2. Исследовать множество СЛМ с периодическим  $P(x)$ , и  $Q(x) \equiv 0$  (принципиально нелинейное взаимодействие).
  - Описание решений.
  - Исследование устойчивости.
3. Влияние периодического  $P(x)$  на множество СЛМ в случае  $U(x) = Ax^2$  (бесконечная потенциальная яма).
  - Связь со случаем  $P(x) \equiv -1$ .
  - Исследование устойчивости.

# Глава 1. Математические результаты о регулярных и сингулярных решениях уравнения $u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0$

# Общие утверждения о регулярности решений

$$u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0. \quad (5)$$

## Утверждение 1

Пусть  $\forall x \in \mathbb{R}$ , функции  $Q(x), P(x) \in C^1(\mathbb{R})$ , причем

(a)  $P(x) \geq P_0 > 0, |P'(x)| \leq \tilde{P};$

(б)  $Q(x) \geq Q_0, |Q'(x)| \leq \tilde{Q};$

тогда решение задачи Коши для уравнения (5) с произвольными начальными условиями  $(u_0, u'_0)$  **регулярно** и может быть продолжено на всю действительную ось  $\mathbb{R}$ .

## Утверждение 2

Пусть  $\forall x \in \mathbb{R}$  выполняются условия:  $P(x) \leq P_0 < 0, Q(x) \leq Q_0 < 0$ , тогда все решения уравнения (5) **сингулярны**, за исключением нулевого решения.

# Семейства сингулярных решений

## Утверждение 3

Пусть  $\exists x_0, P(x_0) < 0$ ,  $\Omega$  – некоторая окрестность точки  $x_0$ , причём  $Q(x) \in C^2(\Omega)$  и  $P(x) \in C^4(\Omega)$ , тогда существуют два  $C^1$  – гладких однопараметрических семейства решений уравнения (5), **сингулярных в точке  $x_0$ , связанных между собой симметрией  $u \rightarrow -u$  и имеющих разложение:**

$$\pm u(x) = \frac{\sqrt{2}}{\eta} + A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 \ln |\eta| + C\eta^3 + A_4\eta^4 \ln |\eta| + \dots, \quad (6)$$

где  $\eta = x - x_0$ . Каждое из этих семейств можно запараметризовать свободной переменной  $C \in \mathbb{R}$ .

$$A_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}P_1, \quad A_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}P_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}Q_0 + \frac{2\sqrt{2}}{9}P_1^2;$$

$$A_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}P_2P_1 + \frac{7\sqrt{2}}{27}P_1^3 + \frac{\sqrt{2}}{6}Q_0P_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}Q_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}P_3 \dots$$

# Результаты 1-й главы

$P(x)$	$Q(x)$	
$P(x) > 0$	—	Все решения продолжаются на действительную ось, сингулярные решения отсутствуют.
$P(x) < 0$ хотя бы в одной точке $x = x_0$	—	Имеется пара однопараметрических семейств решений, коллапсирующих в точке $x = x_0$ и связанных симметрией $u \rightarrow -u$ .
$P(x) < 0$	$Q(x) < 0$	Все решения сингулярны за исключением нулевого решения.
$P(x)$ знакопеременна	—	<b>Сингулярность решений является типичным поведением.</b> Это позволяет при некоторых дополнительных ограничениях применить <i>метод исключения сингулярных решений</i> и <b>классифицировать</b> оставшиеся <i>регулярные решения</i> в терминах символьической динамики.

## Глава 2. Аппарат классификации стационарных решений,

$$P(x) <> 0$$

# Классификация

## Основные определения

$$u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0, \quad Q(x+L) = Q(x), \quad P(x+L) = P(x). \quad (7)$$

### Множества $\mathcal{U}_L^\pm$

$\mathcal{U}_L^\pm = \{(u_0, u'_0) \in \mathbb{R}^2 \mid$  решение задачи Коши для уравнения (7) с НУ  $(u_0, u'_0)$  регулярно на  $[0, \pm L]\}$ ,  $\mathcal{U}_L = \mathcal{U}_L^+ \cap \mathcal{U}_L^-$ .

### Отображение Пуанкаре $\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\mathcal{P}(u_0, u'_0) = (u(L), u'(L))$ , где  $u(x)$  — решение с НУ  $(u_0, u'_0)$ .

$$\mathbf{p} = (u_0, u'_0) \in \mathcal{U}_L^+ = \text{dom}(\mathcal{P}), \quad \mathcal{P}(\mathbf{p}) = \mathbf{q} \in \mathcal{U}_L^- = \text{dom}(\mathcal{P}^{-1}).$$

### Орбита

Последовательность точек  $\{p_n\}$  таких, что  $\mathcal{P}(p_n) = p_{n+1}$ .

# Классификация

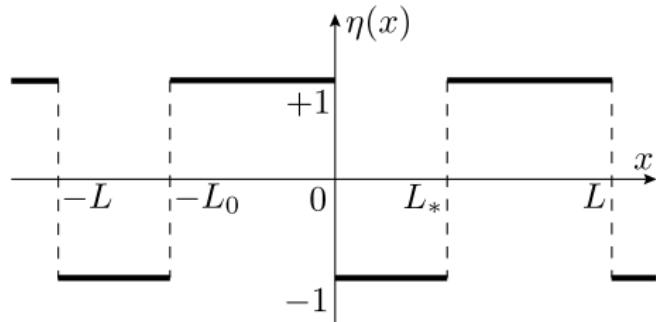
Кусочно-постоянный псевдопотенциал

Проиллюстрируем на примере уравнения

$$u_{xx} - u + \eta(x)u^3 = 0, \quad (8)$$

$\eta(x)$  — кусочно-постоянный псевдопотенциал с периодом  $L = L_* + L_0$ :

$$\eta(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0; L_*); \\ +1, & x \in [L_*; L_* + L_0). \end{cases}$$



# Кусочно-постоянный псевдопотенциал

Переключение режимов: фазовые портреты

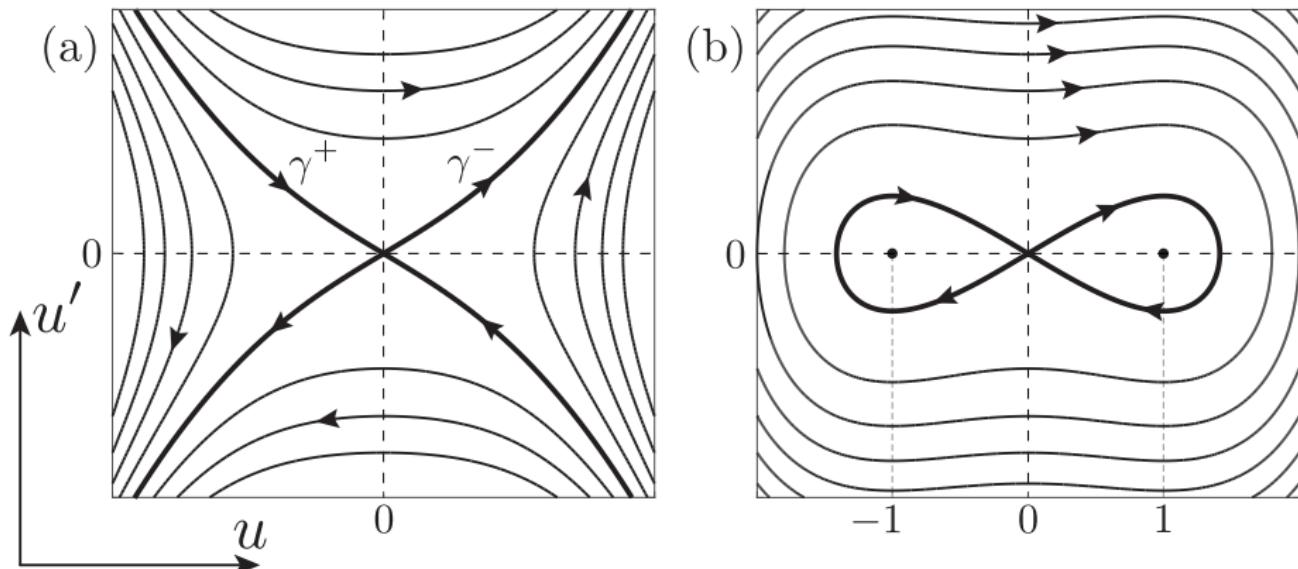


Рис. 1: Фазовые портреты: (а)  $u - u - u^3 = 0$ , (б)  $u - u + u^3 = 0$ . Уравнение (а) связано с отображением  $\mathcal{P}_*$ , уравнение (б) связано с отображением  $\mathcal{P}_0$ .

Отображение  $\mathcal{P}$  можно представить в виде композиции  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_*$ .

# Классификация

Сканирование плоскости начальных данных

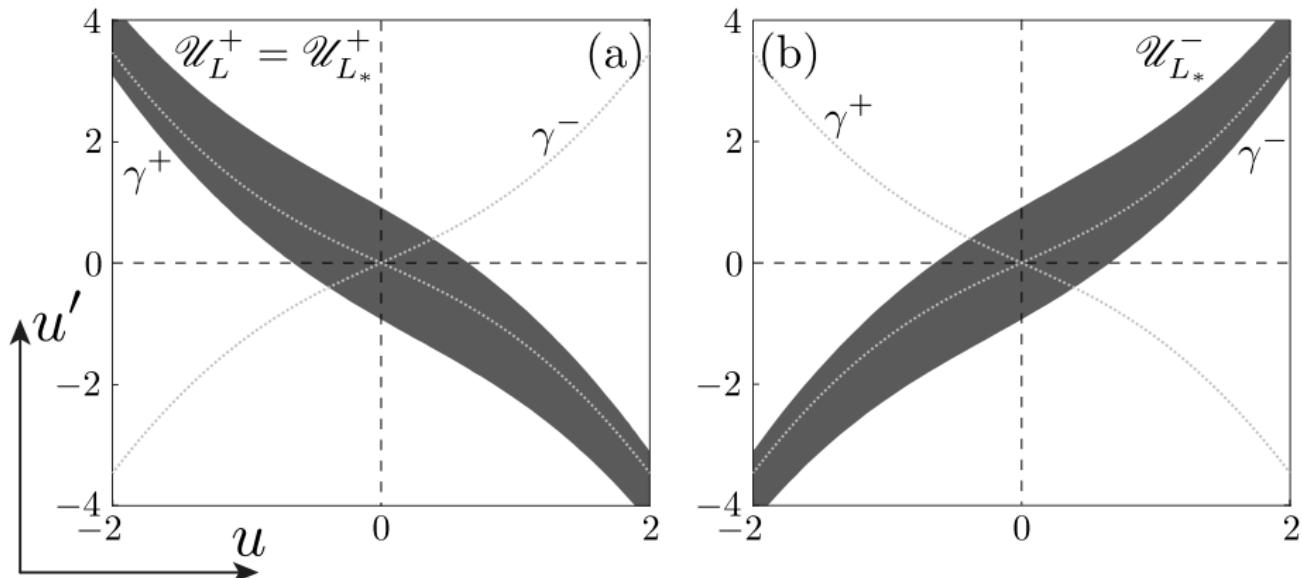


Рис. 2: Области определения отображений, полученные численно путём сканированием плоскости начальных данных (а)  $\mathcal{U}_L^+$ , (б)  $\mathcal{P}_*(\mathcal{U}_L^+) = I \mathcal{U}_L^+$ , где  $I$  — отражение относительно оси  $u'$ .

# Кусочно-постоянный псевдопотенциал

Отображение сепаратрисы,  $\mathcal{P}_0(\gamma_-)$

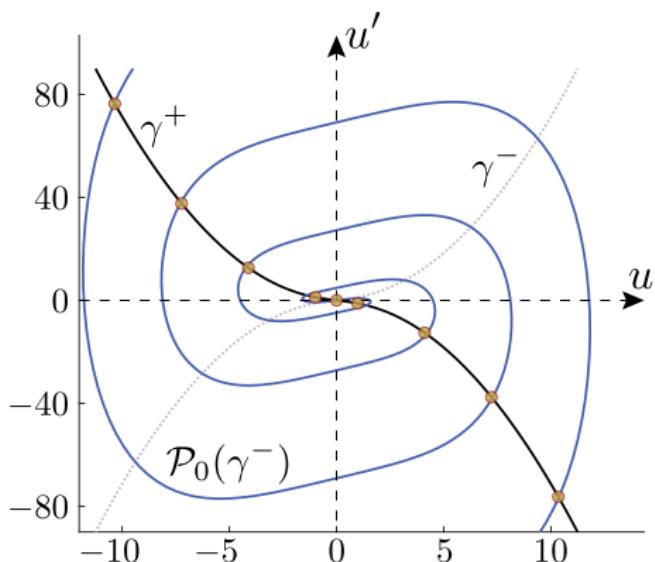


Рис. 3:  $\mathcal{P}_0(\gamma^-)$  (синий) — бесконечная спираль; точки пересечения  $\mathcal{P}_0(\gamma^-) \cap \gamma^+$  согласно (9) (жёлтый).

Утверждение 4

$\mathcal{P}_0(\gamma^-)$  есть бесконечная спираль, она пересекает  $\gamma^+$  в точках  $\{0\} \cup \{u_{\pm n}\}, n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{\pm n} = \pm \frac{2x_{n-1}}{\sqrt[4]{2L_0}} + \mathcal{O}(H_0^{-1/4}); \quad (9)$$

$H_0 \rightarrow \infty$ , где значения  $x_n$  определяются по формуле

$$x_n = \operatorname{cn}^{-1} \left( 2^{-1/4}, 2^{-1/2} \right) + K(2^{-1/2})n.$$

К — полный эллиптический интеграл 1-го рода;  
 $\operatorname{cn}^{-1}$  — обратный эллиптический косинус.

# Кусочно-постоянный псевдопотенциал

Множество  $\mathcal{U}_L = \mathcal{U}_L^+ \cap \mathcal{U}_L^-$

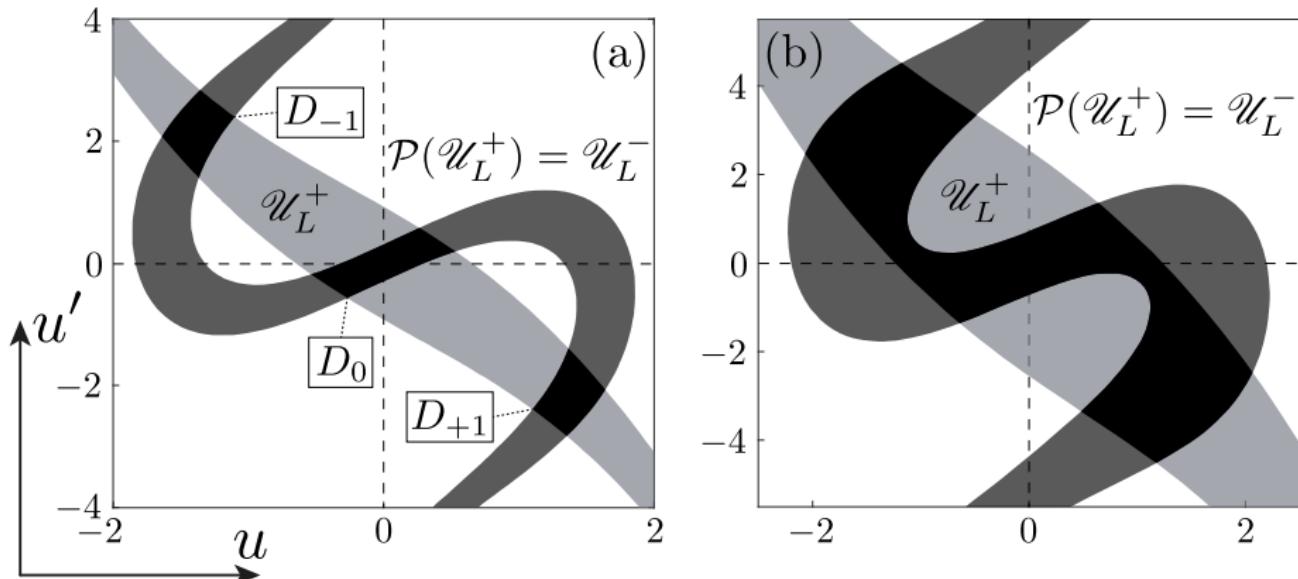


Рис. 4: Множества  $\mathcal{U}_L^+$  (светло-серый),  $\mathcal{U}_L^-$  (тёмно-серый), и их пересечение  $\mathcal{U}_L$  (чёрный) для уравнения (8); (a)  $(L_*, L_0) = (2, 1)$ ; (b)  $(L_*, L_0) = (1.3, 1)$ .

# Классификация

Островное множество

## Остров

Криволинейный четырёхугольник, ограниченный двумя парами монотонных кривых  $\alpha^\pm, \beta^\pm$ .

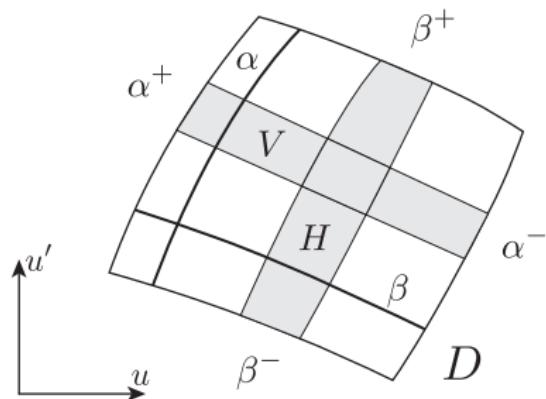


Рис. 5: Остров  $D$ , h-кривая  $\alpha$ , v-кривая  $\beta$ , h-полоса  $H$ , v-полоса  $V$ .

## Островное множество

Набор островов на плоскости начальных условий  $\bigcup_{k \in S} D_k$ .

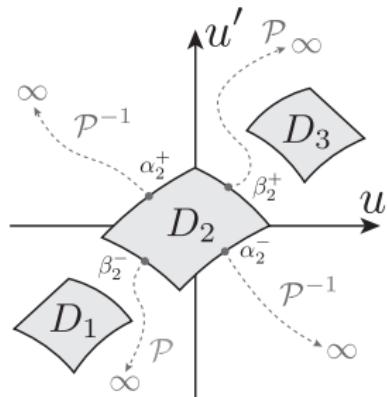


Рис. 6: Пример островного множества,  $\mathcal{U}_L = \{D_1, D_2, D_3\}$ .

# Кодирование решений

Пусть множество  $\mathcal{U}_L$  — островное,  $\mathcal{U}_L = \bigcup_{k \in S} D_k$ .

Орбиты регулярного решения  $\{\mathbf{p}_k\}$  можно поставить в соответствие последовательность символов  $\{\dots, i_{-1}, i_0, i_1, \dots\}$ ,  $\mathbf{p}_k \rightarrow i_k$ ,  $\mathbf{p}_k \in D_{i_k}$ .

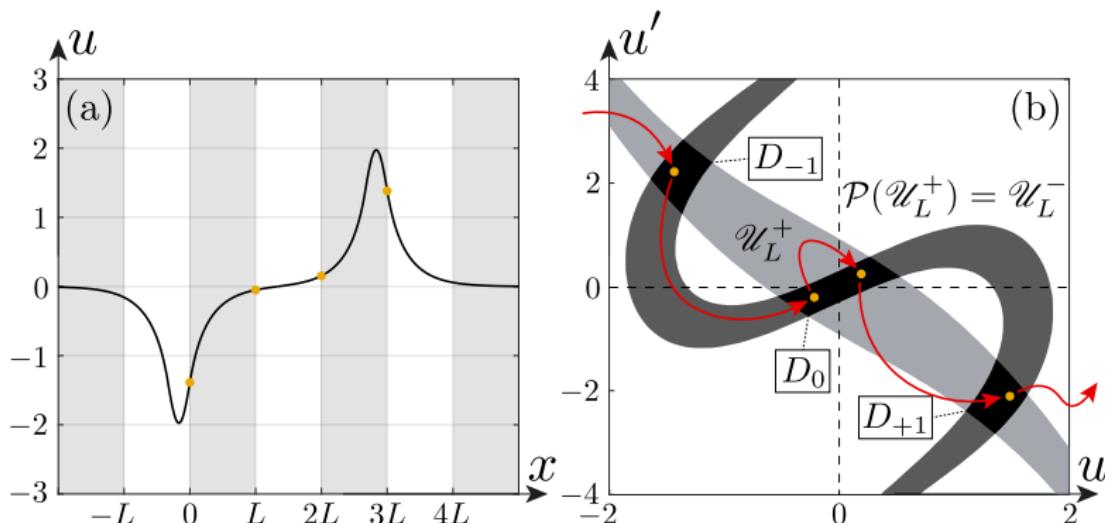
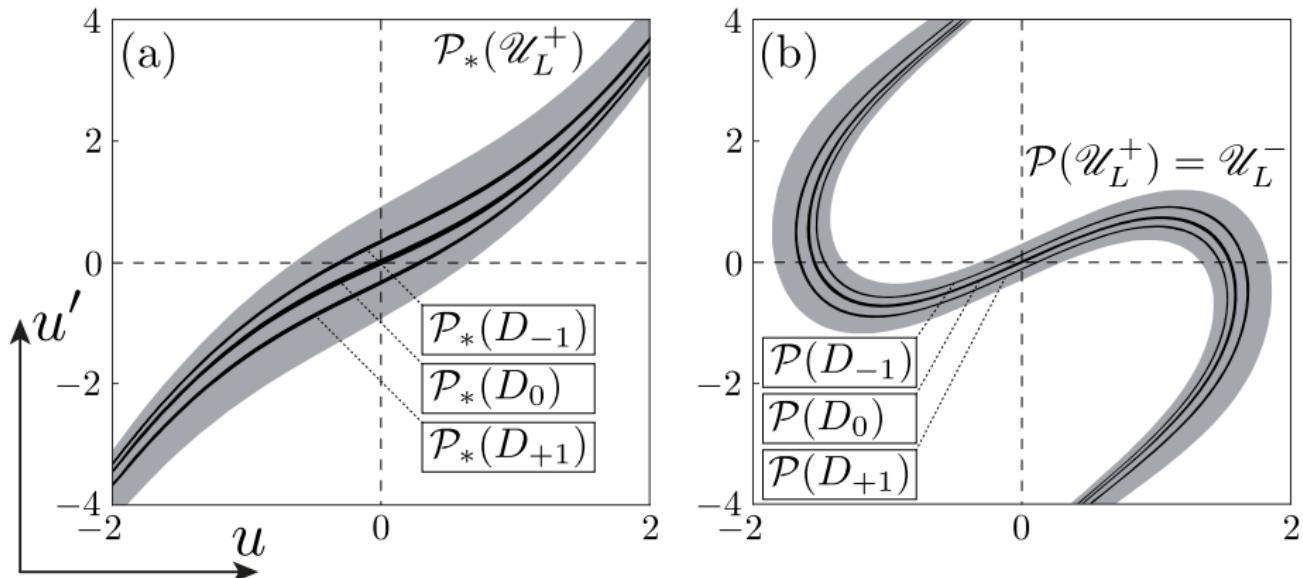


Рис. 7: Локализованное решение (а) имеет код  $\{\dots, 0, -1, 0, 0, +1, 0, \dots\}$ ; (б) точки  $\mathbf{p}_k$  на плоскости начальных данных;  $(L_*, L_0) = (2, 1)$ .

# Взаимно-однозначное кодирование: $\text{dom}(\mathcal{P}^{-2})$



**Рис. 8:** (а)  $\mathcal{P}_*$ -образ островного множества (чёрный) внутри  $\mathcal{P}_*(\mathcal{U}_L^+)$  (серый); (б)  $\mathcal{P}$ -образ островного множества (чёрный) внутри  $\mathcal{U}_L^-$  (серый). Уравнение (8) с параметрами  $(L_*, L_0) = (2, 1)$ .

## Взаимно-однозначное кодирование: h-полосы

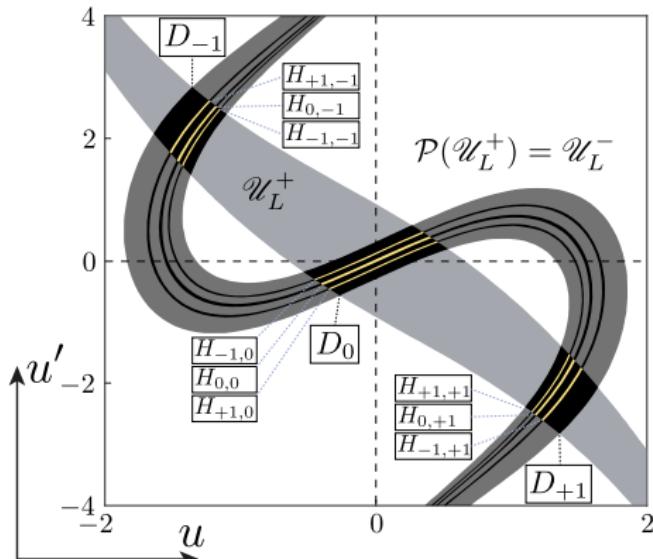


Рис. 9: Множества  $H_{ij}$  (жёлтый) для уравнения (8) с параметрами  $(L_*, L_0) = (2, 1)$ .

Множество  $\mathcal{U}_L = \bigcup_{k \in S} D_k$  — островное.

$$\forall i, j, H_{ij} = \mathcal{P}(D_i) \cap D_j \neq \emptyset$$

В точках  $\mathbf{p} \in H_{ij}$  определены отображения  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}^{-1}$  и  $\mathcal{P}^{-2}$ .

Границы  $H_{ij}$  монотонны, значит  $H_{ij}$  представляют собой h-полосы.

## Взаимно-однозначное кодирование: v-полосы

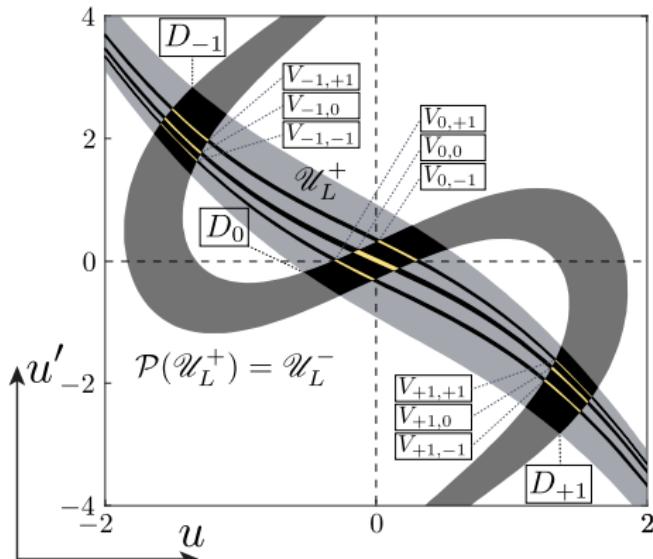


Рис. 10: Множества  $V_{ij}$  (жёлтый) для уравнения (8) с параметрами  $(L_*, L_0) = (2, 1)$ .

Множество  $\mathcal{U}_L = \bigcup_{k \in S} D_k$  — островное.

$$\forall i, j, V_{ij} = \mathcal{P}^{-1}(D_j) \cap D_i \neq \emptyset$$

В точках  $\mathbf{p} \in V_{ij}$  определены отображения  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}^2$  и  $\mathcal{P}^{-1}$ .

Границы  $V_{ij}$  монотонны, значит  $V_{ij}$  представляют собой v-полосы.

# Формирование точечного множества

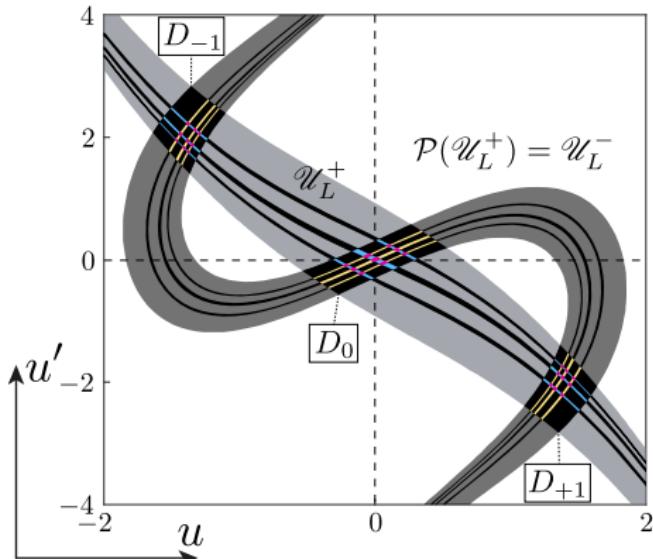


Рис. 11: Множества  $\mathcal{H}_1 = \bigcup_{i,j \in S} H_{ij}$  (жёлтый),  $\mathcal{V}_1 = \bigcup_{i,j \in S} V_{ij}$  (синий) и их пересечение  $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{V}_1$  (розовый).

Когда продолжение этого процесса приводит к формированию точечного множества?

Действие отображения  $\mathcal{P}$  на множестве  $\mathcal{U}_L$  происходит по схеме подковы Смейла?

Существует взаимно-однозначное отображение между кодами и орбитами решений?

# Формализация, предположения

$$u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0, \quad Q(x+L) = Q(x), \quad P(x+L) = P(x). \quad (10)$$

## Предположение 1 (Островное множество)

Для уравнения (10) множество  $\mathcal{U}_L$  представляет из себя набор островов,  $\mathcal{U}_L = \bigcup_{i \in S} D_i$ .

## Предположение 2 (Отображение полос)

Для любых  $i, j \in S$  и для любой  $h$ -полосы  $H \in D_i$  её  $\mathcal{P}$ -образ  $\tilde{H}_j = \mathcal{P}(H) \cap D_j$  есть  $h$ -полоса, и существует  $\mu > 1$ , что

$$d_h(\tilde{H}_j) \leq (1/\mu)d_h(H). \quad (11)$$

Для любых  $i, j \in S$  и для любой  $v$ -полосы  $V \in D_j$  её  $\mathcal{P}$ -прообраз  $\tilde{V}_i = \mathcal{P}^{-1}(V) \cap D_i$  есть  $v$ -полоса, и существует  $\nu > 1$ , что

$$d_v(\tilde{V}_i) \leq (1/\nu)d_v(V). \quad (12)$$

# Теорема о кодировании решений

$\mathcal{O}$  — множество всех орбит регулярных решений уравнения (10).

$\mathcal{S}$  — множество бесконечных последовательностей из символов, соответствующих компонентам связности множества  $\mathcal{U}_L$ .

Определим отображение  $\mathcal{C} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $\mathbf{r} \in \mathcal{O}$ ,  $\mathbf{r} = \{\mathbf{p}_k\}$ ,  $\mathcal{C}(\mathbf{r}) = \mathbf{s} \in \mathcal{S}$ ,  $\mathbf{s} = \{i_k\}$  такая, что  $i_k$  есть номер компоненты  $D_{i_k}$ , содержащей  $\mathbf{p}_k$ .

Теорема 1 (О кодировании решений)

*Пусть предположения I, II верны, тогда  $\mathcal{C}$  есть гомеоморфизм топологических пространств  $\mathcal{O}$  и  $\mathcal{S}$ .*

Как проверить предположения?

## Проверка гипотез: численная процедура

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}) = \mathcal{P}(\mathbf{p}) + D\mathcal{P}_{\mathbf{p}}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + o(||\mathbf{q} - \mathbf{p}||).$$

### Теорема 2 (Об отображении h-полос)

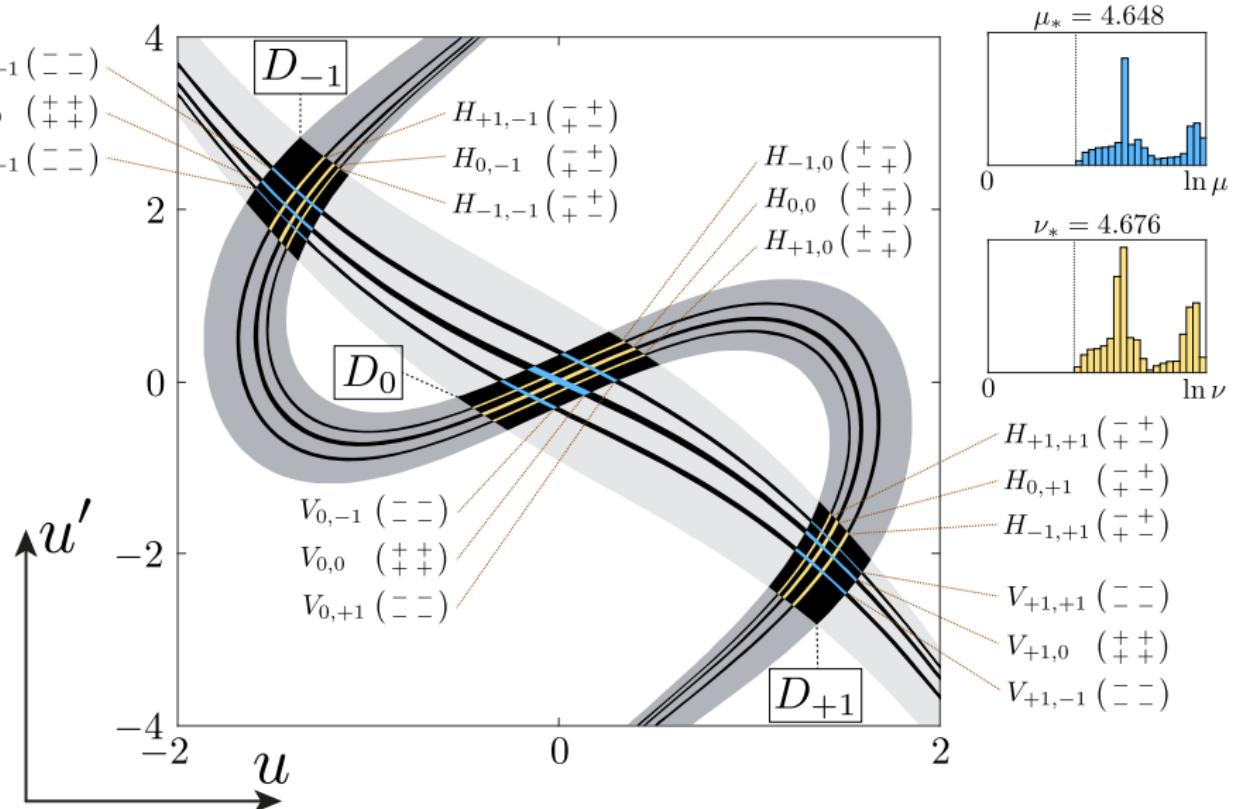
- Если знаки  $a_{mn}$  в матрице  $D\mathcal{P}_{\mathbf{p}} = (a_{mn})$ ,  $\mathbf{p} \in V_{ij}$ , удовлетворяют некоторым условиям, тогда  $\mathcal{P}$  отображает  $h$ -полосы в  $h$ -полосы.
- Если для оператора  $D\mathcal{P}_{\mathbf{p}} = (a_{mn})$  для всех  $\mathbf{p} \in V_{ij}$  имеет место оценка  $|a_{11}| \geq \mu > 1$  ( $\exists \mu$ ), тогда  $\mathcal{P}$  сжимает  $h$ -полосы.

$$\mathcal{P}^{-1}(\mathbf{q}) = \mathcal{P}^{-1}(\mathbf{p}) + D\mathcal{P}_{\mathbf{p}}^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + o(||\mathbf{q} - \mathbf{p}||).$$

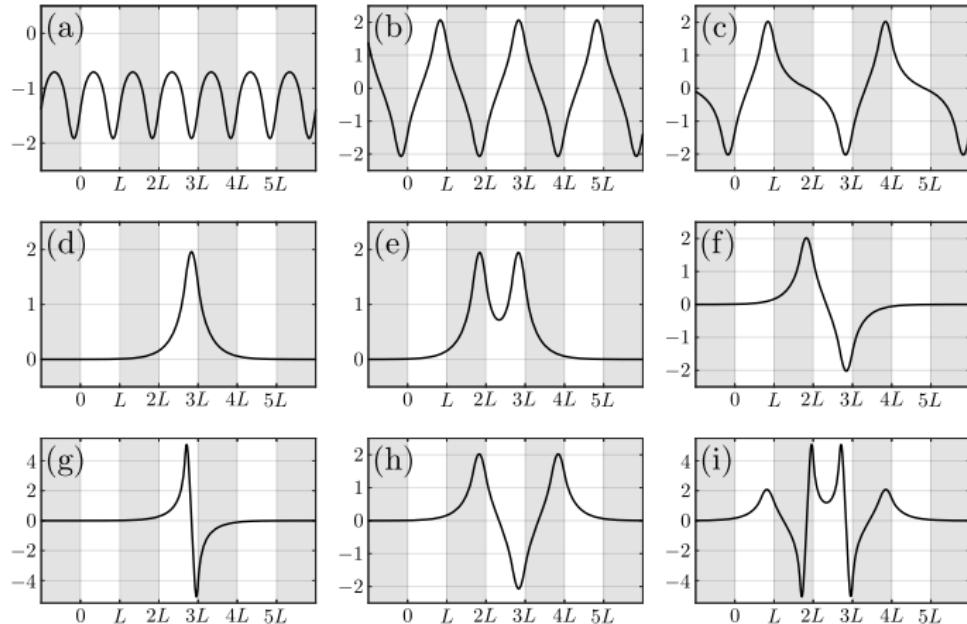
### Теорема 3 (Об отображении v-полос)

- Если знаки  $b_{mn}$  в матрице  $D\mathcal{P}_{\mathbf{q}}^{-1} = (b_{mn})$ ,  $\mathbf{q} \in H_{ij}$ , удовлетворяют некоторым условиям, тогда  $\mathcal{P}^{-1}$  отображает  $v$ -полосы в  $v$ -полосы.
- Если для оператора  $D\mathcal{P}_{\mathbf{q}}^{-1} = (b_{mn})$  для всех  $\mathbf{q} \in H_{ij}$  имеет место оценка  $|b_{22}| \geq \nu > 1$  ( $\exists \nu$ ), тогда  $\mathcal{P}^{-1}$  сжимает  $v$ -полосы.

# Проверка гипотез: иллюстрация



# Кусочно-постоянный псевдопотенциал: решения



**Рис. 12:** Периодические решения: (a)  $\{\dots, -1, -1, -1, \dots\}$ ; (b)  $\{\dots, -1, +1, -1, +1 \dots\}$ ; (c)  $\{\dots, -1, +1, 0, -1, +1, 0 \dots\}$ . Локализованные решения: (d)  $\{\dots, 0, 0, +1, 0, 0, \dots\}$ ; (e)  $\{\dots, 0, 0, +1, +1, 0, 0, \dots\}$  (f)  $\{\dots, 0, 0, +1, -1, 0, 0 \dots\}$  (g)  $\{\dots, 0, 0, -2, 0, 0 \dots\}$  (h)  $\{\dots, 0, 0, +1, -1, +1, 0, 0 \dots\}$  (i)  $\{\dots, 0, 0, +1, +2, -2, +1, 0, 0 \dots\}$

## Результаты 2-й главы

$$u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0, \quad Q(x+L) = Q(x), \quad P(x+L) = P(x). \quad (13)$$

- 1 Предложен подход, позволяющий описать все регулярные решения уравнения (13).
- 2 Приведены достаточные условия, дающие основания для применения подхода, а также алгоритм их численной проверки.
- 3 Подход проиллюстрирован на примере уравнения (13),  $Q(x) \equiv -1$ ,  $P(x) = \eta(x)$  — кусочно-постоянный псевдопотенциал.

## Глава 3. Классификация стационарных локализованных решений УГП,

$$U(x) \equiv 0, \quad P(x) <> 0$$

## Постановка задачи

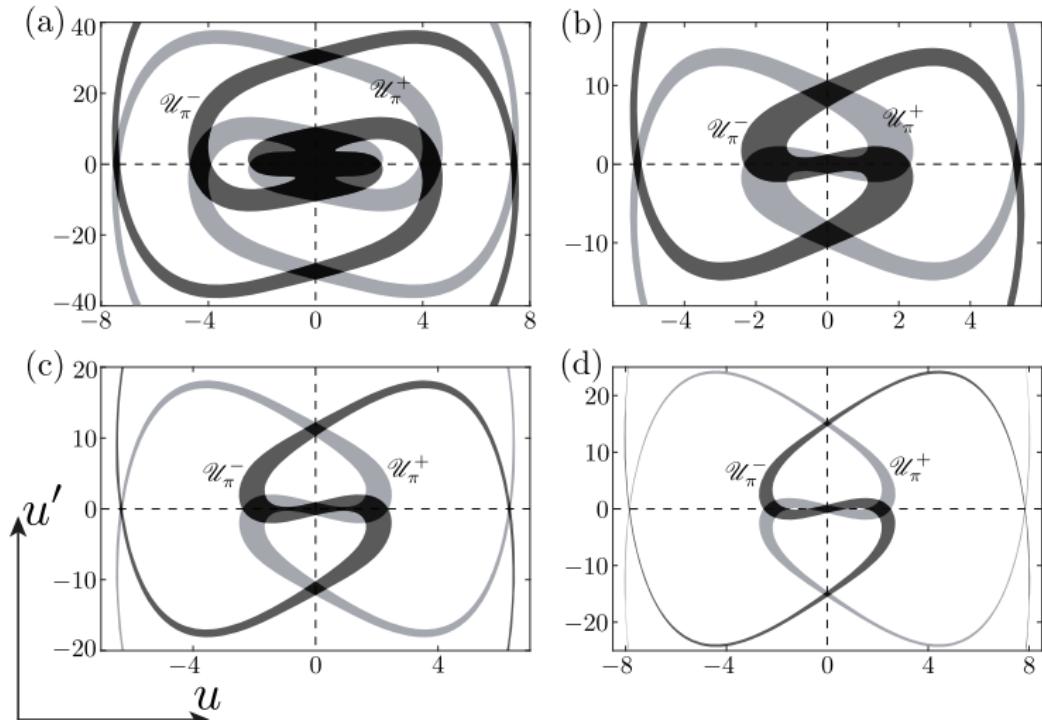
$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - U(x)\Psi + P(x)|\Psi|^2\Psi = 0. \quad (14)$$

- $U(x) \equiv 0$ , потенциал удержания отсутствует;
- $P(x) = \alpha + \cos 2x$  — периодический косинусный псевдопотенциал;
- $P(x) <> 0$ ,  $\alpha \in (-1; +1)$ , сингулярность — типичное поведение решений;
- Стационарные решения вида  $\Psi(t, x) = u(x)e^{i\omega t}$ ,  $\omega > 0$  — наличие локализованных решений.

Стационарное уравнение принимает вид:

$$u_{xx} - \omega u + (\alpha + \cos 2x)u^3 = 0. \quad (15)$$

# Классификация: множества $\mathcal{U}_\pi^\pm$ , $\mathcal{U}_\pi$



**Рис. 13:** Множества  $\mathcal{U}_\pi^\pm$ ,  $\mathcal{U}_\pi = \mathcal{U}_\pi^+ \cap \mathcal{U}_\pi^-$  для уравнения (15); (a)  $(\omega, \alpha) = (1, 0.6)$ ; (b)  $(\omega, \alpha) = (1, 0.3)$ ; (c)  $(\omega, \alpha) = (1, 0.1)$ ; (d)  $(\omega, \alpha) = (1, -0.1)$ .

## Классификация: островное множество

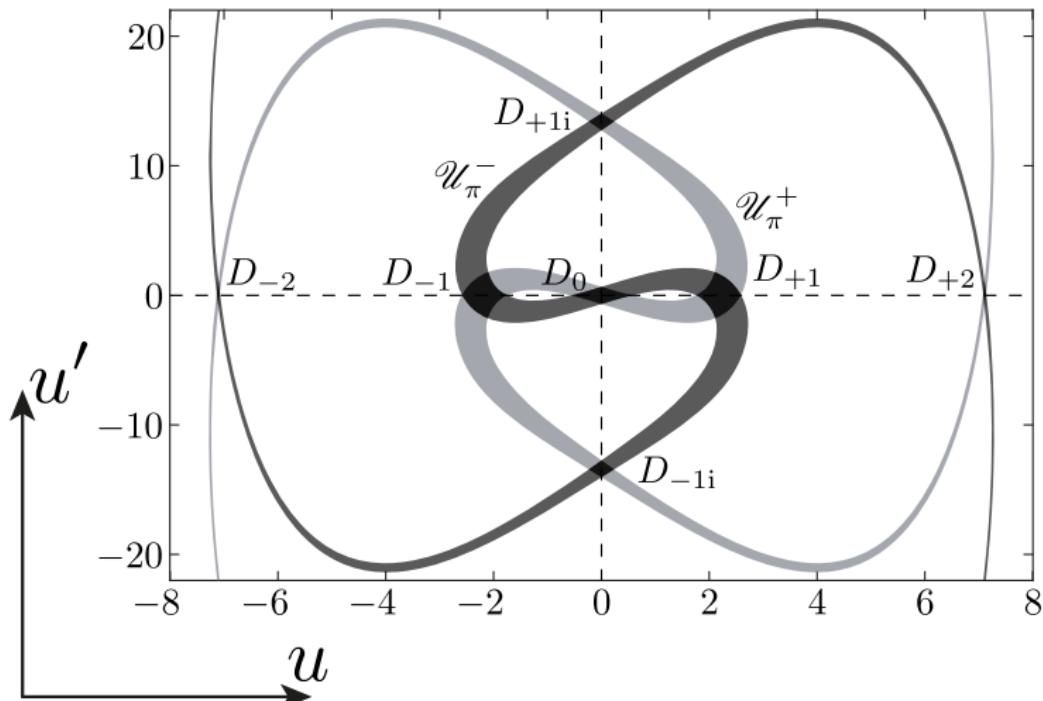


Рис. 14: Островное множество  $\mathcal{U}_\pi = \bigcup_{k \in S_7} D_k$  (чёрный), состоящее из 7-ми островов;  $(\omega, \alpha) = (1.5, 0)$ .

# Классификация: проверка гипотез

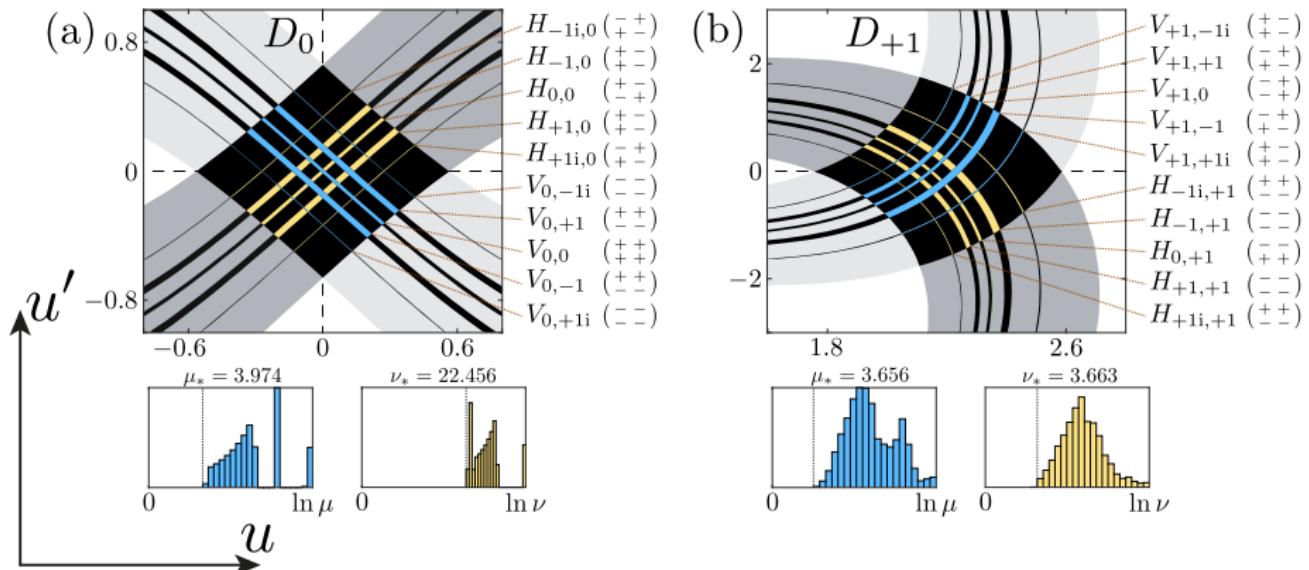
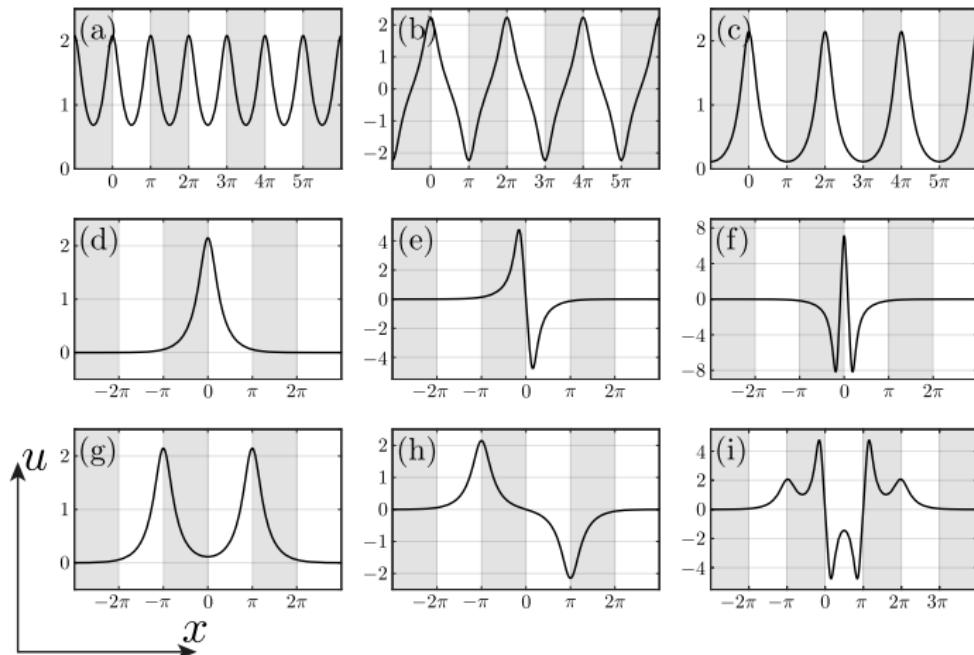


Рис. 15: Проверка гипотез для уравнения (15) с параметрами  $(\omega, \alpha) = (1.5, 0)$

# Классификация: решения



**Рис. 16:** Периодические решения: (a)  $\{\dots, +1, +1, +1, \dots\}$ ; (b)  $\{\dots, +1, -1, +1, -1, \dots\}$ ; (c)  $\{\dots, +1, 0, +1, 0, \dots\}$ . Локализованные решения: (d) фундаментальный солитон  $\{\dots, 0, +1, 0, \dots\}$ ; (e) дипольный солитон  $\{\dots, 0, -1i, 0, \dots\}$  (f)  $\{\dots, 0, +2, 0, \dots\}$  (g)  $\{\dots, 0, +1, 0, +1, 0, \dots\}$  (h)  $\{\dots, 0, +1, 0, -1, 0, \dots\}$  (i)  $\{\dots, 0, +1, -1i, +1i, +1, \dots\}$ .

# Линейная устойчивость

## Спектральный метод

Рассматриваем малые возмущения вида

$$\Psi(t, x) = \left( u(x) + \tilde{U}(t, x) \right) e^{i\omega t}; \quad |\tilde{U}(t, x)| \ll 1. \quad (16)$$

Линейное уравнение для возмущения  $\tilde{U}(t, x)$ :

$$i\tilde{U}_t + \tilde{U}_{xx} - \omega\tilde{U} + (\alpha + \cos 2x)u^2(2\tilde{U} + \tilde{U}^\dagger) = 0. \quad (17)$$

Имеем решения в виде

$$\tilde{U}(t, x) = (v(x) + w(x))e^{\lambda t} + (v^\dagger(x) - w^\dagger(x))e^{\lambda^\dagger t}; \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (18)$$

Получаем задачу на собственные значения

$$i \begin{pmatrix} 0 & \partial_{xx} + G_1(x) \\ \partial_{xx} + G_2(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$G_1(x) = -\omega + (\alpha + \cos 2x)u^2;$$

$$G_2(x) = -\omega + 3(\alpha + \cos 2x)u^2.$$

# Линейная устойчивость

## Переход к системе линейных уравнений

Рассматриваем локализованное решение на отрезке:  $[-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}]$ . Ищем решение в пространстве Фурье:

$$v(x) = \sum_n a_n e^{ink_0 x}; \quad w(x) = \sum_n b_n e^{ink_0 x}, \quad (20)$$

$$G_1 = \sum_n c_n^{(1)} e^{ink_0 x}; \quad G_2 = \sum_n c_n^{(2)} e^{ink_0 x}, \quad (21)$$

где  $k_0 = 2\pi/L$ . Подставляем (20), (21) в (19):

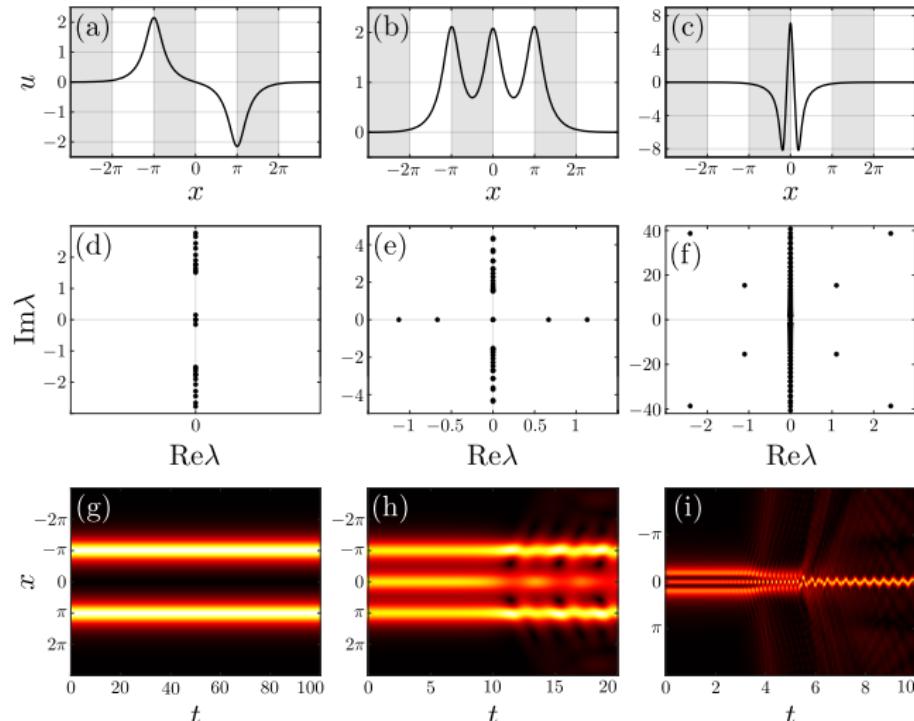
$$-(k_0 j)^2 b_j + \sum_n c_n^{(1)} b_{j-n} = -i\lambda a_j; \quad (22)$$

$$-(k_0 j)^2 a_j + \sum_n c_n^{(2)} a_{j-n} = -i\lambda b_j, \quad (23)$$

где  $-\infty < j < +\infty$ . Рассматриваем  $2N+1$  гармонику,  $-N \leq j \leq N$ . Получаем задачу на собственные значения линейного оператора.

# Линейная устойчивость: тест

Стационарное локализованное решение неустойчиво, если в спектре присутствует  $\lambda$ , что  $\Re(\lambda) > 0$ .



# Устойчивость

## Результаты

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + (\alpha + \cos 2x)|\Psi|^2\Psi = 0 \quad (24)$$

- Множество стационарных локализованных решений уравнения (24) чрезвычайно богато.
- Большинство из них оказываются неустойчивыми. Исключение составляют:
  1. Фундаментальный солитон:  $\{\dots, 0, \pm 1, 0, \dots\}$ .
  2. Дипольный солитон:  $\{\dots, 0, \pm 1i, 0, \dots\}$  (**new**).
  3. Некоторые комбинации (1) и (2):  $\{\dots, \pm 1, 0, \mp 1, 0, \dots\}$ ,  
 $\{\dots, \pm 1, \mp 1, \pm 1, 0, \dots\}, \dots$

# Устойчивость: ветви решений

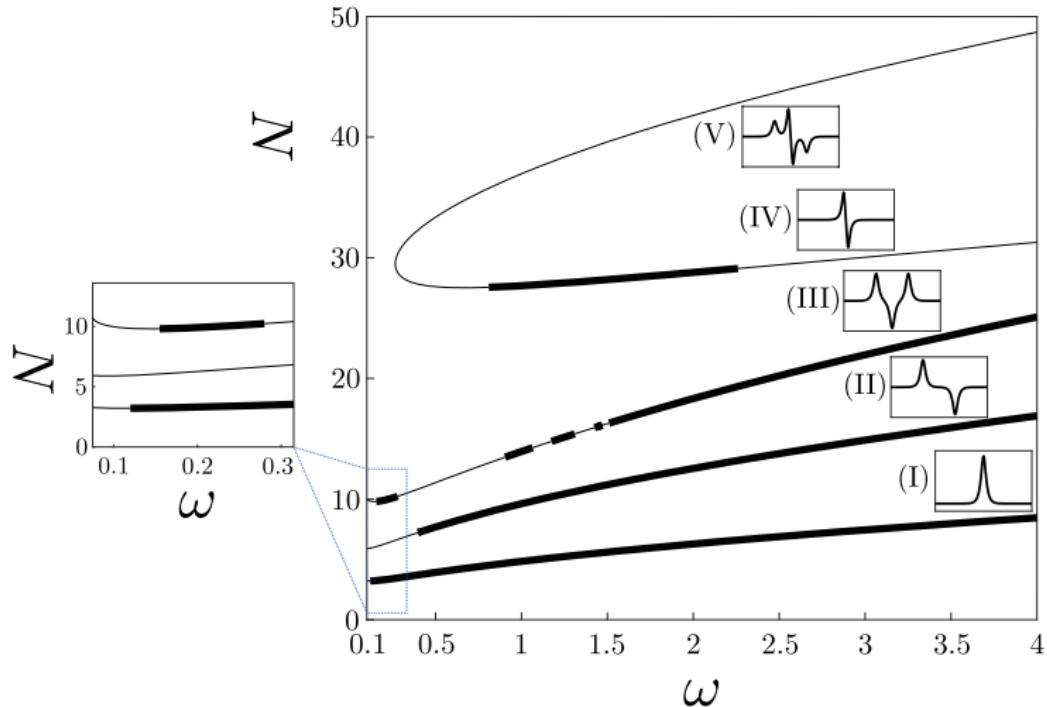


Рис. 17: Диаграммы  $N(\omega)$ , для уравнения (14),  $\alpha = 0$ ; (I)  $\{\dots, 0, \pm 1, 0, \dots\}$ ;  
(II)  $\{\dots, \pm 1, 0, \mp 1, 0, \dots\}$ ; (III)  $\{\dots, \pm 1, \mp 1, \pm 1, 0, \dots\}$ ; (IV)  $\{\dots, 0, \pm 1i, 0, \dots\}$ .

## Результаты 3-й главы

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + (\alpha + \cos 2x)|\Psi|^2\Psi = 0 \quad (25)$$

- 1 Исследовано множество стационарных локализованных решений уравнения (25).
- 2 Обнаружено новое устойчивое локализованное решение — дипольный солитон.

Глава 4. Стационарные локализованные  
решения УГП в случае бесконечной  
потенциальной ямы и периодического  
псевдопотенциала,

$$U(x) = Ax^2, \quad P(x) <> 0$$

## Постановка задачи

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - x^2\Psi + (P_0 + P_1 \cos(\Omega x))|\Psi|^2\Psi = 0. \quad (26)$$

Стационарные решения вида:

$$\Psi(t, x) = u(x)e^{-i\omega t}. \quad (27)$$

Стационарное уравнение:

$$u_{xx} + (\omega - x^2)u + (P_0 + P_1 \cos(\Omega x))u^3 = 0. \quad (28)$$

Линейный аналог,  $|u(x)| \ll 1$ :

$$u_{xx} + (\omega - x^2)u = 0. \quad (29)$$

Решение (29) имеет вид  $(\tilde{\omega}_n, \tilde{u}_n(x))$ :

$$\tilde{\omega}_n = 2n + 1; \quad \tilde{u}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad n = 0, 1, \dots, \quad (30)$$

где  $H_n(x)$  — полиномы Эрмита,

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

# Сравнение с известным случаем

Каждое решения  $(\tilde{\omega}_n, \tilde{u}_n(x))$  линейной задачи бифурцирует в однопараметрическое семейство  $\Gamma_n = (\omega_n, u_n(x))$  исходного уравнения.

$$u_{xx} + (\omega - x^2)u + \sigma_0 u^3 = 0, \quad (31)$$

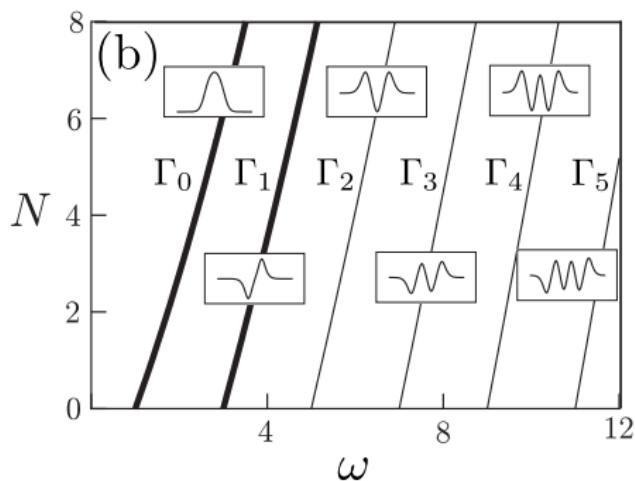
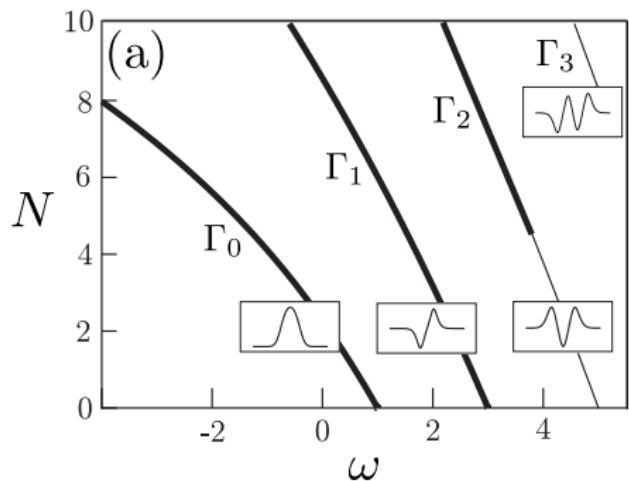


Рис. 18: Диаграммы  $N(\omega)$  семейств  $\Gamma_n$  для уравнения (31); (а)  $\sigma_0 = 1$ ; (б)  $\sigma_0 = -1$ .

Все решения (31) имеют линейный аналог. Других решения нет.

# Псевдопотенциал с ненулевым средним

$$u_{xx} + (\omega - x^2)u + (\sigma_0 + P_1 \cos(\Omega x))u^3 = 0. \quad (32)$$

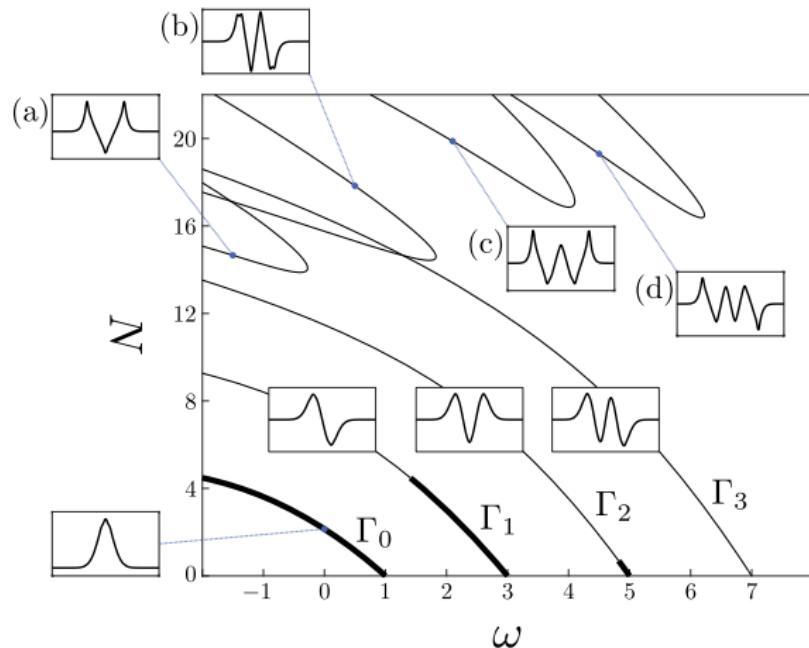


Рис. 19: Диаграммы  $N(\omega)$  для уравнения (32) с параметрами  $\sigma_0 = 1$ ,  $P_1 = 2$ ,  $\Omega = 12$ .

# Псевдопотенциал с ненулевым средним, $\Omega \rightarrow \infty$

$$u(x) = v(x) + \frac{1}{\Omega^2} \left( w(x) + P_1 w^3(x) \cos(\Omega x) \right) + o\left(\frac{1}{\Omega^2}\right), \quad \Omega \rightarrow \infty. \quad (33)$$

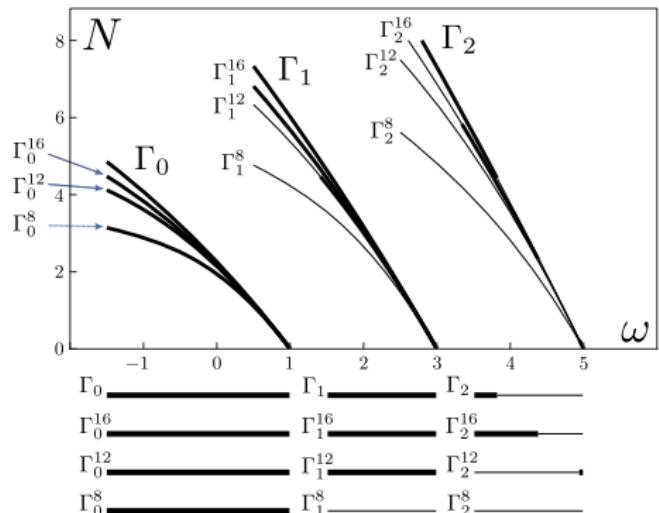


Рис. 20: Диаграммы  $N(\omega)$  семейств  $\Gamma_n^\Omega$  для уравнения (32) с параметрами  $\sigma_0 = 1$ ,  $P_1 = 2$ ,  $\Omega = 8, 12, 16$ .

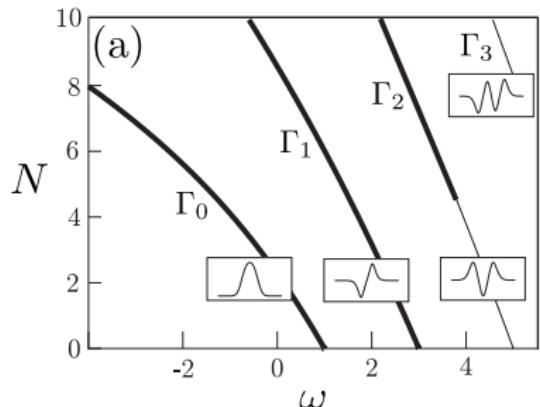


Рис. 21: Диаграммы  $N(\omega)$  семейств  $\Gamma_n$  для уравнения с  $P_1 = 0$ .

$w(x)$  — решение некоторого линейного уравнения.

# Псевдопотенциал с нулевым средним

$$u_{xx} + (\omega - x^2)u + \sigma_1 \cos(\Omega x)u^3 = 0. \quad (34)$$

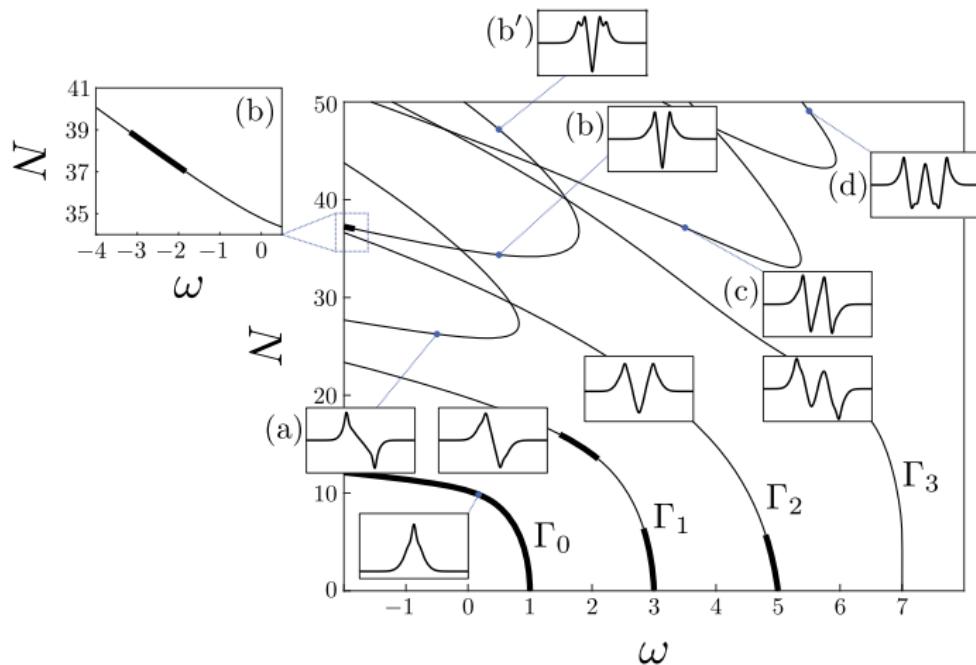


Рис. 22: Диаграммы  $N(\omega)$  для уравнения (34) с параметрами  $\sigma_1 = 1$ ,  $\Omega = 8$ .

# Псевдопотенциал с ненулевым средним, $\Omega \rightarrow \infty$

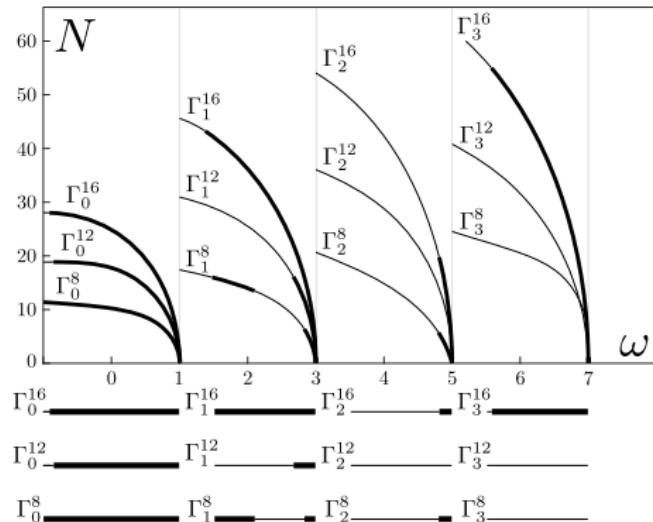


Рис. 23: Диаграммы  $N(\omega)$  семейств  $\Gamma_n^\Omega$  для уравнения (34) с параметрами  $\sigma_1 = 1$ ,  $\Omega = 8, 12, 16$ .

Увеличение частоты  $\Omega$  приводит к стабилизации малоамплитудных решений с линейным аналогом.

Для каждой ветви  $\Gamma_n$  существует пороговое значение частоты  $\Omega_n$ , что для  $\Omega > \Omega_n$  соответствующая ветвь решений устойчива в окрестности точки бифуркации  $N \ll 1$ ,  $\omega_n \approx \tilde{\omega}_n$ .

## Результаты 4-й главы

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - x^2\Psi + (P_0 + P_1 \cos(\Omega x))|\Psi|^2\Psi = 0. \quad (35)$$

- 1 Присутствие периодического псевдопотенциала приводит к появлению новых классов СЛМ, не имеющих линейных аналогов.
- 2 Для псевдопотенциала с нулевой средней установлено, что увеличение частоты псевдопотенциала приводит к стабилизации малоамплитудных стационарных локализованных решений.

# Положения, выносимые на защиту

- 1 Сформулированы и доказаны общие утверждения о наличии и отсутствии сингулярных решений уравнения (3). Показано, что в случае  $P(x) > 0$  все решения уравнения (3) регулярны. Если  $P(x)$  принимает отрицательное значение хотя бы в одной точке  $x_0$ ,  $P(x_0) < 0$ , то существуют два однопараметрических семейства решений, уходящих на бесконечность в точке  $x = x_0$ ; построена асимптотика этих решений. В том случае, когда  $Q(x) < 0$  и  $P(x) < 0$ , показано, что все решения уравнения (3) сингулярны.
- 2 Сформулированы достаточные условия возможности кодирования регулярных решений уравнения (3) и предложен эффективный алгоритм численной проверки этих условий.
- 3 Для случая  $U(x) \equiv 0$ ,  $P(x) = A + \cos 2x$  исследовано множество СЛМ уравнения (1) и обнаружено новое устойчивое локализованное решение — *дипольный солитон*.
- 4 В случае бесконечной потенциальной ямы вида  $U(x) = Ax^2$  показано, что присутствие периодического псевдопотенциала приводит к появлению новых классов СЛМ, не имеющих аналогов в моделях с  $P(x) = \text{const}$ . Для псевдопотенциала с нулевым средним установлено, что частота псевдопотенциала существенным образом влияет на устойчивость СЛМ. Установлено, что увеличение частоты приводит к стабилизации малоамплитудных стационарных локализованных решений.

# Публикации

10 публикаций,  
3 статьи, индексируемые системой Scopus.

1. Алфимов Г. Л., Лебедев М. Е., «О регулярных и сингулярных решениях уравнения  $u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0$  // Уфимск. матем. журн. том **7**, выпуск 2, стр. 3–18 (2015).
2. Lebedev M. E., Alfimov G. L., Malomed B. A., “Stable dipole solitons and soliton complexes in the nonlinear Schrödinger equation with periodically modulated nonlinearity” // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **26** (7), 073110 (2016).
3. G. L. Alfimov, L. A. Gegel, M. E. Lebedev, B. A. Malomed, and D. A. Zezyulin, “Localized modes in the Gross-Pitaevskii equation with a parabolic trapping potential and a nonlinear lattice pseudopotential” // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **66**, 194–207 (2019).
4. G. L. Alfimov, M. E. Lebedev, “Coding of stationary modes for the nonlinear Schrödinger equation with periodically modulated nonlinearity” // International Conference “Hamiltonian Dynamics, Nonautonomous Systems, and Patterns in PDE’s”, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, December 2014.
5. Алфимов Г. Л., Лебедев М. Е., «Стационарные моды нелинейного уравнения Шредингера в присутствии линейного и нелинейного потенциалов» // Мат. конф. «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», БашГУ, Уфа, сентябрь 2015.

# Публикации

6. M. E. Lebedev, G. L. Alfimov, B. A. Malomed, "Stable dipole solitons and soliton complexes in the nonlinear Schrödinger equation with periodically modulated nonlinearity" // International Conference "Dynamics, Bifurcations and Chaos III", Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, July 2016.
7. G. L. Alfimov, L. A. Gegel, M. E. Lebedev, D. A. Zezyulin, B. A. Malomed, "Steady-states for the Gross-Pitaevskii equation with nonlinear lattice pseudopotential" // International Conference "Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations", Bashkortostan, Bannoe Lake, March 2018.
8. G. L. Alfimov, M. E. Lebedev, D. A. Zezyulin, B. A. Malomed, "Steady-states for the Gross-Pitaevskii equation with nonlinear lattice pseudopotential" // International Conference "Nonlinear Phenomena in Bose Condensates and Optical Systems", Tashkent, Uzbekistan, August 2018.
9. Lebedev M. E., Shipitsyn K. V., "Coding of solutions for the Duffing equation with non-homogeneous nonlinearity" // International Conference "Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations", Bashkortostan, Bannoe Lake, March 2019.
10. M. E. Lebedev, G. L. Alfimov, "Coding of bounded solutions of equation  $u_{xx} - u + \eta(x)u^3 = 0$  with periodic piecewise constant function  $\eta(x)$ " // International Conference "Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations", Bashkortostan, Bannoe Lake, March 2021.

Спасибо за внимание!