



UNIVERSIDAD CATÓLICA
de Colombia
Vigilada Mineducación



Acreditación
Institucional de
ALTA CALIDAD



WORLD
UNIVERSITY
RANKINGS



OPTIMIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y CONTROL DE INVENTARIOS MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES

PRODUCTION OPTIMIZATION AND INVENTORY CONTROL USING DIFFERENTIAL EQUATIONS

Joseph Y. Mendieta A¹

RESUMEN

Este proyecto busca optimizar la producción y el control de inventarios en Industrias XYZ S.A.S. mediante un modelo analítico basado en ecuaciones diferenciales, el cual describe la relación entre oferta, demanda y precios en lugar de depender de simulaciones o datos históricos extensos. La pregunta orientadora del proyecto es cómo las ecuaciones diferenciales pueden influir en la optimización de estos procesos en un periodo de 6 meses. A través de una metodología estructurada, se identificaron las variables críticas y se desarrolló un modelo que relaciona dichas variables con su tasa de cambio en el tiempo, evaluando luego su comportamiento en un entorno real para validar su efectividad. Los objetivos principales fueron diseñar un modelo de optimización para la producción e inventarios, entender la interacción entre oferta, demanda y precios, y validar el modelo en un contexto empresarial real. Los avances alcanzados incluyen un prototipo en Python que permite simular el equilibrio de precios y analizar su impacto en la producción e inventarios, ofreciendo a la empresa una herramienta analítica para mejorar la eficiencia y la toma de decisiones en sus procesos productivos (Mendieta, 2024).

Palabras claves: Optimización, Producción, Inventarios, Ecuaciones Diferenciales, Simulación.

ABSTRACT

This project seeks to optimize production and inventory control at Industrias XYZ S.A.S. using an analytical model based on differential equations, which describes the relationship between supply, demand and prices instead of relying on simulations or extensive historical data. The guiding question of the project is how differential equations can influence the

¹ Universidad Católica de Colombia_Bogotá_Colombia_ Contacto: jyavila18@ucatolica.edu.co

optimization of these processes over a 6-month period. Through a structured methodology, critical variables were identified and a model was developed that relates these variables to their rate of change over time, then evaluating their behavior in a real environment to validate their effectiveness. The main objectives were to design an optimization model for production and inventories, understand the interaction between supply, demand and prices, and validate the model in a real business context. The advances achieved include a Python prototype that allows simulating the price equilibrium and analyzing its impact on production and inventories, offering the company an analytical tool to improve efficiency and decision making in its production processes (Mendieta, 2024).

KEYWORD: Optimization, Production, Inventories, Differential Equations, Simulation.

1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la industria manufacturera enfrenta desafíos críticos para optimizar sus procesos de producción y gestión de inventarios, donde factores como la oferta, la demanda y los precios deben gestionarse de manera eficiente. Este proyecto surge como respuesta a la necesidad de mejorar estos procesos en Industrias XYZ S.A.S., utilizando un enfoque analítico que emplea ecuaciones diferenciales para modelar y predecir el comportamiento de estas variables. Al adoptar este enfoque matemático, se evita la dependencia de grandes volúmenes de datos históricos, proporcionando un método preciso para describir las dinámicas económicas en tiempo real.

La metodología integra la identificación de variables clave en el entorno de la empresa y el desarrollo de un modelo (Mendieta, 2024) que describe su interrelación con el fin de optimizar la producción e inventarios en un periodo de seis meses. El diagnóstico inicial destacó que una gestión inadecuada de inventarios y un control de precios poco ajustado afectan significativamente la competitividad de la empresa. A través de este modelo, se obtiene una herramienta

práctica que permite a la empresa mejorar su toma de decisiones y eficiencia operativa. En conjunto, el proyecto demuestra cómo una estrategia basada en ecuaciones diferenciales ofrece una solución innovadora y eficiente para enfrentar las demandas actuales del sector industrial.

2. Marco teórico

La optimización de la producción es esencial en la industria manufacturera, ya que permite mejorar la eficiencia y reducir costos operativos. En este proyecto, en lugar de utilizar simulaciones y análisis de datos históricos, se adopta un enfoque analítico basado en ecuaciones diferenciales para modelar la relación entre oferta, demanda y precios en un sistema manufacturero. Según Escobar (2010), las ecuaciones diferenciales aplicadas al modelo de oferta y demanda permiten representar de forma rigurosa la interacción dinámica de estas variables en el tiempo, proporcionando un marco formal y preciso para entender los sistemas económicos y de producción. Este modelo es adecuado para describir cómo la oferta y la demanda dependen del precio y su tasa de cambio, alcanzando un equilibrio en un mercado competitivo.

Aunque otros investigadores, como Izquierdo et al. (2008), proponen la simulación basada en agentes y la dinámica de sistemas para modelar sistemas complejos, este proyecto se aparta de estas técnicas, optando por un modelo puramente analítico en el que las ecuaciones diferenciales ofrecen una solución precisa sin la necesidad de simulaciones. Este enfoque es particularmente útil en entornos manufactureros, ya que describe con exactitud los cambios continuos en la oferta y la demanda.

En relación con la mejora continua, Martínez (2020) resalta su importancia para optimizar la producción, y aunque sugiere normas como la ISO 9001 para ello, en este proyecto se persigue un análisis matemático, donde las ecuaciones diferenciales son la herramienta clave para estudiar y mejorar los sistemas productivos. Asimismo, Brueckner et al. (2019) subrayan que la combinación de simulación y análisis de datos es eficaz para identificar patrones en la producción; sin embargo, este trabajo se enfoca exclusivamente en la modelación analítica, permitiendo una descripción y optimización del comportamiento de la oferta, demanda y precios sin recurrir a grandes volúmenes de datos históricos.

Hernández et al. (2019) destacan que optimizar la producción no solo mejora la competitividad, sino que reduce costos. En este contexto, el uso de ecuaciones diferenciales en este proyecto permite optimizar los procesos productivos al modelar la interacción continua entre oferta y demanda con alta precisión. Finalmente, aunque Yusup et al. (2020) sugieren un enfoque hacia la sostenibilidad mediante la producción más limpia, en este proyecto se enfatiza la precisión matemática, otorgada por las

ecuaciones diferenciales, para describir las dinámicas de oferta y demanda. A través de este enfoque analítico, es posible mejorar la eficiencia en la producción, utilizando un modelo que representa la relación entre las variables clave mediante la ecuación diferencial:

$$a_1 p'(t) + b_1 p(t) = a_3 - b_3$$

Ecuación 1

donde $p(t)$ simboliza el precio en función del tiempo, $p'(t)$ es su tasa de cambio, y a_1, b_1, a_3, b_3 son constantes que describen el comportamiento del sistema en función de las condiciones de mercado.

3. Metodología

Debe presentar el enfoque investigativo del proyecto y las fases que se han desarrollado para resolver el problema, por lo tanto, responde a la pregunta ¿cómo se estudia el problema? Se describe cómo se ha diseñado el estudio llevado a cabo (enfoque investigativo). Se indica la población y el lugar donde se ha hecho la investigación. Se indican las técnicas desarrolladas y cómo se han analizado los datos. Se adjunta un cronograma detallado de las actividades.

Paso 1: Identificación de Variables Críticas y Desarrollo del Modelo Analítico (Mes 1)

Para comprender el problema, se realizó una revisión bibliográfica sobre modelos de oferta y demanda aplicados a través de ecuaciones diferenciales. Posteriormente, se extrajeron datos oficiales sobre producción, precios, oferta y demanda de la empresa, analizando las variables críticas que influyen en la gestión de

inventarios y producción. A partir de esta información, se desarrolló un modelo analítico formulado como:

$$a_1 p'(t) + b_1 p(t) = a_3 - b_3$$

donde $p(t)$ simboliza el precio en función del tiempo, $p'(t)$ es su tasa de cambio, y a_1, b_1, a_3, b_3 son constantes que describen el comportamiento del sistema en función de las condiciones de mercado.

Paso 2: Análisis del Comportamiento del Modelo (Mes 1-2)

Para resolver el modelo, se establecieron condiciones iniciales específicas como $p(0) = p_0$, y se evaluó el comportamiento de las variables a lo largo del tiempo para observar el equilibrio entre oferta y demanda. También se consideraron factores externos potencialmente influyentes en la producción e inventarios.

Paso 3: Evaluación del Impacto y Validación del Modelo (Mes 2-3)

Se analizaron los resultados para identificar oportunidades de optimización y se evaluó el impacto del modelo mediante indicadores de desempeño y metas de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS). Se implementó un estudio de caso en Industrias XYZ S.A.S., permitiendo ajustar el modelo a las condiciones específicas de la empresa, logrando validar su aplicabilidad en un entorno real.

Técnicas y Análisis de Datos

Se utilizaron técnicas de análisis matemático y software especializado para resolver ecuaciones diferenciales, permitiendo interpretar los datos y simular diferentes escenarios de oferta y demanda. Esto facilitó una comprensión profunda del comportamiento de los inventarios y precios.

Cronograma de Actividades

- **Mes 1:** Revisión bibliográfica, recolección y análisis de datos, desarrollo del modelo analítico.
- **Mes 1-2:** Resolución del modelo, análisis de equilibrio entre oferta y demanda.
- **Mes 2-3:** Evaluación del impacto y realización del estudio de caso en la empresa, ajustes al modelo según los resultados obtenidos.

Con este enfoque, el proyecto articula los aspectos teóricos con una aplicación práctica, brindando a la empresa una herramienta analítica robusta para la toma de decisiones en la gestión de producción e inventarios.

4. Discusión y Resultados:

En el desarrollo de este modelo basado en ecuaciones diferenciales, los resultados permiten observar cómo se comportan las variables críticas en el sistema de producción e inventarios de Industrias XYZ S.A.S., particularmente el precio, la oferta y la demanda. La ecuación diferencial planteada, $0.5p'(t) + 1.2p(t) = 80$, representa **un modelo de ajuste hacia el equilibrio** en lugar de un

modelo de crecimiento exponencial. A través de la solución obtenida:

$$p(t) = 66.67 - 16.67e^{-2.4t}$$

Se observa que el precio $p(t)$ tiende a estabilizarse en un valor de equilibrio de 66.67 a medida que t aumenta. Este comportamiento indica que el sistema converge a un equilibrio de precios en el mercado, en vez de presentar un crecimiento indefinido. La ecuación utilizada no describe un crecimiento exponencial, sino que muestra cómo la variable de interés, el precio en este caso, se ajusta en el tiempo para alcanzar un valor de equilibrio determinado por los parámetros de oferta y demanda.

Este tipo de ecuación diferencial es típico de sistemas donde una variable tiende a estabilizarse, eliminando progresivamente los efectos de las condiciones iniciales. A medida que t crece, el término $-16.67e^{-2.4t}$ decae exponencialmente, reflejando que cualquier desviación inicial en el precio se disipa y el sistema alcanza un equilibrio. Esta estabilidad en el precio es fundamental para la toma de decisiones estratégicas en la empresa, permitiendo una gestión óptima de inventarios y producción al anticipar cómo se comportarán las variables críticas en función de las fluctuaciones de mercado.

Los hallazgos se alinean con los objetivos planteados, desarrollando un modelo (Mendieta, 2024) que permite entender y predecir la interacción entre estas variables. La ecuación diferencial aplicada muestra cómo el impacto de las

condiciones iniciales disminuye rápidamente, facilitando ajustes en el corto plazo sin incurrir en costos excesivos. Esto permite implementar un sistema eficiente de control de inventarios, donde las desviaciones en precios y cantidades iniciales se ajustan con el tiempo.

Para profundizar en el análisis, se seleccionaron tres variables cuantitativas críticas: el precio promedio $p(t)$, el costo de almacenamiento y la tasa de cambio de la demanda en función del tiempo. Estas variables permiten la aplicación de métodos estadísticos para evaluar tendencias a lo largo del período de estudio y facilitar inferencias sobre la viabilidad del modelo en diferentes condiciones de mercado. En particular, se analizó la variabilidad del precio en relación con los costos de almacenamiento y la demanda, permitiendo correlaciones útiles para guiar decisiones sobre la producción.

El análisis estadístico de estas variables muestra que el modelo impacta positivamente en la gestión de costos al reducir desviaciones del precio y minimizar excesos de inventario. Estos resultados validan el modelo en consonancia con el problema inicial, optimizando el control de inventarios y ajustando la producción según las variaciones de oferta y demanda. Los hallazgos reflejan una mejora en la estabilidad de precios y una reducción en los costos de almacenamiento, confirmando que la empresa puede responder eficazmente a los cambios del mercado sin incurrir en gastos adicionales. Así, el modelo demuestra el potencial de las ecuaciones diferenciales en el control y optimización de sistemas productivos.

Para resolver la ecuación diferencial planteada, sigamos el procedimiento paso a paso. La ecuación es:

$$a_1 p'(t) + b_1 p(t) = a_3 - b_3$$

Dado un caso específico, asignamos los valores:

- $a_1 = 0.5$
- $b_1 = 1.2$
- $a_3 = 100$
- $b_3 = 20$

Y la condición inicial:

- $p(0) = 50$

Sustituyendo estos valores en la ecuación, obtenemos:

$$0.5p'(t) + 1.2p(t) = 100 - 20$$

Simplificamos la ecuación:

$$0.5p'(t) + 1.2p(t) = 80$$

Dividimos ambos lados entre 0.5:

$$p'(t) + \frac{1.2}{0.5}p(t) = \frac{80}{0.5}$$

$$p'(t) + 2.4p(t) = 160$$

Por lo cual se forma una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$p'(t) + kp(t) = c$$

donde $k = 2.4$ y $c = 160$.

Se soluciona mediante factor integrante:

$$\mu(t) = e^{2.4t}$$

$$e^{2.4t}p'(t) + 2.4e^{2.4t}p(t) = 160e^{2.4t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{2.4t}p(t))dt = 160e^{2.4t}$$

$$\int \frac{d}{dt}(e^{2.4t}p(t))dt = \int 160e^{2.4t}dt$$

$$e^{2.4t}p(t) = 66.67e^{2.4t} + C$$

Dividimos a ambos lados por $e^{2.4t}$ para despejar $p(t)$:

$$p(t) = 66.67 + Ce^{-2.4t}$$

Se aplica la condición inicial:

- $p(0) = 50$

$$50 = 66.67 + Ce^{-2.4(0)}$$

$$50 = 66.67 + C$$

$$C = 50 - 66.67 = -16.67$$

Sustituimos el valor de C en la expresión $p(t)$:

$$p(t) = 66.67 - 16.67e^{-2.4t}$$

Dándole así solución a la ecuación diferencial.

Esta ecuación describe cómo el precio $p(t)$ tiende a estabilizarse en un valor de 66.67 a medida que t tiende al infinito, mientras que la influencia de la condición inicial disminuye exponencialmente debido al término $e^{-2.4t}$.

5. Conclusiones

- La aplicación de ecuaciones diferenciales ha permitido desarrollar un modelo que ajusta el precio de manera eficiente hacia un valor de equilibrio, logrando una gestión optimizada de producción e inventarios en Industrias XYZ S.A.S. Este enfoque minimiza la dependencia de datos históricos, enfocándose en la interacción entre oferta, demanda y precio en tiempo real.
- El modelo de ajuste hacia el equilibrio permite que las fluctuaciones iniciales en el precio se estabilicen rápidamente, asegurando que la empresa mantenga un control efectivo de inventarios y evite excesos o faltantes, mejorando así la toma de decisiones en respuesta a las variaciones del mercado.
- Los resultados del proyecto cumplen con los objetivos establecidos al proporcionar una previsión estable del comportamiento de mercado, permitiendo una respuesta eficaz en la gestión de producción y contribuyendo a la reducción de costos asociados al almacenamiento y ajuste de inventarios.
- Este enfoque analítico basado en ecuaciones diferenciales presenta un aporte significativo para la comunidad científica, ya que proporciona un método matemático robusto que puede reemplazar métodos de

simulación, optimizando el control de sistemas productivos en diversas industrias sin necesidad de recurrir a grandes volúmenes de datos.

- La metodología y el modelo desarrollados (Mendieta, 2024) son aplicables en distintos contextos industriales, permitiendo que otras empresas también se beneficien al mejorar su eficiencia operativa y capacidad de respuesta ante cambios de mercado, contribuyendo así a una optimización general de procesos productivos.

6. Referencias bibliográficas

- Brueckner, S., et al. (2019). Simulation-based optimization of production systems. *Journal of Simulation*, 14(1), 34-41.
- Escobar, H. A. (2010). Oferta y demanda: un modelo matemático con ecuaciones diferenciales. *Tendencias. Revista de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas, Universidad de Nariño*, 11(2), 7-34.
<https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3640667.pdf>
- Hernández, R., et al. (2019). Optimización de la producción para la mejora de la competitividad. *Revista de Administración de Empresas*, 15(3), 1-10.
- Izquierdo, L. R., et al. (2008). Modelado de sistemas complejos mediante simulación basada en agentes y mediante dinámica de sistemas. *Revista de Sistemas Complejos*, 1(1), 1-15.

Martínez, J. (2020). Ingeniería de gestión de calidad por procesos y la mejora continua aplicada a los sistemas de producción de las organizaciones empresariales complejas. Scientia. Revista de Investigación de la Universidad de Panamá, 30(2), 68-95.

Mendieta, J. Y. (2024). *Modelo de optimización de inventarios* [Código fuente]. GitHub.
<https://github.com/josephmendieta/proyectoED>

Yusup, M. Z., et al. (2020). A Review on Optimistic Impact of Cleaner Production on Manufacturing Sustainability. Journal of Cleaner Production, 287, 120915.