TD 1 - Simulation de variables aléatoires

Exercice 1. On dispose d'un dé à 6 faces. Proposer une méthode pour simuler le résultat d'un Pile ou Face. On détaillera la variable aléatoire utilisée.

Exercice 2. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Cauchy si X admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

1. Montrer que cela définit bien une loi de probabilité.
2. En utilisant la méthode d'inversion, donner un moyen de simuler cette loi.

Exercice 3. On considère une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Rappeler la loi de X et son interprétation en terme de temps d'attente.
2. Comment obtenir une loi géométrique à partir d'une suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires *i.i.d.* de loi de Bernoulli de paramètre p ?
3. En déduire une méthode pour simuler une loi géométrique à partir d'une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires uniformes.
4. Soit E une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On considère la partie entière supérieure $Y = \lceil E \rceil$. Déterminer la loi de Y. En déduire un autre moyen de simuler une loi géométrique de paramètre p à partir d'une variable aléatoire uniforme U.

Exercice 4. La loi Beta de paramètres $\alpha > 1$, $\beta > 1$, notée $\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$, est donnée par la densité

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,, \quad x \in [0,1]\,,$$

où B désigne la fonction beta définie par $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$. À l'aide de la méthode de rejet, construisez une algorithme permettant de simuler n variables aléatoires de loi $\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$.

Exercice 5. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition respective F_X et F_Y. On pose $Z = \max(X,Y)$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.
2. En déduire une méthode pour simuler une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F(t) = \min(t,1)(1-e^{-t})\mathbb{1}_{]0,\infty[}(t)\,.$$

3. Déterminer la densité de cette variable aléatoire.

Exercice 6. Soit $\lambda \in]0,1[$ fixé.

1. On considère une variable aléatoire discrète Y de loi
$$\mathbb{P}(Y = n) = (1 - \lambda)\lambda^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$
Exprimer cette loi en fonction d'une loi connue.
2. En se basant sur la méthode de rejet, proposer une méthode pour simuler une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ à partir de Y.
3. Quelle est la probabilité de rejet ?

Exercice 7. Vous disposez d'une pièce équilibrée. Proposez une méthode pour simuler le résultat d'un dé à 6 faces.

Exercice 8. On considère deux variables aléatoires U et V indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.
1. Proposer une méthode pour simuler une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[a, b]$, avec $a < b$.
2. Proposer une méthode pour simuler un couple de variables aléatoires (X, Y) de loi uniforme sur le pavé $[a, b] \times [c, d]$, avec $a < b$ et $c < d$.
3. Sans utiliser la méthode d'inversion, proposez une méthode pour simuler une variable aléatoire de loi uniforme discrète sur $\{1, \ldots, n\}$.
4. Proposer une méthode de rejet pour simuler une variable aléatoire uniforme sur le disque unité à partir de U et V. Quelle est la probabilité de rejet ?
5. Montrer que le couple de variables aléatoires $(X, Y) = (\sqrt{U}\cos(2\pi V), \sqrt{U}\sin(2\pi V))$ suit également une loi uniforme sur le disque unité. On pourra utiliser la technique de la fonction muette.

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire de densité $f : x \mapsto \max(0, 1 - |x|)$. Construire une méthode de simulation de X à l'aide de
1. la méthode d'inversion,
2. la méthode de rejet.

Exercice 10. Soit X un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ un borélien de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $p = \mathbb{P}(X \in B) > 0$. On rappelle que la loi de X sachant B est définie via
$$\mathbb{P}_{X|B}(A) = \mathbb{P}(X \in A \mid X \in B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A \cap B)}{p}\,, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\,.$$
On suppose que l'on sait générer suivant la loi de X et on souhaite générer suivant la loi $\mathbb{P}_{X|B}$.
1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires suivant la loi de X. Déterminer la loi de
$$N = \min\{n \geqslant 1 : X_n \in B\}\,.$$
2. Montrer que X_N suit la loi $\mathbb{P}_{X|B}$. En déduire une méthode pour simuler une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_{X|B}$.

Exercice 11. Soit F une fonction de répartition continue.
1. Montrer l'égalité $F \circ F^{\leftarrow}(u) = u$ pour tout $u \in]0, 1]$.
2. Soit X une variable aléatoire ayant une fonction de répartition F_X continue. Montrer que la variable aléatoire $F_X(X)$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.
3. Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse de continuité de F_X ?