TD 4 - Marche Aléatoire

Exercice 1. Soit (S_n) une marche aléatoire issue de $S_0 = 0$.

1. Calculer la loi de S_1, S_2 et S_3.
2. Calculer la loi de $(n + S_n)/2$ pour tout n.
3. En déduire la loi de S_n pour tout n.

Exercice 2. Cent personnes font la queue à un guichet de cinéma. La place coûte 5 € et 60 personnes ont un billet de 5 € tandis que les 40 autres ont des billets de 10 €. Combien faut-il prévoir de billets de 5 € en caisse pour que toutes les spectatrices et les spectateurs soient servis dans leur ordre d'arrivée avec une probabilité d'au moins 95% ?

Exercice 3. Si a et b sont deux entiers strictement positifs, montrer qu'il y a autant de chemins de 0 à $a + b$ que de chemins de même longueur de 0 à $a - b$ passant par a.

Exercice 4. Une joueuse dispose de 10 € pour jouer à une machine à sous. A chaque partie, elle met 1 € dans la machine et celle-ci rend 2 € ou rien avec équiprobabilité.

1. Modéliser la fortune de la joueuse par une marche aléatoire. Soit N le nombre de parties jouées jusqu'à la ruine de la joueuse.
2. Quelle est la parité de N ? Quelle valeur minimale peut-il prendre ?
3. Calculer la loi de N.

Exercice 5. On considère deux marches aléatoires indépendantes issues de 0 et de 2 respectivement. Quelle est la probabilité que ces deux marches se retrouvent à un moment au même endroit ?

Exercice 6. Deux joueurs, Julie et Thomas s'affrontent dans un jeu de pile ou face avec une pièce équilibrée. Avant chanque lancer, les deux joueurs posent chacun 1 € sur la table ; si le tirage donne pile, Thomas empoche les 2 €, si c'est face, c'est Julie qui gagne les mises. Au début du jeu, Thomas a 10 pièces de 1 €. Il ignore la fortune x de Julie. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux participants est ruiné.

1. Modéliser la richesse de Thomas et son évolution par une marche aléatoire (S_n).
2. Modéliser la richesse de Julie et son évolution par une marche aléatoire (R_n).
3. Calculer $R_0 + S_0$. Quelle est la relation entre R_n et S_n après n parties ? On suppose maintenant que la richesse de Julie est infinie, et que le jeu s'est arrêté par la ruine de Thomas après 26 lancers.
4. Décrire la partie par un chemin dont on précisera les extrémités et les spécificités.
5. Combien y a-t-il de chemins quelconques ayant les mêmes extrémités ?
6. Combien y a-t-il de chemins possibles correspondant à cette partie ? On suppose à nouveau que la durée de jeu T est inconnue
7. Calculer $\mathbb{P}(T = 10)$ si la richesse initiale de Julie est $x = 15$.
8. Calculer $\mathbb{P}(T = 10)$ si la richesse initiale de Julie est $x = 10$.

9. Calculer $\mathbb{P}(T = 10)$ si la richesse initiale de Julie est $x = 6$.
10. Si x est impair que peut-on dire du perdant en fonction de la parité de T ?

Exercice 7. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi uniforme sur

$$\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}.$$

On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $S_n = S_{n-1} + Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k$. On dit que (S_n) est une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^2$. Pour tout $n \geqslant 1$ on note X_n la première coordonnée de Z_n et Y_n sa deuxième coordonnée, et on introduit $U_n = X_n + Y_n$ et $V_n = X_n - Y_n$.

1. Identifier les lois marginales de X_n et Y_n.
2. Les variables X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
3. Identifier les lois de U_n et V_n.
4. Les variables U_n et V_n sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbb{P}(S_n = (0,0))$.