Analyse 1: convexité et fonction convexe

Joseph Salmon

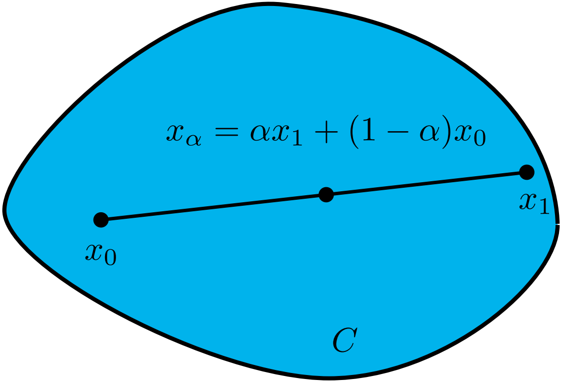
Septembre 2014

Ensembles convexes

Définition : ensemble convexe

Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^d$ est dit **convexe** s'il vérifie la propriété :

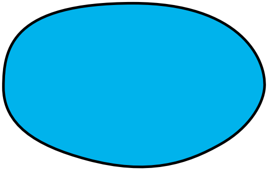
$$\forall x_0, x_1 \in C, \forall \alpha \in [0,1], \quad x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_0 \in C$$



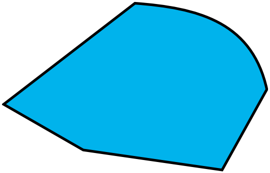
Interprétation : le segment joignant deux points de C est lui même inclus dans C. Pour plus détails : Boyd and Vandenberghe (2004)

Exemples d'ensembles convexes

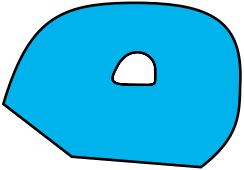
- une droite
- un plan
- un hyperplan
- un carré, une boule, un cube, un tétraèdre, etc.



Convexe : OUI

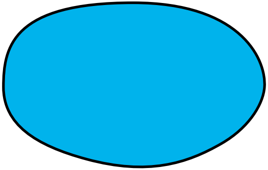


Convexe : OUI

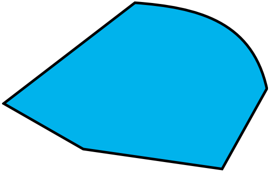


Exemples d'ensembles convexes

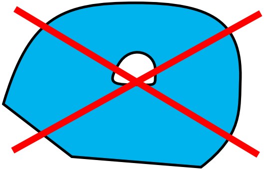
- une droite
- un plan
- un hyperplan
- un carré, une boule, un cube, un tétraèdre, etc.



Convexe : OUI



Convexe : OUI

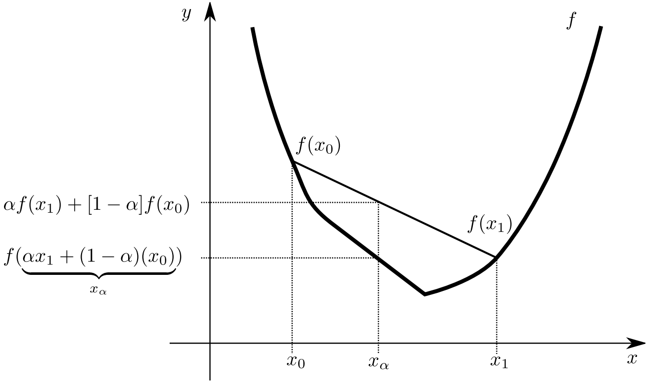


Convexe : NON

Fonction convexe

Définition : fonction convexe

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est **convexe** si elle vérifie $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^d, \forall \alpha \in [0,1]$, $f(\underbrace{\alpha x_1 + (1-\alpha)(x_0)}_{x_\alpha}) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_0)$

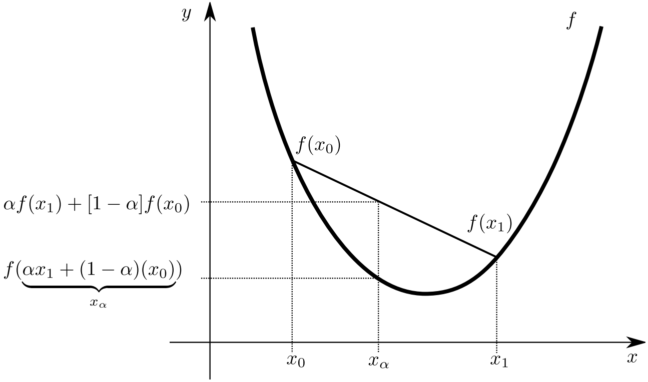


<u>Interprétation</u> : le segment joignant deux points de le courbe est au dessus de la courbe

Fonction strictement convexe

Définition : strictement fonction convexe

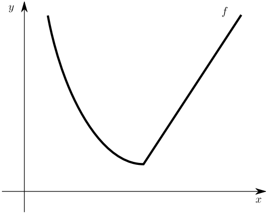
$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est **strictement convexe** si elle vérifie pour tous $x_0 \neq x_1 \in \mathbb{R}^d, \forall \alpha \in]0,1[$, $f(\underbrace{\alpha x_1 + (1-\alpha)(x_0)}_{x_\alpha}) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_0)$



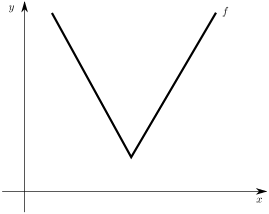
<u>Interprétation</u> : le segment joignant deux points de le courbe est strictement au dessus de la courbe

Exemples de fonctions convexes

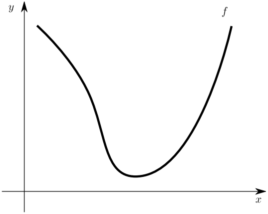
- une fonction constante : $x \mapsto c \quad (c \in \mathbb{R})$
- une fonction affine : $x \mapsto \langle a, x \rangle + c \quad (a \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R})$
- $\alpha f + (1 - \alpha) g$ pour f, g convexes et $\alpha \in [0, 1]$
- λf pour f convexe et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (ATTENTION au signe $+$)



Convexe : OUI

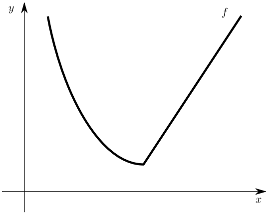


Convexe : OUI

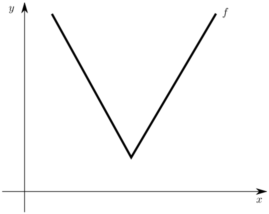


Exemples de fonctions convexes

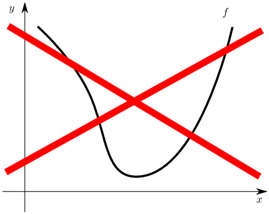
- une fonction constante : $x \mapsto c \quad (c \in \mathbb{R})$
- une fonction affine : $x \mapsto \langle a, x \rangle + c \quad (a \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R})$
- $\alpha f + (1-\alpha) g$ pour f, g convexes et $\alpha \in [0,1]$
- λf pour f convexe et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (ATTENTION au signe $+$)



Convexe : OUI



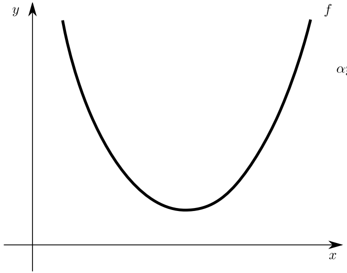
Convexe : OUI

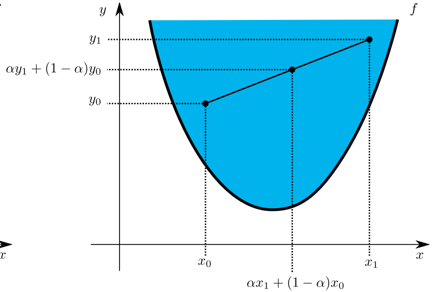


Convexe : NON

Convexité de l'épigraphe

Une fonction est convexe si "la partie au dessus" de la fonction est convexe *i.e.*, son **épigraphe** $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq y\}$





<u>Rem</u>: une fonction est **concave** quand "la partie en dessous" de la fonction est convexe (cela revient à dire que $-f$ est convexe)

Inégalité de convexité

Définition : combinaison convexe / moyenne pondérée

On appelle combinaison convexe (ou moyenne pondérée) des points $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ tout point qui s'écrit $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ pour des α_i satisfaisant $\forall i = 1, \ldots, n, \quad \alpha_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

Théorème : inégalité de Jensen

Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est convexe alors pour tous points $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ et tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tel que $\forall i = 1, \ldots, n, \quad \alpha_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

$$f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

Interprétation : l'image par une fonction convexe d'une moyenne pondérée est plus petite que la moyenne pondérée des images

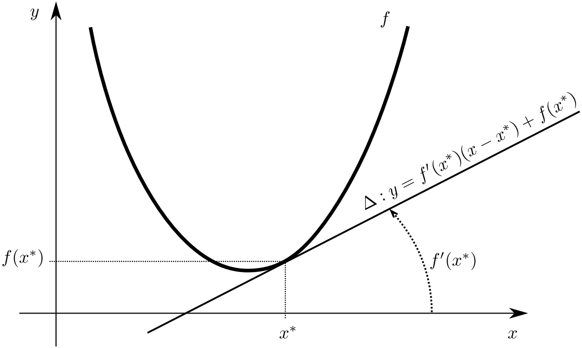
Inégalité de convexité II

Théorème : comparaison entre fonction et tangente

Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est convexe alors pour tous points $x, x^* \in \mathbb{R}^d$ on a

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle$$

Interprétation : Une fonction convexe et différentiable se situe au dessus de n'importe laquelle de ses tangentes



Fonctions convexes réelles

Théorème : croissance de la dérivée

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable alors on a l'équivalence :

$$f \text{ convexe } \Leftrightarrow f' \text{ croissante}$$

Théorème : croissance de la dérivée (bis)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable deux fois, alors on a l'équivalence :

$$f \text{ convexe } \Leftrightarrow f'' \geq 0$$

Exemples d'application :

- $x \mapsto x^2$ ou plus généralement $x \mapsto x^{2n}$ (pour $n \in \mathbb{N}$)
- $x \mapsto \exp(x)$
- $x \mapsto -\log(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$

Fonctions convexes multi-dimensionnelles

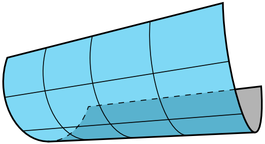
Corollaire : croissance de la dérivée revisitée

Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est différentiable deux fois, alors on a l'équivalence :

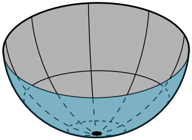
$$f \text{ convexe } \Leftrightarrow \nabla^2 f \text{ est semi-défini positive}$$

Exemple d'application : $f : x \mapsto x^\top A x$ (avec A symétrique) est convexe si et seulement si A est semi-défini positive

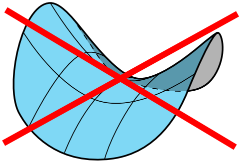
Rem: Pour $d = 2$ une fonction convexe ressemble localement à



Hessienne semi-définie positive



Hessienne définie positive



Impossible : non convexe

Références I

- S. Boyd and L. Vandenberghe.
  Convex optimization.
  Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
  http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf.