
TD n° 1 : Introduction et rappels

Rappel. On note Φ (resp. φ) la fonction de répartition (resp. la densité) d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale centrée réduite :

$$\varphi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt .$$

En particulier, on notera que $\Phi(0) = 1/2$ (symétrie) et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0$

EXERCICE 1. On rappelle que, si $Z = \sigma X + \mu$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (i.e., X suit une loi normale centrée réduite), alors Z suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et de variance σ^2 . Donner la fonction de répartition $\Phi_{\mu, \sigma}$ et la densité $\varphi_{\mu, \sigma}$ de la variable Z . Donner également le lien entre $\varphi_{\mu, \sigma}$ et $\Phi_{\mu, \sigma}$.

EXERCICE 2. Soit X une variable distribuée suivant une loi normale centrée réduite. Donner la valeur des probabilités ci-dessous en fonction de la fonction Φ donnée en rappel (et potentiellement de constantes numériques que vous préciserez).

- 1) $\mathbb{P}(X \leq 1.37)$, $\mathbb{P}(X > 1.37)$ et $\mathbb{P}(X = 1.37)$;
- 2) $\mathbb{P}(X < 0.52)$ et $\mathbb{P}(X \leq -0.52)$;
- 3) $\mathbb{P}(X > 1.79)$ et $\mathbb{P}(X > -1.79)$;
- 4) $\mathbb{P}(-0.155 < X < 1.60)$, $\mathbb{P}(-1.3 < X < 2.1)$ et $\mathbb{P}(0.06 < X < 0.8)$;
- 5) $\mathbb{P}(X < -1.9 \text{ ou } X > 2.1)$;
- 6) $\mathbb{P}(|X| < 1.64)$, $\mathbb{P}(|X| < 1)$.

EXERCICE 3. Soit Z de loi normale d'espérance 20 et d'écart-type 5. Calculer $\mathbb{P}(Z < 18)$, $\mathbb{P}(Z \leq 39)$, $\mathbb{P}(Z > 37)$, $\mathbb{P}(Z > 11)$ et $\mathbb{P}(22 \leq Z \leq 31)$.

EXERCICE 4. Soit Z de loi normale d'espérance 130 et d'écart-type 5. Résoudre chacune des équations suivantes (l'inconnue est b) en utilisant $q = \Phi^{-1}$, la fonction quantile de la loi normale centrée réduite :

- 1) $\mathbb{P}(Z < b) = 0.975$,
- 2) $\mathbb{P}(Z > b) = 0.025$,
- 3) $\mathbb{P}(Z < b) = 0.305$.

EXERCICE 5. Quartiles approchés et histogrammes

TABLE 1 – Distribution du nombre de cigarettes fumées par jour pour les 484 mères fumeuses.

| Nb de cig. | Nb. de fumeurs (%) |
|------------|--------------------|
| 0–5 | 16 |
| 5–10 | 25 |
| 10–15 | 14 |
| 15–20 | 4 |
| 20–30 | 32 |
| 30–40 | 5 |
| 40–60 | 4 |
| Total | 100 |

- A partir du Tableau 1 trouver des quartiles approchés de la distribution du nombre de cigarettes fumées par jour des mères fumeuses pendant la grossesse.
- Combinez les quatre dernières classes de ce tableau et tracez l'histogramme qui estime la densité : on veillera à proposer une courbe d'aire égale à 1.

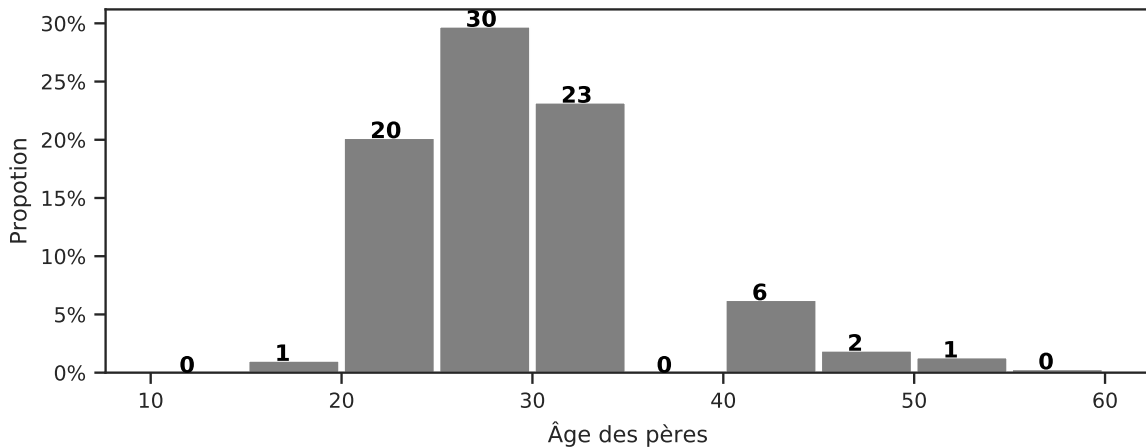


FIGURE 1 – Histogramme de l'âge des pères dans l'étude CHDS vue en cours. Les nombres indiquent la hauteur (en %) de chaque rectangle. Le rectangle pour la classe $[35, 40[$ est manquant.

- Regardez l'histogramme de la Figure 1. On a oublié de faire le graphique pour une classe, celle correspondant aux âges entre 35 et 40 ans, que l'on a rempli à tort avec un 0. Comblez cette lacune.

EXERCICE 6. Moyennes et écart-types

- Dans une étude du Missouri, le poids moyen à la naissance des bébés issus de mères fumeuses est 3180g et l'écart-type de 500g. Quel est le poids moyen et l'écart-type en onces sachant qu'il y a 0.035 onces dans 1g.
- Soient x_1, \dots, x_n quelques observations. Pour des raisons de commodités, Bob a changé les unités menant à de nouvelles observations

$$y_i = ax_i + b, \quad i = 1, \dots, n,$$

avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Exprimez la moyenne et l'écart-type des y_i en fonction de ceux des x_i , et des constantes a et b .

EXERCICE 7. La loi normale

- On modélise la loi de la taille des mères (dans la même étude que celle vue en cours) par une loi normale d'espérance 64 pouces et d'écart-type 2.5 pouces. Utiliser cette approximation et la fonction Φ pour estimer la proportion de mères mesurant entre 61.5 et 64.5 pouces. Aide : on pourra utiliser les approximations $\Phi(0.2) \approx 0.5793$ et $\Phi(1) \approx 0.8413$.
- Supposons que l'on dispose d'observations issues d'une loi normale centrée réduite. Quelle proportion des observations peut-on espérer voir en dehors des « moustaches » de la boîte à moustache ? Aide : on pourra utiliser les approximations $\Phi(0.675) \approx 0.75$ et $\Phi(2.7) \approx 0.9965$.