TD N° 1 : Introduction et rappels

Rappel. On note Φ (resp. φ) la fonction de répartition (resp. la densité) d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale centrée réduite :

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) dt \ .$$

Exercice 1. On rappelle que, si $Z = \sigma X + \mu$ pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ (*i.e.*, X suit une loi normale centrée réduite), alors Z suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et de variance σ^2. Donner la fonction de répartition $\Phi_{\mu,\sigma}$ et la densité $\varphi_{\mu,\sigma}$ de la variable Z. Exprimer $\varphi_{\mu,\sigma}$ en fonction de $\Phi_{\mu,\sigma}$.

Exercice 2. Soit X une variable distribuée suivant une loi normale centrée réduite. Donner la valeur des probabilités ci-dessous en fonction de la fonction Φ donnée en rappel (et potentiellement de constantes numériques que vous préciserez).

1) $\mathbb{P}(X \leqslant 1.37)$, $\mathbb{P}(X > 1.37)$ et $\mathbb{P}(X = 1.37)$;
2) $\mathbb{P}(X < .52)$ et $\mathbb{P}(X < -.52)$;
3) $\mathbb{P}(X > 1.79)$ et $\mathbb{P}(X > -1.79)$;
4) $\mathbb{P}(-.155 < X < 1.60)$, $\mathbb{P}(-1.3 < X < 2.1)$ et $\mathbb{P}(.06 < X < .8)$;
5) $\mathbb{P}(X < -1.9 \text{ ou } X > 2.1)$;
6) $\mathbb{P}(|X| < 1.64)$, $\mathbb{P}(|X| < 1)$ et $\mathbb{P}(X < 1.96)$.

Exercice 3. Soit Z de loi normale d'espérance 20 et d'écart-type 5. Calculer $\mathbb{P}(Z < 18)$, $\mathbb{P}(Z \leqslant 39)$, $\mathbb{P}(Z > 37)$, $\mathbb{P}(Z > 11)$ et $\mathbb{P}(22 \leqslant Z \leqslant 31)$.

Exercice 4. Soit Z de loi normale d'espérance 130 et d'écart-type 5. Résoudre chacune des équations suivantes (l'inconnue est b) en utilisant $q = \Phi^{-1}$, la fonction quantile de la loi normale centrée réduite :

1) $\mathbb{P}(Z < b) = 0.975$,
2) $\mathbb{P}(Z > b) = 0.025$,
3) $\mathbb{P}(Z < b) = 0.305$.

Exercice 5. Quartiles approchés et histogrammes

Table 1 – Distribution du nombre de cigarettes fumées par jour pour les 484 mères fumeuses.

Nb de cig.	Nb. de fumeurs (%)
0–5	16
5–10	25
10–15	14
15–20	4
20–30	32
30–40	5
40–60	4
Total	100

a) A partir du Tableau 1 trouver les quartiles approchés de la distribution du nombre de cigarettes fumées par jour des mères fumeuses pendant la grossesse.
b) Combinez les quatre dernières classes de ce tableau et tracez l' histogramme (l'amplitude des barres sera le pourcentage de fumeur) à partir de ce nouveau tableau.

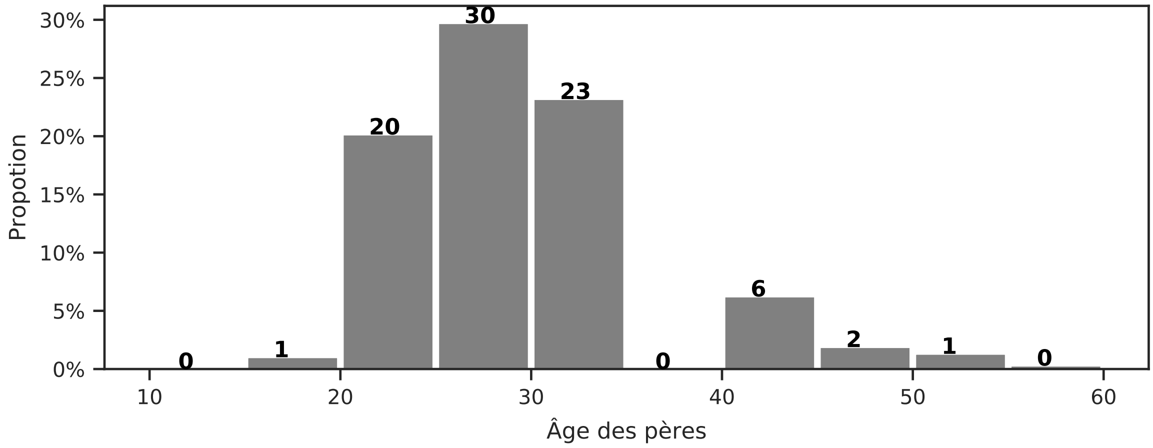

FIGURE 1 – Histogramme de l'âge des pères dans l'étude CHDS. Les nombres indiquent la hauteur (en %) de chaque rectangle. Le rectangle pour la classe $[35, 40)$ est manquant.

c) Regardez l'histogramme de la Figure 1. On a oublié de faire le graphique pour une classe, celle correspondant aux âges entre 35 et 40 ans, que l'on l'a rempli à tort avec un 0. Comblez cette lacune.

EXERCICE 6. La loi normale

a) On modélise la loi de la taille des mères (dans la même étude que celle vue en cours) par une loi normale d'espérance 64 pouces et d'écart-type 2.5 pouces. Utiliser cette approximation et la fonction Φ pour estimer la proportion de mères mesurant entre 61.5 et 64.5 pouces. Aide : on pourra utiliser les approximations $\Phi(0.2) \approx 0.5793$ et $\Phi(1) \approx 0.8413$.

b) Supposons que l'on dispose d'observations issues d'une loi normale centrée réduite. Quelle proportion des observations peut-on espérer voir en dehors des « moustaches » du boxplot ? Aide : on pourra utiliser les approximations $\Phi(0.675) \approx 0.75$ et $\Phi(2.7) \approx 0.9965$.

EXERCICE 7. Moyennes et écart-types

a) Dans une étude du Missouri, le poids moyen à la naissance des bébés issus de mères fumeuses est 3180g et l'écart-type de 500g. Quel est le poids moyen et l'écart-type en onces sachant qu'il y a 0.035 onces dans 1g.

b) Soient $x_1, \ldots, x_n$ quelques observations. Pour des raisons de commodités, Bob a changé les unités menant à de nouvelles observations

$$y_i = ax_i + b, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Exprimez la moyenne et l'écart-type des y_i en fonction de ceux des x_i.