
TD N° 1 : Introduction et rappels

EXERCICE 1. Montre que pour toute matrice $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\text{Ker}(X) = \text{Ker}(X^\top X)$. En déduire que les rangs suivant sont identiques : $\text{rg}(X) = \text{rg}(X^\top X) = \text{rg}(XX^\top) = \text{rang}(X^\top)$.

EXERCICE 2. Montre que $\hat{\beta}^{(\ell_2)} \triangleq X^+ y$ est une solution du problème des moindres carrés :

$$\arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \|y - X\beta\|^2, \quad (1)$$

avec $y \in \mathbb{R}^n$ et $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, et que de plus parmi toute les solutions c'est la solution de norme (euclidienne) minimale.

EXERCICE 3.

- 1) Calculer la SVD de la matrice

$$X = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{1}_n}{\sqrt{n}} & \frac{\mathbf{1}_{C_1}}{\sqrt{n_1}} & \frac{\mathbf{1}_{C_2}}{\sqrt{n_2}} \end{bmatrix},$$

en prenant des vecteurs $\mathbf{1}_{C_1}, \mathbf{1}_{C_2}$ les indicatrices d'ensembles C_1, C_2 formant une partition de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, en supposant qu'il y a n_1 (resp. n_2) observations dans la classe C_1 (resp. C_2). On notera que $\mathbf{1}_{C_1} + \mathbf{1}_{C_2} = \mathbf{1}_n$, et $\mathbf{1}_1 \mathbf{1}_2 = 0 \in \mathbb{R}^n$.

- 2) Donner X^+ , la pseudo-inverse de la matrice X .

EXERCICE 4.

- 1) Calculer la SVD de la matrice

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & x_1 & x_2 \end{bmatrix},$$

sous la contrainte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, $x_1^\top x_2 = 0$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

- 2) Donner X^+ , la pseudo-inverse de la matrice X .

EXERCICE 5.

- 1) Calculer la SVD de la matrice

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{1}_{C_1} & \mathbf{1}_{C_2} \end{bmatrix},$$

en prenant des vecteurs $\mathbf{1}_{C_1}, \mathbf{1}_{C_2}$ les indicatrices d'ensembles C_1, C_2 formant une partition de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. On notera que $\mathbf{1}_{C_1} + \mathbf{1}_{C_2} = \mathbf{1}_n$, et $\mathbf{1}_1 \mathbf{1}_2 = 0 \in \mathbb{R}^n$, on supposera qu'il y a n_1 (resp. n_2) observations dans la classe C_1 (resp. C_2).