

HLMA408: Traitement des données

Statistiques descriptives

Joseph Salmon

<http://josephsalmon.eu>

Université de Montpellier



Sommaire

Conseils numériques: pour le cours et au-delà

Choix de Python: introduction et motivation

Écosystème Python: les librairies

Introduction: Grossesse, cigarettes et nouveaux nés

Éléments de cours

Enseignant: cours magistral

- **Joseph Salmon:**

- ▶ Situation actuelle: Professeur à l'université de Montpellier
- ▶ Précédemment: Paris Diderot-Paris 7, Duke University, Télécom ParisTech, University of Washington
- ▶ Spécialités: statistiques en grande dimension, optimisation, agrégation, traitement des images
- ▶ Bureau: 415, Bat.9

Contact:

Joseph Salmon

joseph.salmon@umontpellier.fr

Github: @josephsalmon



Twitter: @salmonjsph



Enseignant: TPs

- **Emmanuel Bonnet:**

- ▶ Situation actuelle: Doctorant à l'université de Montpellier
- ▶ Spécialités: Bio-statistiques
- ▶ Email: *emmanuel.bonnet@umontpellier.fr*
- ▶ Bureau : Institut Universitaire de Recherche Clinique (IURC)

Enseignant: TPs

- **Tiffany Cherchi:**

- ▶ Situation actuelle: Doctorante à l'université de Montpellier
- ▶ Spécialités: Probabilités
- ▶ Email: *tiffany.cherchi@umontpellier.fr*
- ▶ Bureau: ???, Bat. 9

Enseignant: TPs

- **Pierre-Louis Montagard:**

- ▶ Situation actuelle: Maître de conf. à l'université de Montpellier
- ▶ Spécialités: Mathématiques (topologie algébrique)
- ▶ Email: *pierre-louis.montagard@umontpellier.fr*
- ▶ Bureau: ???, Bat. 9

Enseignant: TPs

- **Léa Pradier:**

- ▶ Situation actuelle: Doctorante à l'université de Montpellier
- ▶ Spécialités: Génétique et écologie évolutive
- ▶ Email: *lea.pradier@etu.umontpellier.fr*
- ▶ Bureau: ???, Bat. ?

Enseignant: TPs

- **Raphael Romero:**

- ▶ Situation actuelle: Doctorant à l'université de Montpellier
- ▶ Spécialités: Statistiques
- ▶ Email: *raphael.romero@umontpellier.fr*
- ▶ Bureau: ???, Bat. 9

Calendrier de validation

$$\text{Note finale} = \max(0.4 \times \text{CC} + 0.6 \times \text{EXAM}; \text{EXAM})$$

- ▶ CC = moyenne du contrôle de mi-parcours en amphi et du TP noté
 - TP noté: Date de mise en ligne : mardi 16/04, et à rendre sur le Moodle du cours pour le vendredi 19, 23h59. Rendu sous forme de jupyter notebook (un unique fichier .ipynb) ou de scripte R (pour le groupe E).
ATTENTION: le travail sera un rendu individuel!!! Les copies identiques verront leurs notes partagées en autant de doublons.
 - Contrôle continu: effectué le mercredi 13/03.
Format: quiz avec point négatif pour chaque mauvaise réponse (répondre au hasard est donc déconseillé!)
- ▶ EXAM: examen final classique

Ressources en ligne

Informations principales: site du cours

<http://josephsalmon.eu/teaching.html>

- ▶ Slides (au fil de l'eau)
- ▶ Poly (en cours)

<http://josephsalmon.eu/enseignement/Montpellier/HLMA310/IntroPython.pdf>

- ▶ Feuilles de TP

Rendu TP: Moodle de l'université

<https://moodle.umontpellier.fr/course/view.php?id=440>

Notation pour le TP noté

Rendu : par Moodle uniquement

Détails de la notation du TP (noté sur 20):

- ▶ Qualité des réponses aux questions: **14** pts
- ▶ Qualité de rédaction et d'orthographe: **1** pt
- ▶ Qualité des graphiques (légendes, couleurs): **1** pt
- ▶ Style PEP8 valide⁽¹⁾: **2** pts
- ▶ Qualité d'écriture du code (nom de variable clair, commentaires utiles, code synthétique, etc.): **1** pt
- ▶ Notebook / scripte reproductible (e.g., *Restart & Run all* marche correctement) et absence de bug: **1** pt

Pénalités:

- ▶ Envoi par mail: **zéro**
- ▶ Retard: **zéro**, sauf excuse validée par l'administration

⁽¹⁾<https://openclassrooms.com/fr/courses/4425111-perfectionnez-vous-en-python/4464230-assimilez-les-bonnes-pratiques-de-la-pep-8>

Bonus

2 pts supplémentaires sur **la note finale** pour toute contribution à l'amélioration des cours (présentations, codes, etc.)

Contraintes:

- ▶ seule la première amélioration reçue est “rémunérée”
- ▶ déposer un fichier **.txt** (taille <10 ko) en créant une fiche dans la partie du Moodle “Bonus - Proposition d'amélioration”
- ▶ détailler précisément (ligne de code, page des présentations, etc.) l'amélioration proposée, ce qu'elle corrige et/ou améliore
- ▶ pour les fautes d'orthographe : proposer au minimum 5 corrections par contribution
- ▶ chaque élève ne peut gagner que 2 points maximum de cette manière

Prérequis - à revoir seul

- ▶ Bases de **probabilités**: probabilité, densité, espérance, loi des grands nombres, théorème central limite
Lecture: Foata et Fuchs (1996)
- ▶ Bases de l'**algèbre (bi-)linéaire**: espaces vectoriels, normes, produit scalaire, matrices, diagonalisation
Lecture: Horn et Johnson (1994)

Prérequis - à revoir seul

- ▶ Bases de **probabilités**: probabilité, densité, espérance, loi des grands nombres, théorème central limite
Lecture: Foata et Fuchs (1996)
- ▶ Bases de l'**algèbre (bi-)linéaire**: espaces vectoriels, normes, produit scalaire, matrices, diagonalisation
Lecture: Horn et Johnson (1994)

Description de la partie numérique du cours

Objectifs: utilisation de Python (et de R pour le groupe E) pour le traitement et la visualisation de données.

- ▶ méthodes basiques de programmation et d'algorithmique
- ▶ librairies standard de méthodes numériques (`numpy`, `scipy`)
- ▶ librairies standard de traitement des bases de données (`pandas`)
- ▶ visualisation (`matplotlib`, `seaborn`)

Sommaire

Conseils numériques: pour le cours et au-delà

Choix de Python: introduction et motivation

Écosystème Python: les librairies

Introduction: Grossesse, cigarettes et nouveaux nés

Éléments de cours

Sommaire

Conseils numériques: pour le cours et au-delà

Choix de Python: introduction et motivation

Écosystème Python: les librairies

Introduction: Grossesse, cigarettes et nouveaux nés

Éléments de cours

Aspects algorithmiques: quelques conseils

Python: installation fonctionnelle sur les machines de l'université,
Utiliser anaconda3 et anaconda-navigator.

Informations détaillées sur le polycopié disponible ici:

<http://josephsalmon.eu/enseignement/Montpellier/HLMA310/IntroPython.pdf>

Rem: premier TP principalement sur la prise en main

Installation personnelle

Conseil d'installation de Python sur machines personnelles:
Privilégier **Conda** / **Anaconda** / **mini Conda** (tous OS)

Attention: pas d'aide des enseignants sur ce point; entraidez-vous!

Format de rendus de TP: **jupyter notebook** (ou fichier R pour le groupe E uniquement)

Rem: en TP, prenez vos portables si vous préférez garder votre environnement (packages, versions, etc.)

Conseils généraux pour l'année

- ▶ Adoptez des règles d'écriture de code et tenez-y vous!
Exemple: PEP8 pour Python (utiliser **AutoPEP8**, ou pour les notebooks <https://github.com/kenko000/jupyter-autopep8>)
- ▶ Utilisez **Markdown** (.md) pour les parties rédigées / comptes-rendus (e.g., markdown-preview-plus avec **Atom**)

"A (wo)man must have a code."
– Bunk

Source: [The Wire](#), épisode 7, saison 1.

- ▶ Apprenez de bons exemples (ouvrez les codes sources!):
<http://jakevdp.github.io/>,
<https://github.com/scikit-learn/>, etc.

TODO: ouvrir le fichier ".ipynb" associé (jupyter notebook)

Éditeurs de texte (pas seulement pour Python)

Motivation: les jupyter notebooks sont excellents pour des projets courts. Cas plus long, utiliser : **IPython** + éditeur de texte avancé

Éditeurs recommandés:

- ▶ **Visual Studio Code**,
- ▶ **Atom**
- ▶ **Sublime Text**
- ▶ vim (fort coût d'entrée, déconseillé)
- ▶ emacs (fort coût d'entrée, déconseillé)

Bénéfices: coloration syntaxique, auto-complétion du code, débogueur graphique, warning PEP8

Environnement intégré (plus avancé)

PyCharm:

- ▶ coloration syntaxique
- ▶ auto-complétion
- ▶ vérification de code dans l'environnement
- ▶ débogueur graphique
- ▶ intégration avec gestionnaires de versions (git)
- ▶ gestion des environnements virtuels (VirtualEnv)
- ▶ gestion des tests, etc.

Sommaire

Conseils numériques: pour le cours et au-delà

Choix de Python: introduction et motivation

Écosystème Python: les librairies

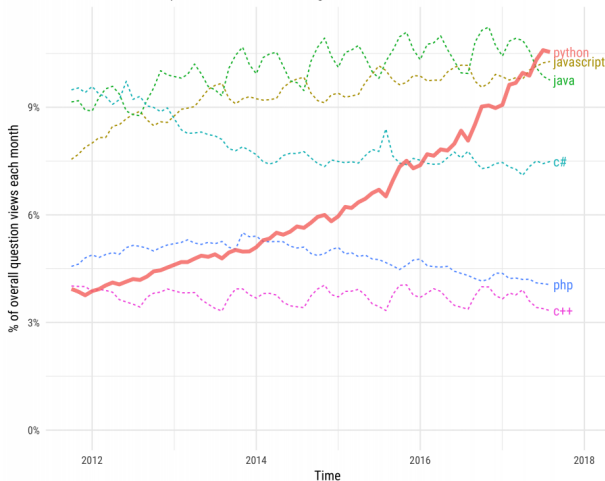
Introduction: Grossesse, cigarettes et nouveaux nés

Éléments de cours

Popularité de Python sur Stackoverflow

Growth of major programming languages

Based on Stack Overflow question views in World Bank high-income countries

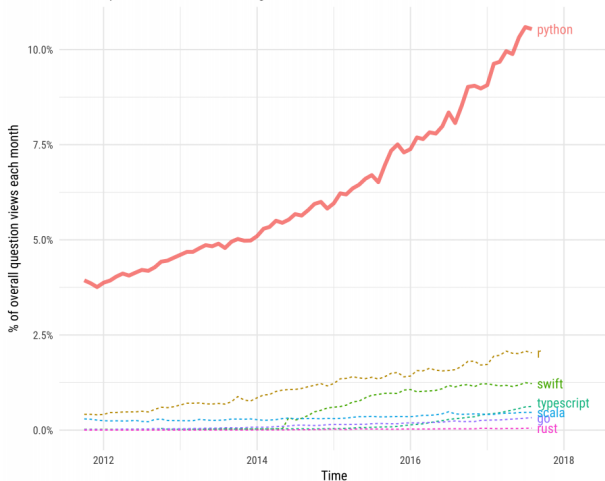


Source: <https://stackoverflow.blog/2017/09/06/incredible-growth-python/>

Popularité de Python sur Stackoverflow

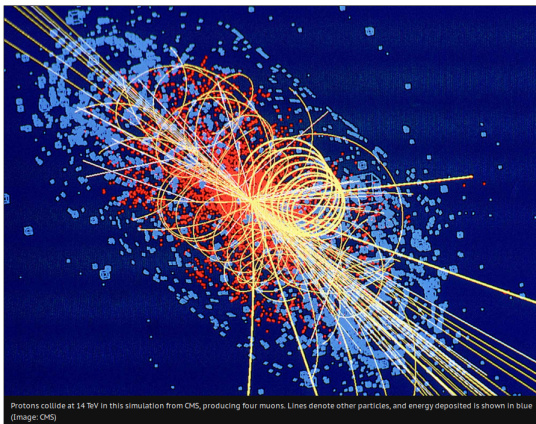
Python compared to smaller, growing technologies

Based on question traffic in World Bank high-income countries



Source: <https://stackoverflow.blog/2017/09/06/incredible-growth-python/>

Python dans les médias: découverte du Boson de Higgs (CERN, 2012)

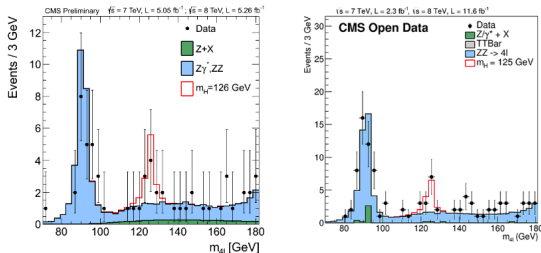


Collisions

Sources:

- ▶ <https://home.cern/fr/science/physics/higgs-boson>
- ▶ <https://cms.cern/news/observing-higgs-over-one-petabyte-new-cms-open-data>

Python dans les médias: découverte du Boson de Higgs (CERN, 2012)



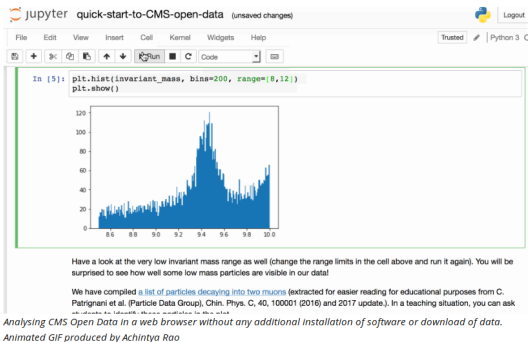
Left: The official CMS plot for the "Higgs to four leptons" channel, shown on the day of the Higgs discovery announcement. Right: A similar plot produced by Nur Zulaiha Jomhari et al. using CMS Open Data from 2011 and 2012. Although the plots appear similar, the analysis with CMS Open Data uses more data (at 8 TeV and overall) than the official CMS one from the original discovery but is a lot less sophisticated and is not scrutinised by the wider CMS community of experts.

Matplotlib (pour la visualisation)

Sources:

- ▶ <https://home.cern/fr/science/physics/higgs-boson>
- ▶ <https://cms.cern/news/observing-higgs-over-one-petabyte-new-cms-open-data>

Python dans les médias: découverte du Boson de Higgs (CERN, 2012)



Jupyter notebook (pour la présentation)

Sources:

- ▶ <https://home.cern/fr/science/physics/higgs-boson>
- ▶ <https://cms.cern/news/observing-higgs-over-one-petabyte-new-cms-open-data>


Python dans l'académique: aspect enseignement

Python est au programme des classes préparatoires aux grandes écoles (depuis 2013)

“Depuis la réforme des programmes de 2013, l'informatique est présente dans les programmes de CPGE à deux niveaux. Un tronc commun à chacune des trois filières MP, PC et PSI se donne pour objectif d'apporter aux étudiants la maîtrise d'un certain nombre de concepts de base : conception d'algorithmes, choix de représentations appropriées des données, etc. à travers l'apprentissage du langage Python.”

Source: <https://info-llg.fr/>

Python dans l'académique: aspect recherche

Exemple d'une package populaire d'apprentissage automatique
( : *machine learning*): scikit-learn

Scikit-learn: Machine learning in Python

[F Pedregosa](#), [G Varoquaux](#), [A Gramfort](#)... - Journal of machine ..., 2011 - jmlr.org

Scikit-learn is a Python module integrating a wide range of state-of-the-art machine learning algorithms for medium-scale supervised and unsupervised problems. This package focuses on bringing machine learning to non-specialists using a general-purpose high-level ...


☆ 99 **Cité 11668 fois** Autres articles Les 31 versions »

Source: Google Scholar (8/09/2018)

- ▶ ≈ 1000 pages de documentation
- ▶ ≈ 500, 000 utilisateurs les 30 derniers jours (fin 2017)
- ▶ ≈ 42, 000, 000 pages vues sur le site (2017)

Source: Alexandre Gramfort (INRIA - Parietal)

Python dans l'académique: aspect recherche

Exemple d'une package populaire d'apprentissage automatique
( : *machine learning*): `scikit-learn`

Scikit-learn: Machine learning in Python

[F Pedregosa](#), [G Varoquaux](#), [A Gramfort](#)... - *Journal of machine ...*, 2011 - [jmlr.org](#)

Scikit-learn is a Python module integrating a wide range of state-of-the-art machine learning algorithms for medium-scale supervised and unsupervised problems. This package focuses on bringing machine learning to non-specialists using a general-purpose high-level ...

☆ 99 **Cité 11668 fois** Autres articles Les 31 versions »


Source: Google Scholar (8/09/2018)


- ▶ \approx 1000 pages de documentation
- ▶ \approx 500, 000 utilisateurs les 30 derniers jours (fin 2017)
- ▶ \approx 42, 000, 000 pages vues sur le site (2017)

Source: Alexandre Gramfort (INRIA - Parietal)

Explication du succès de Python

Proverbe (récent):

 : Python; *the second best language for everything!*

 : Python; *le deuxième meilleur langage pour tout!*

Autres bénéfices de Python:

- ▶ langage compact (5X plus compact que Java ou C++)
- ▶ ne requiert pas d'étape — potentiellement longue — de compilation (comme le C) \implies débogage plus facile
- ▶ portabilité sur les systèmes d'exploitation courants (Linux, MacOS, Windows)

En résumé: Python = excellent “couteau suisse” numérique

Les limites (car il en existe!)

- ▶ vitesse d'exécution souvent inférieure vs. C/C++, Fortran (langage compilé de plus bas niveau)
- ▶ langage permissif, un programme peut “tourner” avec des “erreurs” non dépistées; **vigilance donc!**

Sommaire

Conseils numériques: pour le cours et au-delà

Choix de Python: introduction et motivation

Écosystème Python: les librairies


Introduction: Grossesse, cigarettes et nouveaux nés

Éléments de cours

Popularisation récente: richesse des librairies “libres” (: *open source*)⁽²⁾

Apprentissage automatique ( : *Machine learning*):

- ▶ sklearn (2010)
- ▶ tensorflow (2015)

Traitement du langage ( : *Natural Language Processing*):

- ▶ nltk (2001)

Traitement des images ( : *image processing*):

- ▶ skimage (2009)

Développement web :

- ▶ django (2005)

⁽²⁾ce n'est pas le cas de matlab par exemple; dont le coût = plusieurs dizaines de milliers d'euros pour l'université

Librairies indispensables en Python (pour ce cours)

► Numpy

https://github.com/agramfort/liesse_telecom_paristech_python/blob/master/2-Numpy.ipynb

<https://www.labri.fr/perso/nrougier/from-python-to-numpy/index.html>

► Scipy:

https://github.com/agramfort/liesse_telecom_paristech_python/blob/master/3-Scipy.ipynb

► Matplotlib:

<https://www.labri.fr/perso/nrougier/teaching/matplotlib/matplotlib.html>

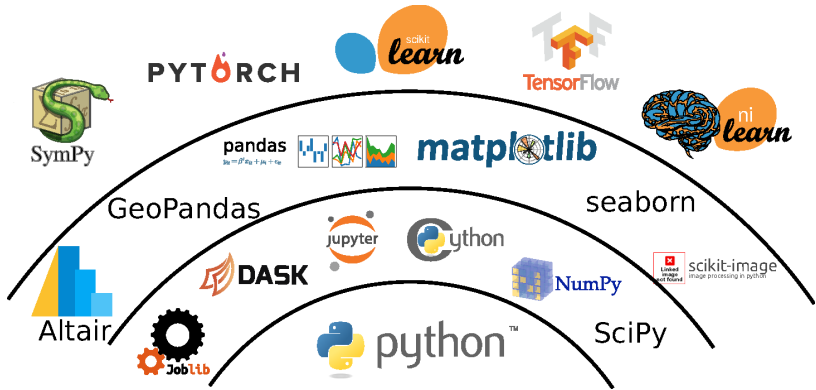
<https://journals.plos.org/ploscompbiol/article?id=10.1371/journal.pcbi.1003833>

► Pandas: <https://github.com/jorisvandenbossche/pandas-tutorial>

► Statsmodels: <http://www.statsmodels.org/stable/index.html>

Tutos de Jake Vanderplas: [Reproducible Data Analysis in Jupyter](#)

Écosystème Python: Panorama partiel et partiel



Livres et ressources en ligne complémentaires

Statistiques Holmes et Huber, Modern statistics for modern biology (2018) (en anglais)

Statistiques Nolan et Speed, Stat labs: mathematical statistics through applications (2001) (en anglais)

Général / Science des données: Guttag, Introduction to Computation and Programming (2016) (en anglais)

Science des données: J. Van DerPlas, With Application to Understanding Data (2016) (en anglais)

Python: <http://www.scipy-lectures.org/>

Visualisation (sous R): <https://serialmentor.com/dataviz/>

Sommaire

Conseils numériques: pour le cours et au-delà

Choix de Python: introduction et motivation

Écosystème Python: les librairies

Introduction: Grossesse, cigarettes et nouveaux nés

Éléments de cours

Objectifs

- ▶ Sur un jeu de données, comparer les poids à la naissance suivant le statut tabagique de la mère
- ▶ Voir/revoir rapidement quelques outils de statistique descriptive
- ▶ Qu'est-ce qu'une loi normale ?

Présentation des données⁽³⁾

Poids Naissance	Statut Tabac
120	0
113	0
128	1
123	0
108	1
136	0
138	0
132	0
⋮	⋮

- ▶ Poids en onces ($1 \text{ g} \approx 0.035 \text{ once}$)
- ▶ Statut : 1 si mère fume pendant la grossesse, 0 sinon
- ▶ Tableau entier : 1236 observations
- ▶ Étude à l'œil nu impossible \implies résumer les données par
 - ▶ quelques valeurs numériques
 - ▶ des graphiques parlants
- ▶ Bonus du cours : la loi normale

⁽³⁾<http://www.stat.berkeley.edu/users/statlabs/data/babies23.data>

Table de fréquences croisées

Une étude sur ces données a montré que le taux de mortalité infantile chez les enfants nés de mères fumeuses était plus faible!⁽⁴⁾

Conclusion basée sur le tableau suivant:

Table: Taux de mortalité infantile (pour 1000 naissances) en fonction du poids (g) à la naissance différencié selon le statut fumeur

Classe de poids	Non fumeur	Fumeur
< 1500	792	565
1500–2000	406	346
2000–2500	78	27
2500–3000	11.6	6.1
3000–3500	2.2	4.5
≥ 3500	3.8	2.6

► Des critiques sur la table?

⁽⁴⁾D. Nolan and T. P. Speed. *Stat labs: mathematical statistics through applications*. Springer Science & Business Media, 2001.

Corrigeons l'erreur ...

- ▶ Une autre étude préconise de travailler sur les poids à la naissance, après **standardisation**

$$\text{poids standardisé de l'obs} = \frac{\text{poids de l'obs} - \text{moyenne de toutes les obs}}{\text{écart type de toutes les obs}}$$

- ▶ Cette standardisation est faite séparément pour les deux classes: pour les fumeurs et pour les non fumeurs
- ▶ Quel est l'intérêt?
- ▶ Comparer ce qui est comparable ! Exemple : si les bébés de mères fumeuses ont toujours un poids plus faible

Corrigeons l'erreur ...

- ▶ Une autre étude préconise de travailler sur les poids à la naissance, après **standardisation**

$$\text{poids standardisé de l'obs} = \frac{\text{poids de l'obs} - \text{moyenne de toutes les obs}}{\text{écart type de toutes les obs}}$$

- ▶ Cette standardisation est faite séparément pour les deux classes: pour les fumeurs et pour les non fumeurs
- ▶ Quel est l'intérêt?
- ▶ Comparer ce qui est comparable ! Exemple : si les bébés de mères fumeuses ont toujours un poids plus faible
- ▶ Ainsi on comparera le taux de mortalité d'un bébé pesant 2680g (fumeur) à celui pesant 3000g (non fumeur)

Corrigeons l'erreur ...

- ▶ Une autre étude préconise de travailler sur les poids à la naissance, après **standardisation**

$$\text{poids standardisé de l'obs} = \frac{\text{poids de l'obs} - \text{moyenne de toutes les obs}}{\text{écart type de toutes les obs}}$$

- ▶ Cette standardisation est faite séparément pour les deux classes: pour les fumeurs et pour les non fumeurs
- ▶ Quel est l'intérêt?
- ▶ Comparer ce qui est comparable ! Exemple : si les bébés de mères fumeuses ont toujours un poids plus faible
- ▶ Ainsi on comparera le taux de mortalité d'un bébé pesant 2680g (fumeur) à celui pesant 3000g (non fumeur)

Effets "cachés"⁽⁵⁾

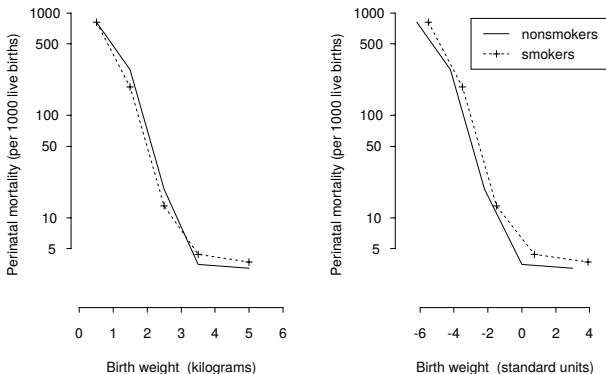


FIGURE 1.2. Mortality curves for smokers and nonsmokers by kilograms (left plot) and by standard units (right plot) of birth weight for the Missouri study (Wilcox [Wil93]).

- Il semblerait maintenant que les bébés de mères fumeuses aient un taux de mortalité plus élevé
- Faites attention aux effets cachés (variables confondantes)!

⁽⁵⁾D. Nolan and T. P. Speed. *Stat labs: mathematical statistics through applications*. Springer Science & Business Media, 2001.

Sommaire

Conseils numériques: pour le cours et au-delà

Choix de Python: introduction et motivation

Écosystème Python: les librairies

Introduction: Grossesse, cigarettes et nouveaux nés

Éléments de cours

- Histogrammes et densités

- Résumés numériques

- Boîtes à moustache (Boxplot) et violons

Sommaire

Conseils numériques: pour le cours et au-delà

Choix de Python: introduction et motivation

Écosystème Python: les librairies

Introduction: Grossesse, cigarettes et nouveaux nés

Éléments de cours

- Histogrammes et densités

- Résumés numériques

- Boîtes à moustache (Boxplot) et violons

Histogrammes

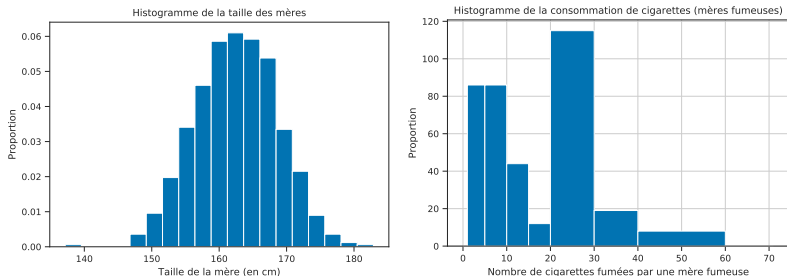


Figure: Histogramme de la taille (cm) pour les mères (gauche) et du nombre de cigarettes fumées par jour pour les mères fumeuses (dont on connaît la consommation).

Qu'est-ce qu'un histogramme?

- ▶ Ce n'est pas un diagramme en barre !!!!
- ▶ Forme de la **distribution** : unimodalité, symétrie, étendue, ...
- ▶ Construction :
 - ▶ Axe horizontal : gradué (échelle des valeurs observées)
 - ▶ Axe vertical : **DENSITÉ!!!**
de fréquence ou d'effectif

densité de fréquence de la classe $k = \frac{\text{fréquence de la classe } k}{\text{longueur de la classe } k}$

densité d'effectif de la classe $k = \frac{\text{effectif de la classe } k}{\text{longueur de la classe } k}$

- ▶ Attention à l'unité sur l'axe horizontal (e.g., l'option `density=True/False` de `hist` en Matplotlib)

Exemple de construction d'histogramme⁽⁶⁾

- Problème de bords: le 5 appartient à quelle classe? à la deuxième!

Rem: toujours regarder l'aide pour savoir si `hist` est ouvert à droite ou à gauche (généralement : $[a,b[$)

Nombre de cigarettes
par jour pour les mères
fumeuses:

Nb de cig.	% de fumeurs
1-5	23.1
5-10	24.9
10-15	11.2
15-20	3.6
20-30	29.1
30-40	4.8
40-60	3.3
60-	0.2
Total	100

► Hauteur du rectangle :

$$h_1 = \frac{23.1}{5 \times 100} = 0.057,$$

$$h_5 = \frac{24.9}{5 \times 100} = 0.0498,$$

$$\vdots = \vdots$$

$$h_{40} = \frac{3.3}{20 \times 100} = 0.00165,$$

⁽⁶⁾https://matplotlib.org/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.hist.html

Exemple de construction d'histogramme⁽⁶⁾

Nombre de cigarettes
par jour pour les mères
fumeuses:

Nb de cig.	% de fumeurs
1-5	23.1
5-10	24.9
10-15	11.2
15-20	3.6
20-30	29.1
30-40	4.8
40-60	3.3
60-	0.2
Total	100

- Problème de bords: le 5 appartient à quelle classe? à la deuxième!

Rem: toujours regarder l'aide pour savoir si `hist` est ouvert à droite ou à gauche (généralement : $[a,b[$)

- Hauteur du rectangle :

$$h_1 = \frac{23.1}{5 \times 100} = 0.057,$$

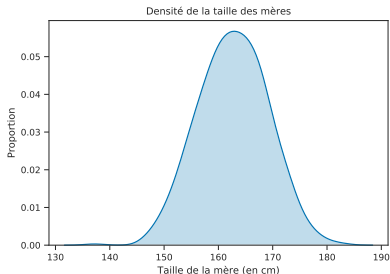
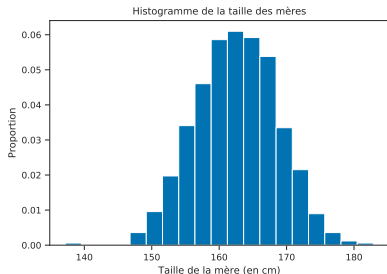
$$h_5 = \frac{24.9}{5 \times 100} = 0.0498,$$

$$\vdots = \vdots$$

$$h_{40} = \frac{3.3}{20 \times 100} = 0.00165,$$

⁽⁶⁾https://matplotlib.org/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.hist.html

Autres estimateurs de densité



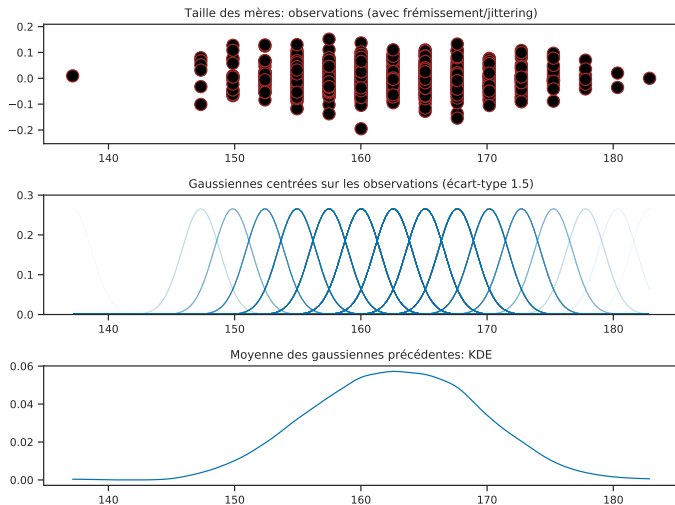
Histogramme (gauche) et densité (droite) de la taille des mères

Rem: on parle d'estimateur à noyau^{(7), (8)} de la densité
(🇬🇧 : *Kernel Density Estimator, KDE*)

⁽⁷⁾ M. Rosenblatt. "Remarks on some nonparametric estimates of a density function". In: *Ann. Math. Statist.* 27 (1956), pp. 832–837.

⁽⁸⁾ E. Parzen. "On estimation of a probability density function and mode". In: *Ann. Math. Statist.* 33 (1962), pp. 1065–1076.

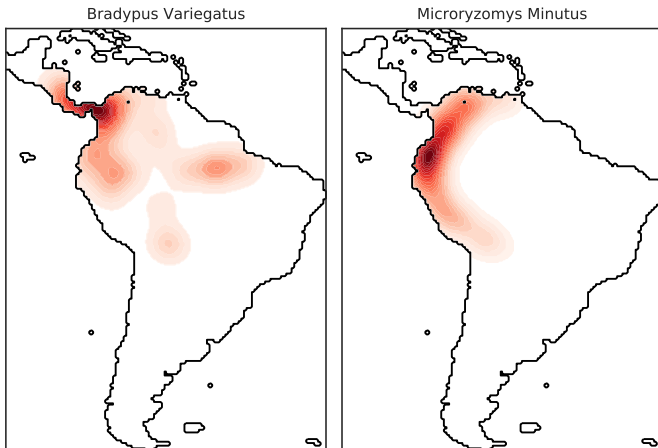
Estimateur à noyau de la densité: aperçu



Densité spatiale

- Quantité numérique grande lorsqu'il y a beaucoup d'observations dans une région de l'espace et petite sinon

Exemple: densité de population pour des espèces animales⁽⁹⁾



⁽⁹⁾ https://scikit-learn.org/stable/auto_examples/neighbors/plot_species_kde.html

Sommaire

Conseils numériques: pour le cours et au-delà

Choix de Python: introduction et motivation

Écosystème Python: les librairies

Introduction: Grossesse, cigarettes et nouveaux nés

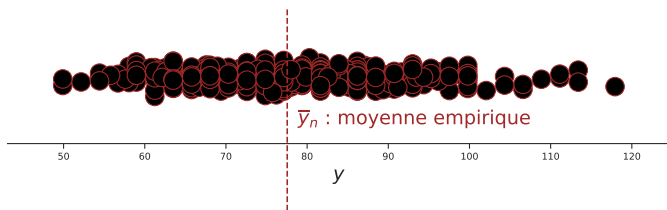
Éléments de cours

Histogrammes et densités

Résumés numériques

Boîtes à moustache (Boxplot) et violons

Moyenne (arithmétique)

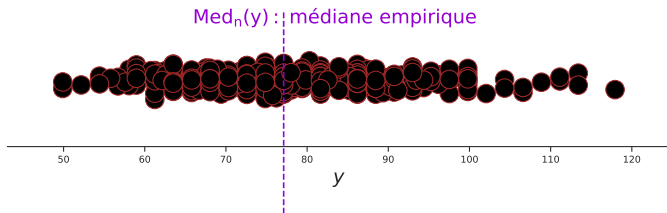


Définition: Moyenne (arithmétique)

$$\bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

Notation: $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$, où le symbole \mathbf{y}^\top représente le transposé du vecteur \mathbf{y} (par convention on représente les vecteurs comme des colonnes : $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \iff \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$)

Médiane



On ordonne les y_i dans l'ordre croissant : $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \dots \leq y_{(n)}$

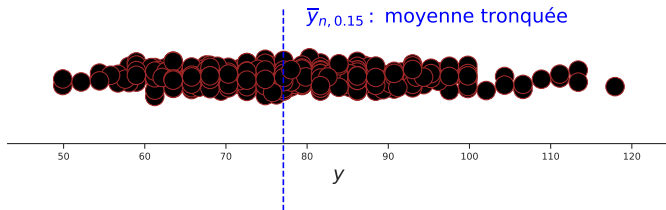
Définition: Médiane

$$\text{Med}_n(\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{y_{(\frac{n}{2})} + y_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}, & \text{si } n \text{ est pair} \\ y_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Rem: utile pour décrire le niveau de revenus dans une population

Rem: définition ambiguë : non unicité (idem pour les quantiles)

Moyenne tronquée



Pour un paramètre α (e.g., $\alpha = 15\%$), on calcule la moyenne en enlevant les $\alpha\%$ plus grandes et plus petites valeurs

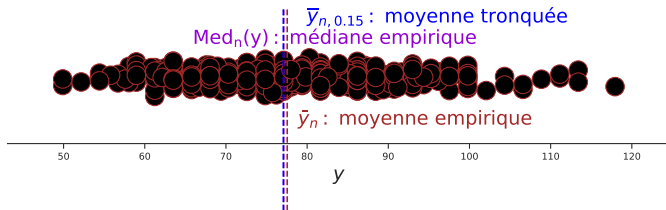
Définition: Moyenne tronquée (à l'ordre α)

$$\bar{y}_{n,\alpha} = \bar{z}_n$$

où $\mathbf{z} = (y_{(\lfloor \alpha n \rfloor)}, \dots, y_{(\lfloor (1-\alpha)n \rfloor)})$ est l'échantillon α -tronqué

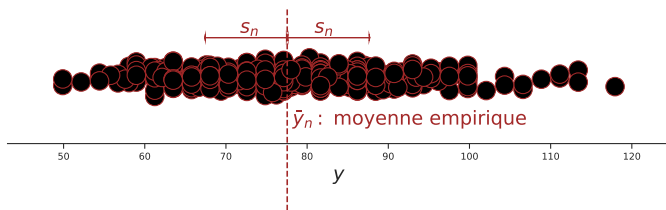
Rem: $\lfloor u \rfloor$ est le nombre entier tel que $\lfloor u \rfloor \leq u < \lfloor u \rfloor + 1$

Moyenne vs médiane



- Les trois statistiques ne coïncident pas
- Moyennes tronquées et médianes sont robustes aux points atypiques (🇬🇧 : *outliers*), la moyenne non!

Dispersion: variance / écart-type



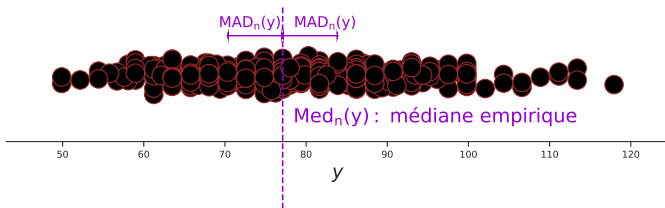
Définitions

Variance : $\text{var}_n(\mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2 = \frac{1}{n} \|\mathbf{y} - \bar{y}_n \mathbf{1}_n\|^2$

Écart-type : $s_n(\mathbf{y}) = \sqrt{\text{var}_n(\mathbf{y})}$

Notation: pour $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^\top$, $\|\mathbf{z}\|^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2$ ($\|\mathbf{z}\|$ est la **norme** de \mathbf{z}), et $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$

Dispersion: MAD



Définition

Déviati n médiane absolue ( : *Median Absolute Deviation*):

$$\text{MAD}_n(\mathbf{y}) = \text{Med}_n (|\text{Med}_n(\mathbf{y}) - \mathbf{y}|)$$

Covariances et corrélations empiriques

Soit deux échantillons $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$

Définition: covariance empirique

$$\text{cov}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) = \frac{1}{n} \langle \mathbf{x} - \bar{x}_n \mathbf{1}_n, \mathbf{y} - \bar{y}_n \mathbf{1}_n \rangle$$

Notation: $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$: vecteur constant

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i : \quad \text{produit scalaire}$$

Définition: corrélation empirique

$$\text{corr}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\text{cov}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sqrt{\text{var}_n(\mathbf{x})} \sqrt{\text{var}_n(\mathbf{y})}} = \frac{\langle \mathbf{x} - \bar{x}_n \mathbf{1}_n, \mathbf{y} - \bar{y}_n \mathbf{1}_n \rangle}{\|\mathbf{x} - \bar{x}_n \mathbf{1}_n\| \|\mathbf{y} - \bar{y}_n \mathbf{1}_n\|}$$

Standardisation

Soit un échantillon $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$

Définition: échantillon standardisé

On note $\tilde{\mathbf{x}}$ l'**échantillon standardisé** de \mathbf{x} obtenu comme suit

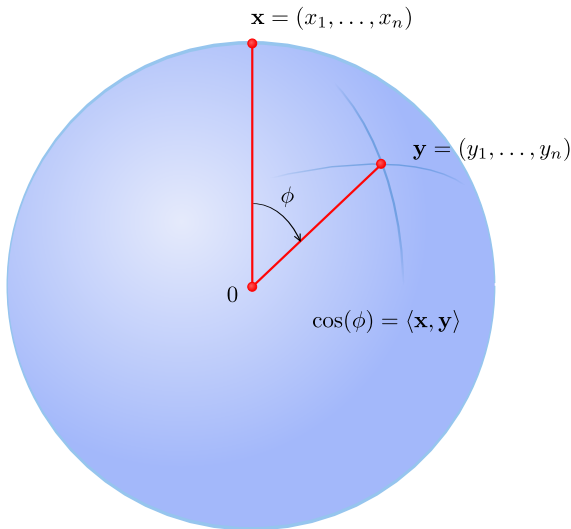
$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x} - \bar{x}_n \mathbf{1}_n}{s_n(\mathbf{x})} \iff \tilde{x}_i = \frac{x_i - \bar{x}_n}{s_n(\mathbf{x})}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

où $s_n(\mathbf{x}) = \sqrt{\text{var}_n(\mathbf{x})}$ sont l'écart type et \bar{x}_n la moyenne de l'échantillon

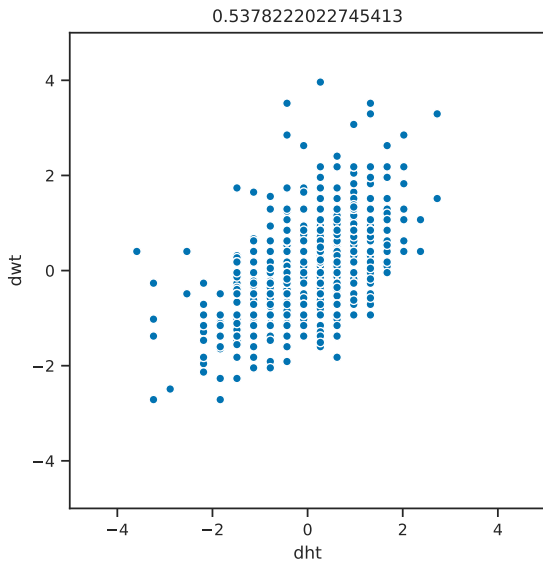
- ▶ $\tilde{\mathbf{x}}$ est dit **centré** (moyenne nulle: $\bar{\tilde{x}}_n = 0$) et **réduit** (écart-type unitaire: $s_n(\tilde{\mathbf{x}}) = 1$)
- ▶ $\tilde{\mathbf{x}}$ est sans unité

Interprétation de la corrélation:

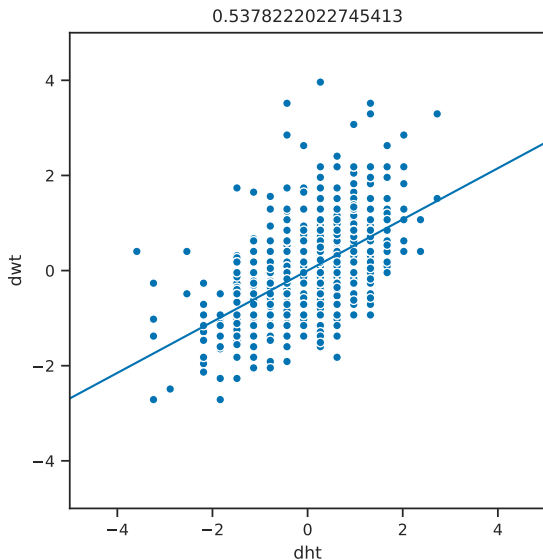
$$n = 3 \text{ et } \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$$



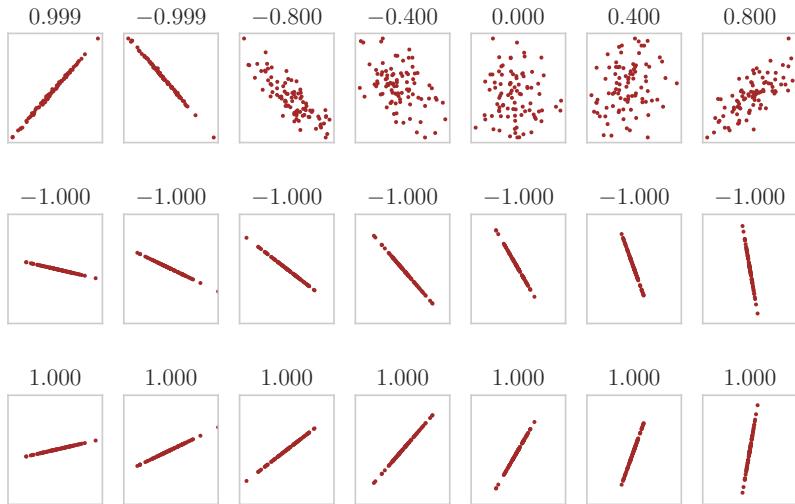
Exemples de corrélations: taille du père / poids du père



Exemples de corrélations: taille du père / poids du père

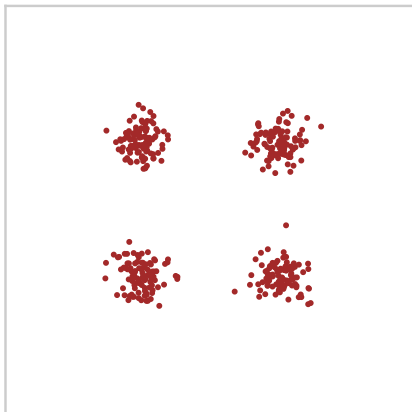


Plus d'exemples



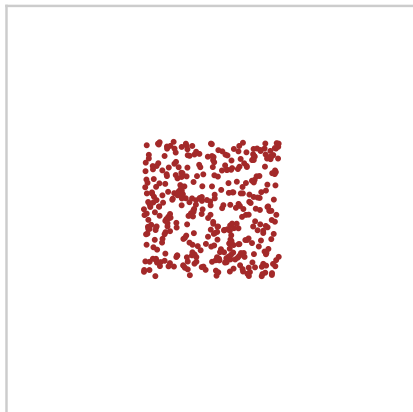
Exemples de corrélations proches de zéro

Corrélation = -0.021



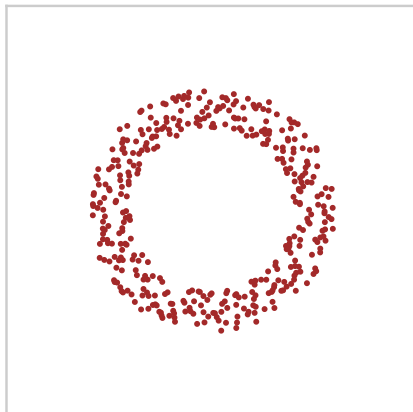
Exemples de corrélations proches de zéro

Corrélation = 0.007



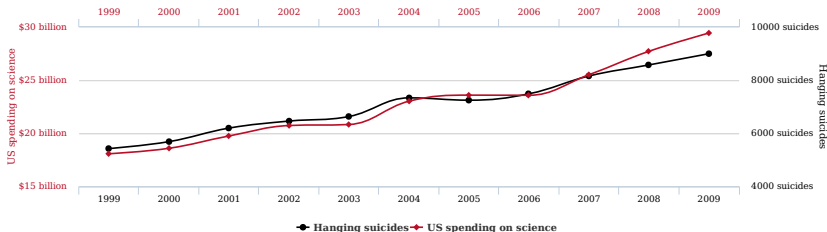
Exemples de corrélations proches de zéro

Corrélation = 0.011



Corrélation \neq causalité

US spending on science, space, and technology correlates with Suicides by hanging, strangulation and suffocation

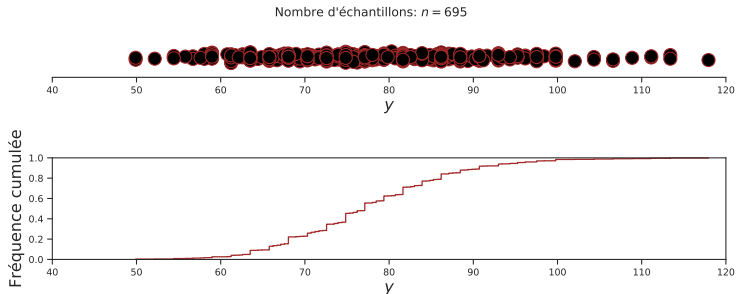


tylervigen.com

Corrélation: 0.9979

cf. <http://www.tylervigen.com/spurious-correlations>

Fonction de répartition

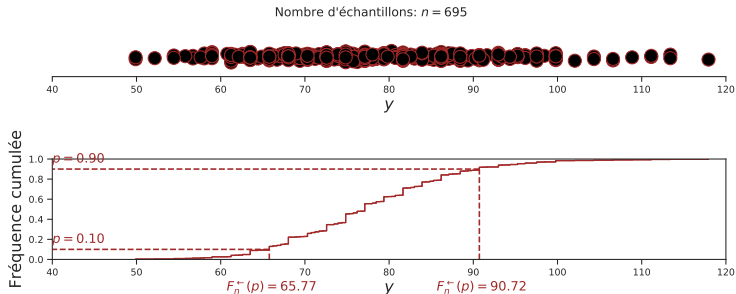


Définition: fonction de répartition

Empirique :
$$F_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{y_i \leq u\}}$$

Interprétation: proportion d'observations sous un certain niveau

Fonction quantile



Définition: Quantile

Pour $p \in]0, 1]$, $F_n^{\leftarrow}(p) = \inf\{u \in \mathbb{R} : F_n(u) \geq p\}$

Rem: c'est l'inverse (généralisée) de la fonction de répartition; sa définition admet plusieurs conventions, cf. [percentile](#) in Numpy


Quantiles

En bref: “le quantile d’ordre p est seuil tel que $p \times 100\%$ des gens sont en dessous du seuil, et $(1 - p) \times 100\%$ sont au-dessus”

- ▶ la médiane est le quantile d’ordre $\frac{1}{2} = F_n^{\leftarrow}(\frac{1}{2})$
- ▶ le premier **quartile** (Q_1) = quantile d’ordre $\frac{1}{4} = F_n^{\leftarrow}(\frac{1}{4})$
- ▶ le troisième **quartile** (Q_3) = quantile d’ordre $\frac{3}{4} = F_n^{\leftarrow}(\frac{3}{4})$

Rem: de manière similaire on parle de déciles et de centiles

Définition

L'**Écart interquartile** ( : *Interquartile range*), noté IQR, est défini comme étant l'écart entre le 3^e quartile et le 1^{er} quartile:

$$IQR = F_n^{\leftarrow}(\frac{3}{4}) - F_n^{\leftarrow}(\frac{1}{4})$$

Quantiles (seconde définition)

Calcul de $q_p(y)$: quantile d'ordre p d'un échantillon y_1, \dots, y_n :
 $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \dots \leq y_{(n)}$, prendre $j = \lfloor pn \rfloor$

$$q_p(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y_j + y_{j+1}), & \text{si } j = pn \\ y_{j+1}, & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple:

- ▶ $n = 1000, p = \frac{1}{2} \implies j = 500 = \frac{1000}{2}$ et
 $q_p(y) = \frac{1}{2}(y_{500} + y_{501})$
- ▶ $n = 1001, p = \frac{1}{2} \implies j = 500 \neq \frac{1001}{2}$ et $q_p(y) = y_{501}$

Rem: cette convention⁽¹⁰⁾ ne coïncide pas avec la précédente, on choisit le milieu de l'intervalle au lieu de choisir l'extrémité gauche

⁽¹⁰⁾voir <https://fr.wikipedia.org/wiki/Quantile> pour d'autres conventions possibles

Sommaire

Conseils numériques: pour le cours et au-delà

Choix de Python: introduction et motivation

Écosystème Python: les librairies

Introduction: Grossesse, cigarettes et nouveaux nés

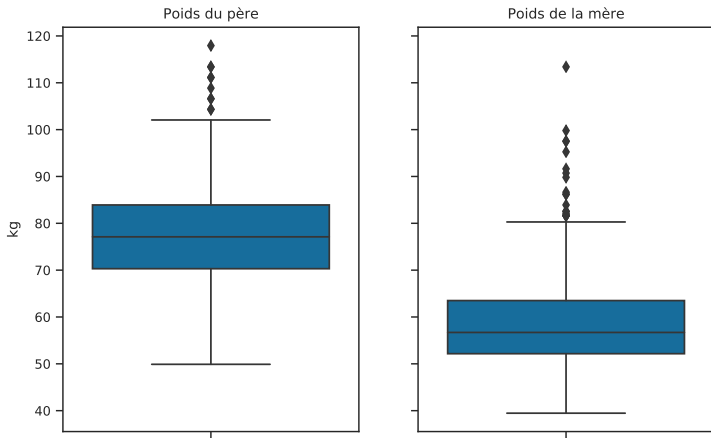
Éléments de cours

- Histogrammes et densités

- Résumés numériques

- Boîtes à moustache (Boxplot) et violons

Exemple de boîte à moustache (🇬🇧 : *boxplot*)



Boxplot du poids des parents.


Qu'est-ce qu'une boîte à moustache⁽¹¹⁾?

- ▶ Représentation synthétique de la distribution d'une variable, similaire à l'histogramme, mais plus synthétique
- ▶ Utilité:
 - ▶ Comparer des distributions
 - ▶ Permet de détecter les “valeurs aberrantes”
 - ▶ Utile pour visualiser un grand nombre de variables (compact), et représenter des variables quantitatives en fonction de variables qualitatives

⁽¹¹⁾R. McGill, J. W. Tukey, and W. A. Larsen. “Variations of box plots”. In: *The American Statistician* 32.1 (1978), pp. 12–16.

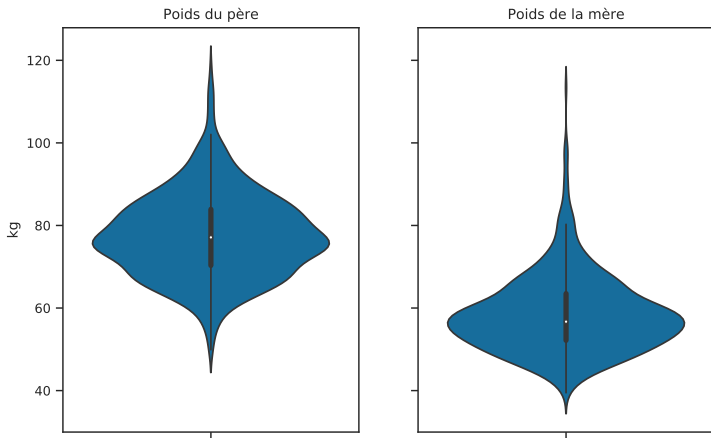
Construction d'une boîte à moustache

- ▶ la boîte est limitée par le 1^{er} et le 3^e quartiles
- ▶ elle est coupée en deux par la médiane
- ▶ les deux moustaches s'étendent de part et d'autre de la boîte sur une longueur qui est par défaut $\frac{3}{2}$ fois l'écart inter-quartile

Rem: il y a parfois des modifications à la marge pour les cas extrêmes, e.g., affichage de points aberrants ( : *outliers*)⁽¹²⁾

⁽¹²⁾ cf. https://matplotlib.org/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.boxplot.html

Exemple de violons⁽¹³⁾



Violons du poids des parents

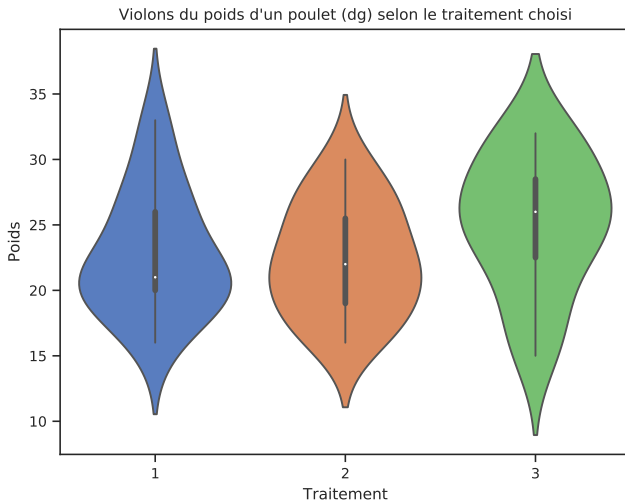
⁽¹³⁾ J. L. Hintze and R. D. Nelson. "Violin plots: a box plot-density trace synergism". In: *The American Statistician* 52.2 (1998), pp. 181–184.

Expérience: croissance des poussins

Scénario: des chercheurs se posent la question de savoir si parmi trois traitements possibles, il en existe un meilleur que les autres pour améliorer la prise de poids des poussins. Ils ont noté l'impact de trois traitements (trois températures d'incubation différentes) sur la croissance de $n = 45$ poussins pour répondre à cette question.

- ▶ Les 45 œufs sont répartis aléatoirement entre les trois types de traitement (15/15/15)
- ▶ Au bout d'un nombre de jours fixé à l'avance, on note la croissance (poids, en dg) des poussins et leur sexe

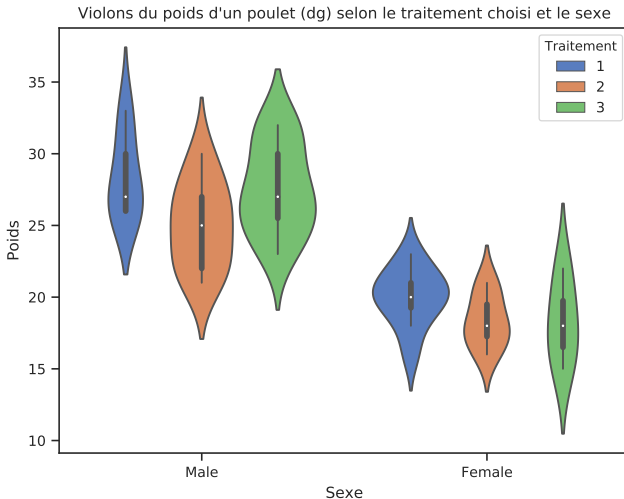
Visualisation brute



Violons selon le type de traitement

Conclusion provisoire : le traitement 3 a le plus d'impact

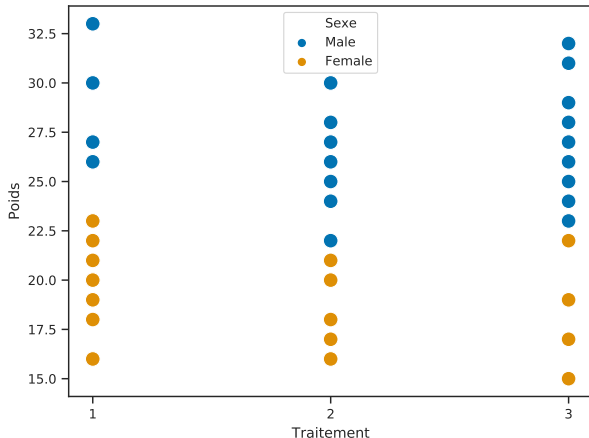
Visualisation raffinée



Violons selon le type de traitement et le sexe

Conclusion : c'est le traitement 1 qui a le plus d'impact

Explication



Répartition des poussins par sexe et par traitement

Conclusion : il y avait trop de femelles dans le traitement 1, et l'effet sexe a caché l'impact du traitement (groupe inhomogène)

Bibliographie I

- ▶ Foata, D. and A. Fuchs. *Calcul des probabilités: cours et exercices corrigés*. Masson, 1996.
- ▶ Guttag, J. V. *Introduction to Computation and Programming Using Python: With Application to Understanding Data*. MIT Press, 2016.
- ▶ Hintze, J. L. and R. D. Nelson. “Violin plots: a box plot-density trace synergism”. In: *The American Statistician* 52.2 (1998), pp. 181–184.
- ▶ Holmes, S. and W. Huber. *Modern statistics for modern biology*. Cambridge University Press, 2018.
- ▶ Horn, R. A. and C. R. Johnson. *Topics in matrix analysis*. Corrected reprint of the 1991 original. Cambridge: Cambridge University Press, 1994, pp. viii+607.
- ▶ McGill, R., J. W. Tukey, and W. A. Larsen. “Variations of box plots”. In: *The American Statistician* 32.1 (1978), pp. 12–16.

Bibliographie II

- ▶ Nolan, D. and T. P. Speed. *Stat labs: mathematical statistics through applications*. Springer Science & Business Media, 2001.
- ▶ Parzen, E. “On estimation of a probability density function and mode”. In: *Ann. Math. Statist.* 33 (1962), pp. 1065–1076.
- ▶ Rosenblatt, M. “Remarks on some nonparametric estimates of a density function”. In: *Ann. Math. Statist.* 27 (1956), pp. 832–837.
- ▶ VanderPlas, J. *Python Data Science Handbook*. O'Reilly Media, 2016.