

Analyse 1: Calcul différentiel pour une ou plusieurs variables

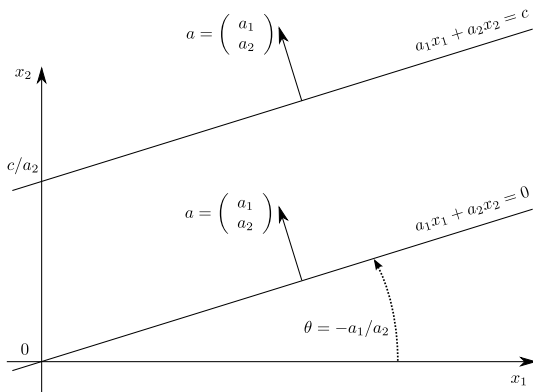
Joseph Salmon

Septembre 2014

Rappels d'algèbre linéaire

Équation d'une droite en dimension deux

$$\Delta = \{(x_1, x_2) \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 = c\} \quad \text{ou} \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\rangle = c$$

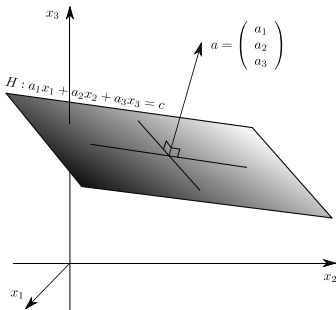


Rappels d'algèbre linéaire II

Définition : hyperplan

Un **hyperplan** H de \mathbb{R}^d est l'ensemble des points $x = (x_1, \dots, x_d)^\top$ qui vérifient pour un vecteur directeur $a = (a_1, \dots, a_d)^\top$ et une constante réelle c l'équation suivante :

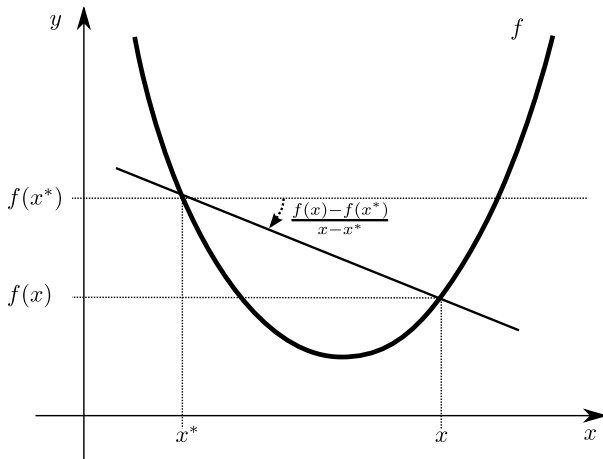
$$a_1x_1 + \dots + a_dx_d = c \quad \text{ou} \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \right\rangle = c$$



La dérivée d'une fonction

Définition : dérivée

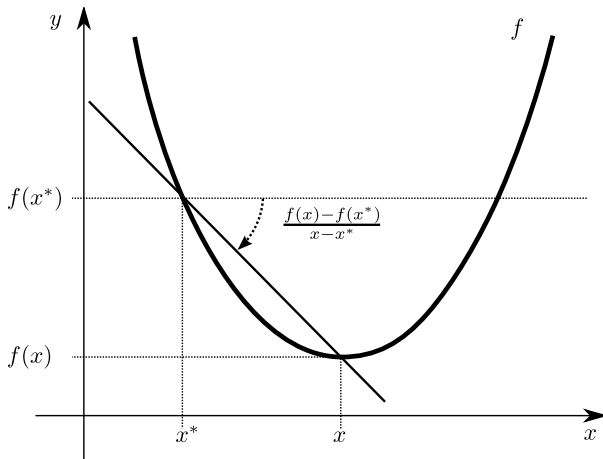
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **dérivable en x^*** si la limite du taux d'accroissement existe, i.e., $f'(x^*) = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$



La dérivée d'une fonction

Définition : dérivée

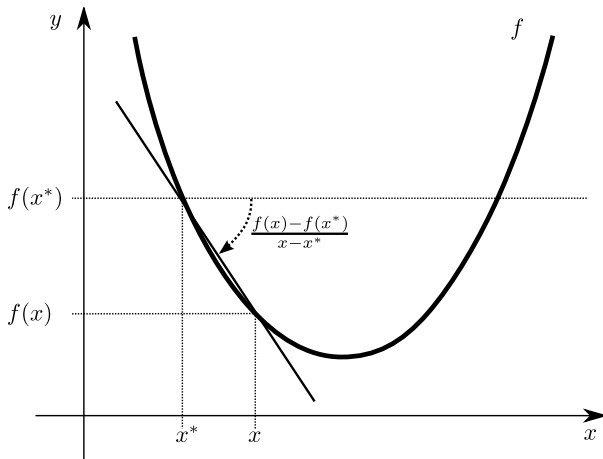
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **dérivable en x^*** si la limite du taux d'accroissement existe, *i.e.*, $f'(x^*) = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$



La dérivée d'une fonction

Définition : dérivée

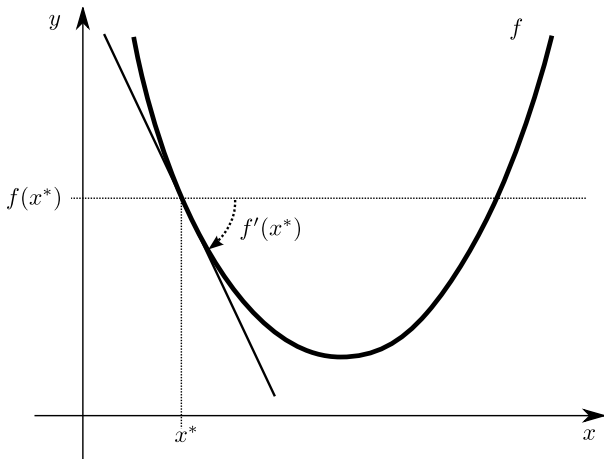
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **dérivable en x^*** si la limite du taux d'accroissement existe, i.e., $f'(x^*) = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$



La dérivée d'une fonction

Définition : dérivée

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **dérivable en x^*** si la limite du taux d'accroissement existe, i.e., $f'(x^*) = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$

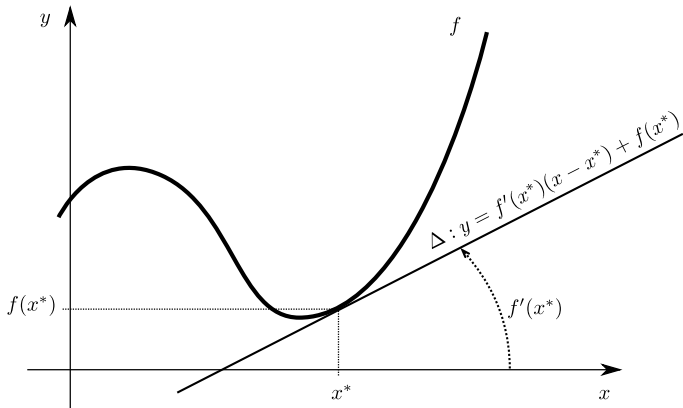


Interprétation tangentielle

Définition : tangente

Si f est dérivable en x^* alors la droite Δ d'équation $y = f'(x^*)(x - x^*) + f(x^*)$ est la droite **tangente** à f au point x^*

Rem: approximation d'ordre un de f (formule de Taylor d'ordre un)



Propriétés classiques de la dérivée

Théorème : linéarité

Si f et g sont dérivables alors $\alpha f + \beta g$ l'est aussi pour tous α et β réels. De plus $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

Exemples de calcul :

$$f(x) = 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N}^*)$$

$$f(x) = \exp(x)$$

$$f'(x) = \exp(x)$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

Pour aller plus loin : Gourdon (2008), Chapitre II. 1

Dérivée partielle d'une fonction multi-dimensionnelle

On ne s'intéressera uniquement aux fonctions à valeurs réelles dans toute la suite du cours : $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Définition : dérivée partielle

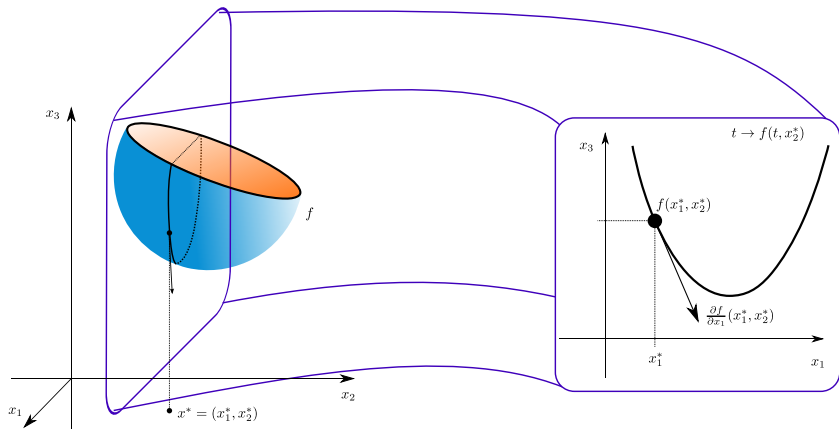
La $i^{\text{ième}}$ **dérivée partielle** de $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ au point x^* est la dérivée de la fonction définie par

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x_1^*, \dots, t, \dots, x_d^*)\end{aligned}$$

prise au point x_i^* . On note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)$ cette quantité.

Interprétation : c'est la dérivée de la fonction réelle obtenue quand on gèle toutes les coordonnées sauf la $i^{\text{ième}}$.

Dérivée partielle d'une fonction multi-dimensionnelle II



Lien dérivées partielles et gradient

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

Définition : gradient

Quand f admet des dérivées partielles en x^* pour toutes les directions, on appelle **gradient** de f en x^* le vecteur :

$$\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(x^*) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

Rem: quand la fonction est “régulière” on obtient l'approximation

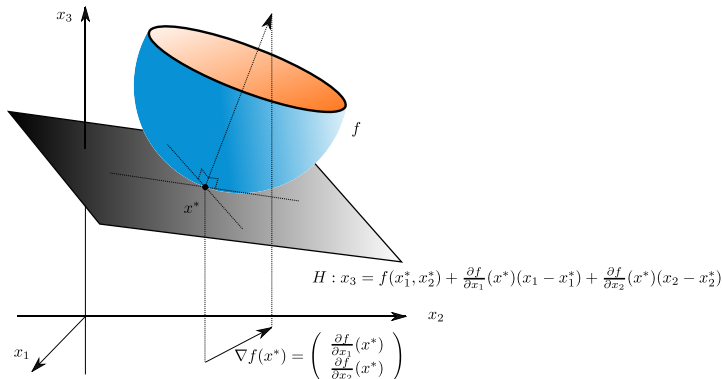
$$f(x) \approx f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle$$

Interprétation tangentielle

Définition : différentiable

Une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **différentiable** en x^* si

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{|f(x) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle|}{\|x - x^*\|} = 0$$



Dérivées partielles d'ordre deux

De manière récursive on peut définir la dérivée partielle d'ordre quelconque :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x^*)$$

On admet ici la propriété de Schwartz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^*)$$

Définition : matrice Hessienne

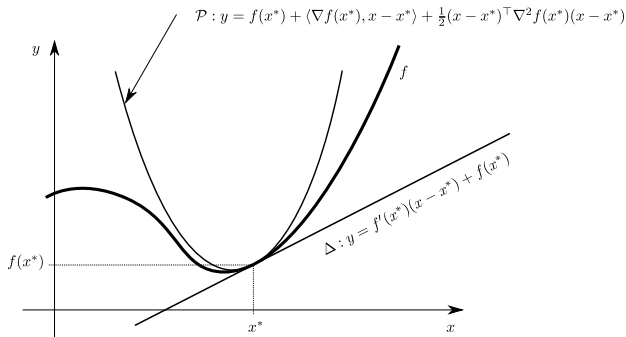
$$\nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(x^*) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_d}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(x^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(x^*) \end{bmatrix}$$

Approximation quadratique

Quand la fonction est “régulière” on obtient l’approximation

$$f(x) \approx f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle + \frac{1}{2}(x - x^*)^\top \nabla^2 f(x^*)(x - x^*)$$

Interprétation : la fonction f est alors bien approchée par un polynôme d’ordre deux au voisinage de x^*



Pour aller plus loin : Rouvière (2009)

Les fonctions quadratiques en dimension deux

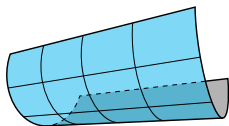
$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \end{cases}$$

A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Les fonctions quadratiques en dimension deux

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \end{cases}$$

A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

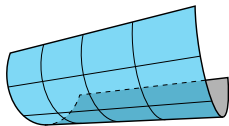


$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2$$

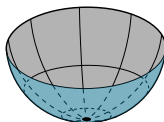
Les fonctions quadratiques en dimension deux

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \end{cases}$$

A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2$$

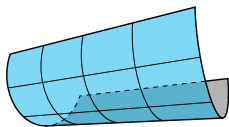


$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 + y_2^2$$

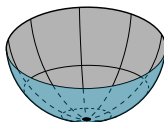
Les fonctions quadratiques en dimension deux

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \end{cases}$$

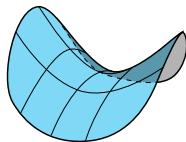
A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2$$



$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 + y_2^2$$

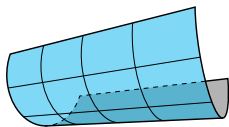


$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 - y_2^2$$

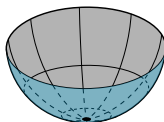
Les fonctions quadratiques en dimension deux

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \end{cases}$$

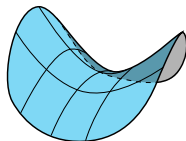
A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



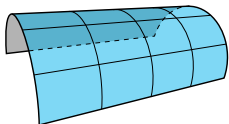
$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2$$



$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 + y_2^2$$



$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 - y_2^2$$

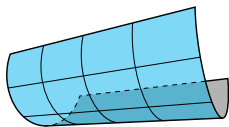


$$(y_1, y_2) \mapsto -y_1^2$$

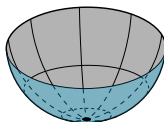
Les fonctions quadratiques en dimension deux

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \end{cases}$$

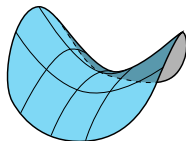
A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



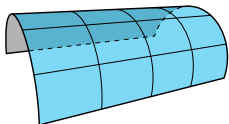
$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2$$



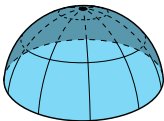
$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 + y_2^2$$



$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 - y_2^2$$



$$(y_1, y_2) \mapsto -y_1^2$$

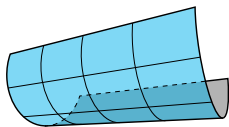


$$(y_1, y_2) \mapsto -(y_1^2 + y_2^2)$$

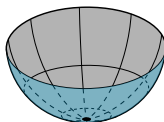
Les fonctions quadratiques en dimension deux

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \end{cases}$$

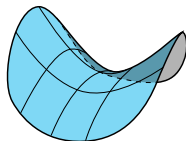
A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



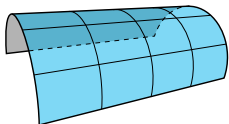
$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2$$



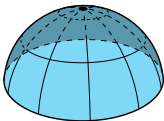
$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 + y_2^2$$



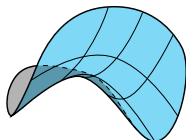
$$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 - y_2^2$$



$$(y_1, y_2) \mapsto -y_1^2$$



$$(y_1, y_2) \mapsto -(y_1^2 + y_2^2)$$



$$(y_1, y_2) \mapsto y_2^2 - y_1^2$$

Références I

- X. Gourdon.

Les maths en tête : Analyse.

Ellipses Marketing, ELLIPSES MARKETING edition, 2008.

- F. Rouvière.

Petit guide de calcul différentiel : à l'usage de la licence et de l'agrégation.

Enseignement des mathématiques. Cassini, 2009.