Universidad Popular del Cesar

Análisis de Señales

Análisis de Fourier para Señales Discretas

Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar

Objetivos

1. Definir la DTFT y estudiar algunas de sus propiedades.
2. Analizar señales y SLIT discretos utilizando la transformada de Fourier.
3. Definir la DFT y estudiar algunas de sus propiedades.

Desarrollo en serie de fourier de señales discretas y periódicas

- Una señal en tiempo discreto es periódica de periodo N si:

$$x(n) = x(n+N)$$

- Donde N es un entero positivo

Representaciones ortogonales de señales

- Los Conjuntos ortogonales y ortonormales, producen desarrollos en series de señales simples.

$$x(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \phi_i(t) \longrightarrow$$ Combinación Lineal

$$e^{j\omega_k n} \qquad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}$$

- Donde

$$c_i = \frac{1}{E_i}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\phi_i^*(t)\,dt, \quad i=(\ldots,-1,0,1,\ldots) \longrightarrow$$ Energía

Producto interior me dice cuanta energía tiene mi señal ***x*** en el ϕ

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\phi_k^*(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i\phi_i(t)\phi_k^*(t)\,dt = \begin{cases} E_i, & k=i \\ 0, & k\neq i \end{cases}$$

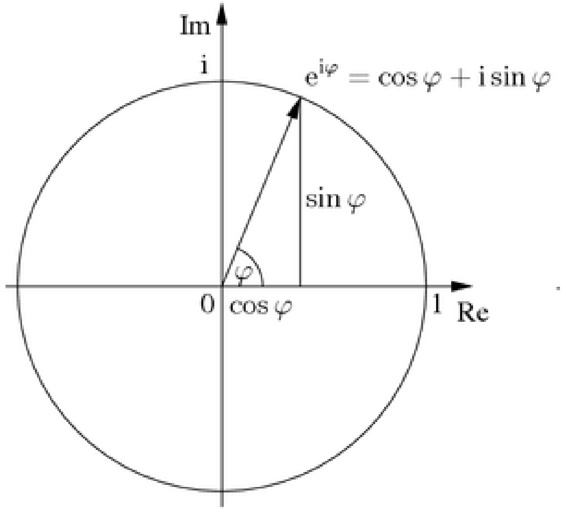
Desarrollo en serie de Fourier generalizado de x(t)

C_i son los coeficientes de Fourier con respecto al conjunto ortonormal $\phi_i(t)$

Desarrollo en serie de fourier de señales discretas y periódicas

$$x[n] = \sum_{k} a_k e^{j\Omega_k n}$$

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{N}$$



- Solo hay N valores de k

k ={0,1,2,3…,N-1}

N valores diferentes de k

Desarrollo en serie de fourier de señales discretas y periódicas

- Reemplazando en el desarrollo en series de fourier generalizado:

$$x(n)=\sum_{k=\langle N\rangle} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$$

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

- Como cada uno de los términos de la serie tiene periodo N por lo tanto su suma también tiene periodo N

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi nt}{T}} \qquad c_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}\, dt$$

Desarrollo en serie de fourier de señales discretas y periódicas

- Desarrollo en series de Fourier Discreto:

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \qquad c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

- Convergencia- siempre y cuando sea acotada.
- Periodicidad, sólo para señales periodicas
- Gibbs. Si se usan los N coeficientes, no.

Propiedades de la Serie discreta de Fourier.

- Suponiendo que x(n) es una señal periódica, de frecuencia fundamental:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N}$$

- Y con los coeficientes de la serie de fourier discreta notados como:

$$x(n) \overset{SFD}{\longleftrightarrow} a_k$$

Propiedades de la Serie discreta de Fourier.

- **Linealidad:**

$$x(n) \overset{SFD}{\leftrightarrow} a_k \quad y(n) \overset{SFD}{\leftrightarrow} b_k$$

[illegible]

- **Desplazamiento de tiempo:**

$$x(n-m) \leftrightarrow e^{-j\Omega_k m} \ \ a_k$$

Propiedades de la Serie discreta de Fourier.

- **Convolución**

$$x(n) * h(n) \quad n \text{ periódica} \quad \overset{\text{SFD}}{\longleftrightarrow} \quad a_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$H(\Omega_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\Omega_k n}$$

- **Modulación**

$$x[n]y[n] \leftrightarrow c_k = a_k \otimes b_k$$

$$x(n)y(n) \leftrightarrow c_k = \sum_{l=0}^{N-1} a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^{N-1} a_{k-l} b_l$$

Propiedades de la Serie discreta de Fourier.

- **Conjugación y simetría:**

$$a_k = a^*_{N-k}$$

- **Convolución periódica**

$$x[n] \otimes y[n] \leftrightarrow c_k = N a_k b_k$$

Transformada de Fourier en tiempo discreto DTFT

Recordando la pareja transformada de fourier en tiempo continuo:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{w=-\infty}^{\infty} X(w) e^{jwt} dw \qquad X(w) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jwt} dt$$

$$X_s(w) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-jwt} dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) x(t) \right) e^{-jwt} dt$$

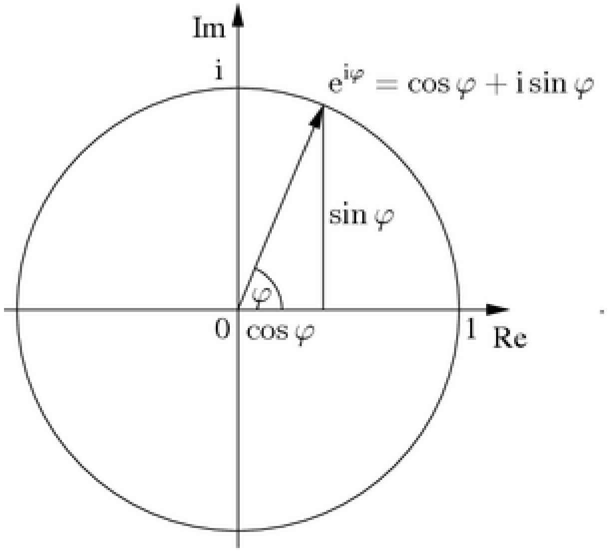
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-jwnT}$$

Transformada de fourier en tiempo discreto DTFT

- Sustituyendo wT por la nueva frecuencia discreta Ω “en Radianes”

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$



Propiedades de la Transformada de fourier en tiempo discreto DTFT

- Usando la notación:

$$x(n) \underset{\Im^{-1}}{\overset{\Im}{\longleftrightarrow}} X(\Omega)$$

- Y sean

$$x(n) \overset{\Im}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \qquad y(n) \overset{\Im}{\longleftrightarrow} Y(\Omega)$$

Propiedades de la Transformada de fourier en tiempo discreto DTFT

- **Periodicidad**

$$X(\Omega + 2\pi) \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X(\Omega)$$

- **Linealidad:**

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega)$$

- **Desplazamiento de tiempo:**

$$x(n - n_0) \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

Propiedades de la Transformada de fourier en tiempo discreto DTFT

- **Desplazamiento en frecuencia:**

$$x(n)e^{-j\Omega_0 n} \xleftrightarrow{\Im} X(\Omega - \Omega_0)$$

- **Multiplicación “modulación”:**

[illegible] $\xleftrightarrow{\Im} \frac{1}{2\pi}\int$ [illegible]

Propiedades de la Transformada de fourier en tiempo discreto DTFT

- **Diferenciación en frecuencia**

$$n x(n) \xleftrightarrow{\Im} \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

- **Convolución**

$$x(n) * y(n) \xleftrightarrow{\Im} X(\Omega)Y(\Omega)$$

Propiedades de la Transformada de fourier en tiempo discreto DTFT

- **DTFT de señales periódicas:**

Es +

$$X(\Omega)=\Im\left\{\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-jk\Omega_0 n}\right\}, \text{con } \Omega_0=\frac{2\pi}{N}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1} a_k \Im\left(e^{-jk\Omega_0 n}\right)=\sum_{k=0}^{N-1} a_k 2\pi\delta(\Omega-k\Omega_0)$$

$$X(\Omega)=2\pi\sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta(\Omega-k\Omega_0)$$

$$k=\{0,1,2,\ldots,N-1\} \quad N\Omega_0=2\pi$$

$$X(\Omega)=X(\Omega+2\pi)$$

Transformada discreta de Fourier DFT

$$x(n)=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \qquad X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)e^{-j\frac{2\pi n}{N}} \qquad x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Se pretende encontrar la transformada de fourier de la secuencia discreta

$$x(n)=\begin{cases} x_{original}(n) & 0\le n\le N \\ 0 & \end{cases}$$

Transformada discreta de Fourier
DFT

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{M}$$

Puede tomarse cualquier valor de M por practicidad se toma M=N

Transformada discreta de Fourier DFT y su inversa IDFT

$$X(\Omega_k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\Omega_k n}$$

$$\Omega_k=\frac{2\pi k}{N} \qquad c_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\Omega_k)e^{j\Omega_k n}$$

Propiedades de la Transformada discreta de Fourier DFT

- Usando la notación:

$$x(n) \underset{DFT^{-1}}{\overset{DFT}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

- Y sean

$$x(n) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X(k) \quad y(n) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} Y(k)$$

Propiedades de la Transformada discreta de Fourier DFT

- **Periodicidad**

$$x(k+N) = x(k)$$

- **Linealidad:**

[illegible]

- **Desplazamiento en n, n_0 circular:**

$$x(n-n_0) \xleftrightarrow{DFT} e^{-j\frac{2\pi k}{N}n_0} X(k)$$

Propiedades de la Transformada discreta de Fourier DFT

- **IDFT inversión alternativa "y rápida"**

$$x(n) = \frac{1}{N}\left\{DFT\left(X^{*}(k)\right)\right\}^{*} \qquad x(n) \underset{DFT^{-1}}{\overset{DFT}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

- **Convolución**

$$X(k)H(k) \xrightarrow{IDFT} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,h(m-n)$$

Que corresponde a la convolución periódica de las señales.

Convolución lineal mediante la DFT

Para realizar la convolución lineal de dos secuencias x(n) de longitud N y y(n) de longitud M mediante la DFT, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se expanden al final de las dos secuencias con ceros de tal manera que tengan una nueva longitud K que cumpla:

$$k \geq M + N - 1$$

2. Con estas nuevas secuencias $y_a(k)$ y $x_a(n)$ se calcula:

$$y(n) = IDFT(Y_a(k) X_a(k))$$

Referencias

- *Señales y sistemas continuos y discretos, Soliman. S y Srinath. M. 2ª edición cap 7*
- *Señales y sistemas ,Oppenheim, alan cap 5*