Análisis de Señales

Señales en tiempo continuo

Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar

Temas:

- Introducción.
- Definición y clasificación de señales.
- Energía y potencia de una señal.
- Transformaciones de la variable independiente.
- Señales singulares: impulso, escalón y pulso.
- Señales periódicas continuas y frecuencia angular
- Suma de señales Periódicas.

Introducción

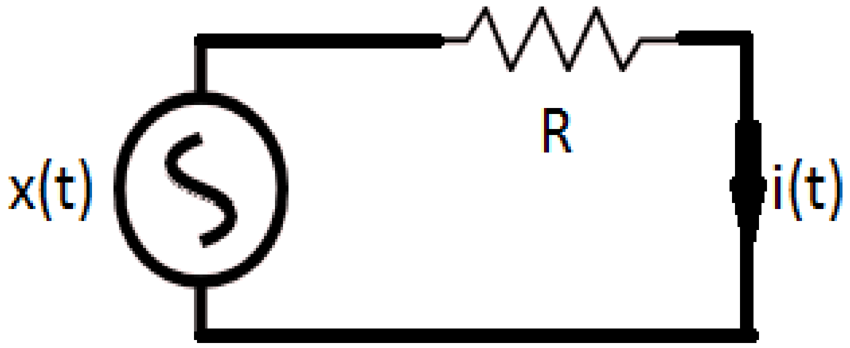
- Las señales son magnitudes físicas o variables detectables mediante las que se pueden transmitir mensajes o información
- EJ: la voz, Imágenes TV, Temperatura, datos sísmicos
- En este curso nos centraremos en el estudio de señales representadas matemáticamente por funciones de una sola variable

Definición y clasificación de señal

- Una señal causal tiene como soporte un subconjunto del intervalo $[0,\infty)$ mientras una señal anti-causal tiene por soporte un subconjunto del intervalo $(-\infty,0]$.
- Las señales cuyo soporte contiene tanto tiempos positivos como negativos se denominan señales bilaterales.

Energía y potencia de una señal.

- La potencia instantánea sobre una resistencia esta dada por:



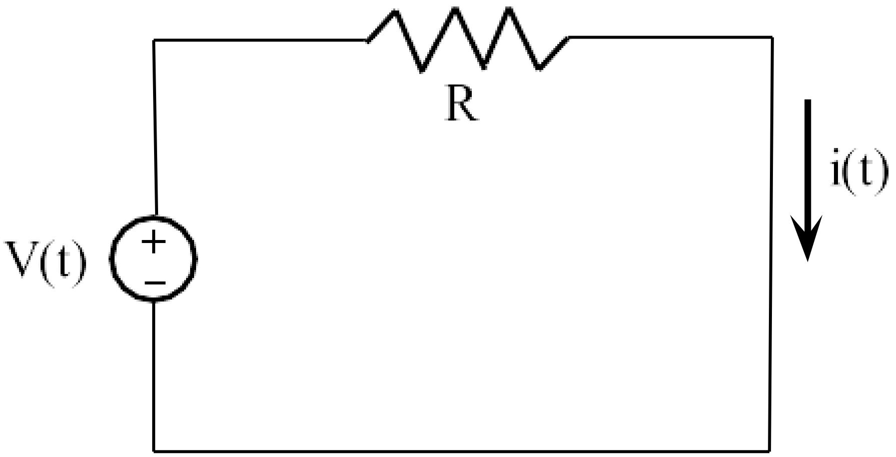
$$i(t) = \frac{x(t)}{R}$$

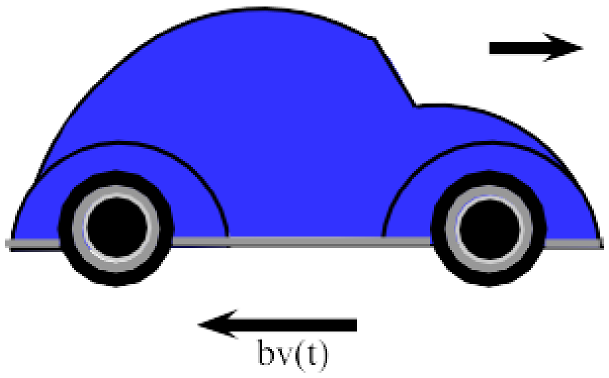
$$p(t) = x(t) * i(t)$$

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{x^2(t)}{R}$$

$$normalizando: p(t) = x^2(t)$$

Señales de energía y de potencia





Circuito eléctrico

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v(t)^2$$

Fricción en un auto

$$p(t) = bv(t)^2$$

Señales de energía y de potencia

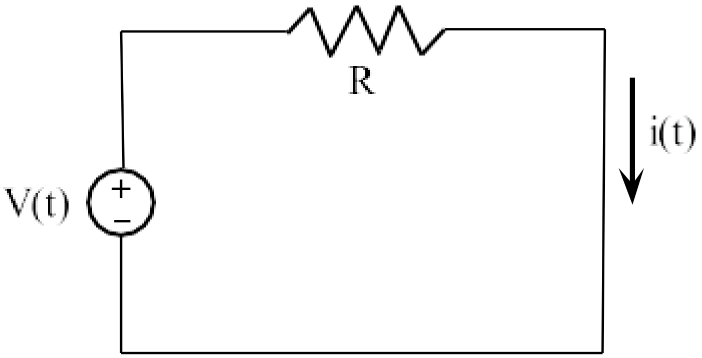


Figura: circuito eléctrico

- La potencia instantánea en el circuito es:
  $$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v(t)^2$$

Señales de energía y de potencia

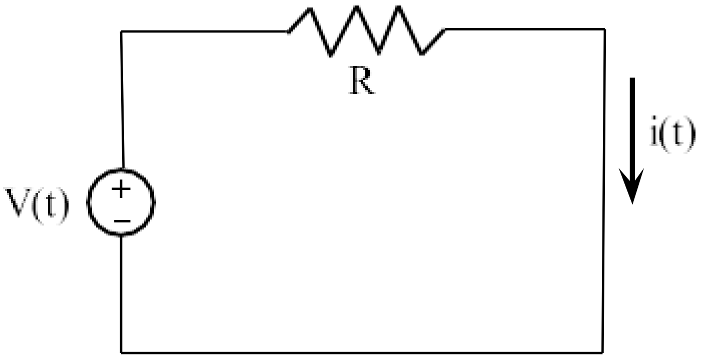


Figura: circuito eléctrico

- La potencia instantánea en el circuito es:
  $p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v(t)^2$
- La *energía* total gastada en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ es:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v(t)^2\,dt$$

Señales de energía y de potencia

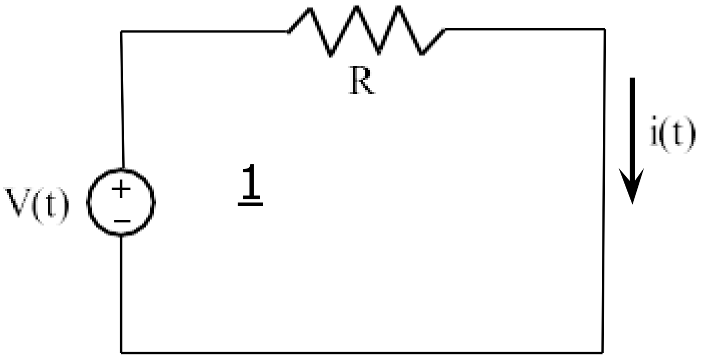


Figura: circuito eléctrico

- La potencia instantánea en el circuito es:
  $$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v(t)^2$$
- La *energía* total gastada en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ es:
  $$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}v(t)^2\,dt$$
- Potencia *promedio*:
  $$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}v(t)^2\,dt$$

Energía y potencia de una señal.

Señal en tiempo continuo

- La energía de la señal *x(t)* durante un intervalo de tiempo [t1,t2] se define como:

$$E[x(t)]_{t_1 \to t_2} = \int |x(t)|^2 dt$$

Señal en tiempo discreto.

- La energía entre (N1,N2) de una señal discreta esta dada por:

$$E[x[n]]_{N_1 \to N_2} = \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2$$

Energía y potencia de una señal.

- La energía total de la señal en el intervalo $(-\infty,\infty)$ está dada por:

$$E = \lim_{L \to \infty} \int_{-L}^{L} |x(t)|^2 \, dt$$

- Cuando este limite existe y es finito se dice que la señal es de ENERGÍA.
- Las señales periódicas tienen energía infinita.

Energía y potencia de una señal.

La Potencia de una señal puede ser encontrada sumando la potencia instantánea sobre el intervalo y dividiendo por la longitud del mismo

Una señal de potencia es una señal para la cual la potencia promedio P $_{t1;t2}$ se mantiene finita, pero no cero, cuando la longitud del intervalo de tiempo T tiende a infinito.

Señal en tiempo continuo

- La potencia de la señal *x(t)* durante un intervalo de tiempo [t1,t2] se define como:

$$P[x(t)]_{t_1 \to t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int |x(t)|^2 dt$$

Cuadrado Integrable

Formulación Moderna

Señal en tiempo discreto.

- La potencia entre (N1,N2) de una señal discreta esta dada por:

$$P[x[n]]_{N_1 \to N_2} = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \cdot \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]\ |^2$$

Energía y potencia de una señal.

- La potencia media de la señal en el intervalo (- ∞ ,∞) está dada por:

$$P = \lim_{L\to\infty}\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|x(t)|^2\,dt\right] \qquad p = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N}|x[n]|^2\right]$$

- Cuando este limite existe y es finito se dice que la señal es de POTENCIA.
- Las señales periódicas tienen potencia media finita.

Energía y potencia de una señal.

- Las señales de energía finita tiene potencia media cero.
- Las señales de potencia media finita tienen energía infinita.

Transformaciones de la variable independiente.

Es ya sabido que una señal, secuencia o función puede ser modificada en su magnitud (amplitud) por operaciones simples como la multiplicación por un escalar amplificará su magnitud si el valor absoluto del escalar es mayor que uno o reducirá su magnitud si el valor absoluto del escalar es menor que uno. Así mismo, si se cambia de signo a la señal o el escalar es negativo, la señal será invertida.

Aquí mostraremos los efectos producidos sobre una señal al cambiar la variable independiente. Las transformaciones que pueden realizarse sobre la variable independiente son:

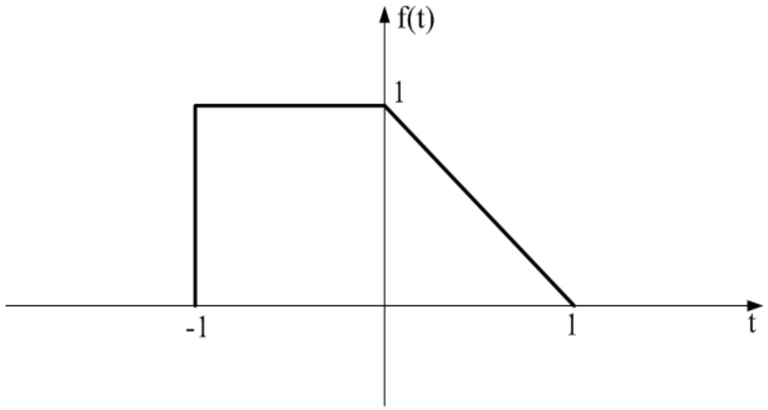
- Desplazamiento (atraso o adelanto)
- Reflexión (cambio de signo)
- Escalamiento

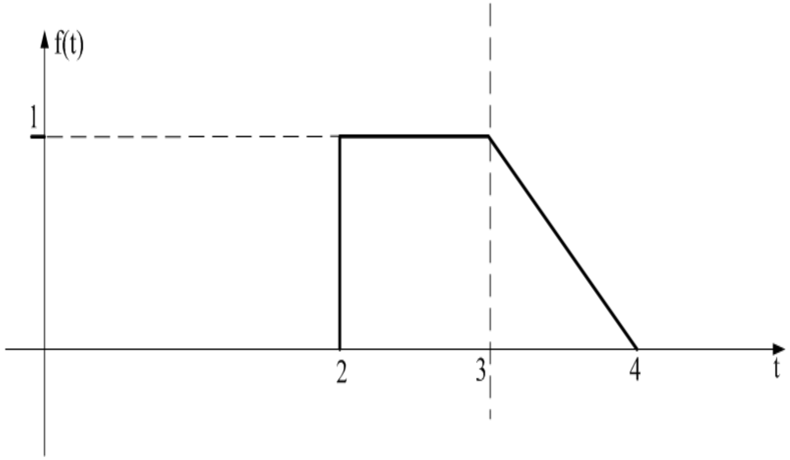
Transformaciones de la variable independiente.

- La señal $f(t-t_0)$ es una versión de la señal $f(t)$ desplazada en el tiempo

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ -t+1, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

$$f(t) \rightarrow f(t-3)$$



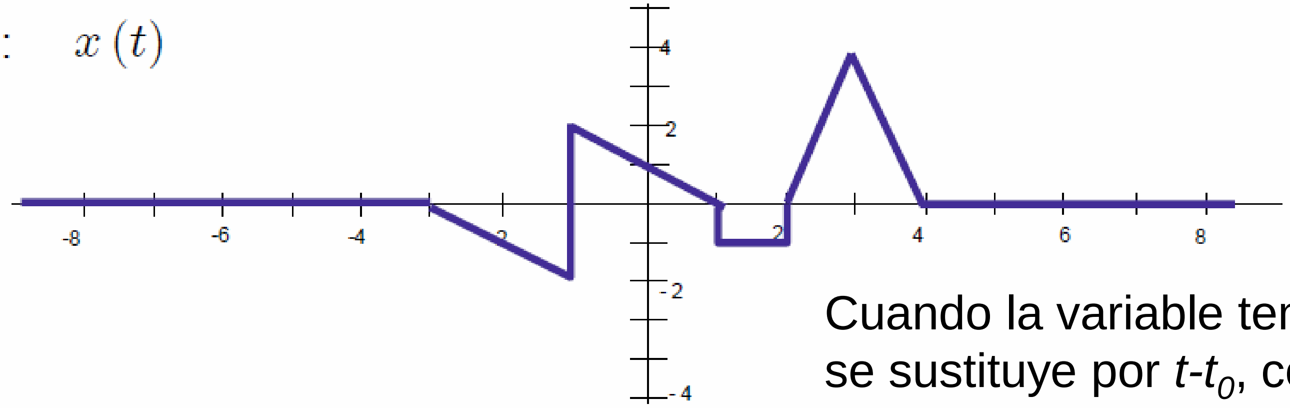


TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

DESPLAZAMIENTO.

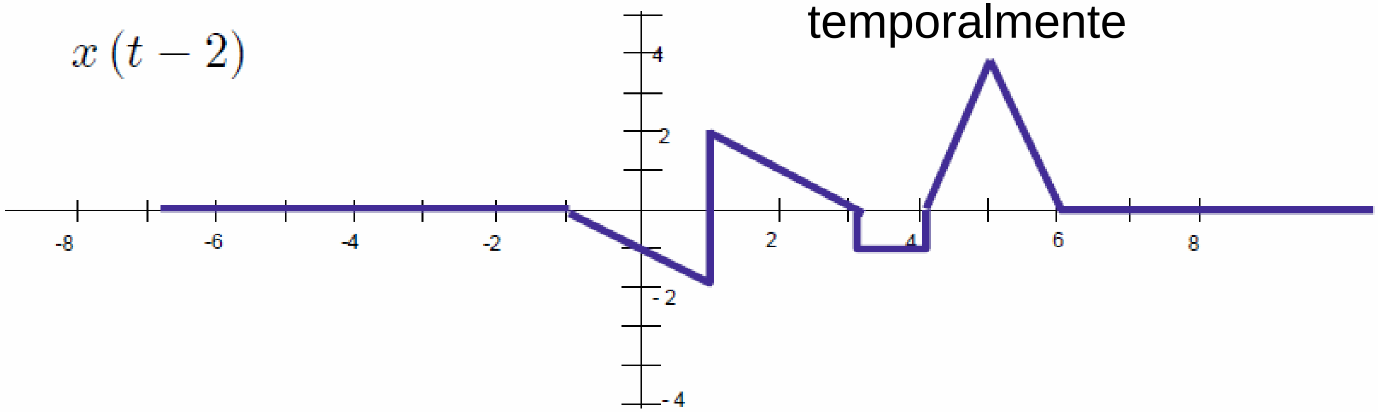
Un desplazamiento del mismo signo que la variable independiente implica un adelanto.
Un desplazamiento de distinto signo que la variable independiente implica un retardo.

Ejemplo: $x(t)$



Cuando la variable temporal *t* se sustituye por $t-t_0$, con $t_0 \in R$, la señal se desplaza temporalmente

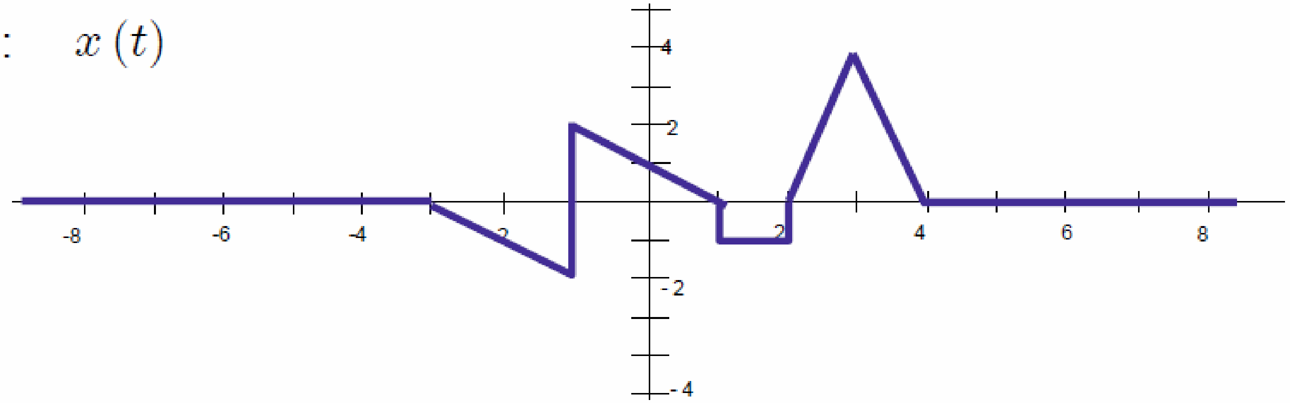
$x(t-2)$



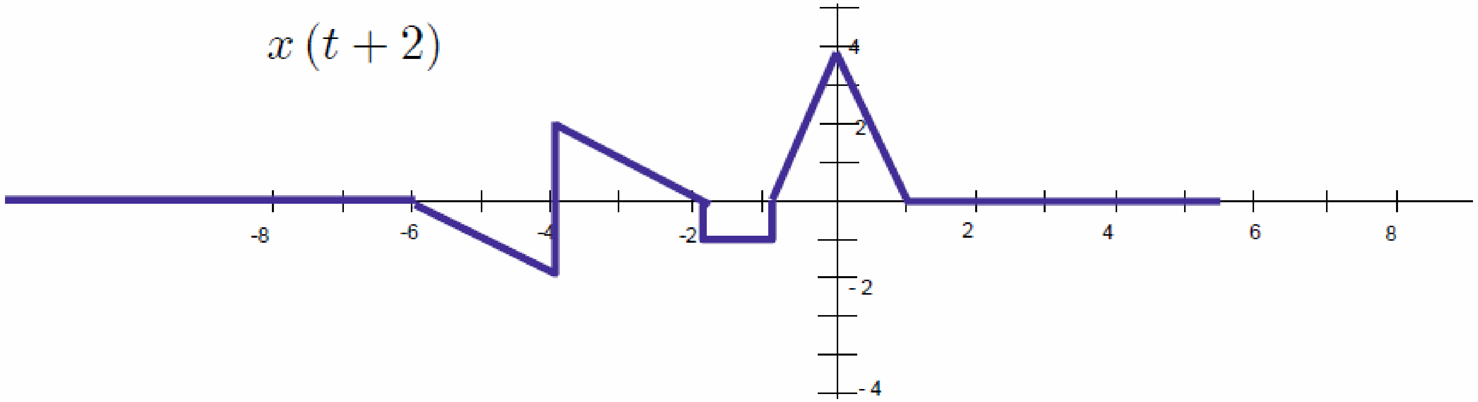
TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

DESPLAZAMIENTO.

Ejemplo: $x(t)$



$x(t+2)$

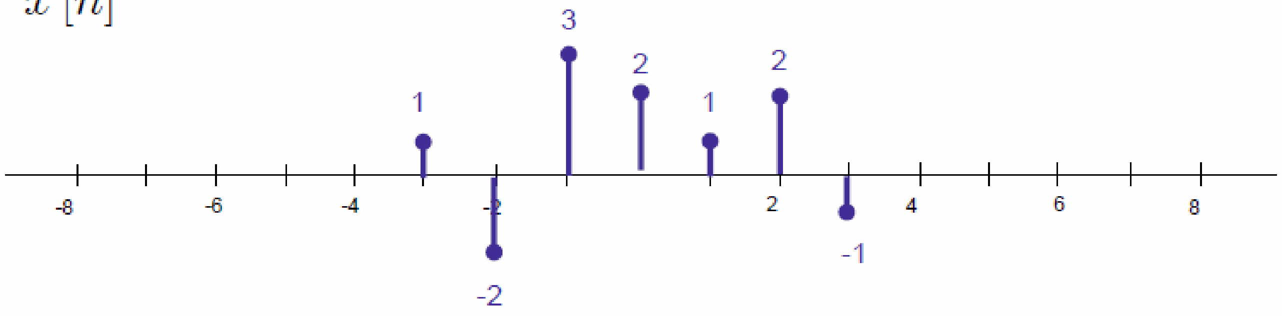


TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

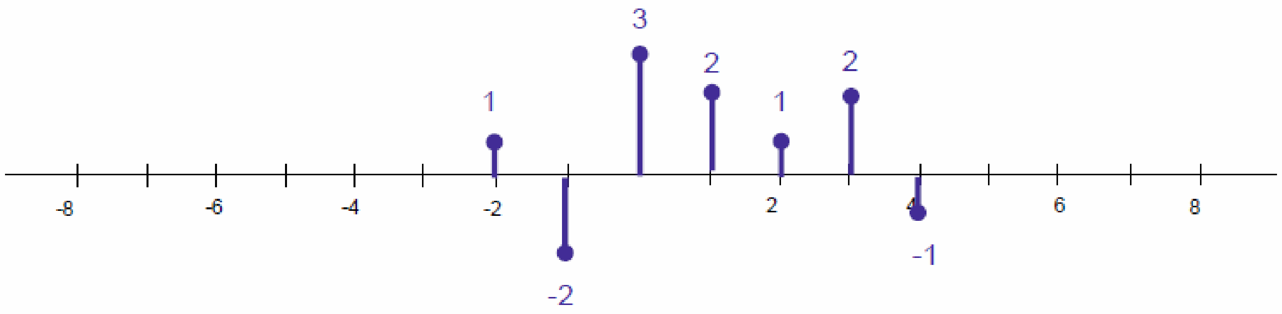
DESPLAZAMIENTO.

$x[n]$

Ejemplo:



$x[n-1]$

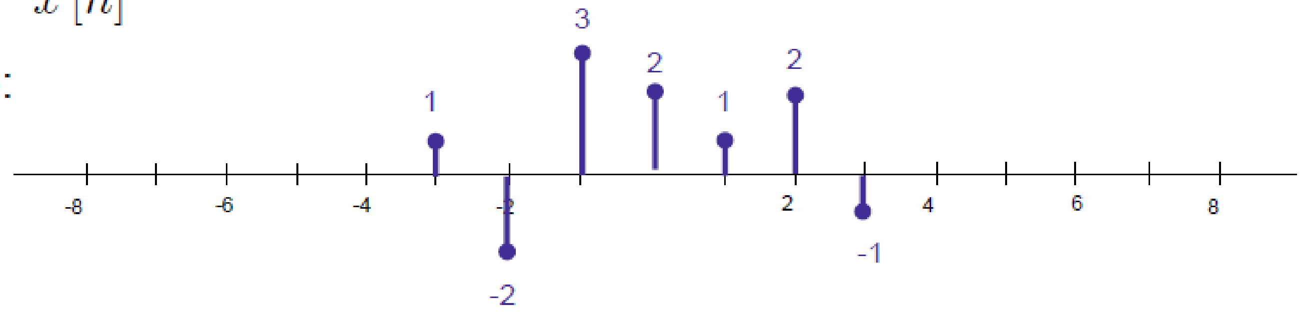


TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

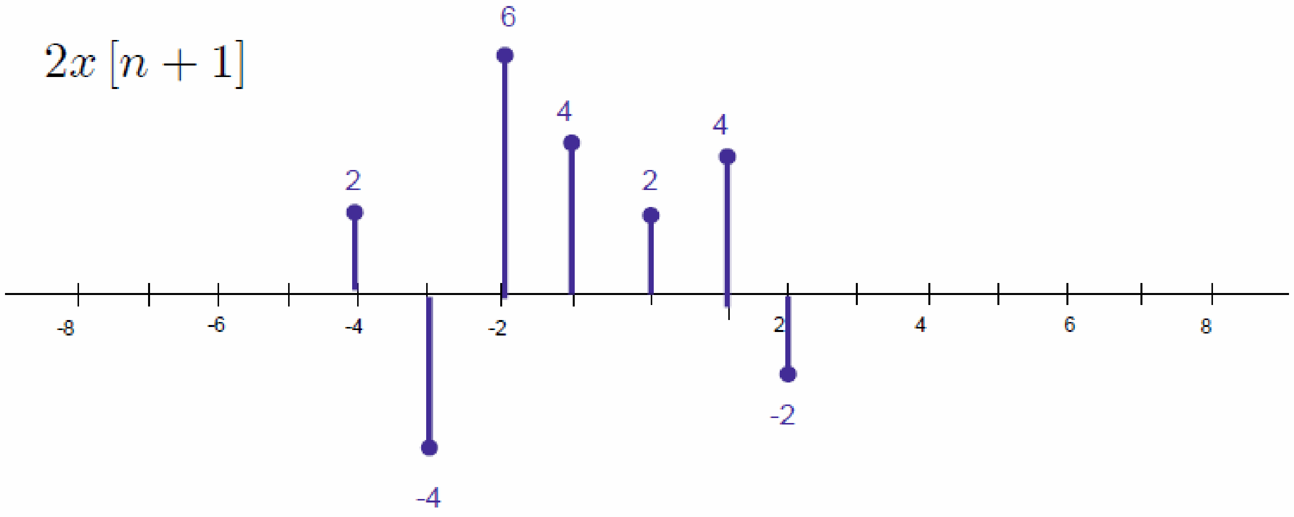
DESPLAZAMIENTO.

$x[n]$

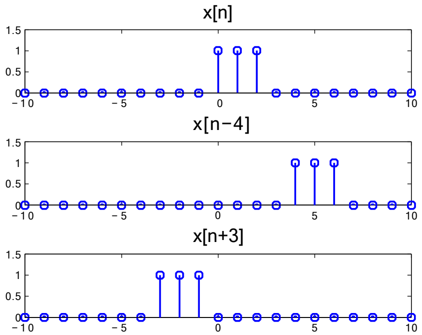
Ejemplo:



$2x[n+1]$



Transformaciones de la variable independiente



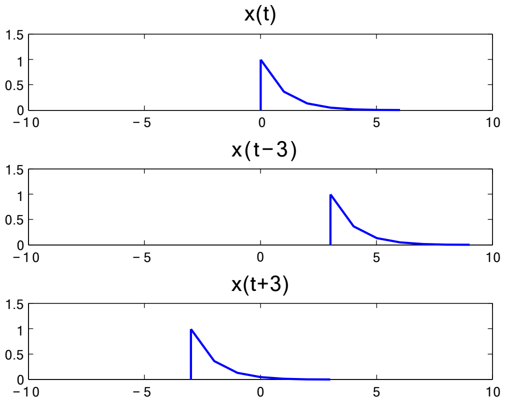
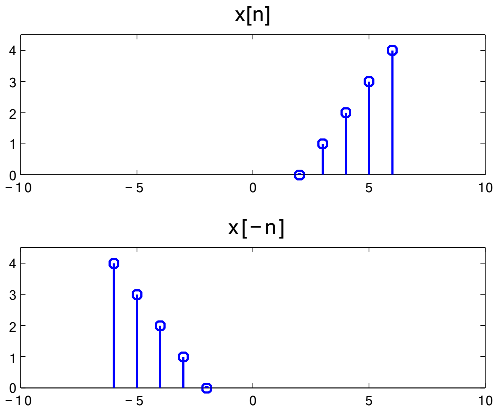


Figura: Corrimiento



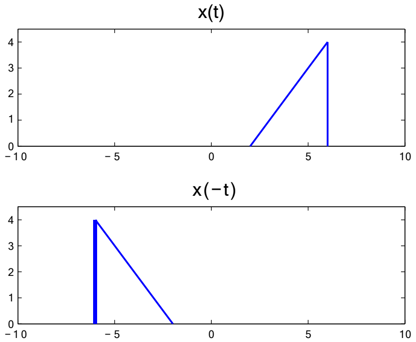


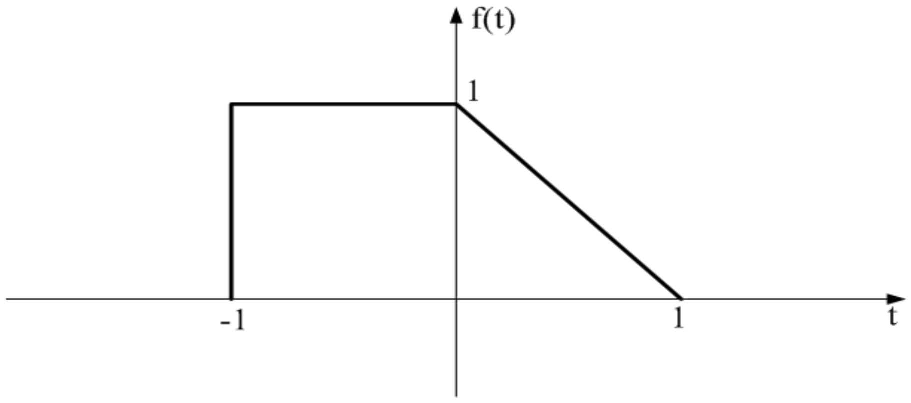
Figura: Inversión

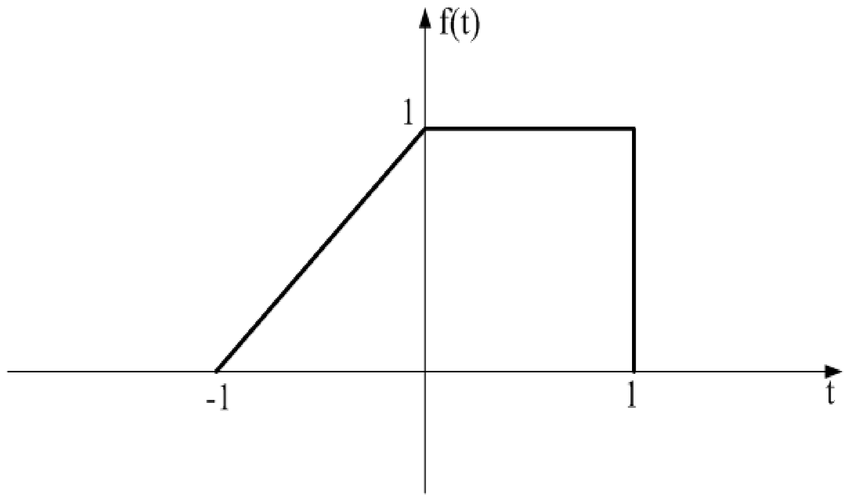
Transformaciones de la variable independiente.

- La señal $f(-t)$ es una versión de la señal $f(t)$ invertida en el tiempo

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ -t+1, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

$$f(t) \rightarrow f(-t)$$





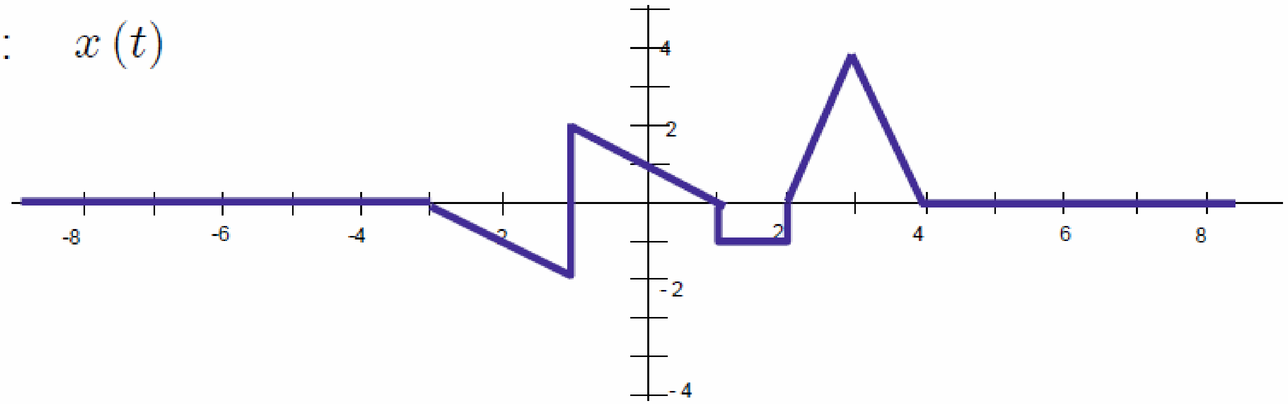
TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

REFLEXIÓN

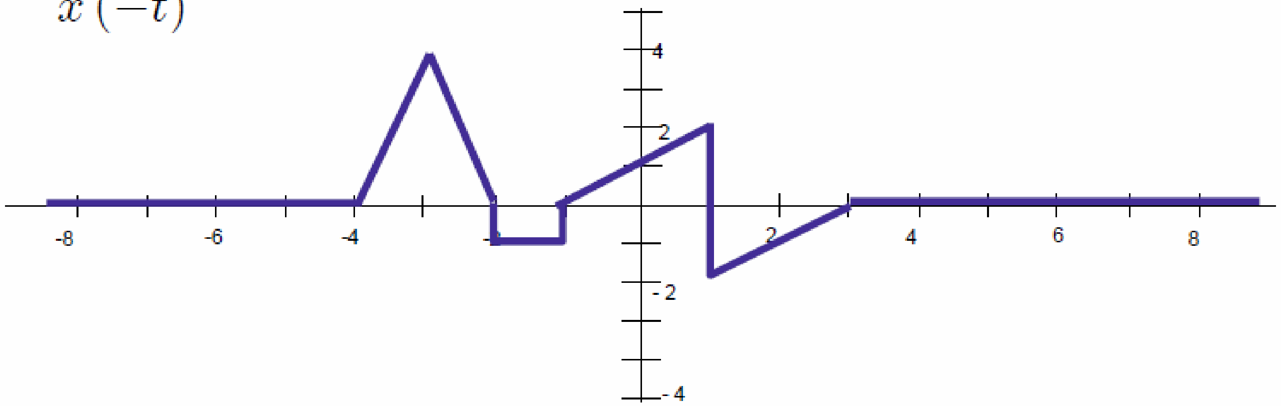
Reflexión en torno al origen.

La reflexión temporal se realiza sustituyendo la variable temporal *t* por –*t*. Bajo esta transformación la señal original *x(t)* se refleja respecto al tiempo *t=0* para obtener la señal *x(-t)*

Ejemplo: $x\left(t\right)$

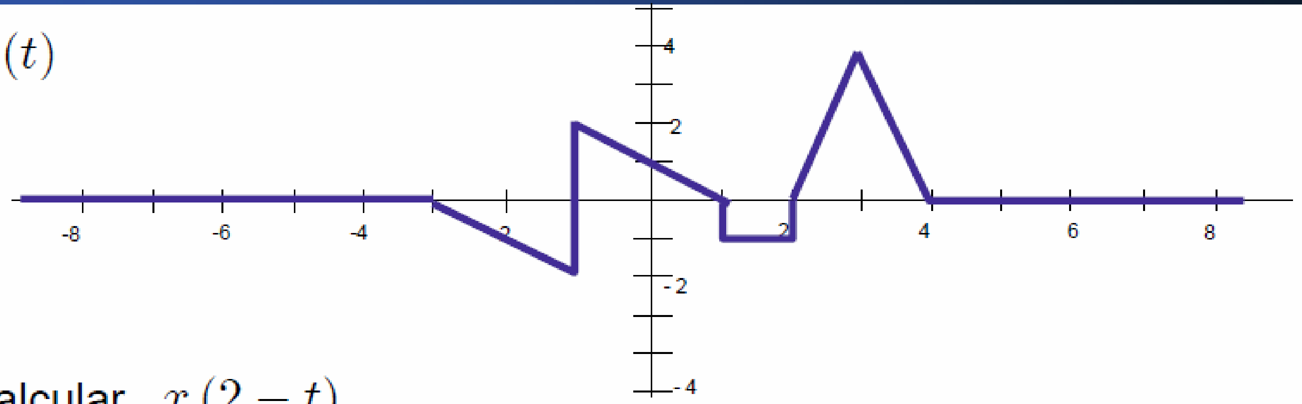


$x\left(-t\right)$



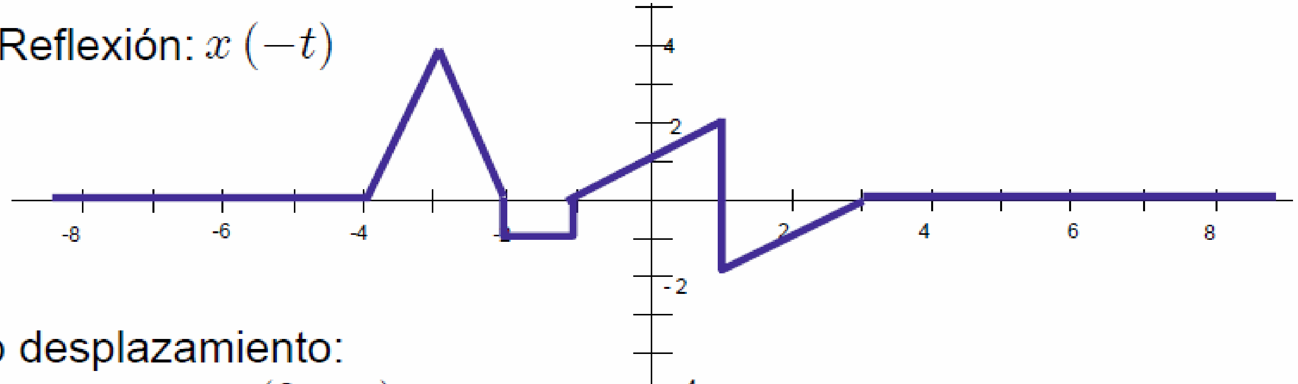
TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

Ejemplo: $x(t)$



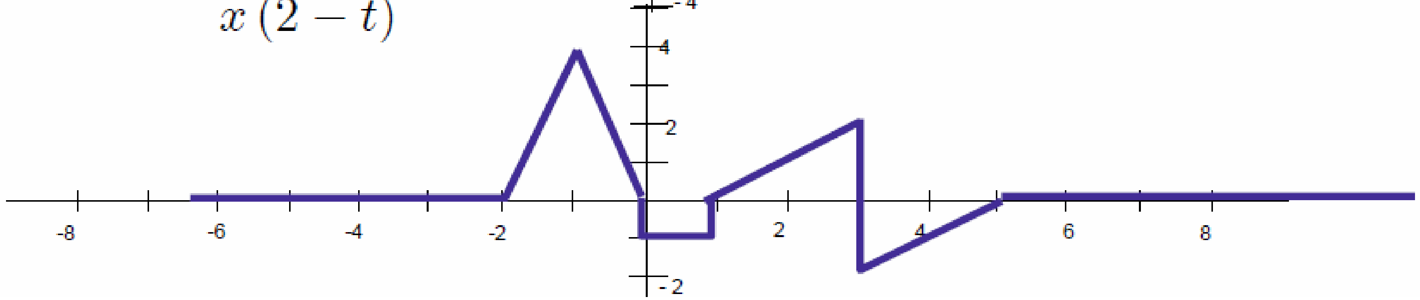
Queremos calcular $x(2-t)$

Primero Reflexión: $x(-t)$



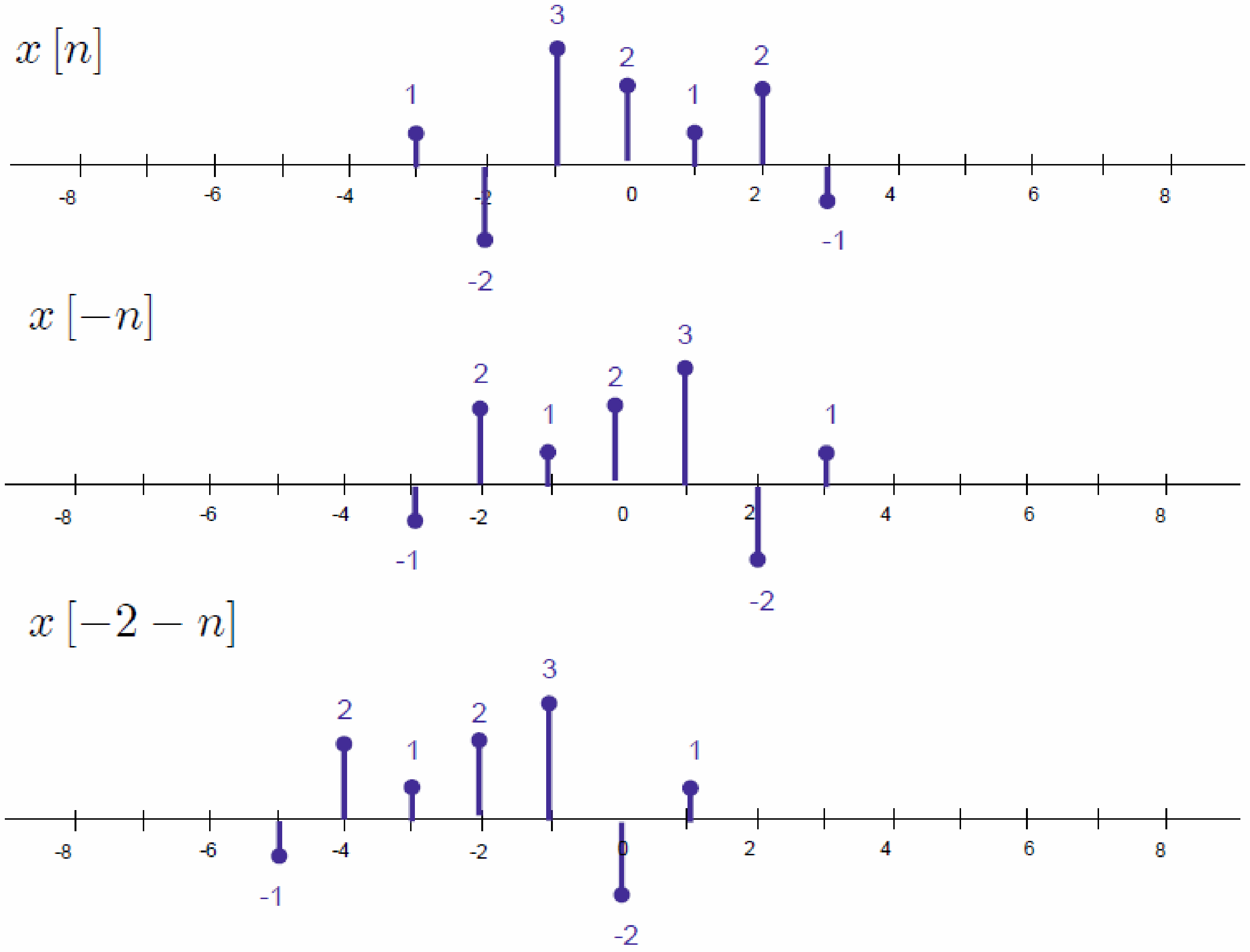
Segundo desplazamiento:

$x(2-t)$



TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

Reflexión+Desplazamiento. Ejemplo: Calcular $x[-2-n]$

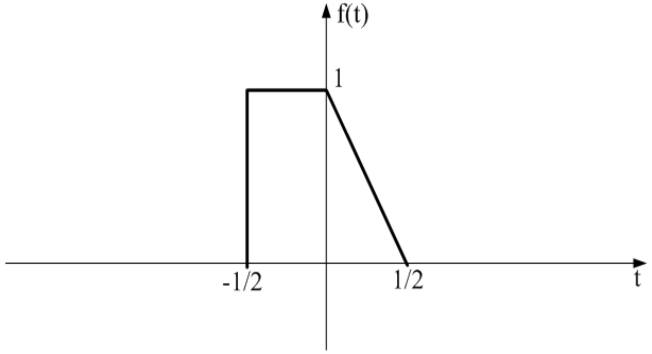


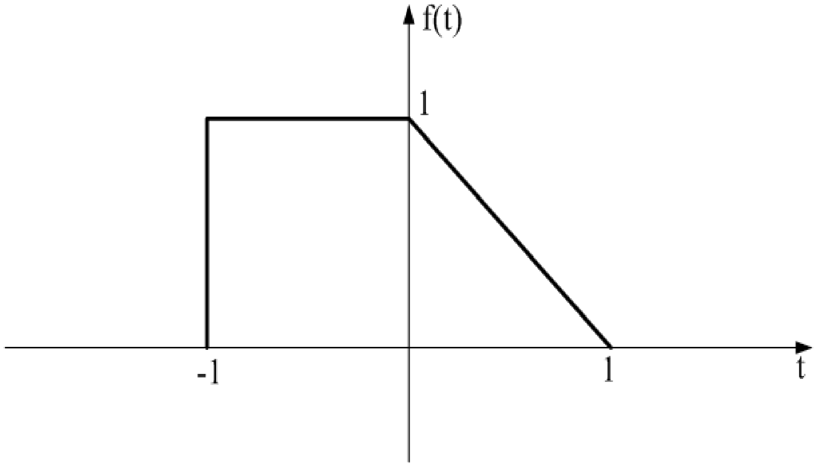
Transformaciones de la variable independiente.

- La señal $f(at)$ es una versión de la señal $f(t)$ contraída en el tiempo

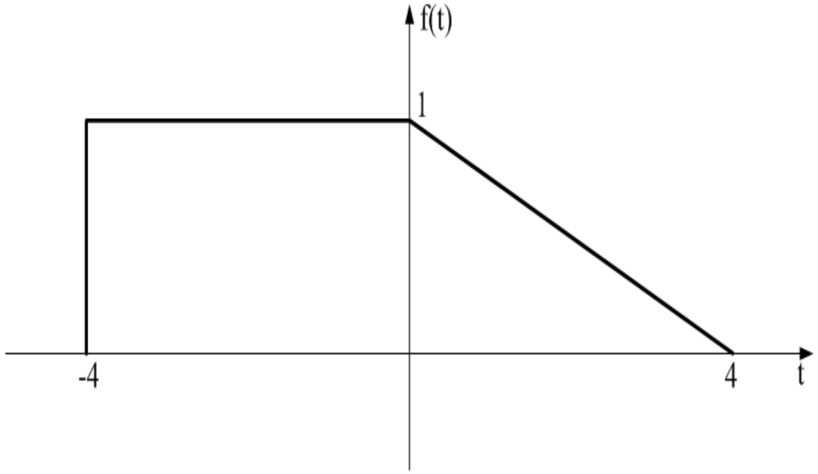
$$f(t)=\begin{cases}1, & -1<t<0\\ -t+1, & 0<t<1\end{cases}$$

$$f(t)\rightarrow f(2\mathrm{t})$$





$$f(t)\rightarrow f\left(\frac{t}{4}\right)$$



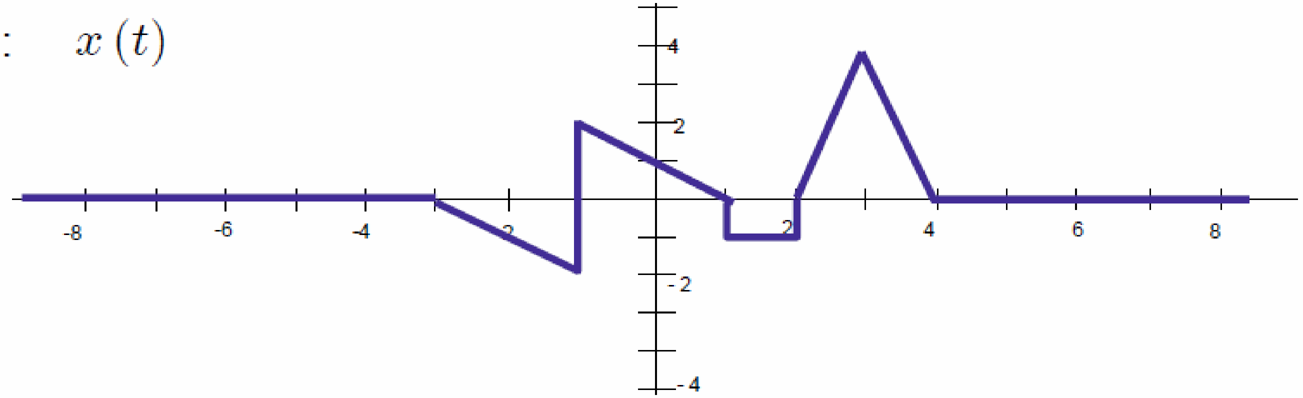
TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

CAMBIO DE ESCALA

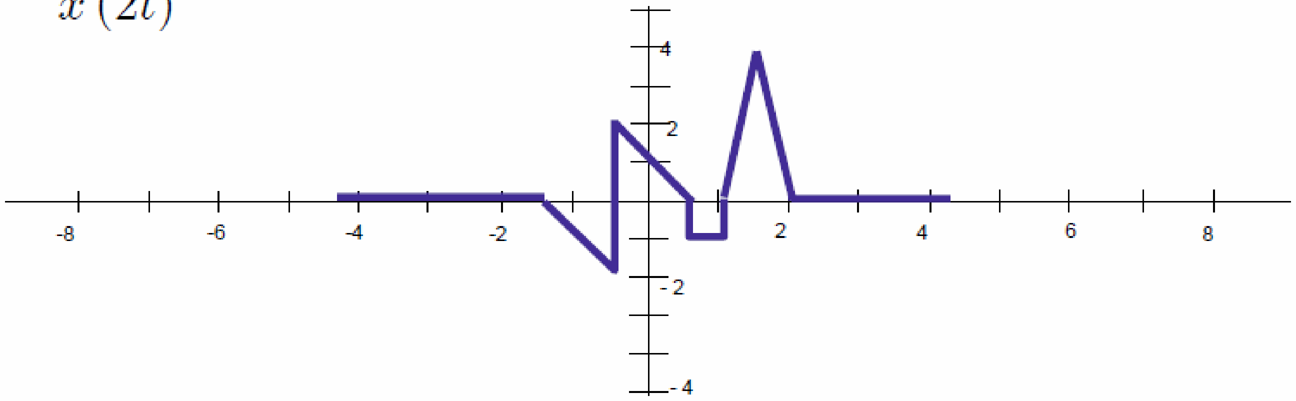
$x\,(at)\;a>1$ Compresión de la señal en torno a cero.

$x\left(\frac{t}{a}\right)\;a<1$ Expansión de la señal en torno a cero.

Ejemplo: $x\,(t)$



$x\,(2t)$



TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

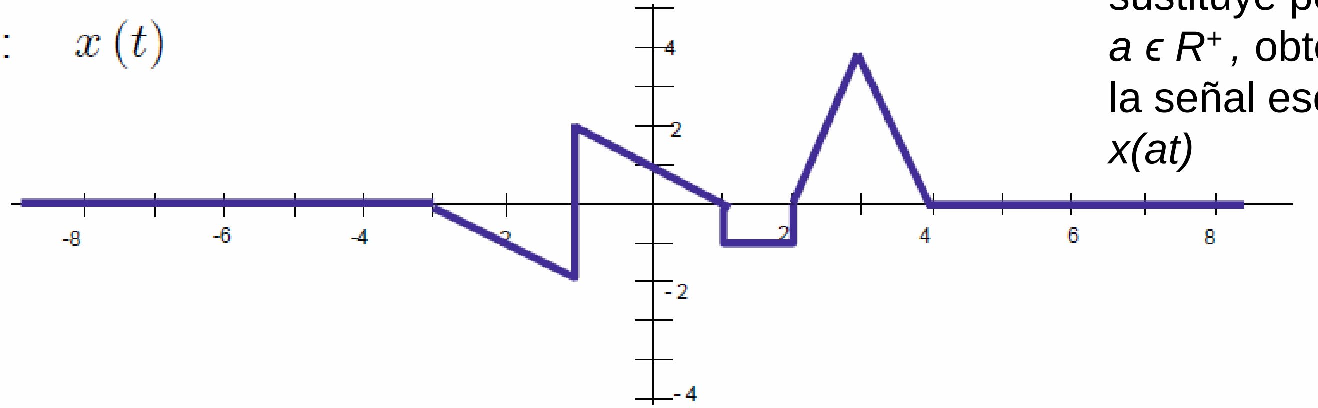
CAMBIO DE ESCALA

$x(at)\; a > 1$ Compresión de la señal en torno a cero.

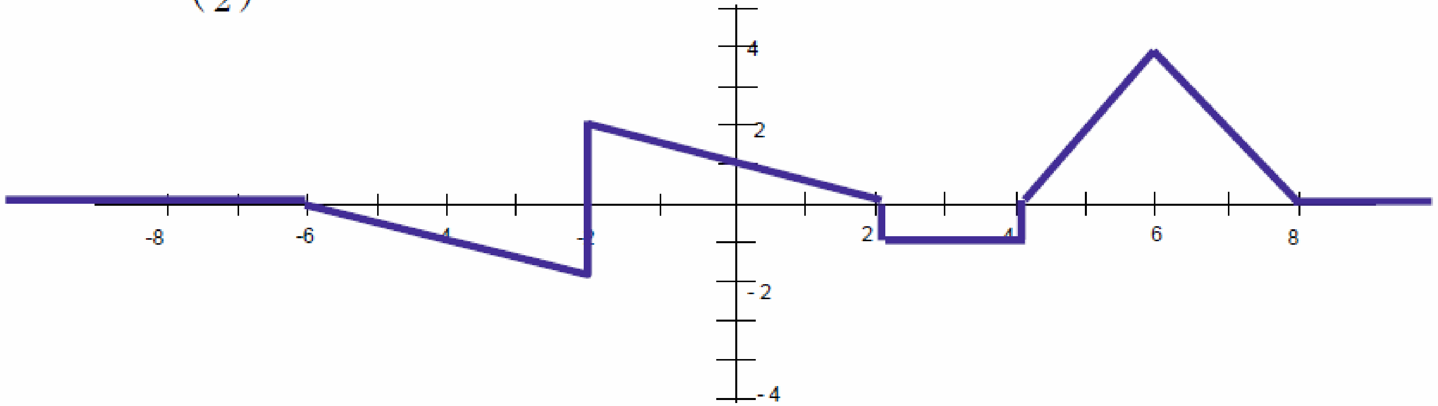
$x\left(\frac{t}{a}\right)\; a > 1$ Expansión de la señal en torno a cero.

La variable *t* se sustituye por *at*, con *a* ϵ R^{+}, obteniendo la señal escalada *x(at)*

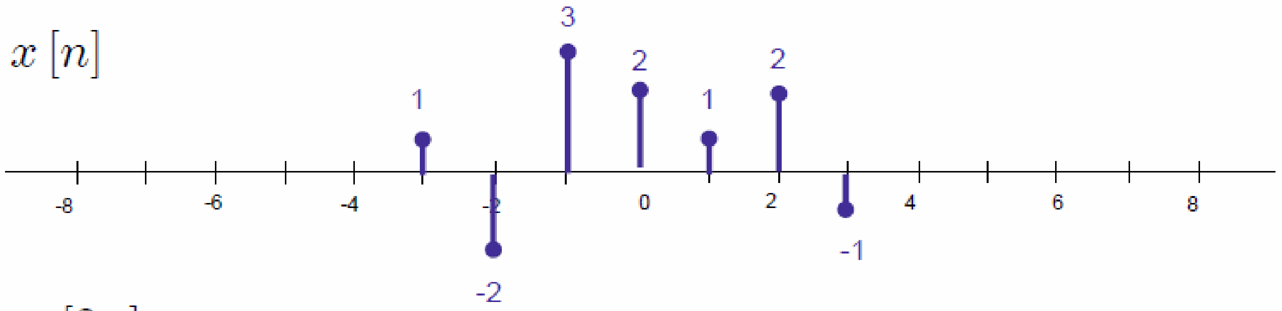
Ejemplo: $x(t)$



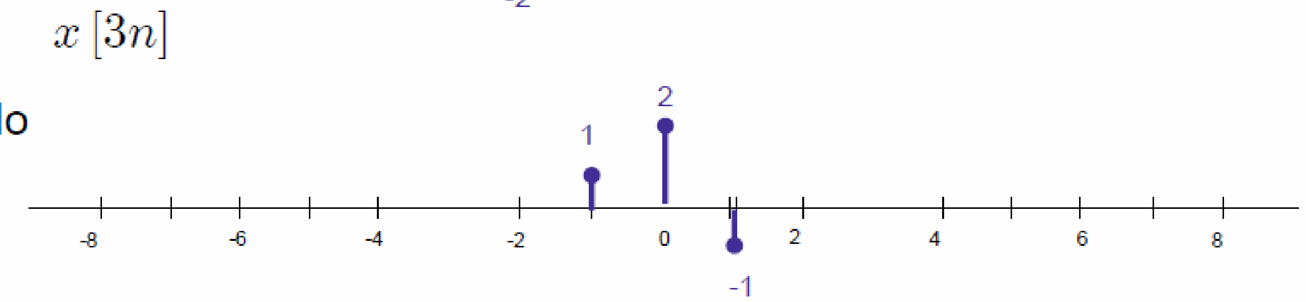
$x\left(\frac{t}{2}\right)$



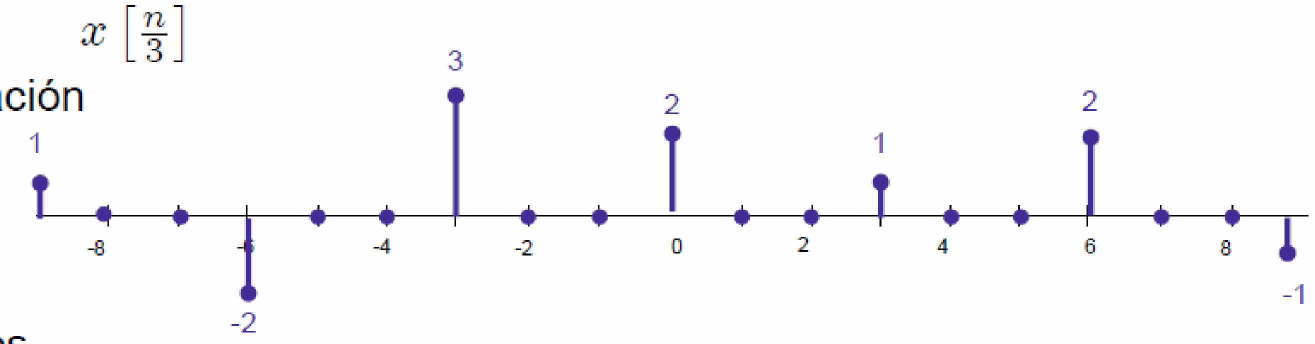
TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE



Diezmado



Interpolación

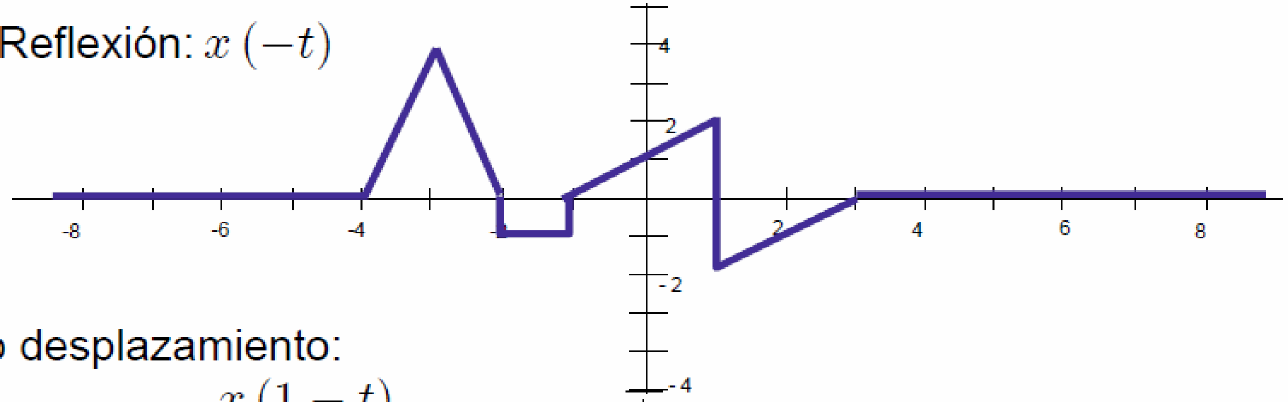


Si hacemos

$$x_2(t) = x(at) \rightarrow x_3(t) = x_2\left(\frac{t}{a}\right) = x(t) \,//\, x_2[n] = x[an] \rightarrow x_3[n] = x_2\left[\frac{n}{a}\right] \neq x[n]$$

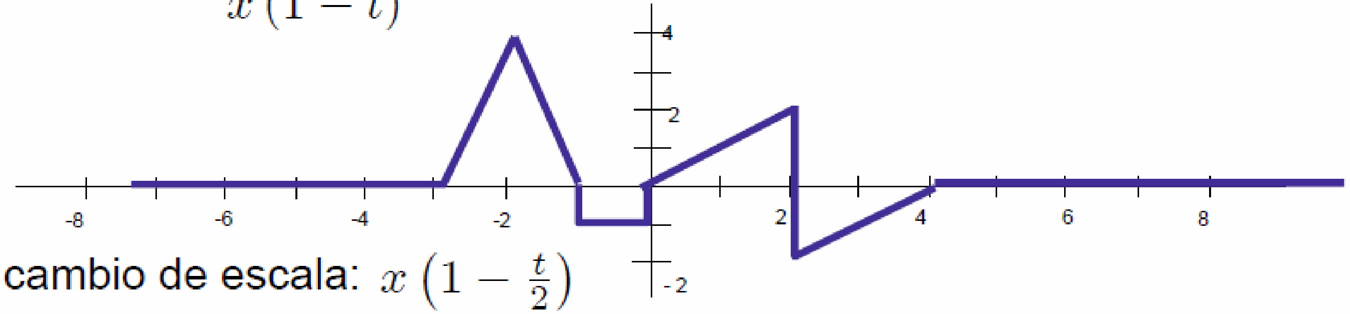
TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

Primero Reflexión: $x(-t)$

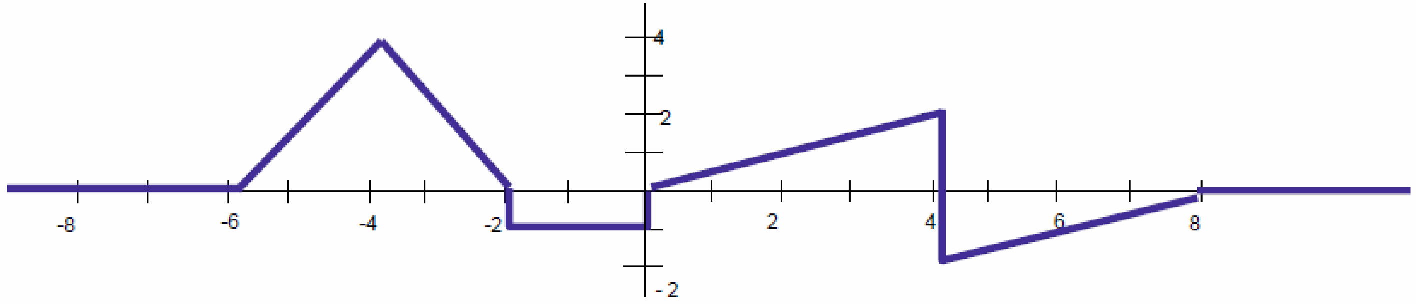


Segundo desplazamiento:

$x(1-t)$

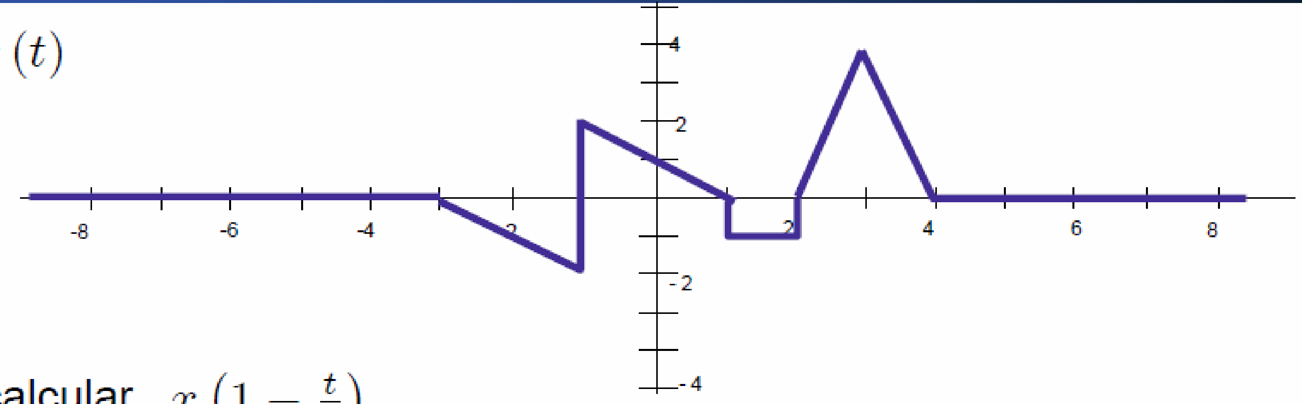


Tercero cambio de escala: $x\left(1-\frac{t}{2}\right)$



TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

Ejemplo: $x\left(t\right)$

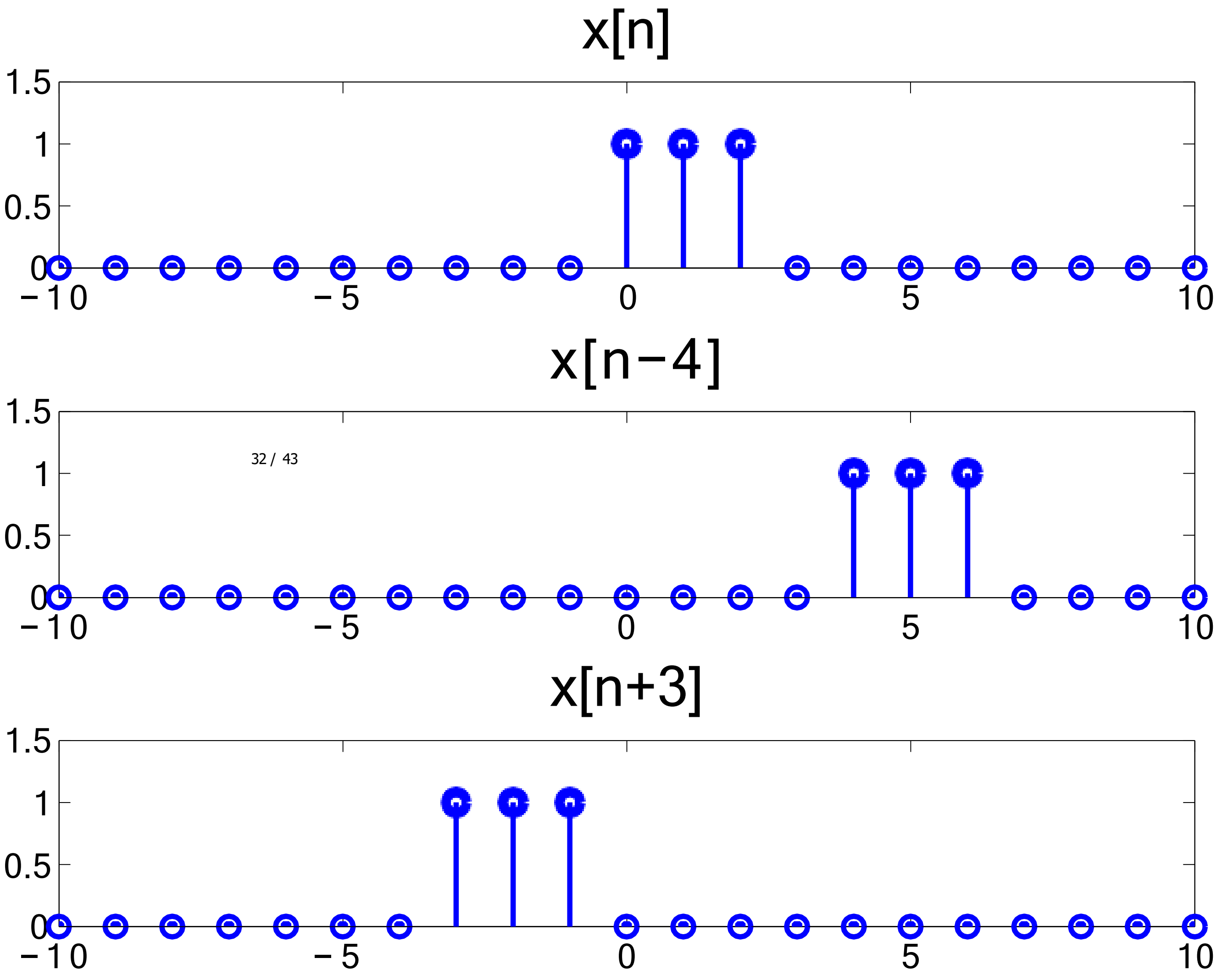


Queremos calcular $x\left(1-\frac{t}{2}\right)$

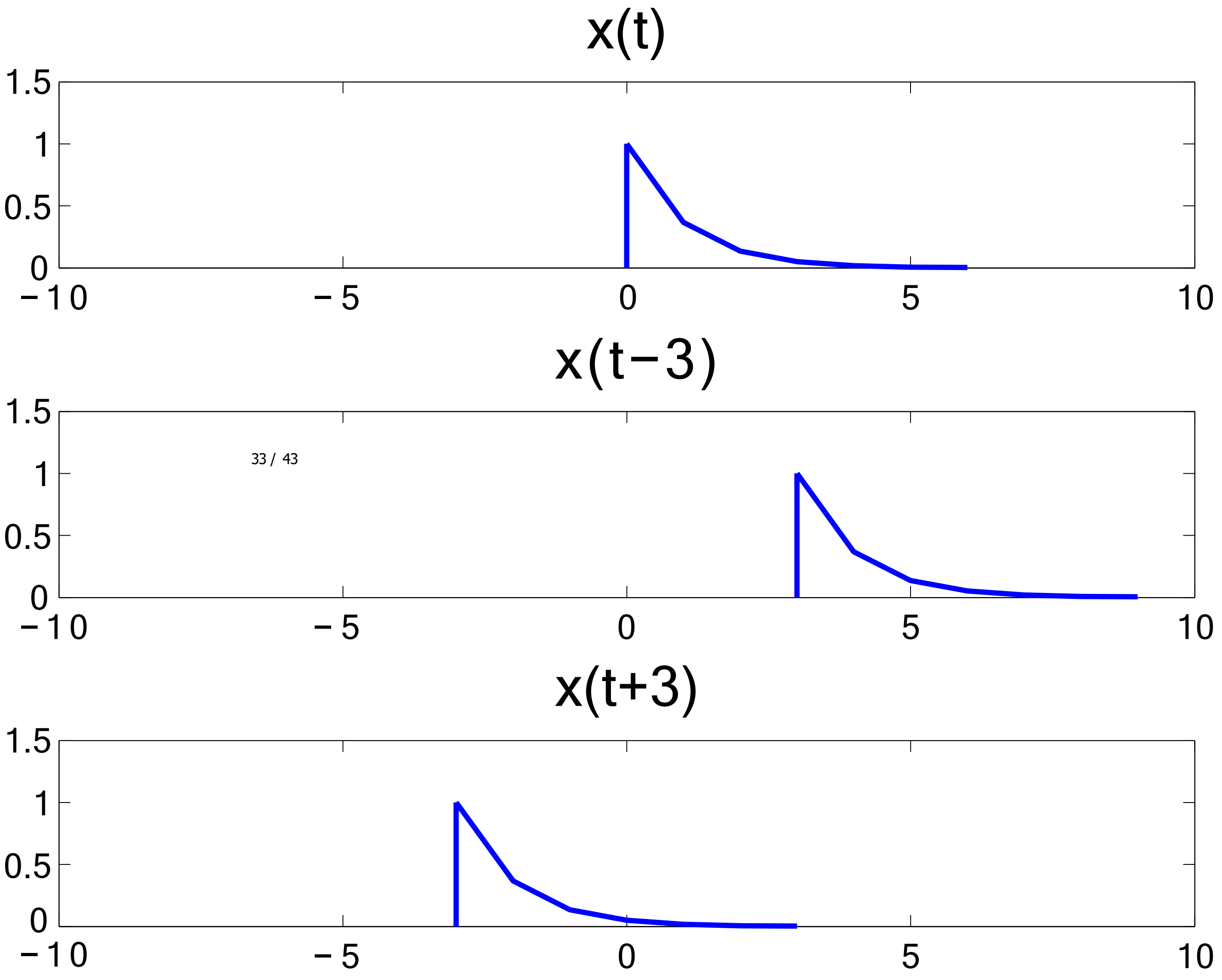
Tenemos que tener cuidado en el orden en el que realizamos los pasos, pues la solución no es igual. Seguiremos el orden:

1)Reflexión.
2)Desplazamiento.
3)Cambio de escala.

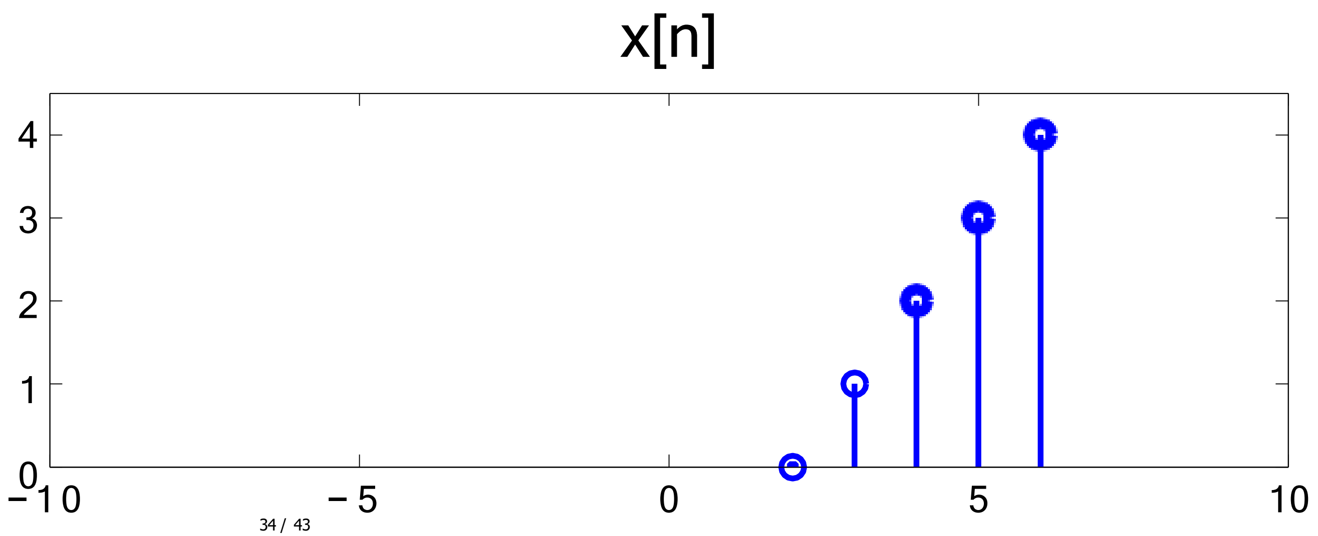
Corrimiento en n

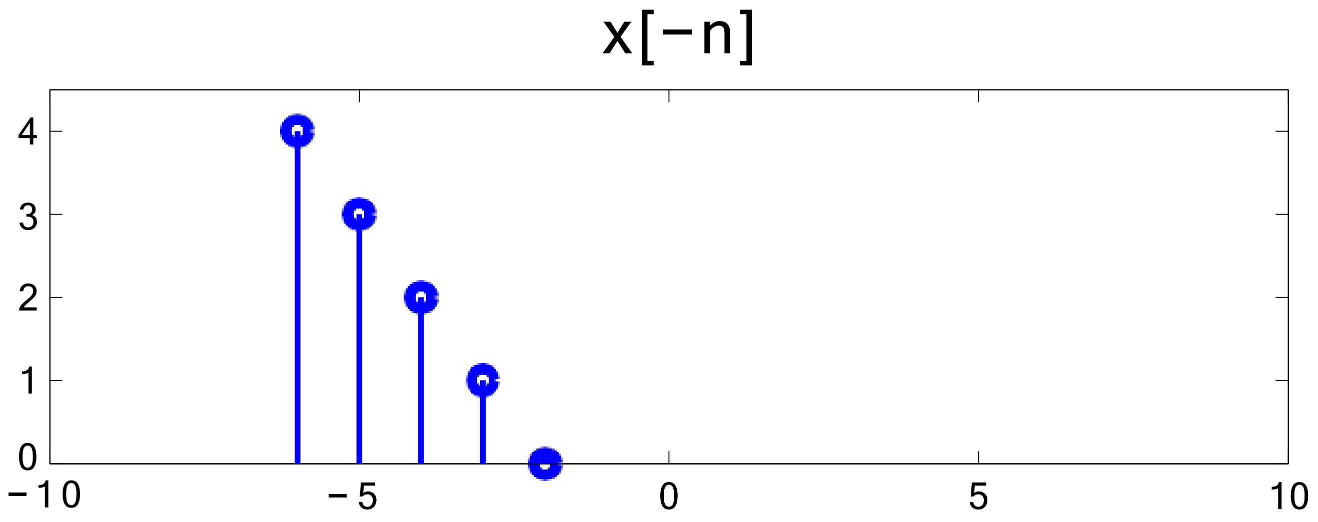


Corrimiento en t

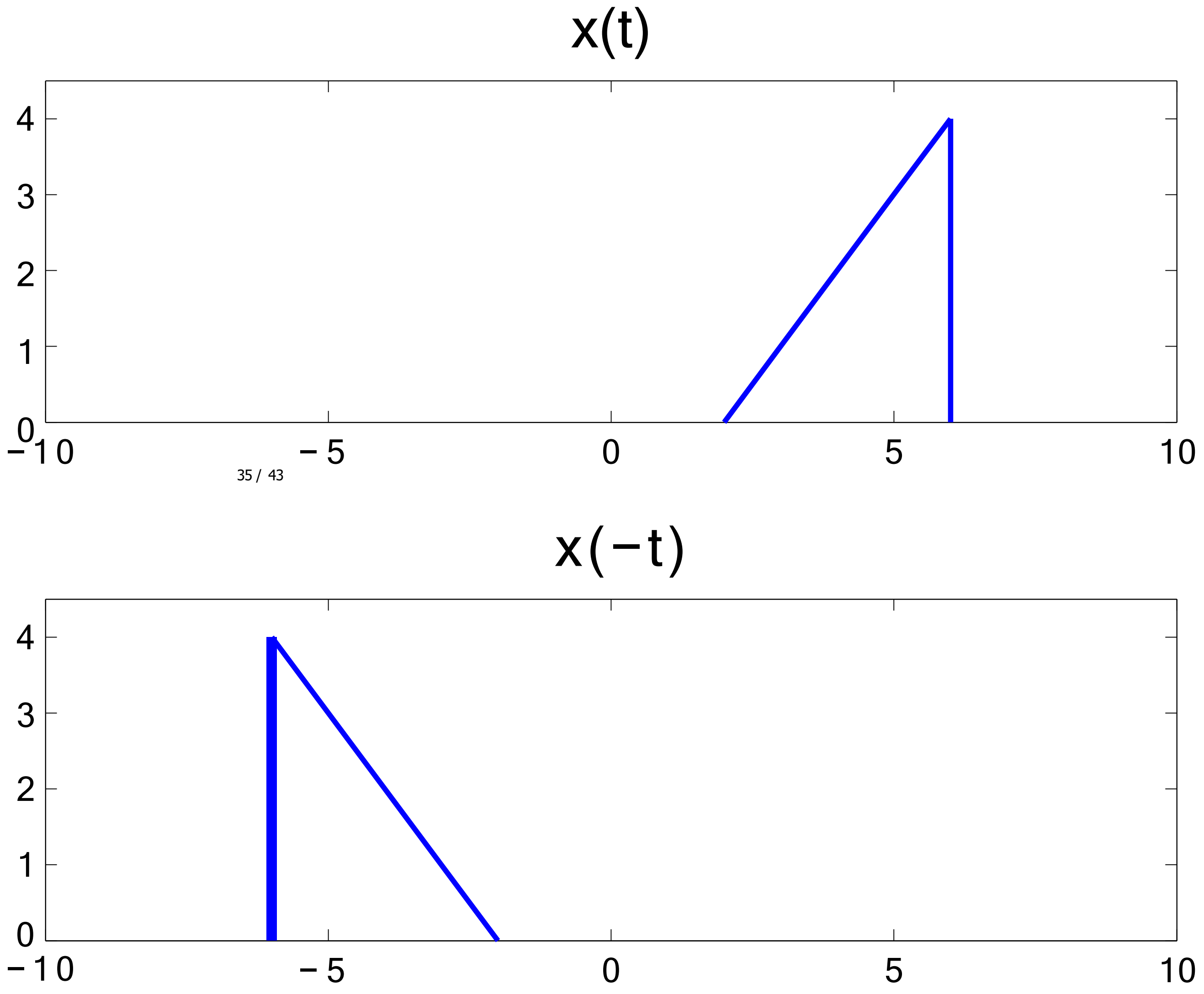


Inversión en n

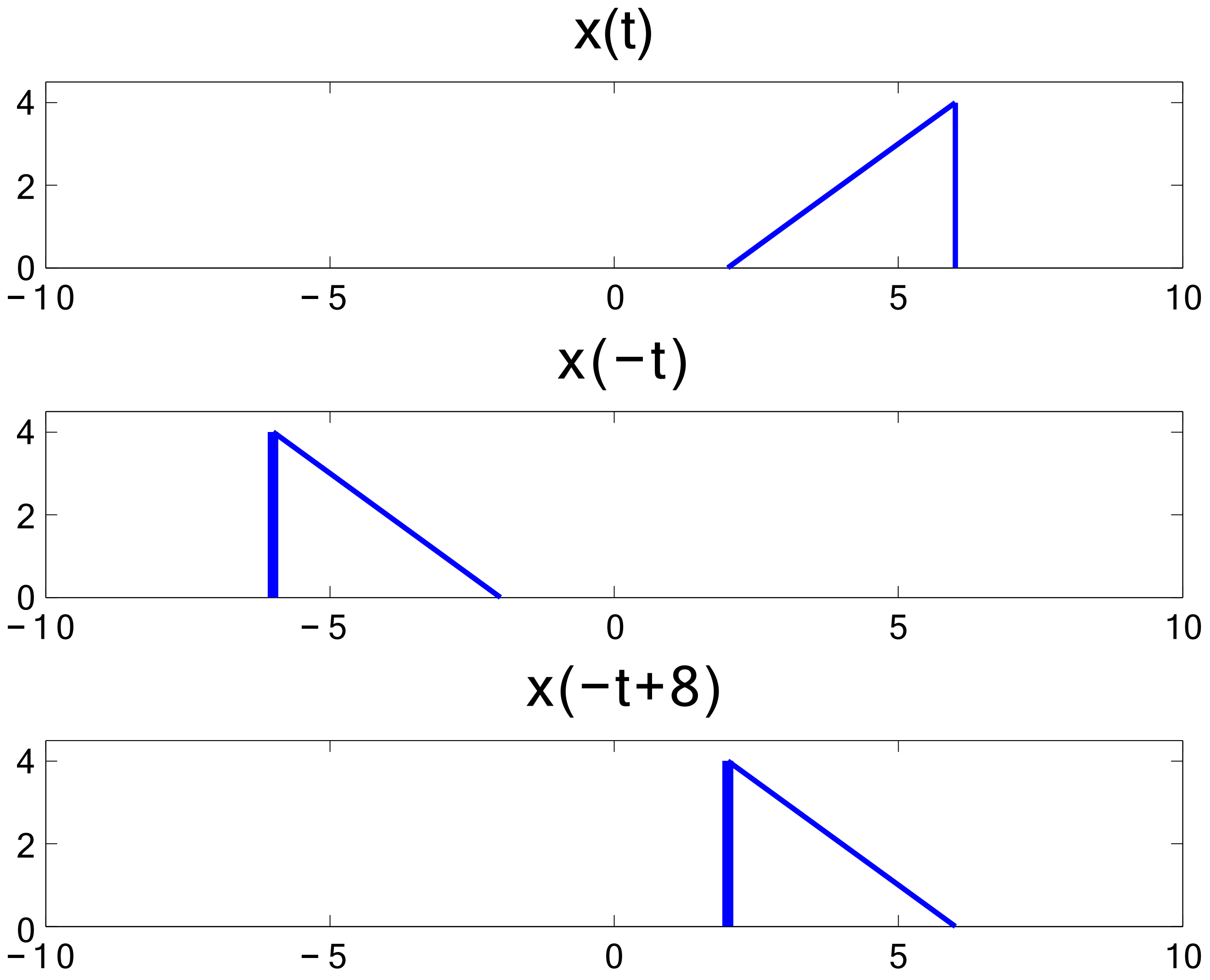




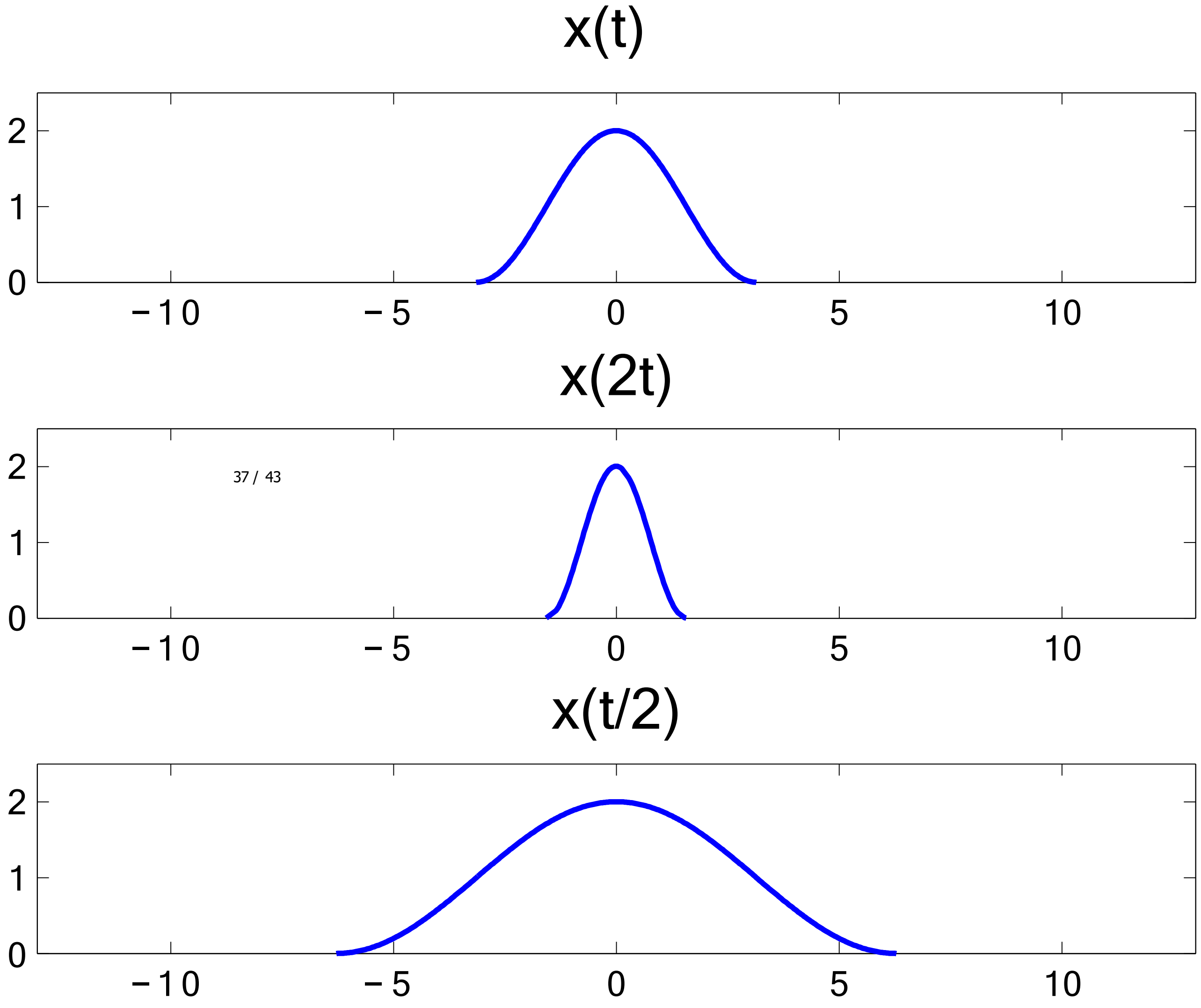
Inversión en t



Combinación: inversión y corrimiento en el tiempo



Escalamiento en el tiempo



Las secuencias discretas impulso unitario y escalón unitario

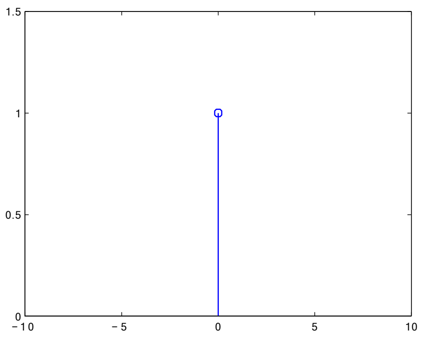


Figura: Impulso unitario discreto

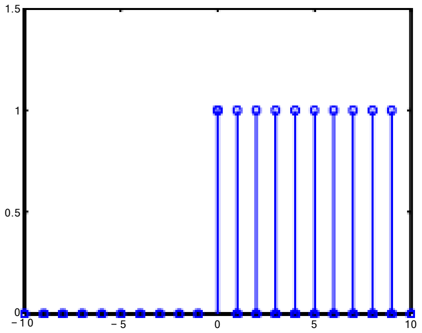


Figura: Escalón en tiempo discreto

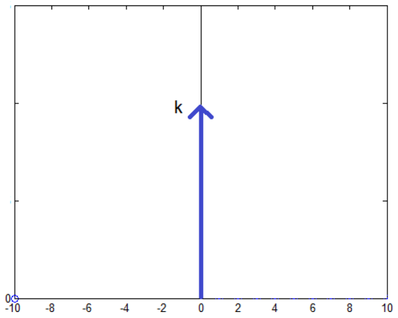


Figura: impulso continuo

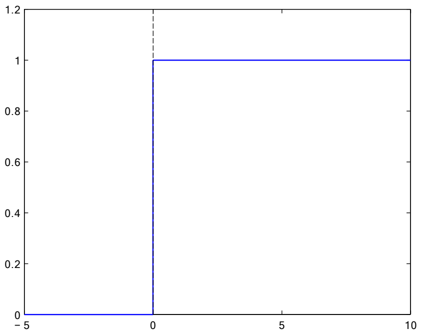
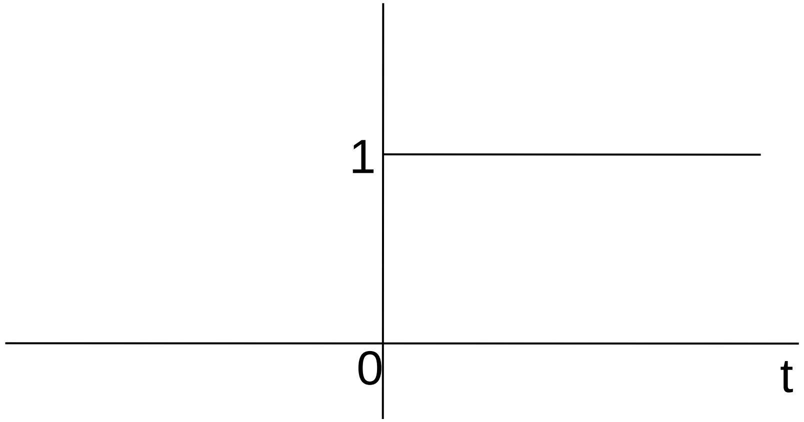


Figura: Escalón continuo

Señales singulares: Escalón unitario.

- Se define como:

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$



Ejercicio: Graficar

$$u(t)-u(t-1)$$

$$u(t+1)-u(t-1)$$

Impulso unitario

Una de las señales discretas más imples es el *impulso unitario (o muestra unitaria)*, la cual se define como

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

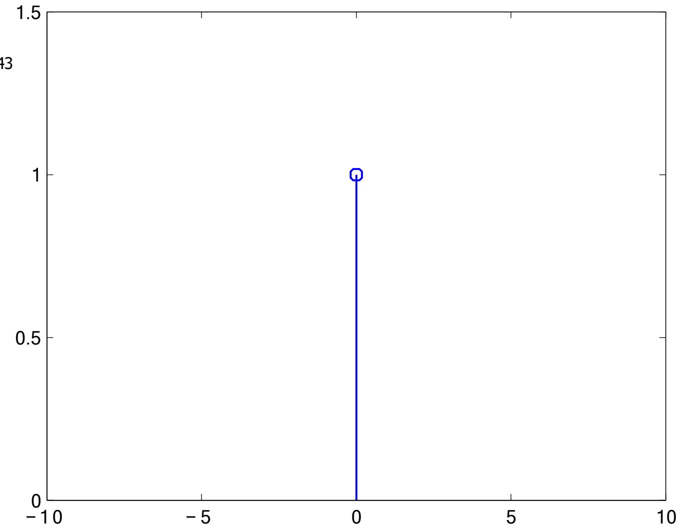


Figura: Impulso unitario discreto

Escalón unitario

Una señal discreta básica es el *escalón unitario* discreto, señalada como $u[n]$ y definida por

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1 & n > 0 \end{cases}$$

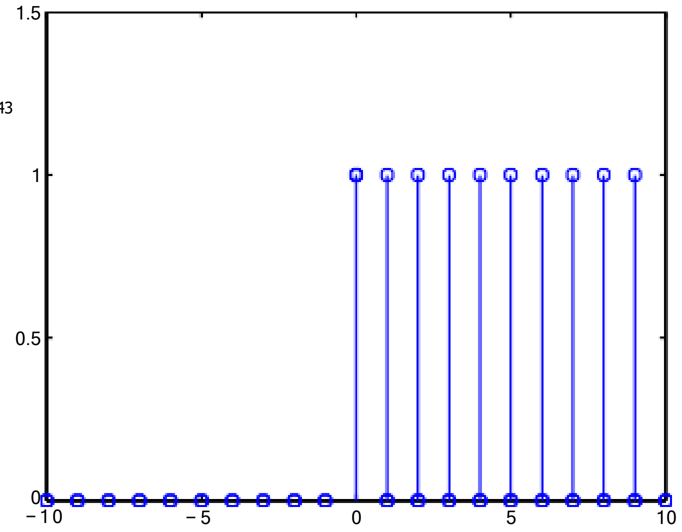


Figura: Escalón unitario discreto

Escalón unitario

- El impulso unitario discreto es la primera diferencia del escalón discreto

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

Escalón unitario

- El impulso unitario discreto es la primera diferencia del Escalón discreto

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

- Y a la inversa, el escalón unitario discreto es la sumatoria de la muestra unitaria

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$

Escalón unitario

- El impulso unitario discreto es la primera diferencia del escalón discreto

  $$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

  Y a la inversa, el escalón unitario discreto es la sumatoria de la
- muestra unitaria

  $$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$

- Cambiando la variable de la sumatoria de m a $k = n - m$, encontramos el escalón unitario en términos de la muestra unitaria

  $$u[n] = \sum_{k=\infty}^{0} \delta[n-k]$$

Escalón unitario

- o de manera equivalente

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

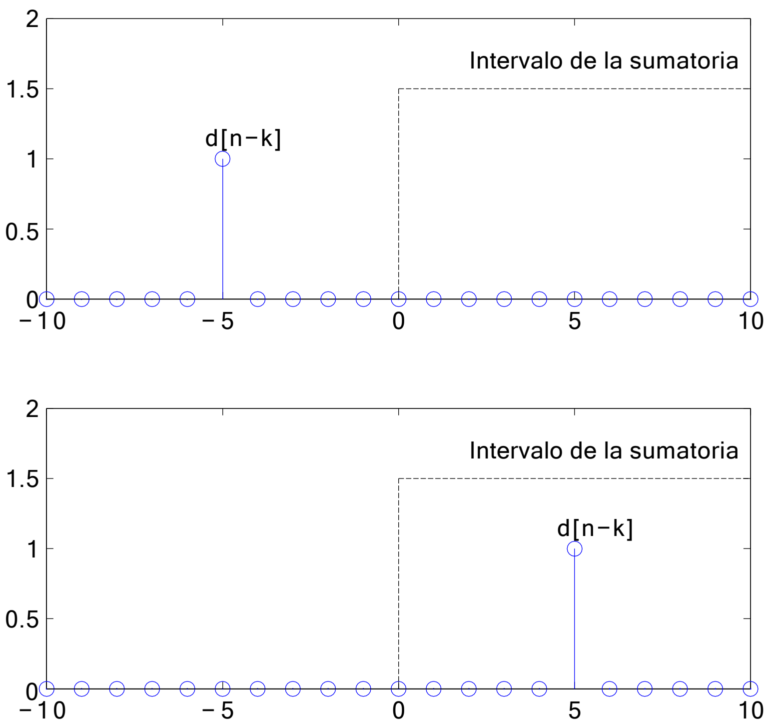


Figura: Relación de la ecuación: $n < 0$ y $n > 0$.

Escalón unitario

- En particular, ya que $\delta[n]$ es diferente de cero solo para $n = 0$

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

Escalón unitario

- En particular, ya que $\delta[n]$ es diferente de cero solo para $n = 0$

$$x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n]$$

- Si consideramos un impulso unitario $\delta[n - n_0]$ en $n = n_0$

$$x[n]\,\delta[n - n_0] = x[n_0]\,\delta[n - n_0]$$

Las funciones continuas escalón unitario e impulso unitario

La función escalón unitario $u(t)$ continua se define de manera similar a la discreta

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

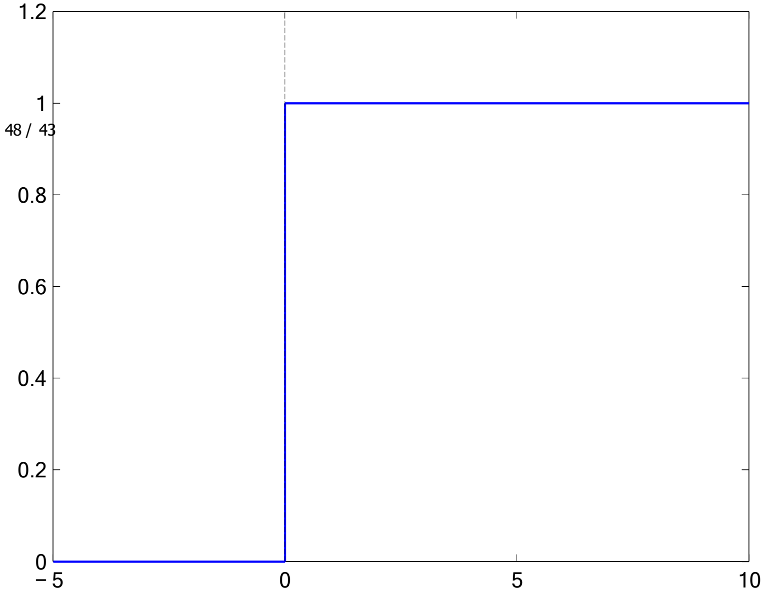


Figura: escalón unitario continuo

Las funciones continuas escalón unitario e impulso unitario

- La función impulso unitario $\delta(t)$ continua está relacionada con el escalón unitario. El escalón unitario continuo es la integral continua del impulso unitario

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

Las funciones continuas escalón unitario e impulso unitario

- La función impulso unitario $\delta(t)$ continua está relacionada con el escalón unitario. El escalón unitario continuo es la integral continua del impulso unitario

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

- El impulso unitario continuo puede obtenerse de la primera derivada del escalón unitario continuo:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Las funciones continuas escalón unitario e impulso unitario

- Ya que $u(t)$ es discontinua en $t = 0$, formalmente no es diferenciable. De manera formal, $u(t)$ es el limite $u_\Delta(t)$ conforme $\Delta \to 0$

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

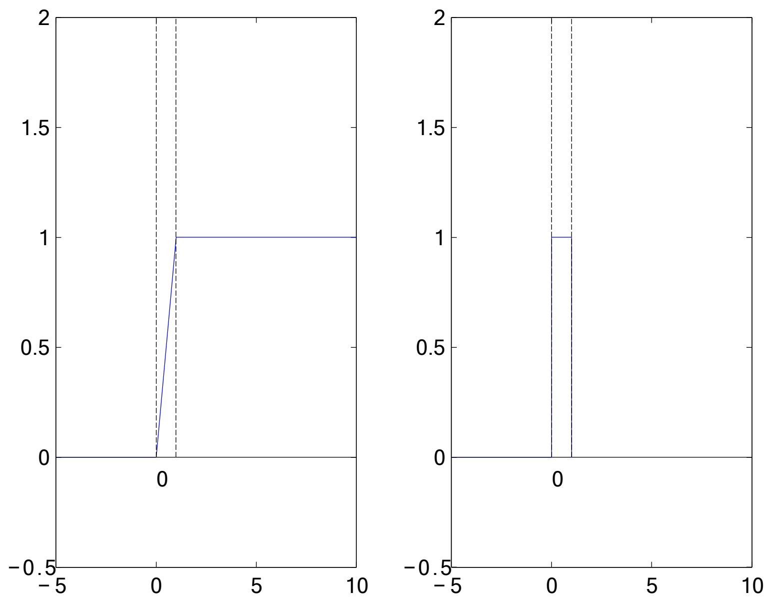


Figura: Aproximación continua al escalón unitario y derivada de $u_\Delta(t)$

Impulso unitario

- Un pulso corto $\delta_{\Delta}(t)$ de duración Δ y con un área unitaria para cualquier valor de Δ. Se forma un limite

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_{\Delta}(t)$$

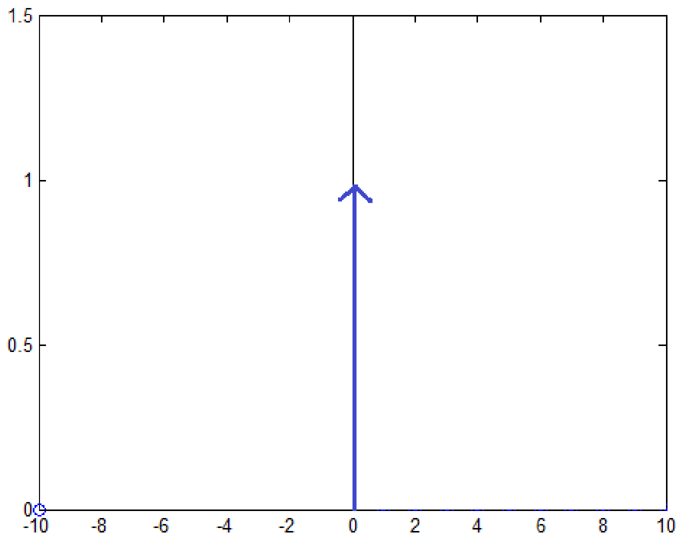


Figura: Impulso unitario continuo

Impulso unitario

- De manera, más general, un impulso escalado $k\delta(t)$ tendrá un área k, y entonces

53 / 43

$$\int_{-\infty}^{t} K\delta(\tau)\,d\tau = ku(t)$$

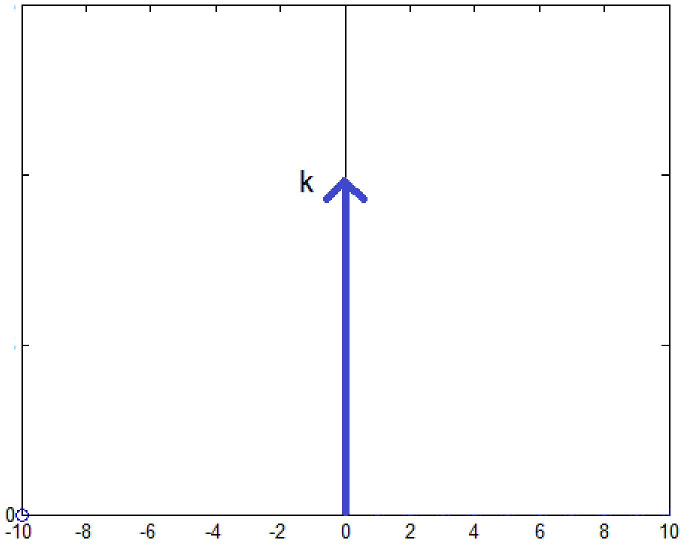


Figura: Impulso unitario continuo

Impulso unitario

- $$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = u(t)$$
- Cambiando la variable de integración de τ a $\sigma = t - \tau$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \int_{\infty}^{0} \delta(t - \sigma)\,(-\delta\sigma)$$

- En forma equivalente
  $u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \sigma)\,\delta\sigma$

Impulso unitario y escalón unitario continuo

- Para Δ suficientemente pequeña de manera que $x(t)$ sea aproximadamente constante sobre este intervalo

$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

Impulso unitario y escalón unitario continuo

- Para Δ suficientemente pequeña de manera que $x(t)$ sea aproximadamente constante sobre este intervalo

$$x(t)\delta_{\Delta}(t) \approx x(0)\delta_{\Delta}(t)$$

- Ya que $\delta(t)$ es el límite a medida que $\Delta \rightarrow 0$ de $\delta_{\Delta}(t)$, tendremos que

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Impulso unitario y escalón unitario continuo

- Para Δ suficientemente pequeña de manera que $x(t)$ sea aproximadamente constante sobre este intervalo

$$x(t)\delta_{\Delta}(t) \approx x(0)\delta_{\Delta}(t)$$

- Ya que $\delta(t)$ es el límite a medida que $\Delta \rightarrow 0$ de $\delta_{\Delta}(t)$, tendremos que

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

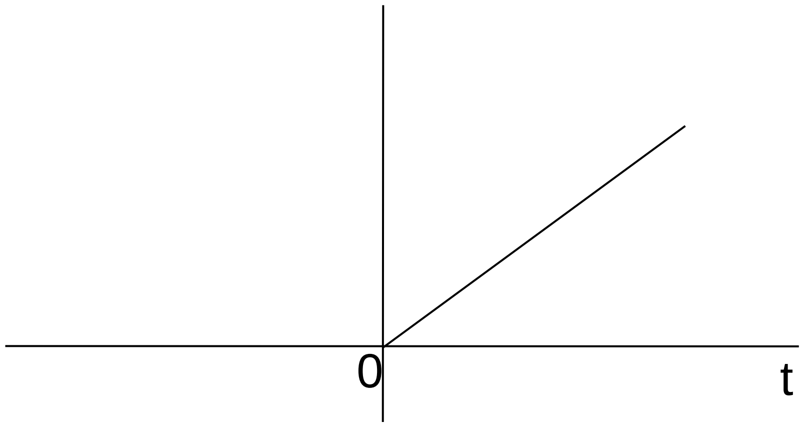
- Un impulso concentrado en un punto arbitrario, digamos t_0,

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

Señales singulares: rampa.

- Se define como:

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Ejercicio: Graficar

$$r(t) - r(t-1)$$

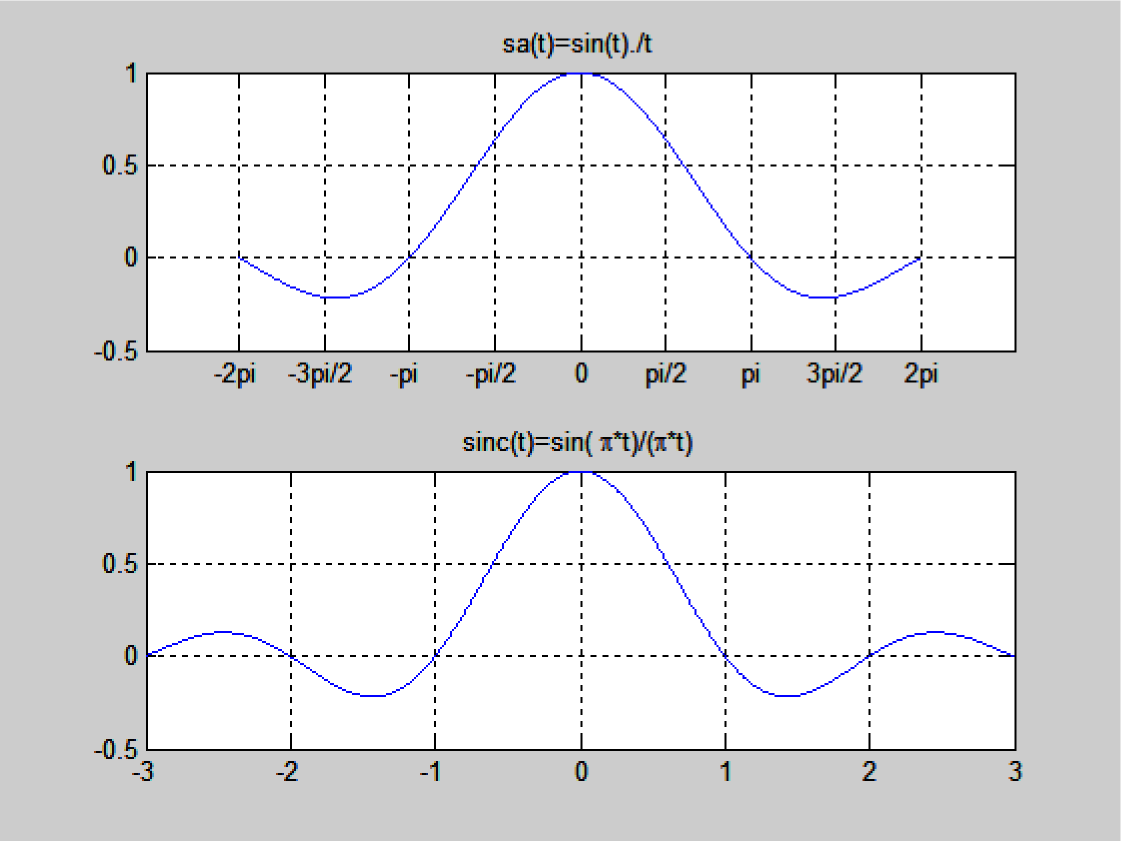
$$r(t) - r(t-1) - u(t-1)$$

Señales singulares: Sa “función de muestreo” y Sinc

- Se define como:

$$Sa(t) = \frac{sen(t)}{t}$$

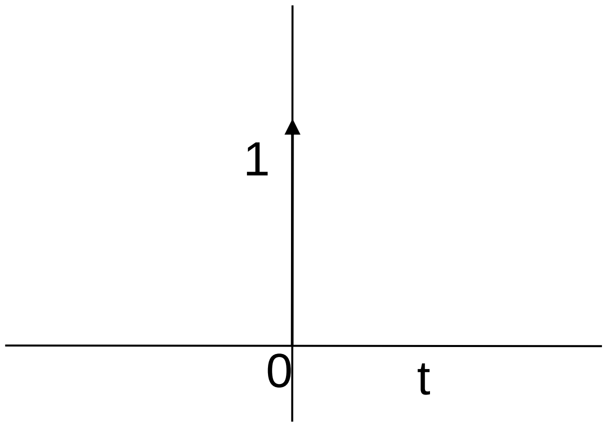
$$sinc(t) = \frac{sen(\pi t)}{\pi t}$$



Señales singulares: Delta de Dirac

- Se define como:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t)dt = x(0), t_1 < 0 < t_2$$



$$1. \delta(0) \to \infty$$

$$2. \delta(t) = 0, t \neq 0$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$4. \delta(t) = \delta(-t)$$

Señales periódicas continuas y frecuencia angular continua

- Cualquier señal que cumpla:

$$x(t) = x(t + nT), n = 1,2,3,\ldots$$

- Con T>0, se considera periódica de periodo fundamental T
- NOTA: T puede ser real

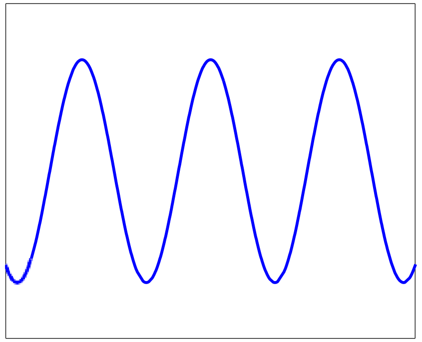


Figura: Señal periódica

Ilustración de señales periódicas

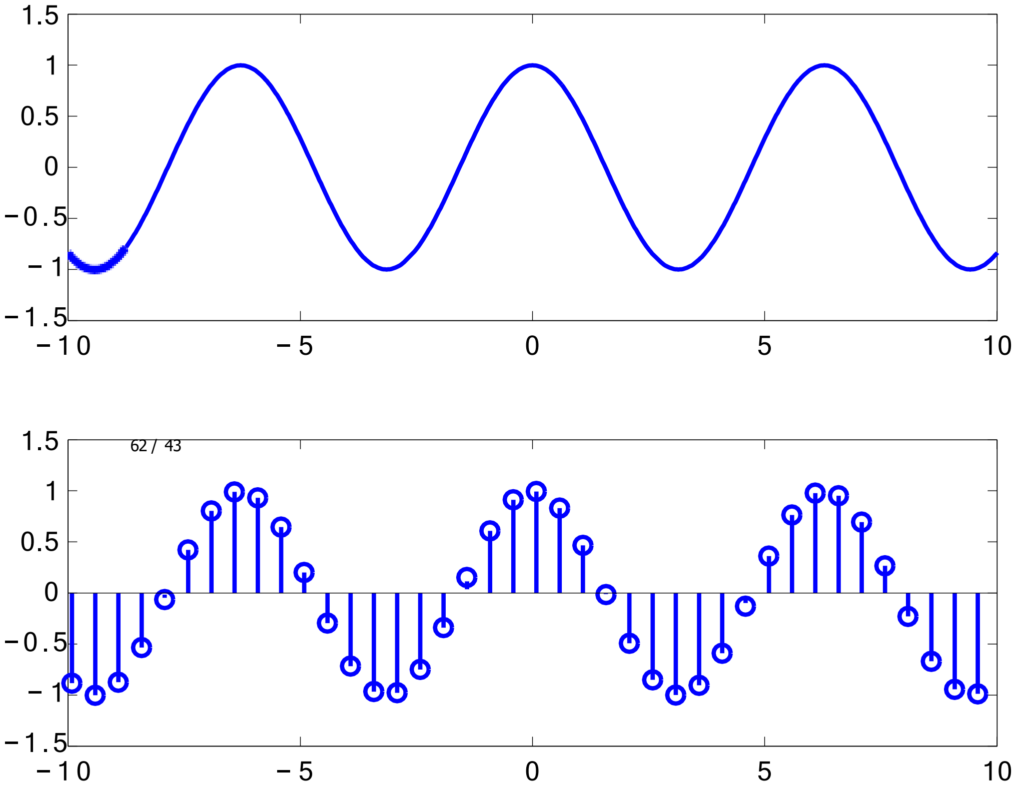


Figura: Señal periódica sinusoidal

Ilustración de señales periódicas

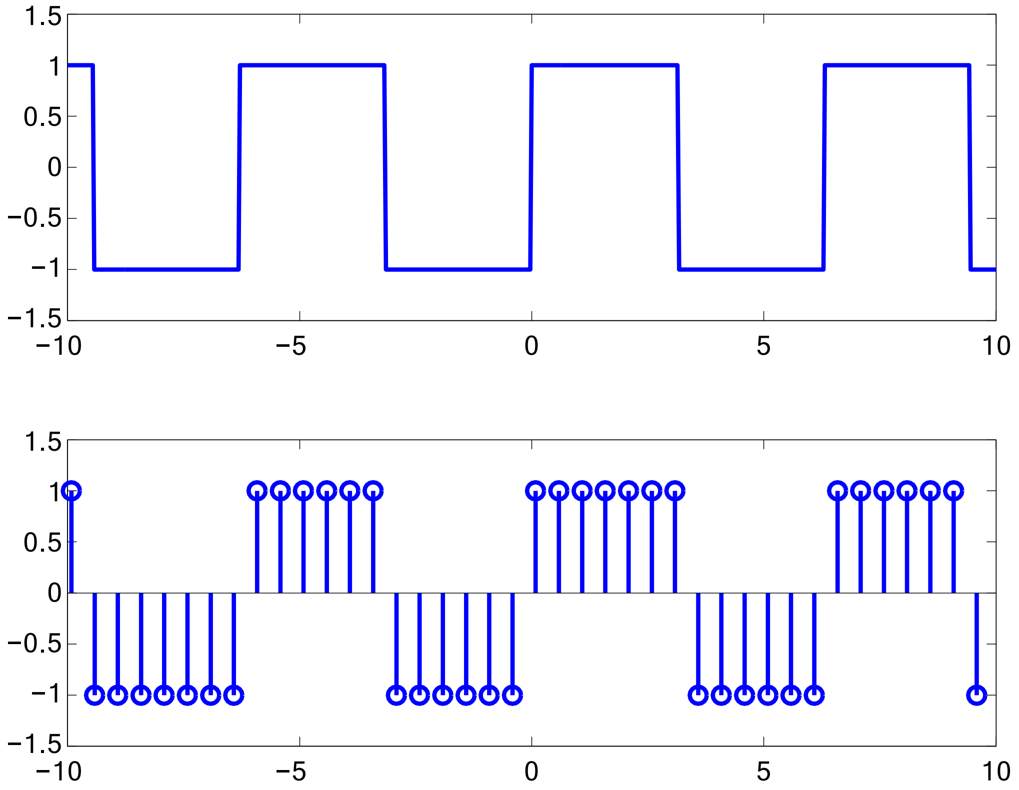


Figura: Señal periódica cuadrada

Ilustración de señales periódicas

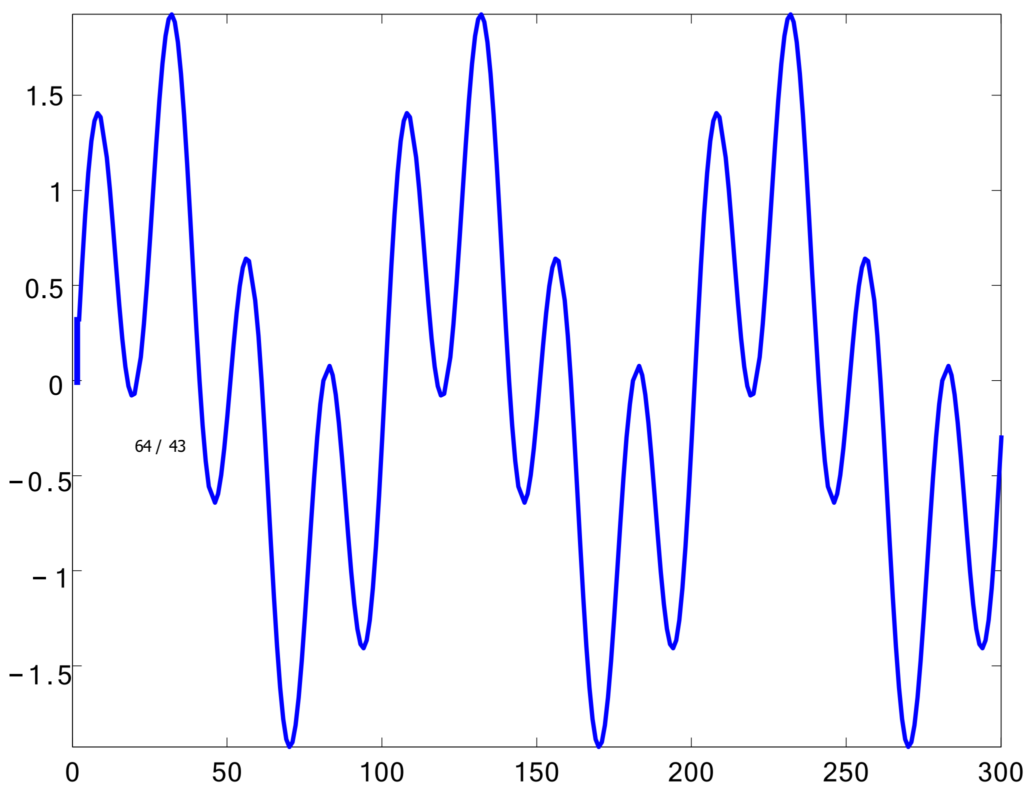


Figura: Otra señal periódica

Señales periódicas continuas y frecuencia angular continua

- Ejemplo

$$x(t) = Asen(\omega_0 t + \theta)$$

$$A = amplitud$$

$$\omega_0 = frecuencia\ angular\ en\ \frac{rad}{seg}$$

$$\theta = angulo\ de\ fase$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, T = \frac{1}{f_0}, \omega_0 = 2\pi f_0$$

Suma de Señales periódicas continuas

- La suma de dos señales periódicas puede o no ser periódica
- Consideremos la suma dos señales x(t) y y(t) periódicas de periodo T_1 y T_2.

$$z(t) = ax(t) + by(t)$$

Suma de Señales periódicas continuas

- tenemos

$$z(t) = ax(t) + by(t)$$

$$x(t) = x(t + kT_1), k \in \mathbf{Z}^+$$

$$y(t) = y(t + lT_2), l \in \mathbf{Z}^+$$

$$z(t) = ax(t + kT_1) + by(t + lT_2)$$

$$ax(t) + by(t) = ax(t + kT_1) + by(t + lT_2)$$

$$z(t) = z(t + nT)$$

Suma de Señales periódicas continuas

$$ax(t) + by(t) = ax(t + kT_1) + by(t + lT_2) \qquad z(t) = z(t + nT)$$

- Se puede decir:

$$ax(t+T) + by(t+T) = ax(t+kT_1) + by(t+lT_2)$$

$$T = kT_1 = lT_2$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{l}{k} \in \mathbf{Q}$$

$$\text{ejercicio : determinar que el periodo resultante} = 15$$

$$x_1(t) = sen\left(\frac{2\pi}{5}t\right) + sen\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$$

- *Señales y sistemas continuos y discretos, Soliman. S y Srinath. M. 2ª edición*
- *Señales y sistemas ,Oppenheim, Alan*