Análisis de Señales

Espacios Vectoriales

Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar

Definición (corta)

Un ***espacio vectorial*** o lineal es una colección de objetos, denominados vectores, que pueden ser **sumados** y **escalados**.

Grupos

Un grupo $(G,*)$ es un conjunto G junto a una operación binaria $*$ que cumplen

i. Clausura: Si $a,b \in G \;\; \Rightarrow \;\; a*b \in G$

"G es cerrado bajo $*$".

ii. Asociatividad: $\forall a,b,c \in G \;\; \Rightarrow \;\; a*(b*c)=(a*b)*c$

iii. Identidad: $\forall a \in G \;\; (a*e=e*a=a)$ "e : identidad"

iv. Inversa: $\forall a \in G \;\; \exists a' \in G \;\; / \;\; a*a'=a'*a=e$

Si además $\forall a,b \in G \;\; (a*b=b*a)$ entonces el grupo $(G,*)$ es ***abeliano*** (conmutativo).

Ejemplo.

$(\mathbf{Z},+)$ y $(\mathbf{R},+)$ son grupos abelianos con identidad 0.

$(\mathbf{R}^*,\times)$ es un grupo abeliano con identidad 1.

$(\mathbf{Z},\times)$ no es un grupo pues existen elementos sin inversa.

$(\mathbf{R},\times)$ no es un grupo pues el elemento 0 no tiene inversa.
El par $(\mathbf{R},\times)$ se conoce como *monoide*.

Definición. $(G,*)$ es un **monoide** si cumple las propiedades de clausura, asociatividad e identidad.

Anillos

Un anillo $(R,+,\times)$ es un conjunto R junto a la adición $+$ y a la multiplicación $\times$, que cumplen

i. $(R,+)$ es un grupo abeliano con identidad 0.

ii. $(R,\times)$ es un monoide con identidad 1.

iii. La multiplicación distribuye la adición

$$\forall a,b,c\in R \quad a\times(b+c)=a\times b+a\times c\,.$$

Campos

Un campo $(F,+,\times)$ es un conjunto F junto a la adición $+$ y a la multiplicación $\times$, que cumplen

i. $(F,+)$ es un grupo abeliano con identidad 0.

ii. $(F^{*},\times)$ es un grupo abeliano con identidad 1.

iii. La multiplicación distribuye a la adición

$$\forall a,b,c \in R \quad a\times(b+c)=a\times b+a\times c\,.$$

Los elementos de un campo se conocen como ***escalares***.

Ejemplo. $(\mathrm{R},+,\times)$ y $(\mathrm{C},+,\times)$ son anillos y campos.

Los **reales** y **complejos** son escalares!

Definición de espacio vectorial

Un conjunto V es un espacio vectorial sobre un campo $(F,+,\times)$ si

$i.$ $(V,+)$ es un grupo abeliano con identidad 0.

$ii.$ $\forall a \in F$ y $\forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in V$: $\quad a\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = a\times\mathbf{v} + a\times\mathbf{w}$

$iii.$ $\forall a,b \in F$ y $\forall \mathbf{v} \in V$: $\quad (a+b)\times\mathbf{v} = (a\times\mathbf{v}) + (b\times\mathbf{v})$

$iv.$ $\forall a,b \in F$ y $\forall \mathbf{v} \in V$: $\quad (a\times b)\times\mathbf{v} = a\times(b\times\mathbf{v})$

$v.$ $\forall \mathbf{v} \in V$: $\quad 1\times\mathbf{v} = \mathbf{v}$ "1 es la identidad multiplicativa de F"

$vi.$ $\forall a \in F$ y $\forall \mathbf{v} \in V$: $\quad a\mathbf{v} \in V$

Los elementos de un espacio vectorial se conocen como **vectores**.

Ejemplo. Pruebe que $V = \mathbf{R}^n$ con $F = \mathbf{R}$ es un espacio vectorial. Verifique que los elementos pueden ser escalados y sumados.

Si $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ entonces $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ con $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}^n$.

Escalados. Si $a \in \mathbf{R}$ y $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ entonces $a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, ..., ax_n) \in \mathbf{R}^n$.

Sumados. Si $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ entonces $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n$.

Espacio vectorial L_1

$$L_1 = \left\{ f : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty \right\}$$

Está formado por todas las señales integrables en magnitud.

Ejemplo. L_1 es un espacio vectorial con campo los complejos.

Si $x(t) \in L_1$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt < \infty$.

Escalados. Si $a \in \mathbf{C}$ y $x(t) \in L_1$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} |ax(t)| dt = |a| \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$.

Sumados. Si $x(t), y(t) \in L_1$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) + y(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt + \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt < \infty .$$

Norma de un espacio vectorial

Una norma $\|\cdot\|$ es una "medida", que se le asigna a cada elemento (vector) de un espacio vectorial V, que debe cumplir

i. $\forall\, \mathbf{v} \in V$: $\quad \|\mathbf{v}\| \geq 0$ y $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$

ii. $\forall\, a \in F$ y $\forall\, \mathbf{v} \in V$: $\quad \|a\mathbf{v}\| = |a|\|\mathbf{v}\|$

iii. $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$: $\quad \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

Por tal motivo, una norma es una función del espacio vectorial a los números reales mayores iguales a cero, es decir,

$$\|\cdot\| \;:\; V \rightarrow [0, \infty)$$

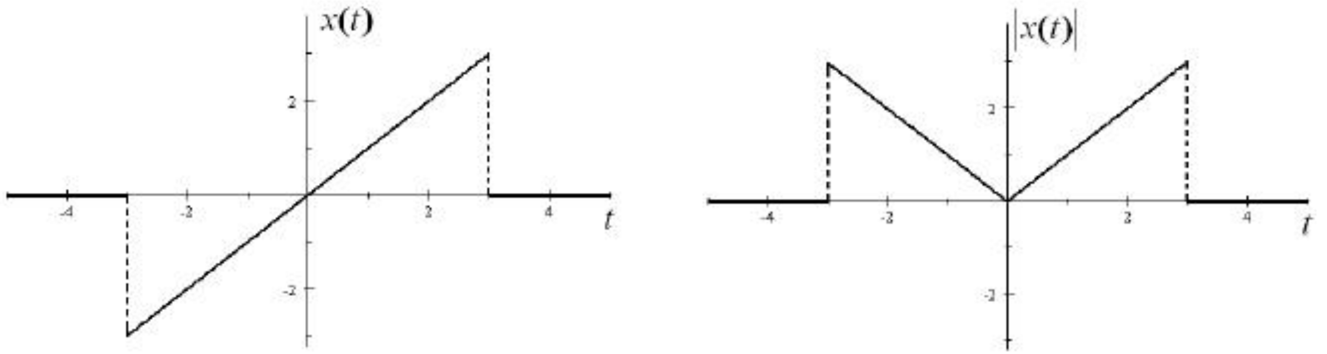
Un ***espacio normado*** es un espacio vectorial dotado con norma.

Ejemplo. R^n y L_1 son espacios vectoriales normados.

- Si $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ entonces $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$
- Si $x(t) \in L_1$ entonces $\|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt$ (**Norma L_1**)

Ejemplo. Encuentre la norma L_1 de las siguientes señales y determine si pertenecen a L_1.

- $x(t) = t\left[u(t+3) - u(t-3)\right]$

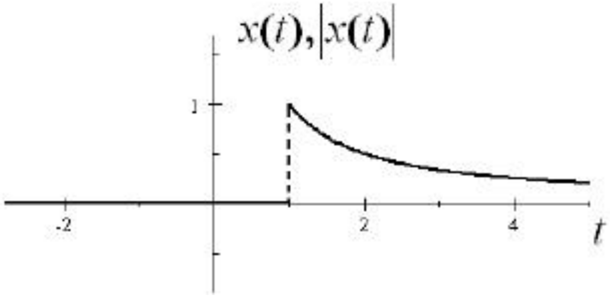


$$\left\| x(t) \right\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right| \, dt = \int_{-3}^{3} \left| t \right| \, dt$$

$$\left\| x(t) \right\|_1 = \int_{-3}^{0} -t \;\, dt + \int_{0}^{3} t \;\, dt = 9$$

Esta señal pertenece a L_1, pues su norma L_1 es finita.

- $x(t) = \frac{1}{t} u(t-1)$

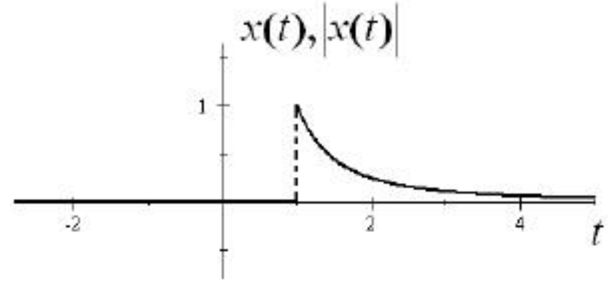


$$\|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \; dt = \int_{1}^{\infty} |1/t| \; dt$$

$$\|x(t)\|_1 = \int_{1}^{\infty} 1/t \;\; dt = \mathbf{ln}(\infty) - \mathbf{ln}(1) = \infty$$

La señal no pertenece a L_1.

- $x(t) = \frac{1}{t^2} u(t-1)$



$$\|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \; dt = \int_{1}^{\infty} |1/t^2| \; dt$$

$$\|x(t)\|_1 = \int_{1}^{\infty} 1/t^2 \;\; dt = -1/t\Big|_1^{\infty} = 1$$

La señal pertenece a L_1.

Métrica

Una métrica ρ es una "medida de distancia", entre dos vectores de un espacio vectorial, que debe cumplir

i. $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V :$ $\quad \rho(\mathbf{v},\mathbf{w}) \geq 0$ y $\rho(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$

ii. $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V :$ $\quad \rho(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \rho(\mathbf{w},\mathbf{v})$

iii. $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V :$ $\quad \rho(\mathbf{v},\mathbf{z}) \leq \rho(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \rho(\mathbf{w},\mathbf{z})$

Una métrica es una función que toma dos elementos del espacio vectorial y asigna un número real mayor igual a cero, es decir,

$$\rho \,:\, V \times V \to [0,\infty)$$

Un *espacio métrico* es un espacio vectorial dotado con métrica.

Observación. *Todo espacio vectorial normado es también un espacio métrico, con métrica definida como* $\rho(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$.

Ejemplo. $\mathbf{R}^n$ y L_1 son espacios vectoriales métricos.

- Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ entonces

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

- Si $x(t), y(t) \in L_1$ entonces $\rho\left[x(t), y(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t) - y(t)\right| dt$

Espacio vectorial L_2

$$L_2 = \left\{ f : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 < \infty \right\}$$

Está formado por todas las señales de energía. L_2 es un espacio normado, con norma definida como

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \; dt} = \sqrt{E}$$

Ejemplo. Encuentre la norma L_2 de la $x(t) = \frac{1}{t} u(t-1)$ y determine si pertenecen a L_2.

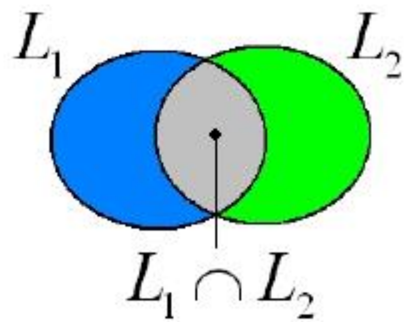
$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \; dt} = \sqrt{\int_{1}^{\infty} |1/t|^2 \; dt}$$

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_{1}^{\infty} 1/t^2 \; dt} = \sqrt{-1/t\Big|_1^{\infty}} = 1$$

La señal pertenece a L_2 pues tiene norma L_2 finita.

Observación. *Una señal en L_1 no necesariamente pertenece a L_2, y viceversa.*

Ejemplo. Si $x(t)=\frac{1}{t}u(t-1)$ entonces $x(t)\notin L_1$ pero $x(t)\in L_2$.



Producto interno

El producto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle$ se define para dos elementos de un espacio vectorial V con campo F y debe cumplir $\forall\, \mathbf{v},\mathbf{w} \in F$ y $\forall\, a \in F$ con

$$i.\quad \langle \mathbf{v},\mathbf{v} \rangle > 0 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{v},\mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$$

$$ii.\quad \langle \mathbf{v},\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w},\mathbf{v} \rangle^*$$

$$iii.\quad \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle$$

$$iv.\quad \langle a\mathbf{v},\mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{v},\mathbf{w} \rangle \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{v},a\mathbf{w} \rangle = a^*\langle \mathbf{v},\mathbf{w} \rangle$$

El producto interno es una función que toma dos elementos del espacio vectorial y asigna un elemento del campo, es decir,

$$\rho \;:\; V \times V \rightarrow F$$

Un ***espacio vectorial euclídeo*** es un espacio vectorial dotado con producto interno.

Ejemplo. $\mathbf{R}^n$ y L_2 son espacios vectoriales euclídeos.

- Si $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ entonces $\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$
- Si $x(t), y(t) \in L_2$ entonces $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$

El producto interno es una medida de *similitud* entre dos vectores!

Observación. *Todo espacio vectorial euclídeo es también un espacio normado, con norma definida como* $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x},\mathbf{x} \rangle}$.

Ejemplo. L_2 es un espacio vectorial normado, con norma definida como

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

Ejercicio. Demuestre que L_2 es un espacio vectorial.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz $\|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$