Análisis de Señales

Señales en tiempo continuo

Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar

Temas:

- Introducción.
- Definición y clasificación de señales.
- Energía y potencia de una señal.
- Transformaciones de la variable independiente.
- Señales singulares: impulso, escalón y pulso.
- Señales periódicas continuas y frecuencia angular
- Suma de señales Periódicas.

Introducción

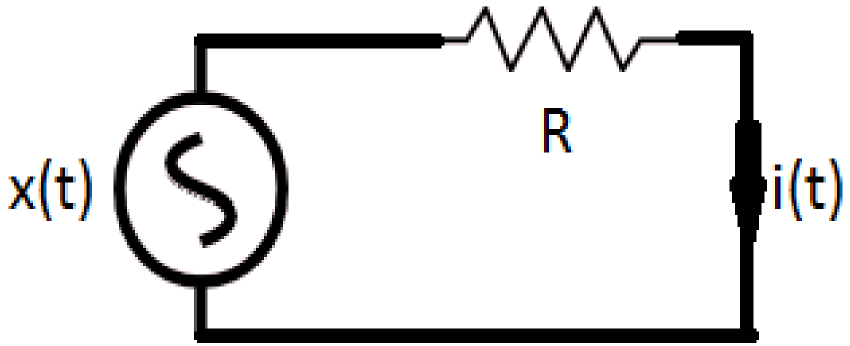
- Las señales son magnitudes físicas o variables detectables mediante las que se pueden transmitir mensajes o información
- EJ: la voz, Imágenes TV, Temperatura, datos sísmicos
- En este curso nos centraremos en el estudio de señales representadas matemáticamente por funciones de una sola variable

Definición y clasificación de señal

- Una señal causal tiene como soporte un subconjunto del intervalo $[0,\infty)$ mientras una señal anti-causal tiene por soporte un subconjunto del intervalo $(-\infty,0]$.
- Las señales cuyo soporte contiene tanto tiempos positivos como negativos se denominan señales bilaterales.

Energía y potencia de una señal.

- La potencia instantánea sobre una resistencia esta dada por:



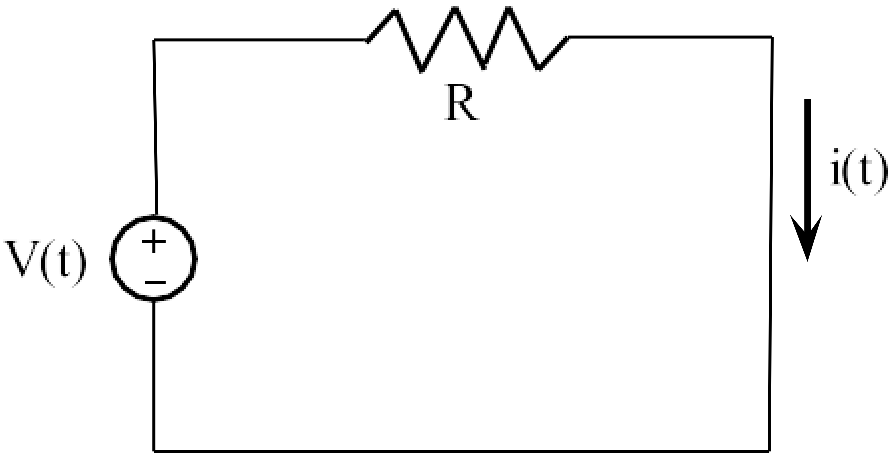
$$i(t) = \frac{x(t)}{R}$$

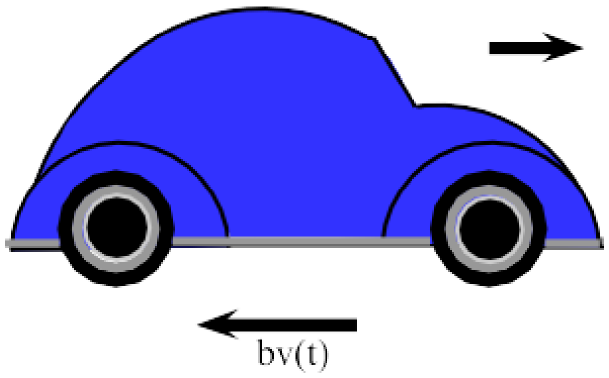
$$p(t) = x(t) * i(t)$$

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{x^2(t)}{R}$$

$$normalizando: p(t) = x^2(t)$$

Señales de energía y de potencia





Circuito eléctrico

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v(t)^2$$

Fricción en un auto

$$p(t) = bv(t)^2$$

Señales de energía y de potencia

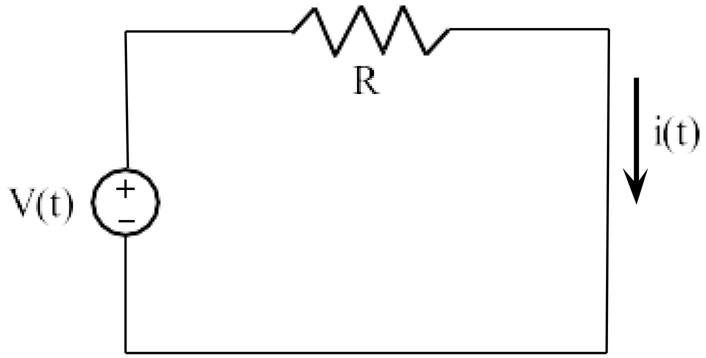


Figura: circuito eléctrico

- La potencia instantánea en el circuito es:
  $$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v(t)^2$$

Señales de energía y de potencia

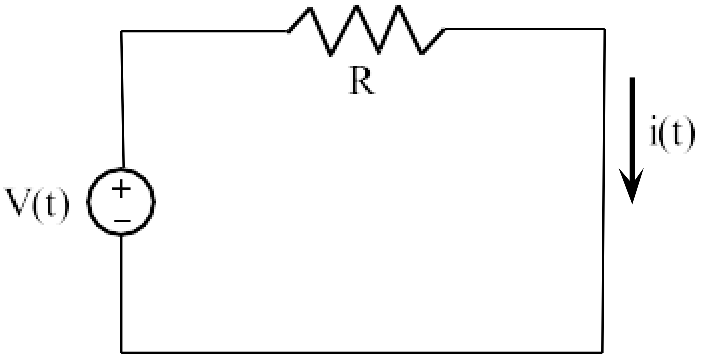


Figura: circuito eléctrico

- La potencia instantánea en el circuito es:

  $$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v(t)^2$$

- La *energía* total gastada en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ es:

  $$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}v(t)^2\,dt$$

Señales de energía y de potencia

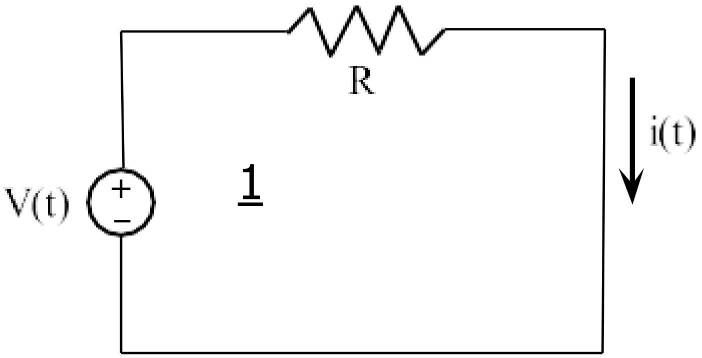


Figura: circuito eléctrico

- La potencia instantánea en el circuito es:
  $p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v(t)^2$
- La *energía* total gastada en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ es:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}v(t)^2\,dt$$

- Potencia *promedio*:

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}v(t)^2\,dt$$

Energía y potencia de una señal.

Señal en tiempo continuo

- La energía de la señal *x(t)* durante un intervalo de tiempo [t1,t2] se define como:

$$E[x(t)]_{t_1 \to t_2} = \int |x(t)|^2 dt$$

Señal en tiempo discreto.

- La energía entre (N1,N2) de una señal discreta esta dada por:

$$E[x[n]]_{N_1 \to N_2} = \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2$$

Energía y potencia de una señal.

- La energía total de la señal en el intervalo (-∞,∞) está dada por:

$$E = \lim_{L \to \infty} \int_{-L}^{L} |x(t)|^2 \, dt$$

- Cuando este limite existe y es finito se dice que la señal es de ENERGÍA.
- Las señales periódicas tienen energía infinita.

Energía y potencia de una señal.

Señal en tiempo continuo

- La potencia de la señal *x(t)* durante un intervalo de tiempo [t1,t2] se define como:

$$P[x(t)]_{t_1 \to t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int |x(t)|^2 dt$$

Señal en tiempo discreto.

- La potencia entre (N1,N2) de una señal discreta esta dada por:

$$P[x[n]]_{N_1 \to N_2} = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \cdot \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]\ |^2$$

Energía y potencia de una señal.

- La potencia media de la señal en el intervalo (-∞,∞) está dada por:

$$P = \lim_{L\to\infty}\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left|x(t)\right|^2 dt\right] \qquad p = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N}\left|x[n]\right|^2\right]$$

- Cuando este limite existe y es finito se dice que la señal es de POTENCIA.
- Las señales periódicas tienen potencia media finita.

Energía y potencia de una señal.

- Las señales de energía finita tiene potencia media cero.
- Las señales de potencia media finita tienen energía infinita.

Transformaciones de la variable independiente.

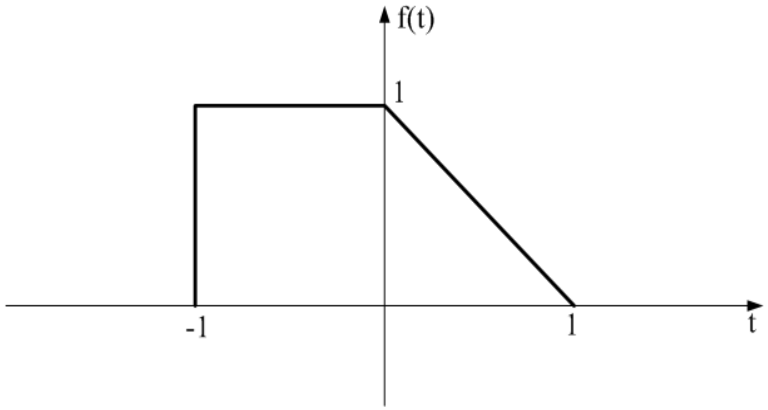
- Son un tipo de operaciones que se realizan a menudo sobre las señales.
- Es importante conocer el significado de estas, y de las combinaciones de estas.

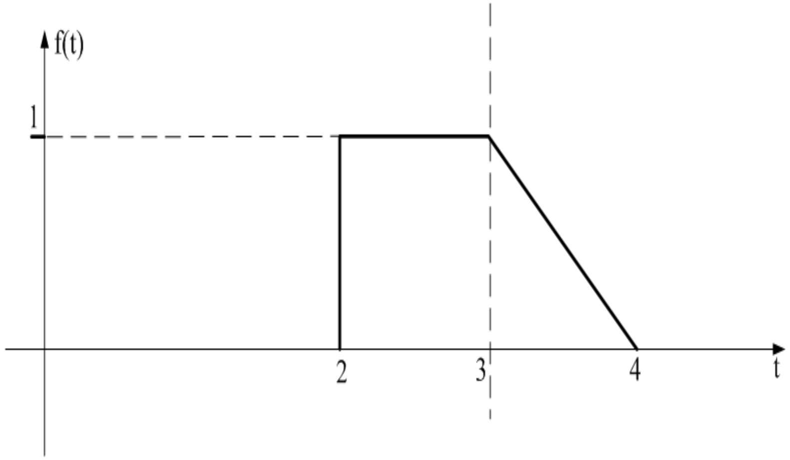
Transformaciones de la variable independiente.

- La señal $f(t-t_0)$ es una versión de la señal $f(t)$ desplazada en el tiempo

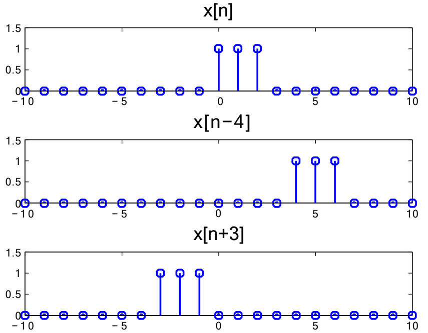
$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ -t+1, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

$$f(t) \to f(t-3)$$





Transformaciones de la variable independiente



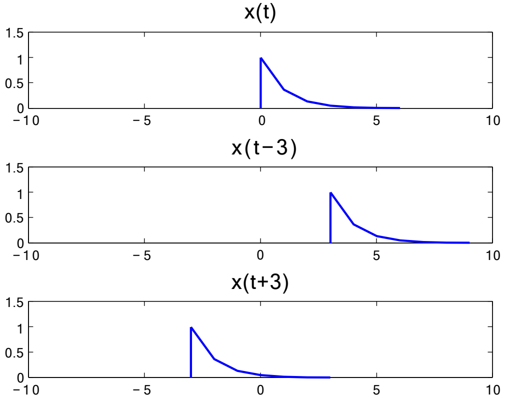
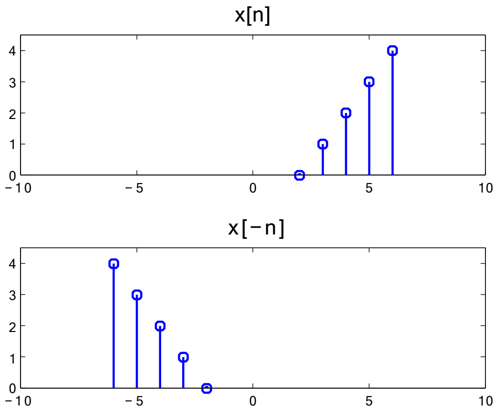


Figura: Corrimiento



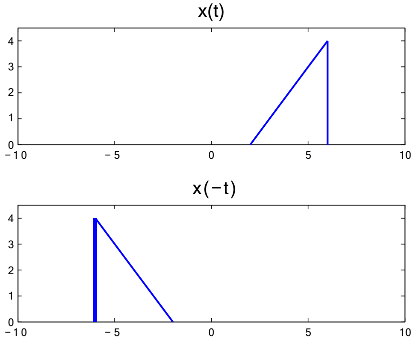


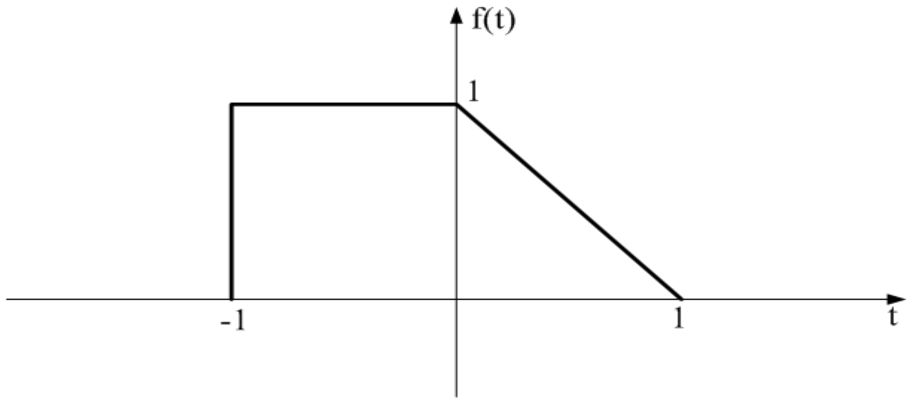
Figura: Inversión

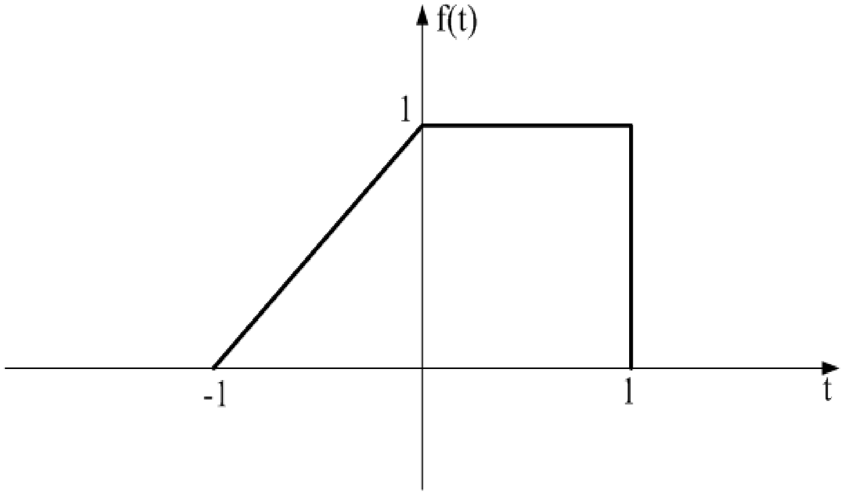
Transformaciones de la variable independiente.

- La señal $f(-t)$ es una versión de la señal $f(t)$ invertida en el tiempo

$$f(t)=\begin{cases}1, & -1<t<0\\ -t+1, & 0<t<1\end{cases}$$

$$f(t)\rightarrow f(-t)$$

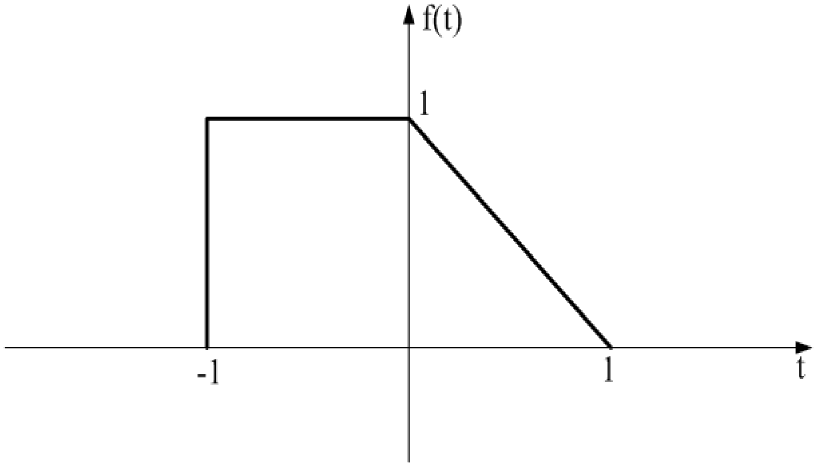




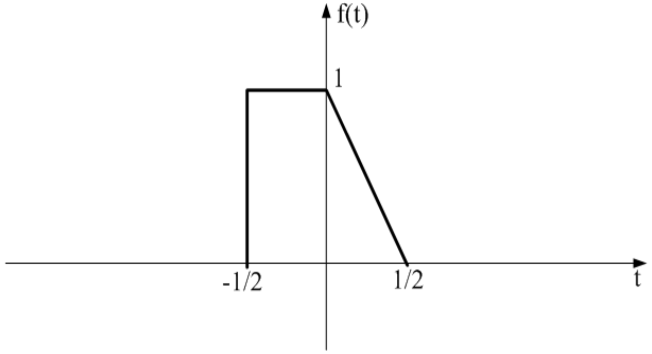
Transformaciones de la variable independiente.

- La señal $f(at)$ es una versión de la señal $f(t)$ contraída en el tiempo

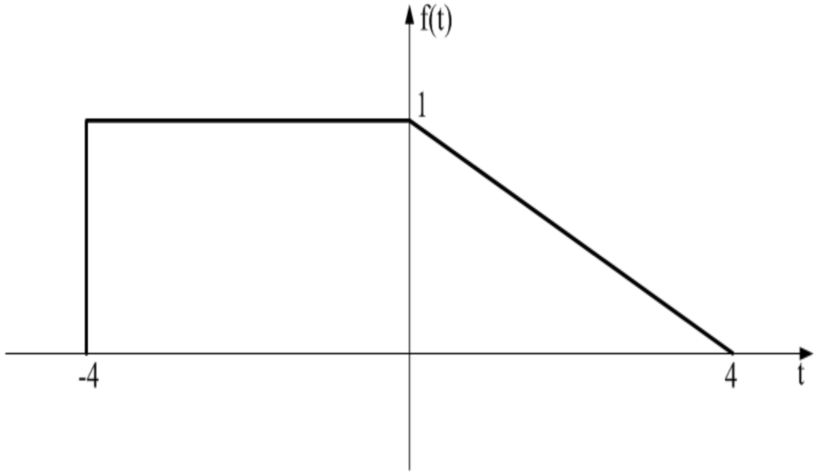
$$f(t)=\begin{cases}1, & -1<t<0\\ -t+1, & 0<t<1\end{cases}$$



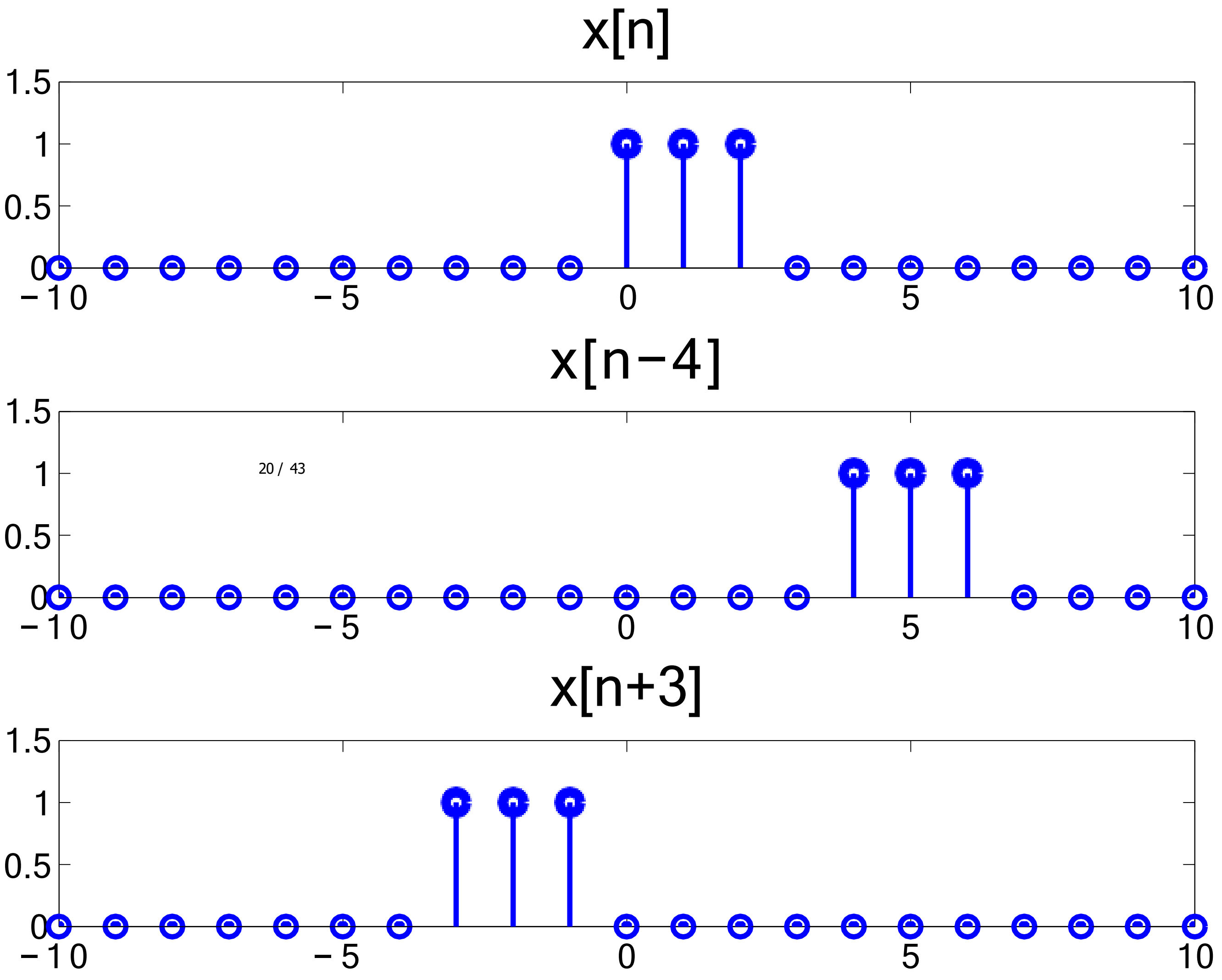
$$f(t)\rightarrow f(2t)$$



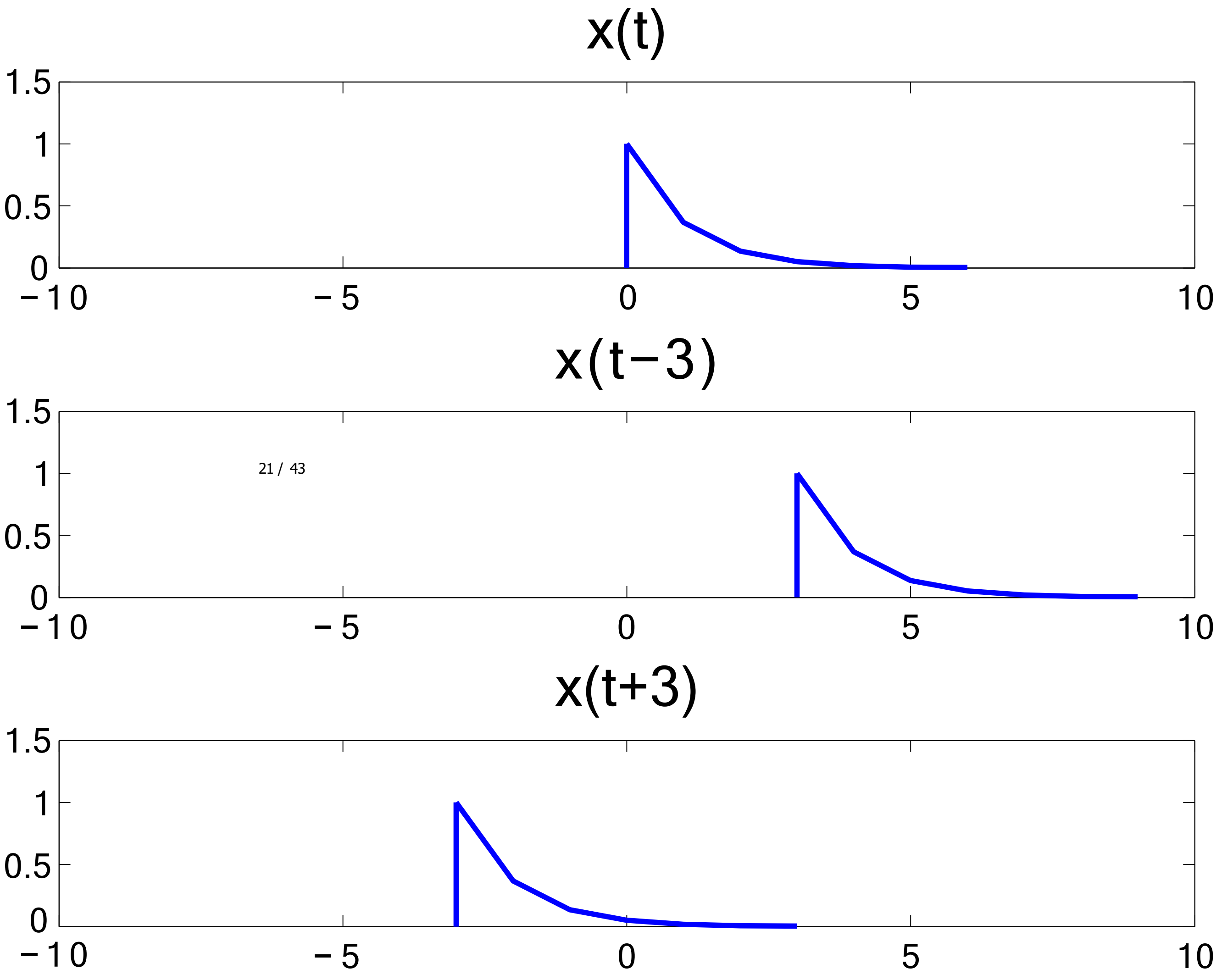
$$f(t)\rightarrow f\left(\frac{t}{4}\right)$$



Corrimiento en n

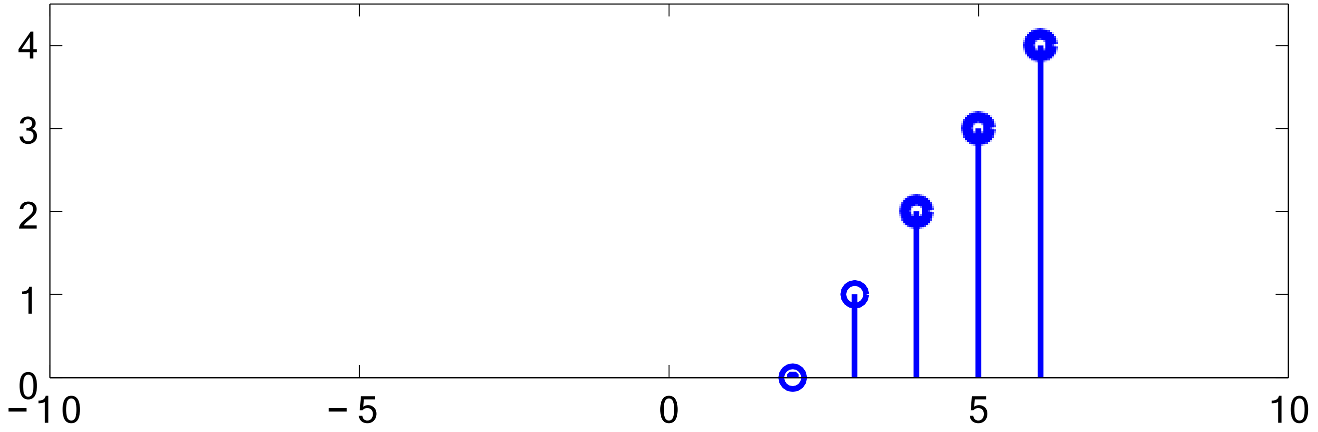


Corrimiento en t

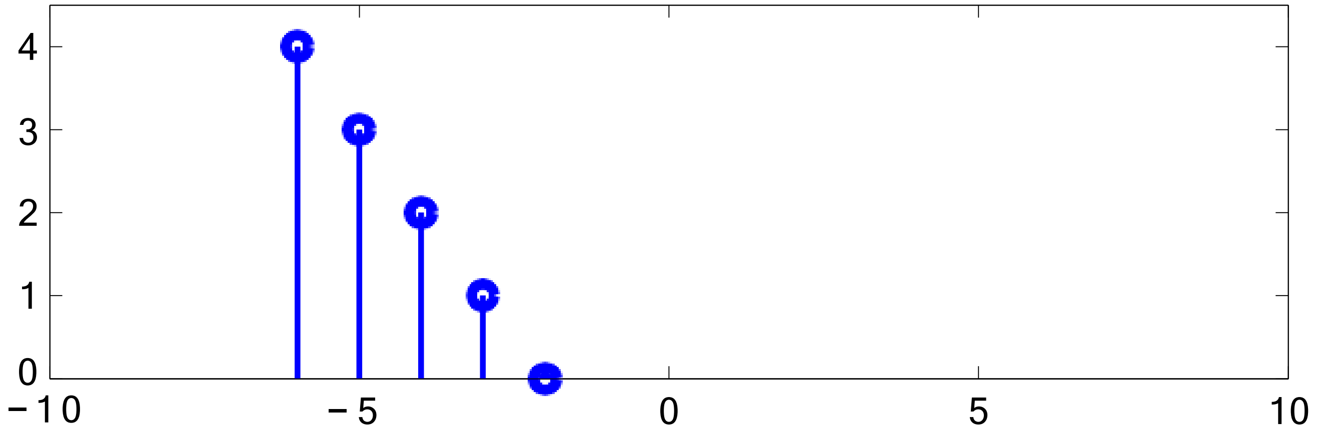


Inversión en n

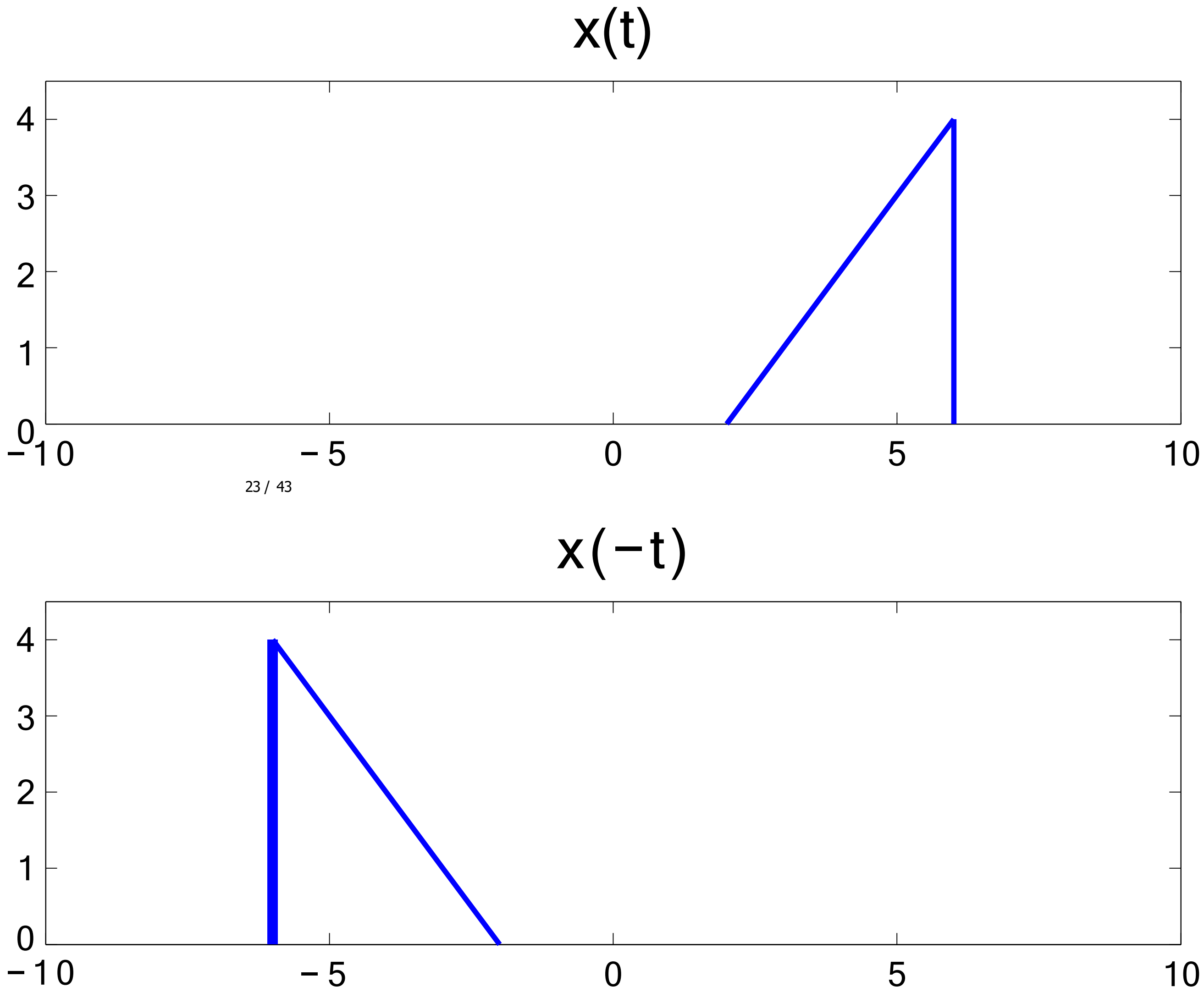
x[n]



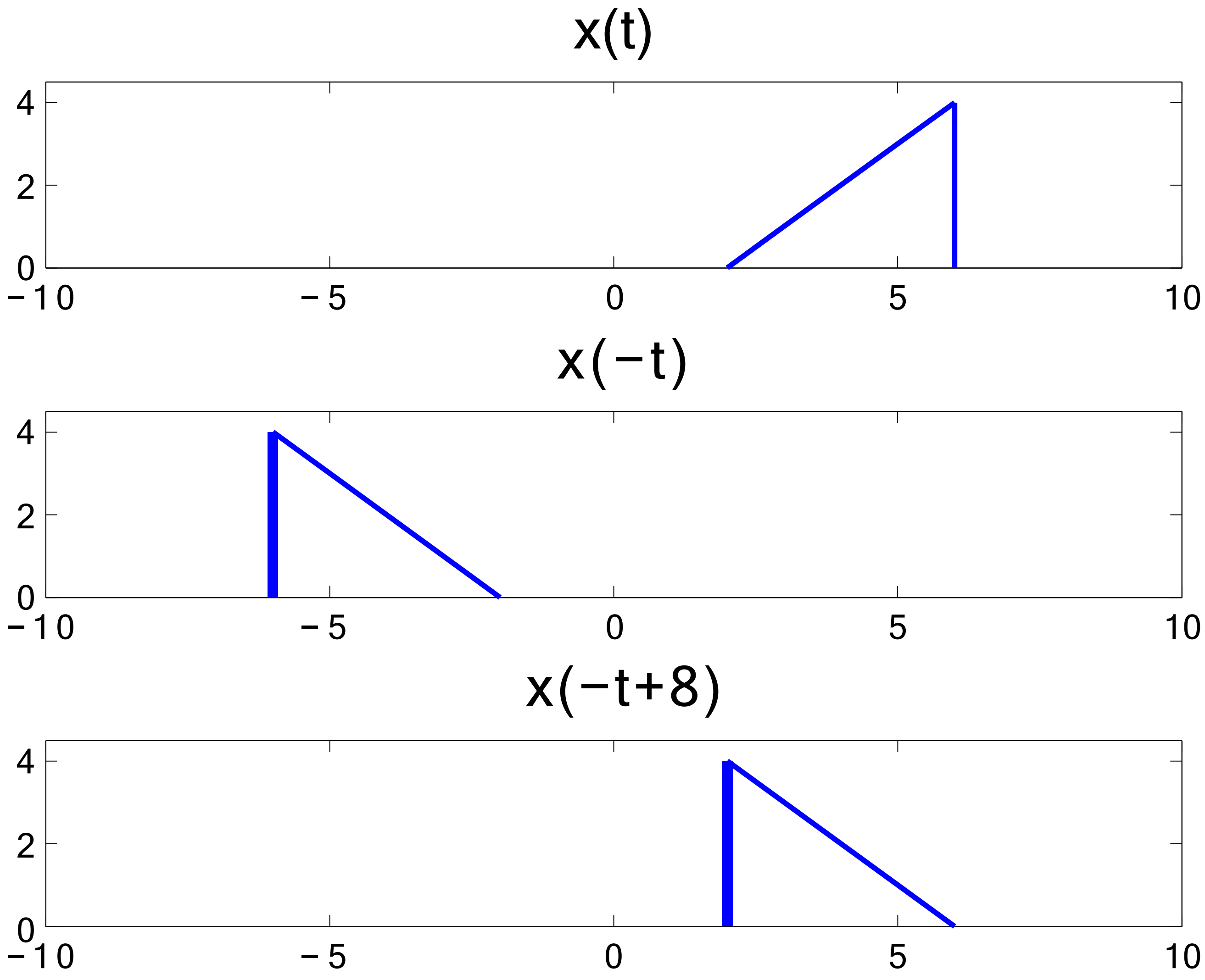
x[−n]



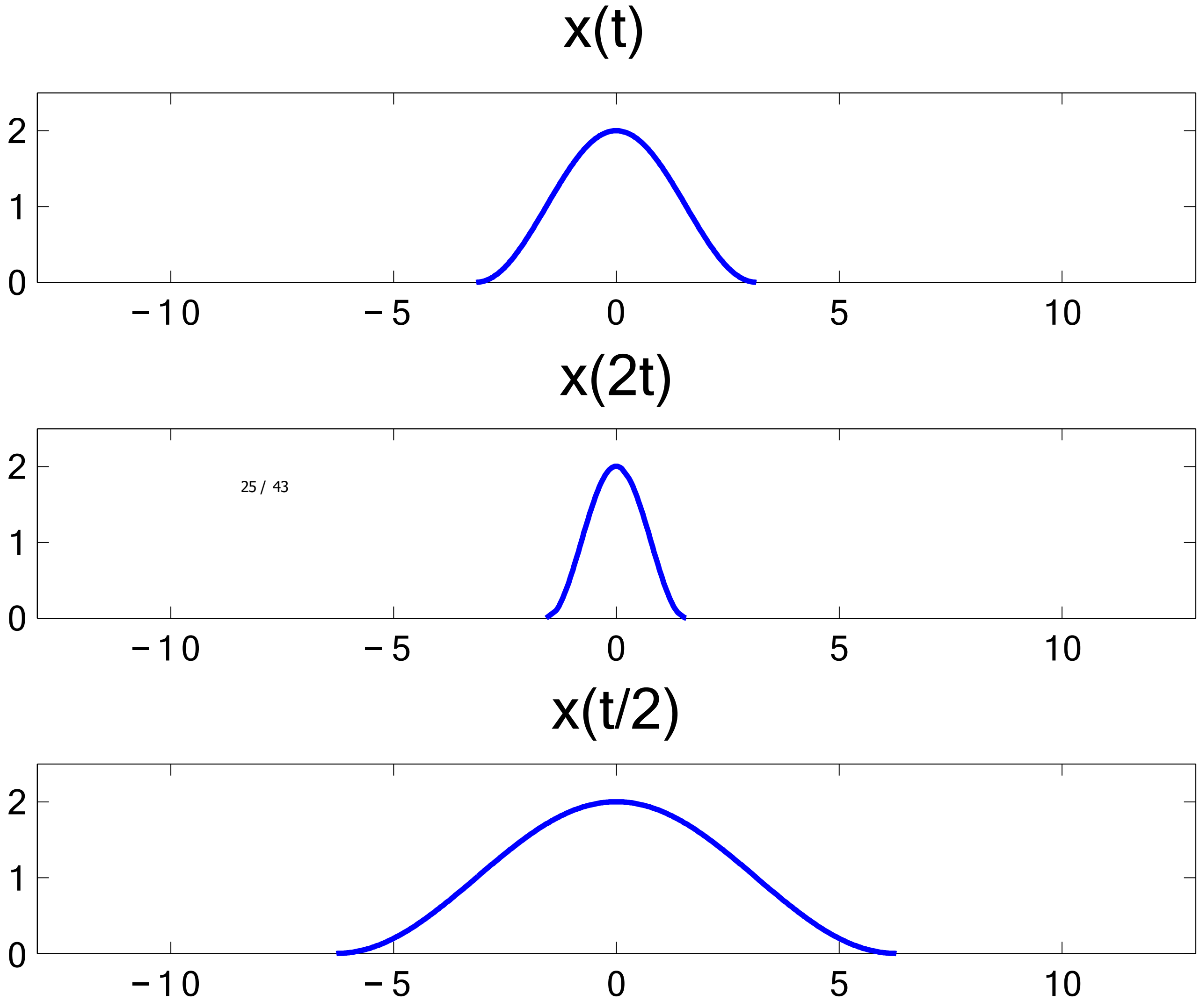
Inversión en t



Combinación: inversión y corrimiento en el tiempo



Escalamiento en el tiempo



Las secuencias discretas impulso unitario y escalón unitario

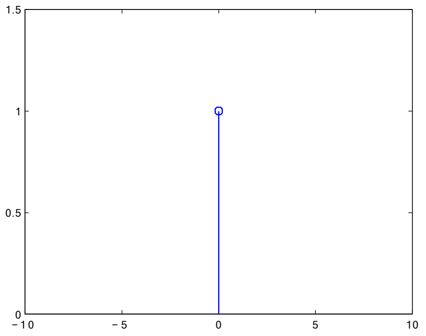


Figura: Impulso unitario discreto

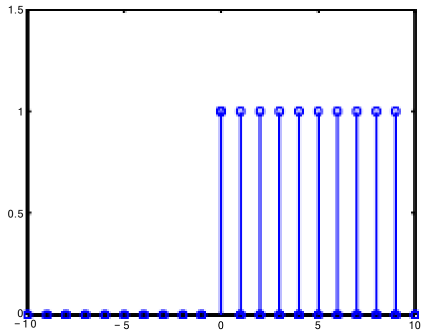


Figura: Escalón en tiempo discreto

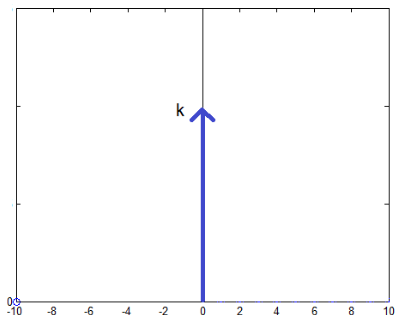


Figura: impulso continuo

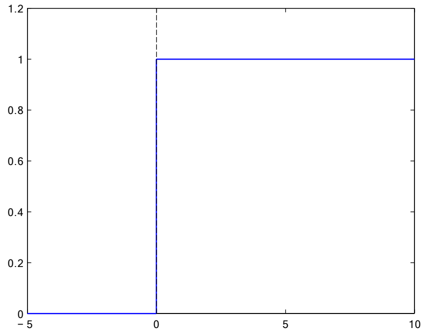
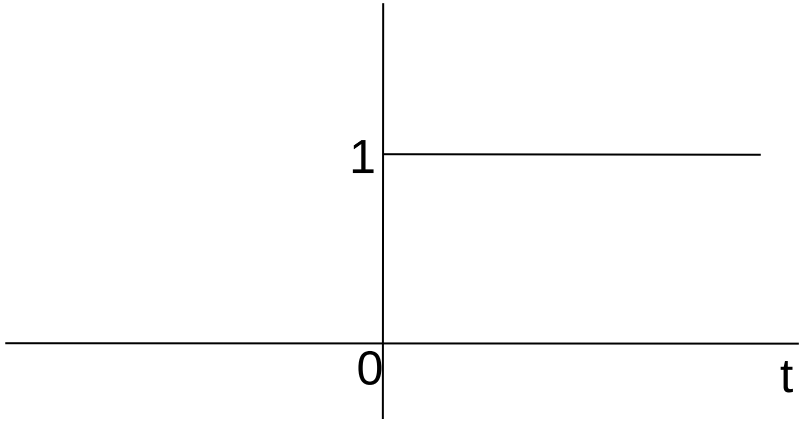


Figura: Escalón continuo

Señales singulares: Escalón unitario.

- Se define como:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Ejercicio: Graficar

$$u(t) - u(t-1)$$

$$u(t+1) - u(t-1)$$

Impulso unitario

Una de las señales discretas más imples es el *impulso unitario (o muestra unitaria)*, la cual se define como

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

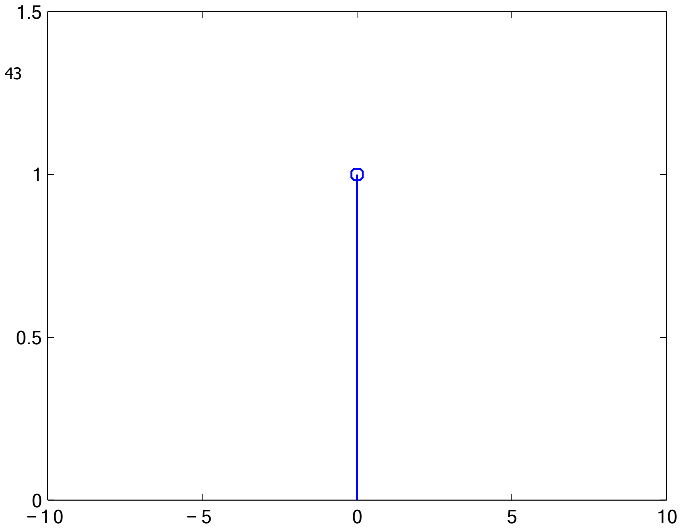


Figura: Impulso unitario discreto

Escalón unitario

Una señal discreta básica es el *escalón unitario* discreto, señalada como $u[n]$ y definida por

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1 & n > 0 \end{cases}$$

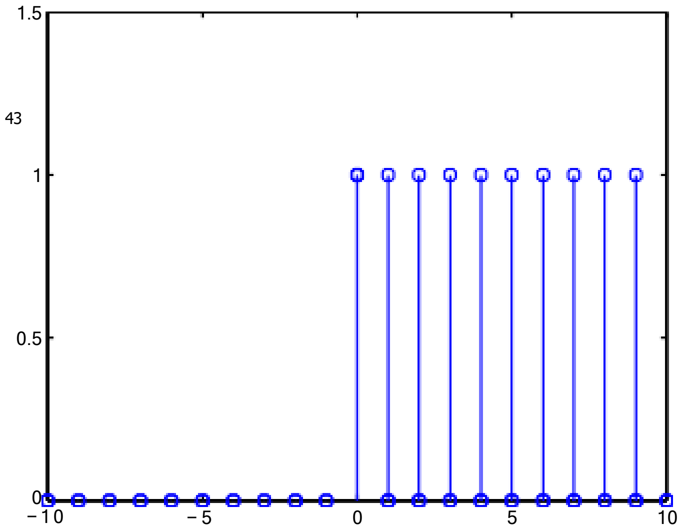


Figura: Escalón unitario discreto

Escalón unitario

- El impulso unitario discreto es la primera diferencia del escalón discreto

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

Escalón unitario

- El impulso unitario discreto es la primera diferencia del Escalón discreto

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

- Y a la inversa, el escalón unitario discreto es la sumatoria de la muestra unitaria

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$

Escalón unitario

- El impulso unitario discreto es la primera diferencia del escalón discreto

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

- Y a la inversa, el escalón unitario discreto es la sumatoria de la muestra unitaria

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$

- Cambiando la variable de la sumatoria de m a $k = n - m$, encontramos el escalón unitario en términos de la muestra unitaria

$$u[n] = \sum_{k=\infty}^{0} \delta[n-k]$$

Escalón unitario

- o de manera equivalente

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

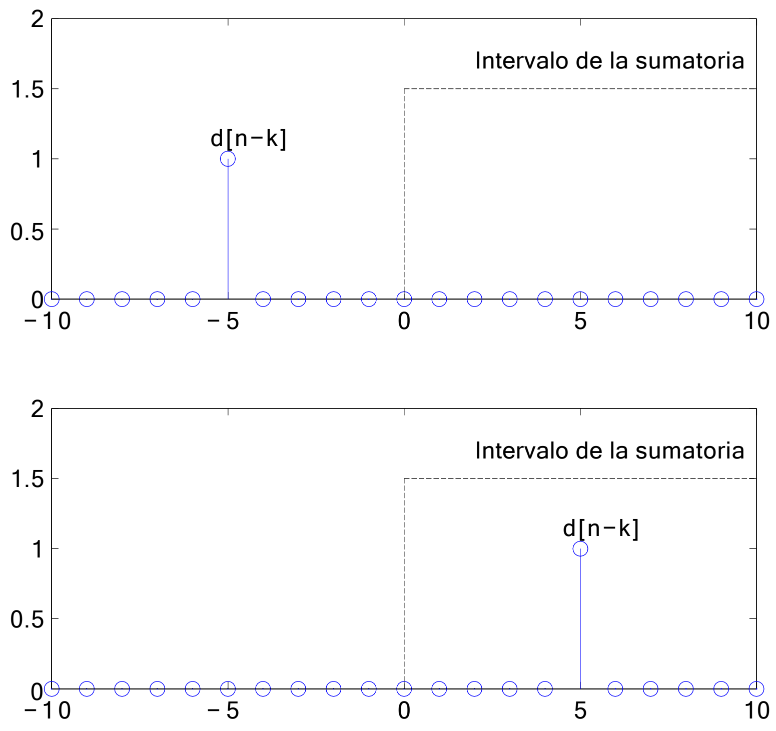


Figura: Relación de la ecuación: $n < 0$ y $n > 0$.

Escalón unitario

- En particular, ya que $\delta[n]$ es diferente de cero solo para $n = 0$

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

Escalón unitario

- En particular, ya que $\delta[n]$ es diferente de cero solo para $n = 0$

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

- Si consideramos un impulso unitario $\delta[n - n_0]$ en $n = n_0$

$$x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0]$$

Las funciones continuas escalón unitario e impulso unitario

La función escalón unitario $u(t)$ continua se define de manera similar a la discreta

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

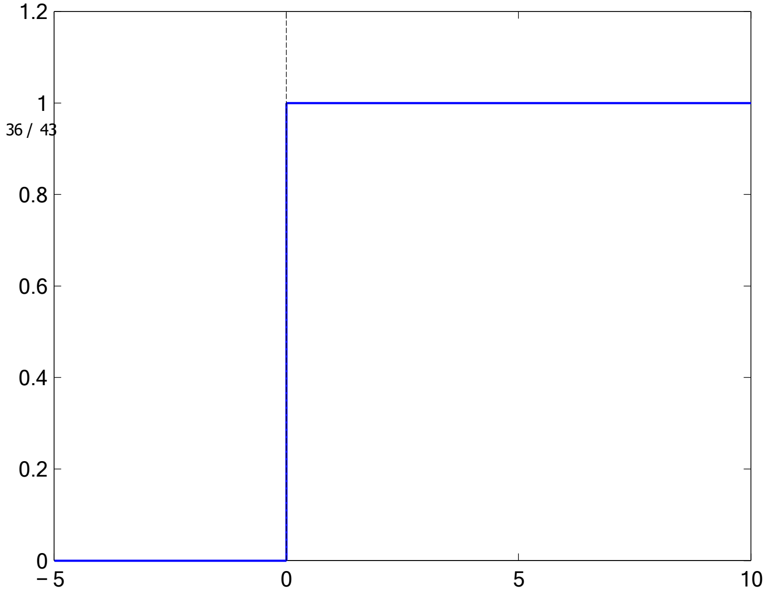


Figura: escalón unitario continuo

Las funciones continuas escalón unitario e impulso unitario

- La función impulso unitario $\delta(t)$ continua está relacionada con el escalón unitario. El escalón unitario continuo es la integral continua del impulso unitario

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

Las funciones continuas escalón unitario e impulso unitario

- La función impulso unitario $\delta(t)$ continua está relacionada con el escalón unitario. El escalón unitario continuo es la integral continua del impulso unitario

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

- El impulso unitario continuo puede obtenerse de la primera derivada del escalón unitario continuo:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Las funciones continuas escalón unitario e impulso unitario

- Ya que $u(t)$ es discontinua en $t = 0$, formalmente no es diferenciable. De manera formal, $u(t)$ es el limite $u_{\Delta}(t)$ conforme $\Delta \rightarrow 0$

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt}$$

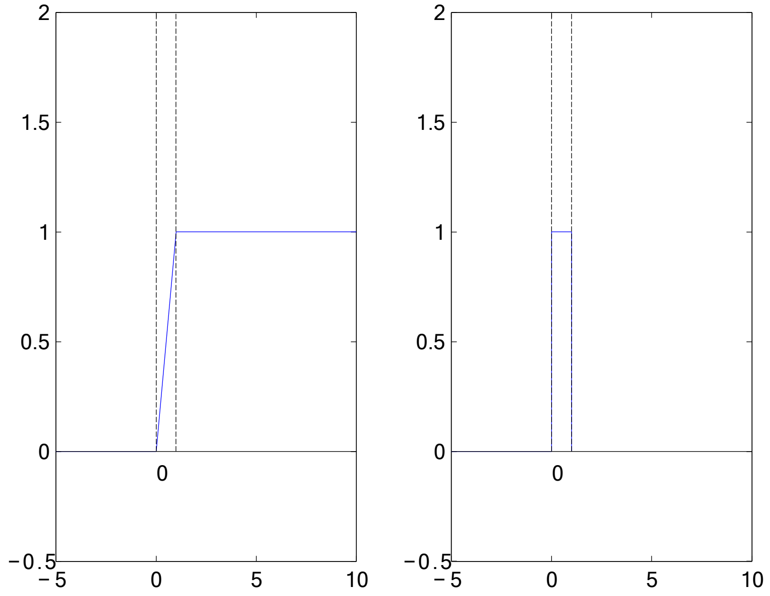


Figura: Aproximación continua al escalón unitario y derivada de $u_{\Delta}(t)$

Impulso unitario

- Un pulso corto $\delta_\Delta(t)$ de duración Δ y con un área unitaria para cualquier valor de Δ. Se forma un limite

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

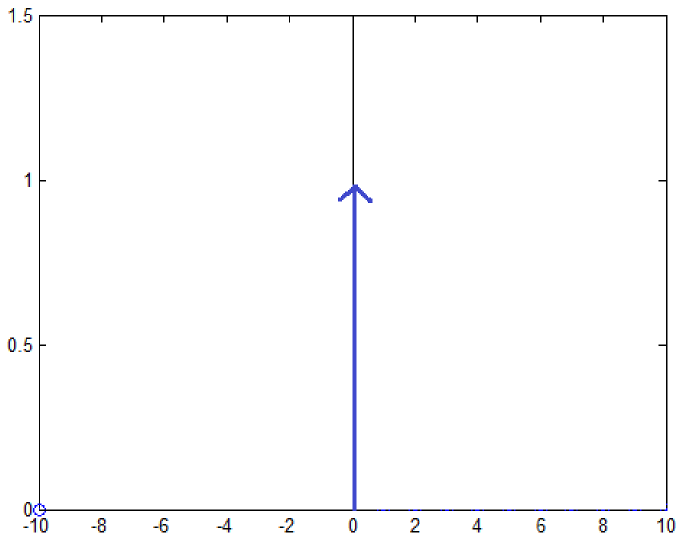


Figura: Impulso unitario continuo

Impulso unitario

- De manera, más general, un impulso escalado $k\delta(t)$ tendrá un área k, y entonces

41 / 43

$$\int_{-\infty}^{t} K\delta(\tau)\,d\tau = ku(t)$$

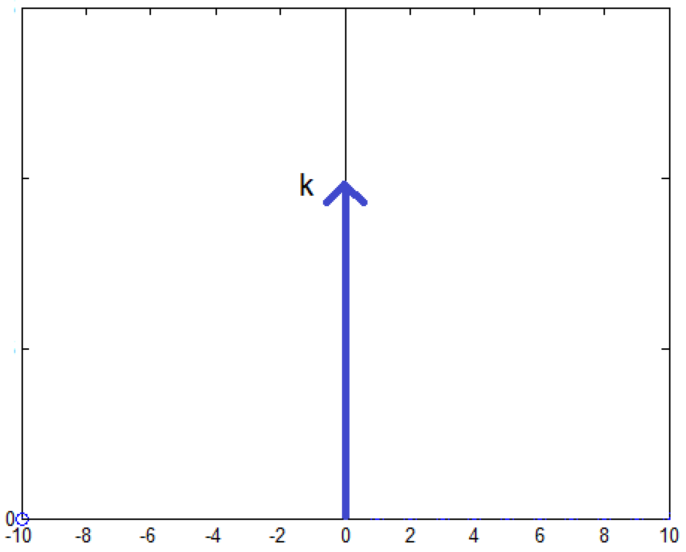


Figura: Impulso unitario continuo

Impulso unitario

- $$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = u(t)$$
- Cambiando la variable de integración de τ a $\sigma = t - \tau$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \int_{\infty}^{0} \delta(t - \sigma)\,(-\delta\sigma)$$

- En forma equivalente
  $u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \sigma)\, \delta\sigma$

Impulso unitario y escalón unitario continuo

- Para Δ suficientemente pequeña de manera que $x(t)$ sea aproximadamente constante sobre este intervalo

$$x(t)\delta_{\Delta}(t) \approx x(0)\delta_{\Delta}(t)$$

Impulso unitario y escalón unitario continuo

- Para Δ suficientemente pequeña de manera que $x(t)$ sea aproximadamente constante sobre este intervalo

$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

- Ya que $\delta(t)$ es el límite a medida que $\Delta \rightarrow 0$ de $\delta_\Delta(t)$, tendremos que

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Impulso unitario y escalón unitario continuo

- Para Δ suficientemente pequeña de manera que $x(t)$ sea aproximadamente constante sobre este intervalo

$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

- Ya que $\delta(t)$ es el límite a medida que $\Delta \rightarrow 0$ de $\delta_\Delta(t)$, tendremos que

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

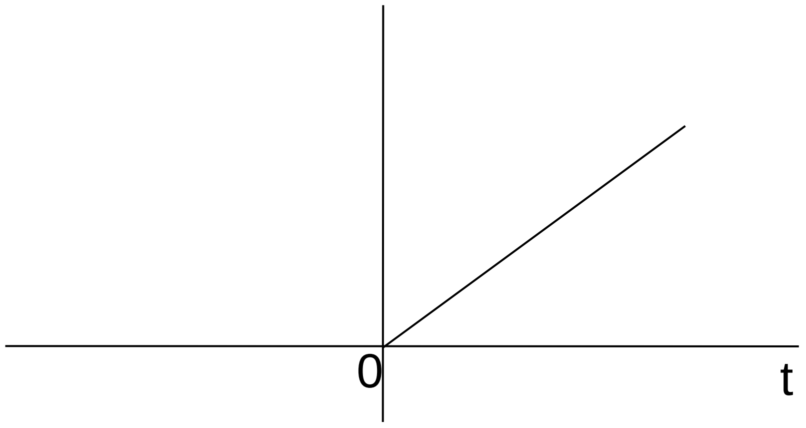
- Un impulso concentrado en un punto arbitrario, digamos t_0,

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

Señales singulares: rampa.

- Se define como:

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Ejercicio: Graficar

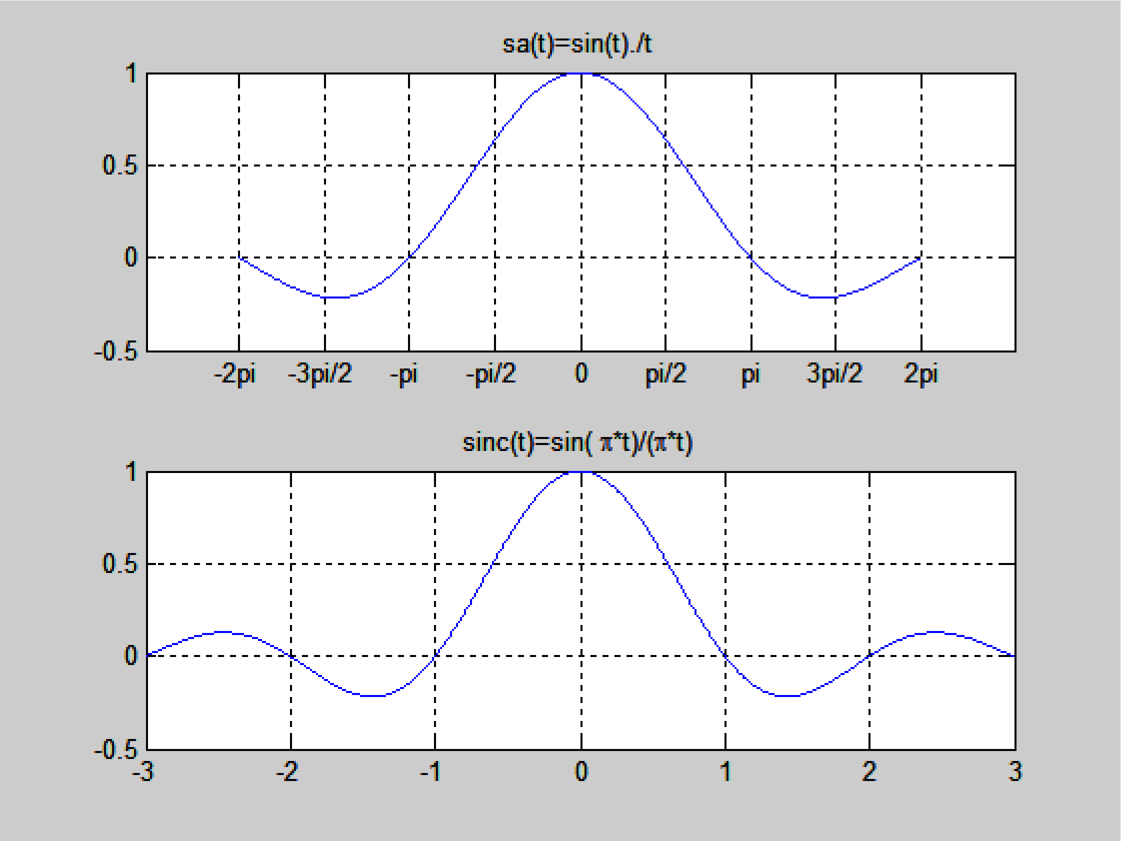
$$r(t) - r(t-1)$$

$$r(t) - r(t-1) - u(t-1)$$

Señales singulares: Sa “función de muestreo” y Sinc

- Se define como:

$$Sa(t) = \frac{sen(t)}{t}$$



$$sinc(t) = \frac{sen(\pi t)}{\pi t}$$

Señales singulares: Delta de Dirac

- Se define como:

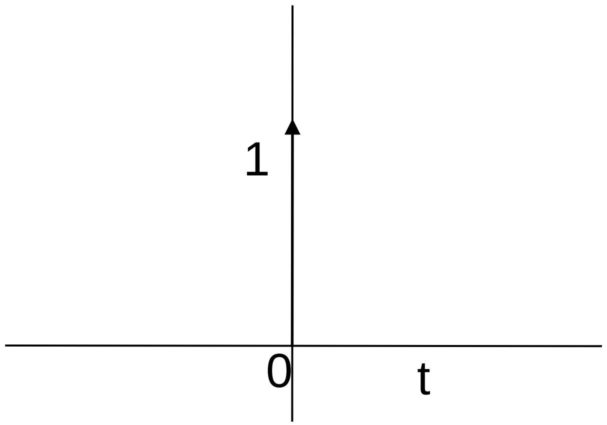
$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t)dt = x(0), t_1 < 0 < t_2$$

$$1.\ \delta(0) \to \infty$$

$$2.\ \delta(t) = 0, t \neq 0$$

$$3.\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$4.\ \delta(t) = \delta(-t)$$



Señales periódicas continuas y frecuencia angular continua

- Cualquier señal que cumpla:

$$x(t) = x(t + nT), n = 1,2,3,\ldots$$

- Con T>0, se considera periódica de periodo fundamental T
- NOTA: T puede ser real

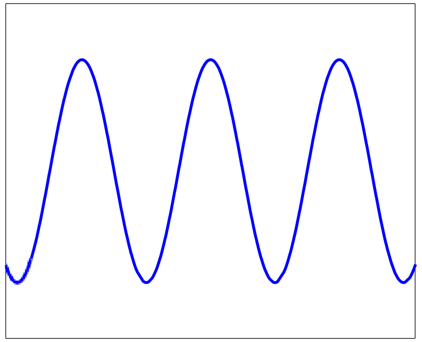


Figura: Señal periódica

Ilustración de señales periódicas

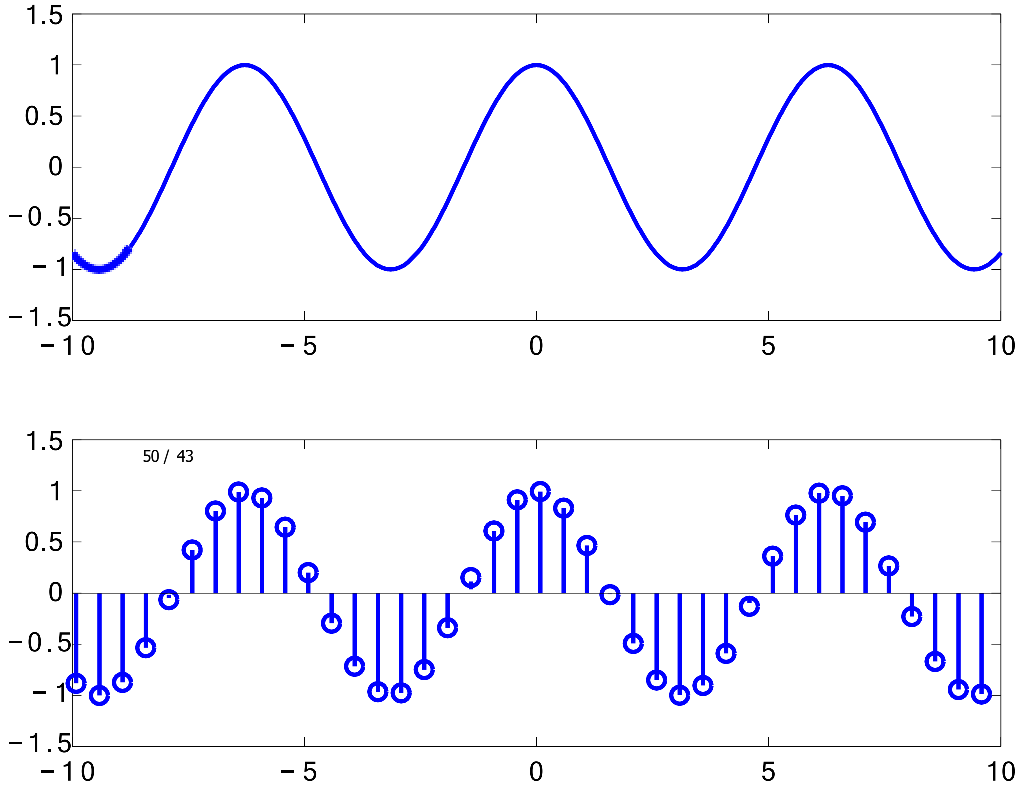


Figura: Señal periódica sinusoidal

Ilustración de señales periódicas

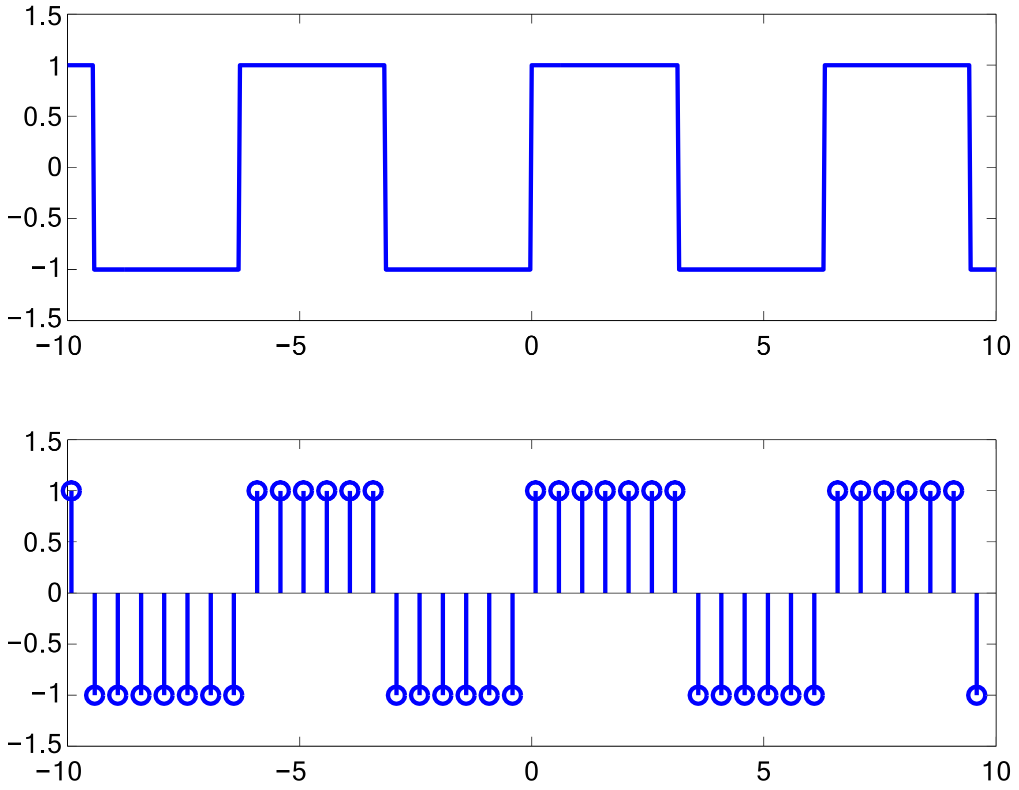


Figura: Señal periódica cuadrada

Ilustración de señales periódicas

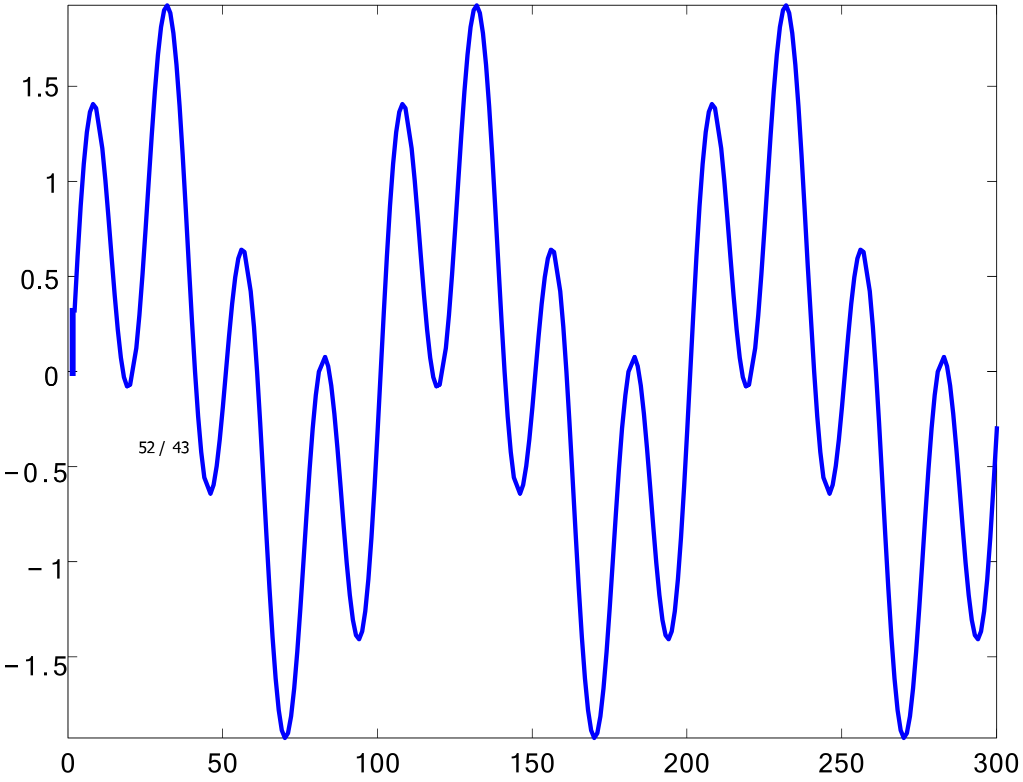


Figura: Otra señal periódica

Señales periódicas continuas y frecuencia angular continua

- Ejemplo

$$x(t) = A sen(\omega_0 t + \theta)$$

$$A = amplitud$$

$$\omega_0 = frecuencia\ angular\ en\ \frac{rad}{seg}$$

$$\theta = angulo\ de\ fase$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, T = \frac{1}{f_0}, \omega_0 = 2\pi f_0$$

Suma de Señales periódicas continuas

- La suma de dos señales periódicas puede o no ser periódica
- Consideremos la suma dos señales x(t) y y(t) periódicas de periodo T_1 y T_2.

$$z(t) = ax(t) + by(t)$$

Suma de Señales periódicas continuas

- tenemos

$$z(t) = ax(t) + by(t)$$

$$x(t) = x(t + kT_1), k \in \mathbf{Z}^+$$

$$y(t) = y(t + lT_2), l \in \mathbf{Z}^+$$

$$z(t) = ax(t + kT_1) + by(t + lT_2)$$

$$ax(t) + by(t) = ax(t + kT_1) + by(t + lT_2)$$

$$z(t) = z(t + nT)$$

Suma de Señales periódicas continuas

$$ax(t)+by(t)=ax(t+kT_1)+by(t+lT_2) \qquad z(t)=z(t+nT)$$

- Se puede decir:

$$ax(t+T)+by(t+T)=ax(t+kT_1)+by(t+lT_2)$$

$$T=kT_1=lT_2$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{l}{k}\in\mathbf{Q}$$

$\text{ejercicio: determinar que el periodo resultante}=15$

$$x_1(t)=sen\left(\frac{2\pi}{5}t\right)+sen\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$$

- *Señales y sistemas continuos y discretos, Soliman. S y Srinath. M. 2ª edición*
- *Señales y sistemas ,Oppenheim, Alan*