Análisis de Señales

Análisis de Fourier para Señales Continuas

Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar

Objetivos

- Representar señales continuas como suma de exponenciales complejas.
- Definir la transformada de fourier de tiempo continuo y estudiar algunas de sus propiedades.
- Analizar señales y SLIT continuos utilizando la transformada de Fourier.

Representaciones ortogonales de señales

- Los Conjuntos ortogonales y ortonormales, producen desarrollos en series de señales simples.

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \phi_i(t)$$

Combinación Lineal

$$e^{j\omega_k n} \qquad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}$$

- Donde

$$c_i = \frac{1}{E_i}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\phi_i^*(t)\,dt, \quad i = (\ldots,-1,0,1,\ldots)$$

Energía

Producto interior me dice cuanta energía tiene mi señal ***x*** en el ϕ

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\phi_k^*(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i\phi_i(t)\phi_k^*(t)\,dt = \begin{cases} E_i, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

Desarrollo en serie de Fourier generalizado de x(t)

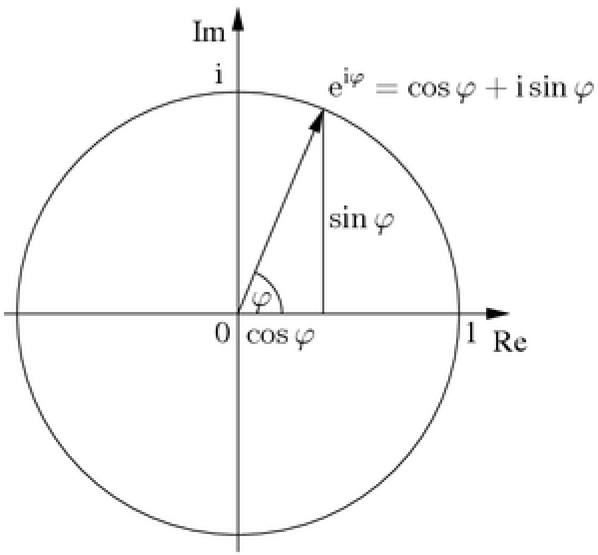
C_i son los coeficientes de Fourier con respecto al conjunto ortonormal $\phi_i(t)$

Desarrollo en serie de fourier mediante exponenciales complejas

- Una señal periódica cumple si existe un valor T y unos n={1, 2, 3,…} para los cuales:

$$x(t) = x(t+nT)$$

- Ej: Las funciones seno, coseno, exponencial compleja y constante.



$$\phi = e^{j\frac{2\pi t}{T}} = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \ldots \left(\frac{2\pi}{T}\right.$$

Desarrollo en serie de fourier mediante exponenciales complejas

Las señales $\phi_m(t) = \operatorname{sen} mt$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ forman un conjunto ortogonal en el intervalo $-\pi < t < \pi$, ya que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(t)\phi_n^*(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} mt)(\operatorname{sen} nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)t\,dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)t\,dt$$

$$= \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Como la energía de cada señal es igual a π, el siguiente conjunto de señales es un conjunto ortonormal en el intervalo $-\pi < t < \pi$

$$\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} 3t}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

Desarrollo en serie de fourier mediante exponenciales complejas

Las señales $\phi_k(t) = \exp[(j2\pi kt)/T]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ forman un conjunto ortogonal en el intervalo $(0, T)$ ya que

$$\int_0^T \phi_l(t)\phi_k^*(t)\,dt = \int_0^T \exp\left[\frac{j(2\pi lt)}{T}\right]\exp\left[\frac{-j(2\pi kt)}{T}\right]dt$$

$$= \begin{cases} T, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}$$

y, por tanto, las señales $(1/\sqrt{T})\exp[(j2\pi kt)/T]$ constituyen un conjunto ortonormal en el intervalo $0 < t < T$.

Desarrollo en serie de fourier mediante exponenciales complejas

- Reemplazando en el desarrollo en series de fourier generalizado:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-j\frac{2\pi n t}{T}}\, dt$$

- Como cada uno de los términos de la serie tiene periodo T si su suma converge esta tendrá periodo T

Desarrollo en serie de fourier mediante exponenciales complejas

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}}$$

$$= c_0 + \sum_{m=-\infty}^{m=-1} c_m e^{j\frac{2\pi mt}{T}} + \sum_{m=1}^{m=\infty} c_m e^{j\frac{2\pi mt}{T}}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_{-n} e^{j\frac{2\pi(-n)t}{T}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(c_n^* e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} + c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}} \right)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{ c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}} \right\}$$

$$= c_0 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\mathrm{Re}\{c_n\}\cos\frac{2\pi nt}{T} - \mathrm{Im}\{c_n\} sen\frac{2\pi nt}{T} \right)$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} dt$$

$$c_n^* = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-j\frac{2\pi(-n)t}{T}} dt$$

$$c_n^* = c_{-n}$$

Por lo tanto

$$|c_n| = |c_{-n}| \wedge \angle c_n = -\angle c_{-n}$$

$$\bar{z} = a - \mathrm{i}b \Longleftrightarrow z = a + \mathrm{i}b$$

$$z - \bar{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}(z)$$

$$z + \bar{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$$

$$\mathrm{Re}\left\{ c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}} \right\}$$

$$\mathrm{Re}\left\{ (\mathrm{Re}\{c_n\} + j\,\mathrm{Im}\{c_n\}) \left(\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + j\,sen\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right) \right\}$$

Desarrollo en serie de fourier mediante exponenciales complejas

Desarrollo de fourier en series trigonométricas para la señal periódica x(t)

$$x(t) = c_0 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\mathrm{Re}\{c_n\}\cos\frac{2\pi nt}{T} - \mathrm{Im}\{c_n\}sen\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n sen\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$a_n = 2\mathrm{Re}\{c_n\} = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt$$

$$b_n = -2\mathrm{Im}\{c_n\} = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)sen\frac{2\pi nt}{T}dt$$

Desarrollo en serie de fourier mediante exponenciales complejas

En términos del módulo y la fase

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{ c_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}} \right\}$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} 2\left|c_n\right| \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \angle c_n \right)$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \phi_n \right)$$

$$A_n = 2\left|c_n\right|$$

$$\phi_n = \angle c_n$$

http://www.falstad.com/fourier/

Condiciones de Dirichlet

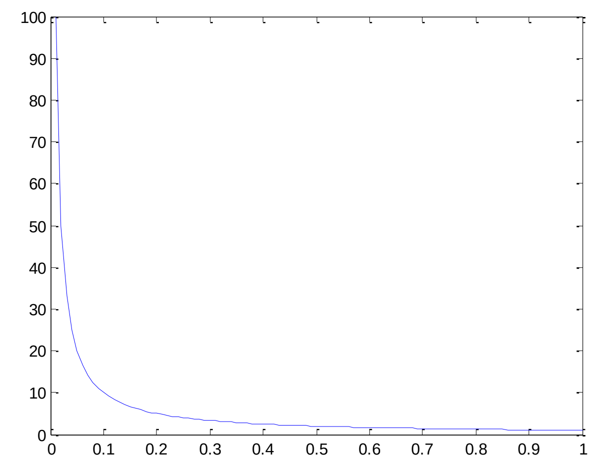
Condición 1.
x(t) debe ser absolutamente integrable sobre cualquier periodo.

$$\int_T |x(t)|\, dt < \infty$$

Ejemplo

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq$$

No cumple 1



Condiciones de Dirichlet

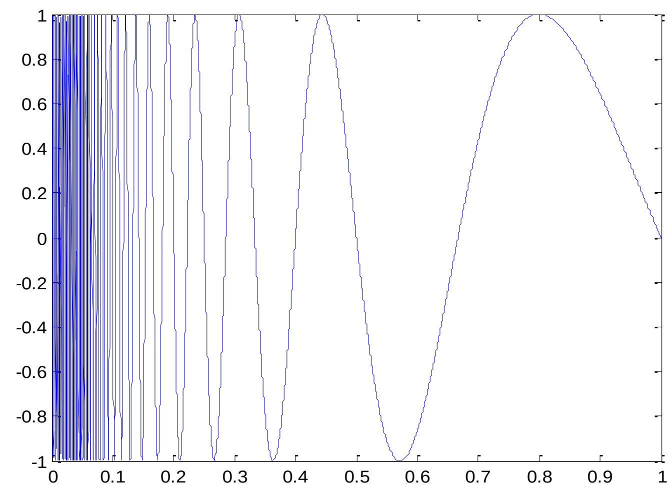
Condición 2.

x(t) debe tener un número finito de máximos y mínimos durante cualquier periodo

Ejemplo

$$x(t)=sen\left(\frac{2\pi}{t}\right)\quad 0<t\leq$$

No cumple 2, pero cumple 1



Condiciones de Dirichlet

Condición 3.

x(t) debe tener un número finito de discontinuidades finitas en un intervalo finito de tiempo.

Ejemplo

$$x(t)=\begin{cases} 1, & 0\le t<1/2 \\ \dfrac{1}{2}, & 1/2\le t<1/4 \\ \dfrac{1}{4}, & 1/4\le t<1/8 \\ \dfrac{1}{8}, & 1/8\le t<1/16 \\ \dfrac{1}{16}, & 1/16\le t<1/32 \\ & etc... \end{cases}$$

. Cumple 1, ¿cumple 2?, no cumple 3

Propiedades de la Serie Continua de Fourier.

- Suponiendo que x(t) es una señal periódica, de frecuencia fundamental:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- Y con los coeficientes de la serie de fourier notados como:

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k$$

Propiedades de la Serie Continua de Fourier.

- **Linealidad:**

$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \qquad y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k$$

- **Desplazamiento de tiempo:**

$$x(t - t_0) \overset{FS}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} c_k$$

- **Inversión de tiempo.**

$$x(-t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_{-k}$$

Propiedades de la Serie Continua de Fourier.

- **Escalamiento en tiempo:**

$$x(\alpha t) = \sum c_k e^{j(\alpha \omega_0)t} \xleftrightarrow{FS} c_k$$

Con α >0 la nueva señal será periódica de periodo T/ α.

- **Multiplicación:**

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FS} c_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l} \qquad x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \quad y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k$$

Propiedades de la Serie Continua de Fourier.

- **Conjugación y simetría:**

$$x^*(t) \xleftrightarrow{FS} c^*_{-k}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}dt$$

$$c_n^* = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\frac{2\pi(-n)t}{T}}dt$$

$$c_n^* = c_{-n}$$

Por lo tanto

$$|c_n| = |c_{-n}| \wedge \angle c_n = -\angle c_{-n}$$

- **Relación de Parseval para señales periódicas continuas.**

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$

Referencias

- *Señales y sistemas continuos y discretos, Soliman. S y Srinath. M. 2ª edición cap 2*
- *Señales y sistemas ,Oppenheim, alan cap 1*
- *Apuntes de clase Prof. José Ramón Iglesias UPC*