GUIA 10

Series de Fourier

A finales del siglo XVIII Jan Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) descubrió un método que permite aproximar funciones periódicas mediante combinaciones lineales de funciones trigonométricas sencillas.

1. Revisión sobre el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$

En esta guía se desarrollará una analogía entre el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ y el llamado espacio de las funciones cuadrado integrables. Presentaremos de manera sucinta las principales propiedades del espacio euclideo:

Bases, producto interno y ortogonalidad. Como se sabe, cualquier base en $\mathbb{R}^n$, digamos $\{\mathbf{e_j},\ j = 1, \ldots, n\}$, permite expresar un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario de manera única mediante combinaciones lineales de elementos de la base, es decir,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mathbf{e_j},$$

los componentes relativos a la base (también llamados coeficientes) a_j, $j = 1, \cdots, n$ de $\mathbf{x}$ se determinan mediante la fórmula

$$a_j =< \mathbf{x}, \mathbf{e_j} >$$

en donde $< \cdot, \cdot >$ indica el producto escalar en $\mathbb{R}^n$. Dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se dicen *ortogonales* si $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= 0$.

Como enseña el Algebra lineal, un conjunto de vectores $\{\mathbf{v_1} \cdots \mathbf{v_k}\}$ se llama *linealmente independiente* si

$$\sum_{j=1}^{k} a_j\, \mathbf{v_j} = 0 \quad \text{implica} \quad a_1 = \cdots = a_j = 0.$$

El número máximo de vectores linealmente independientes que tiene un espacio vectorial se llama la *dimensión* del espacio. Se demuestra en los cursos de Algebra lineal que la dimension de $\mathbb{R}^n$ es n.

Normas en $\mathbb{R}^n$. La norma del vector $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mathbf{e_j}$, esta dado por

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} = \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >}.$$

La norma de vectores en $\mathbb{R}^n$ tiene las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \quad \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2 < \mathbf{x},\mathbf{y} > + \|\mathbf{y}\|^2, \\ | < \mathbf{x},\mathbf{y} > | \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

2. El espacio de funciones cuadrado integrables

Si bien Fourier ideó su método pensando en funciones continuas, ocurre que sus ideas se pueden aplicar mejor en el contexto más amplio de las funciones cuadrado integrables. En lo que sigue, miraremos las funciones como elementos de un espacio vectorial, es decir, las miraremos como vectores, y por eso será conveniente utilizar negrillas para denotarlas.

De aquí en adelante emplearemos la siguiente notación para las funciones trigonométricas definidas en un intervalo $[-l,l]$:

$$\mathbf{s_k}(x) = \operatorname{sen} \frac{k\,x\,\pi}{l}, \quad \mathbf{c_k}(x) = \cos \frac{k\,x\,\pi}{l}$$

en donde $k = 0, 1, \cdots$. Se observa que para todo $k = 0, 1, \cdots$, $\mathbf{s_k}$ y $\mathbf{c_k}$ son funciones periódicas con período $\frac{2\pi}{l}$.

Definición 1 *Sea $l > 0$. Una función $\mathbf{f} : [-l,l] \to \mathbb{R}$ se llama cuadrado integrable si*

$$\int_{-l}^{l} |\mathbf{f}(x)|^2 dx < \infty.$$

El conjunto de funciones cuadrado integrables en $[-l,l]$ se denota con $\mathbf{L^2}[-l,l]$.

Ejemplo 1. Toda función definida en $[-l,l]$, acotada y continua a trozos es cuadrado integrable en su dominio. Es claro que las funciones trigonométricas $\mathbf{s_k}$ y $\mathbf{c_k}$ son cuadrado integrables en $[-l,l]$. En efecto, un cálculo elemental muestra que

$$\int_{-l}^{l} \cos^2 \frac{k\,x\,\pi}{l}\, dx = l, \quad \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}^2 \frac{k\,x\,\pi}{l}\, dx = l.$$

.

Definición 2 *En $\mathbf{L^2}[-l,l]$ definiremos el producto interno entre funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ por*

$$< \mathbf{f}, \mathbf{g} >= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \mathbf{f}(x)\, \mathbf{g}(x)\, dx.$$

La norma $\|\mathbf{f}\|$ *de una función* $\mathbf{f} \in \mathbf{L^2}[-l, l]$ *está definida por*

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \mathbf{f}(x)^2 \, dx} = \sqrt{< \mathbf{f}, \mathbf{f} >}.$$

Diremos que dos funciones $\mathbf{f}$ *y* $\mathbf{g}$ *en* $\mathbf{L^2}[-l, l]$ *son ortogonales si* $< \mathbf{f}, \mathbf{g} >= 0$.

Ejemplo 2. El ejemplo 1 muestra que

$$\|\mathbf{s_k}\| = \|\mathbf{c_k}\| = 1, \quad k = 1, 2, \cdots . \tag{1}$$

De otro lado, de la definición del producto interno se tiene

$$< \mathbf{c_k}, \mathbf{s_j} >= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \cos \frac{k\, x\, \pi}{l} \operatorname{sen} \frac{j\, x\, \pi}{l} \, dx.$$

Ahora, al aplicar la identidad trigonométrica

$$\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{sen} (\theta_2 - \theta_1) - \operatorname{sen} (\theta_2 + \theta_1) \right),$$

con $\theta_1 = \frac{k\, x\, \pi}{l}$ y $\theta_2 = \frac{j\, x\, \pi}{l}$ resulta

$$< \mathbf{c_k}, \mathbf{s_j} >= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{(j+k)\, x\, \pi}{l} \, dx + \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{(j-k)\, x\, \pi}{l} \, dx.$$

La sustitución $s = \frac{(j+k)\, x\, \pi}{l} \, dx$ conduce a

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{(j+k)\, x\, \pi}{l} \, dx = \frac{l}{(j+k)\, \pi} \int_{-(j+k)\, \pi}^{(j+k)\, \pi} \operatorname{sen} s \, ds = 0,$$

por consiguiente $< \mathbf{c_k}, \mathbf{s_j} >= 0$.

Análogamente se muestra que para todo $k, j = 0, 1, 2, \cdots$

$$< \mathbf{c_k}, \mathbf{c_j} >=< \mathbf{s_k}, \mathbf{s_j} >= \delta_{kj} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } k = j \\ 1 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

lo que implica entre otras cosas que las funciones $\mathbf{c_k}$ y $\mathbf{s_j}$ son ortogonales.

Lema 1 *El producto escalar en* $\mathbf{L^2}[-l, l]$ *tiene las siguientes propiedades*

$$< \mathbf{f}, \mathbf{g} >=< \mathbf{g}, \mathbf{f} >, \quad < \mathbf{f} + \mathbf{g}, h >=< \mathbf{f}, \mathbf{g} > + < \mathbf{g}, h >, \quad < \lambda\, \mathbf{f}, \mathbf{g} >= \lambda < \mathbf{f}, \mathbf{g} > .$$

Teorema 1 *El conjunto de funciones* $\mathbf{L^2}[-l,l]$ *tiene estructura de espacio vectorial normado, es decir, si* $\mathbf{f}$ *y* $\mathbf{g}$ *están en* $\mathbf{L^2}[-l,l]$ *y si* λ *es un escalar cualquiera, entonces*

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g}) \in \mathbf{L^2}[-l,l], \quad (\lambda \mathbf{f}) \in \mathbf{L^2}[-l,l].$$

Más aún,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}+\mathbf{g}\| \leq \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|, \quad \|\lambda \mathbf{f}\| = |\lambda|\, \|\mathbf{f}\|, \\ \|\mathbf{f}+\mathbf{g}\|^2 = \|\mathbf{f}\|^2 + 2 < \mathbf{f}, \mathbf{g} > + \|\mathbf{g}\|^2, \\ | < \mathbf{f}, \mathbf{g} > | \leq \|\mathbf{f}\|\, \|\mathbf{g}\|. \end{aligned}$$

Demostración. Probar que $(\mathbf{f}+\mathbf{g}) \in \mathbf{L^2}[-l,l]$ es equivalente a mostrar que la integral S definida mediante

$$s = \int_{-l}^{l} (\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x))^2\, dx$$

es finita. Ahora bien, en vista de que $a\, b \leq a^2 + b^2$ para cualquier par de números reales a y b, se tiene para cualquier $x \in [-l,l]$ que

$$(\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x))^2 = \mathbf{f}^2(x) + 2\mathbf{f}(x)\, \mathbf{g}(x) + \mathbf{g}^2(x) \leq 2\left(\mathbf{f}^2(x) + \mathbf{g}^2(x)\right),$$

por consiguiente

$$s \leq 2 \int_{-l}^{l} \mathbf{f}^2(x)\, dx + 2 \int_{-l}^{l} \mathbf{g}^2(x)\, dx < \infty.$$

QED.

A la par de las analogías señaladas entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{L^2}[-l,l]$ se dan importantes diferencias entre estos dos espacios. Sabemos por ejemplo que $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión (finita) n, sin embargo

Teorema 2 $\mathbf{L^2}[-l,l]$ *es un espacio vectorial normado de dimensión infinita.*

Demostración. Sea N cualquier número natural (N puede ser arbitrariamente grande). Mostraremos que existe una colección de N elementos (funciones) en $\mathbf{L^2}[-l,l]$ que es linelamente independiente. En efecto, basta tomar N funciones trigonométricas distintas como las definidas en el ejemplo 2. Para simplificar el argumento, tomemos la colección $\{\mathbf{c}_1, \cdots \mathbf{c}_N\}$, y sean $a_1, \cdots, a_N$ escalares tales que

$$a_1\, \mathbf{c}_1 + \cdots + a_m\, \mathbf{c}_m + \cdots + a_N\, \mathbf{c}_N = 0.$$

donde $m \in \{1, \cdots, M\}$ es un indice arbitrario. Mostraremos (téngase en cuenta la analogía con el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$) que todos los escalares $a_1, \cdots, a_N$ se anulan.

En virtud del Lema 1 se tiene

$$\begin{aligned} < a_1\, \mathbf{c}_1 + \cdots + a_m\, \mathbf{c}_m + \cdots + a_N\, \mathbf{c}_N, \mathbf{c_m} >= \\ a_1 < \mathbf{c_1}, \mathbf{c_m} > + \cdots + a_m < \mathbf{c_m}, \mathbf{c_m} > + \cdots + a_N < \mathbf{c_N}, \mathbf{c_m} >= \\ a_m < \mathbf{c_m}, \mathbf{c_m} >= a_m = 0, \end{aligned}$$

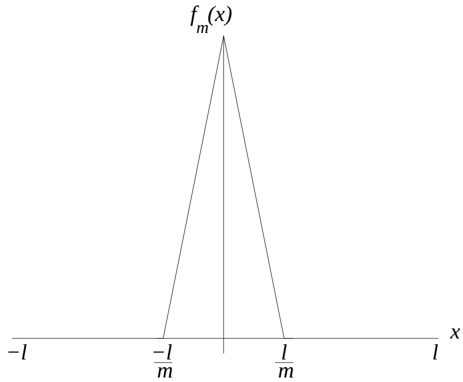


Figura 1: Gráfica de la funcion

puesto que $< \mathbf{c_k}, \mathbf{c_j} >= \delta_{kj}$ y $< \mathbf{c_m}, \mathbf{c_m} >= 1$. QED

Observación. Como se ha señalado la norma $\|\mathbf{f}\|$ de una función $\mathbf{f} \in \mathbf{L^2}[-l, l]$ indica el tamaño de la función $\mathbf{f}$. Ahora bien, el que $\|\mathbf{f}\|$ sea pequeño no implica que $\mathbf{f(x)}$ sea pequeño en cualquier $x \in [-l, l]$. En efecto, sea m un entero tan grande como se quiera, y defínase la función

$$\mathbf{f}_m(x) = \begin{cases} 1 - |\frac{m}{l}\, x|, & \text{si} \quad |x| \leq \frac{l}{m}, \\ 0, & \text{si} \quad \frac{l}{m} < |x| \end{cases}$$

cuyo gráfico aparece en la figura 1. Se tiene que $\mathbf{f}_m(0) = 1$ para cualquier entero m. Ahora bien, de

$$\|\mathbf{f}_m\|^2 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \mathbf{f}_m^2(x)\, dx = \frac{2}{l} \int_0^l (1 - \frac{m}{l}\, x)^2\, dx = \frac{2}{3m}$$

se concluye que $\|\mathbf{f}_m\| = \sqrt{\frac{2}{3m}}$ puede hacerse arbitrariamente pequeño, mas el valor $\mathbf{f}_m(0) = 1$ siempre es fijo. Se tiene asi que

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathbf{f}_m\| = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \mathbf{f}_m(0) = 1,$$

lo que no implica contradicción alguna.

3. Representación de funciones mediante series de Fourier

Fourier descubrió lo que en lenguaje moderno se expresa dicendo que la colección (infinita) de funciones trigonométricas

$$\mathbf{c}_0, \mathbf{s}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{s}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{s}_3, \cdots$$

forma una base de $\mathbf{L^2}[-l,l]$. De manera más precisa:

Teorema 3 *Para cualquier función* $\mathbf{f} \in \mathbf{L^2}[-l,l]$ *existen escalares* $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$, *llamados coeficientes de Fourier de la función* $\mathbf{f}$, *tal que* $\mathbf{f}$ *puede expresarse de manera única mediante*

$$\mathbf{f} = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j\,\mathbf{c}_j + b_j\,\mathbf{s}_j)\,, \tag{2}$$

en donde los coeficientes de Fourier a_n *y* b_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, *estan dados por*

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \mathbf{f}(x)\,\cos\frac{n\,\pi\,x}{l}\,dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \mathbf{f}(x)\,sen\,\frac{n\,\pi\,x}{l}\,dx. \tag{3}$$

Demostración. Una demostración rigurosa de este resultado esta más allá de los objetivos de este curso. Sin embargo, precisaremos el sentido en que debe entenderse (2): para todo $\epsilon > 0$ existe un entero positivo m tal que

$$\mathbf{f} = \sum_{j=0}^{m} (a_j\,\mathbf{c}_j + b_j\,\mathbf{s}_j) + \mathbf{R}_m,$$

donde la función residual $\mathbf{R}_m$ satisface $\|\mathbf{R}_m\| \leq \epsilon$. Más aún,

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathbf{R}_m\| = 0. \tag{4}$$

Ahora mostraremos de donde sale el valor de los coeficientes de Fourier. El término

$$\mathbf{S}_m \equiv \sum_{j=0}^{m} (a_j\,\mathbf{c}_j + b_j\,\mathbf{s}_j)$$

se suele llamar suma parcial de orden m. Tenemos entonces que $\mathbf{f} = \mathbf{S}_m + \mathbf{R}_m$, con $\lim_{m\to\infty} \|\mathbf{R}_m\| = 0$. Por eso, para cualquier entero positivo i fijo se tiene

$$< \mathbf{f}, \mathbf{c}_i > = < \mathbf{S}_m, \mathbf{c}_i > + < \mathbf{R}_m, \mathbf{c}_i > .$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la definición de $\mathbf{S}_m$ y el hecho de que las funciones trigonométricas $\mathbf{c}_j$, $\mathbf{s}_j$, $j = 1 \cdots$, son ortogonales entre si resulta $< \mathbf{S}_m, \mathbf{c}_i > = a_i$. De otro lado, como $\|\mathbf{c}_i\| = 1$ se tiene

$$| < \mathbf{R}_m, \mathbf{c}_i > | \leq \|\mathbf{R}_m\|\,\|\mathbf{c}_i\| = \|\mathbf{R}_m\|.$$

Asi que

$$a_i = < \mathbf{f}, \mathbf{c}_i > + \|\mathbf{R}_m\|,$$

y tomando $\lim_{m\to\infty}$ a ambos lados se obtiene finalmente que $a_i = < \mathbf{f}, \mathbf{c}_i >$. Análogamente se muestra que $b_i = < \mathbf{f}, \mathbf{s}_i >$. QED.

Observación. Según el teorema anterior $\mathbf{f} = \mathbf{S}_m + \mathbf{R}_m$, con $\lim_{m\to\infty} \|\mathbf{R}_m\| = 0$. Pero la igualdad 4 no implica que $\lim_{m\to\infty} \mathbf{R}_m(x) = 0$. En consecuencia, no necesariamente es cierto que $\mathbf{f}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j\,\mathbf{c}_j(x) + b_j\,\mathbf{s}_j(x))$ para todo $x \in [-l,l]$.

Definición 3 *La representación en serie de Fourier de una función* $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2[-l, l]$ *es*

$$\mathbf{f} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\,\pi\,x}{l} + b_n\, sen \frac{n\,\pi\,x}{l} \right),$$

donde los coeficientes de Fourier a_n *y* b_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, *estan dados por (3).*

Ejemplo. Una función no tiene porque ser continua para poderse representar mediante una serie de Fourier. Considere ($l = 1$)

$$\mathbf{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{si} \quad \;\; 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Esta claro que $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2[-1, 1]$. Los coeficientes de Fourier estan dados por

$$a_n = \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(x) \, \cos n\,\pi\,x\,dx = \int_{0}^{1} \cos n\,\pi\,x\,dx = 0,$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(x) \operatorname{sen} n\,\pi\,x\,dx = \int_{0}^{1} \operatorname{sen} n\,\pi\,x\,dx = \frac{1 - \cos n\,\pi}{n\,\pi} = \frac{(1 - (-1)^n)}{n\,\pi}.$$

Entonces

Como ya se ha señalado, la representación en serie de Fourier de $\mathbf{f}$ no tiene porque coincidir con el valor $\mathbf{f}(x)$. Sin embargo, coinciden cuando $\mathbf{f}$ es contínua y acotada y x es un punto interior de $[-l, l]$.

Teorema 4 *Si* $\mathbf{f}$ *es una función continua y acotada definida en* $[l, l]$ *y si* $x \in (-l, l)$ *entonces*

$$\mathbf{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\,\pi\,x}{l} + b_n\, sen \frac{n\,\pi\,x}{l} \right),$$

donde los coeficientes a_n *y* b_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, *estan dados por (3).*

4. Series de Fourier de funciones pares e impares

La representación series de Fourier se simplifica en el caso de funciones pares o impares.

Definición 4 *Una función* $\mathbf{f} \in \mathbf{L^2}[-l, l]$ *se llama una función par si* $\mathbf{f}(-x) = \mathbf{f}(x)$ *para todo* $x \in [-l, l]$. *La función se llama impar si cumple* $\mathbf{f}(-x) = -\mathbf{f}(x)$.

Los gráficos de las funciones pares son simétricos con respecto al eje de las ordenadas, y le gráfico de funciones impares es simétrico con respecto al origen (simetría radial). $\cos x$ es el ejemplo típico de una función par mientras que $\operatorname{sen} x$ es impar. Se verifica sin dificultad que las funciones trigonométricas $\mathbf{c_j}$, $j = 1, \cdots$, son todas pares y que $\mathbf{s_j}$, $j = 1, \cdots$, son todas funciones impares. La paridad de funciones se conseva en las operaciones de suma y multiplicación. De hecho se tiene

par × par	produce	par
par × impar	produce	impar
impar × impar	produce	par

Otra propiedad importante es la siguiente

$$\begin{array}{llll} f & \text{impar implica} & \int_{-l}^{l} f(x)\,dx &= 0, \\ f & \text{par implica} & \int_{-l}^{l} f(x)\,dx &= 2\int_0^l f(x)\,dx \end{array}$$

Teorema 5 *Si* $\mathbf{f} \in \mathbf{L^2}[-l, l]$ *es una función par entonces la representación en series de Fourier de* $\mathbf{f}$ *esta dada por*

$$\mathbf{f} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\,\pi\,x}{l}, \quad \textit{con} \;\; a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\cos\frac{n\,\pi\,x}{l}\,dx.$$

Teorema 6 *Si* $\mathbf{f} \in \mathbf{L^2}[-l, l]$ *es una función impar entonces la representación en series de Fourier de* $\mathbf{f}$ *esta dada por*

$$\mathbf{f} \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sen\frac{n\,\pi\,x}{l}, \quad \textit{con} \;\; b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\, sen\frac{n\,\pi\,x}{l}\,dx.$$

Ejemplo Calcularemos la representación en series de Fourier de $\mathbf{f}(x) = x$, $x \in [-1, 1]$ $(l = 1)$. Como $\mathbf{f}$ es una función impar y es continua en $[-1, 1]$ entonces para todo $x \in (-1, 1)$ se tiene

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\,\pi\,x, \quad \text{con} \;\; b_n = 2\int_0^1 x \operatorname{sen} n\,\pi\,x\,dx.$$

Integrando por partes tenemos

$$2\int_0^1 x \operatorname{sen} n\,\pi\,x\,dx = -\frac{4}{n\,\pi}\cos n\,\pi = \frac{4}{n\,\pi}\,(-1)^n.$$

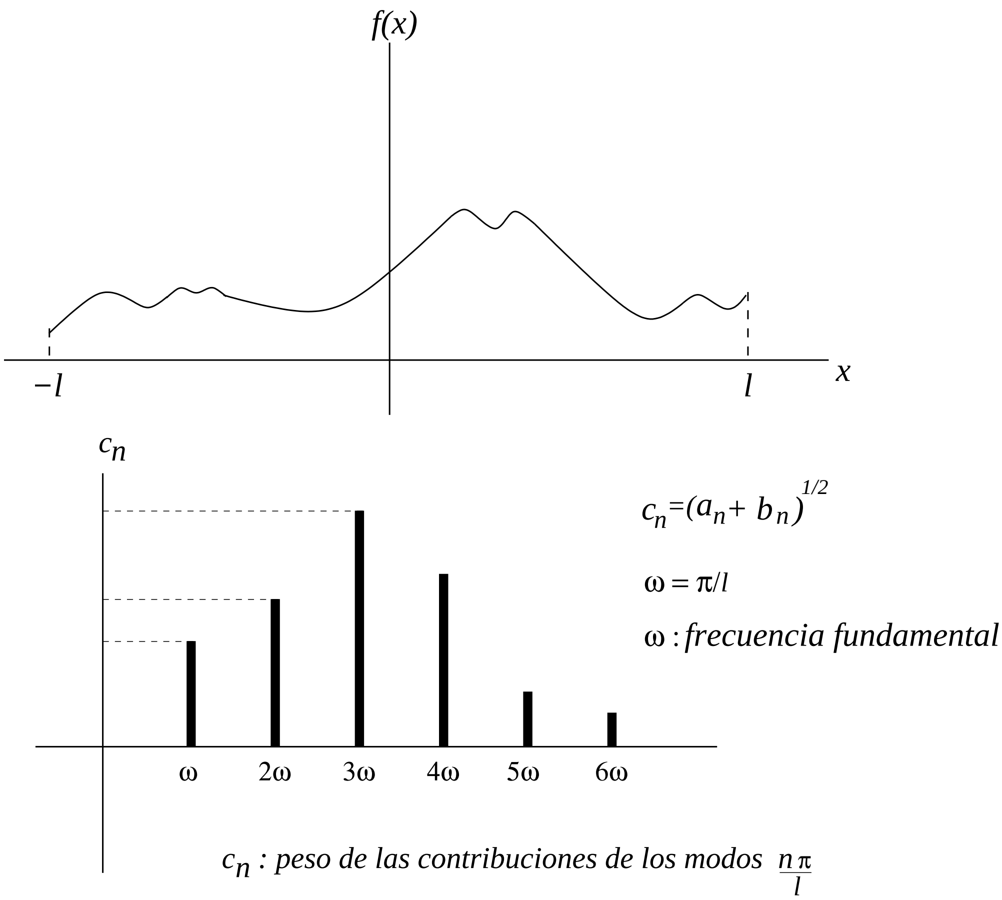
Luego

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{4}{n\,\pi}\,\operatorname{sen} n\,\pi\,x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen} n\,\pi\,x$$

Nótese que la representación en series de Fourier de $\mathbf{f}$ no coincide con $\mathbf{f}$ cuando $x = 1$. En efecto, al evaluar la serie de $\mathbf{f}$ en $x = 1$ se obtine el valor cero ($\operatorname{sen} n\,\pi = 0$ para todo n). Más es claro que $\mathbf{f}(1) = 1$.

5. Interpretación física de las series de Fourier

Espectro de frecuencias


f(x)
x
−l
l
c_n
c_n=(a_n+ b_n)^1/2
ω = π/l
ω : frecuencia fundamental
ω
2ω
3ω
4ω
5ω
6ω
c_n : peso de las contribuciones de los modos nπ/l