

# Análisis de Señales

## Espacios Vectoriales

**Dr. José Ramón Iglesias**

DSP-ASIC BUILDER GROUP

Director Semillero TRIAC

Ingeniería Electronica

Universidad Popular del Cesar

## Definición (corta)

Un **espacio vectorial** o lineal es una colección de objetos, denominados vectores, que pueden ser **sumados** y **escalados**.

## Grupos

Un grupo  $(G, *)$  es un conjunto  $G$  junto a una operación binaria  $*$  que cumplen

- i. **Clausura:** Si  $a, b \in G \Rightarrow a * b \in G$   
"  $G$  es cerrado bajo  $*$ ".
- ii. **Asociatividad:**  $\forall a, b, c \in G \Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$
- iii. **Identidad:**  $\forall a \in G \quad (a * e = e * a = a)$  "  $e$  : identidad"
- iv. **Inversa:**  $\forall a \in G \quad \exists a' \in G \quad / \quad a * a' = a' * a = e$

Si además  $\forall a, b \in G \quad (a * b = b * a)$  entonces el grupo  $(G, *)$  es **abeliano** (conmutativo).

### **Ejemplo.**

$(\mathbb{Z}, +)$  y  $(\mathbb{R}, +)$  son grupos abelianos con identidad 0.

$(\mathbb{R}^+, \times)$  es un grupo abeliano con identidad 1.

$(\mathbb{Z}, \times)$  no es un grupo pues existen elementos sin inversa.

$(\mathbb{R}, \times)$  no es un grupo pues el elemento 0 no tiene inversa.

El par  $(\mathbb{R}, \times)$  se conoce como *monoide*.

**Definición.**  $(G, *)$  es un **monoide** si cumple las propiedades de clausura, asociatividad e identidad.

### Anillos

Un anillo  $(R, +, \times)$  es un conjunto  $R$  junto a la adición  $+$  y a la multiplicación  $\times$ , que cumplen

- i.  $(R, +)$  es un grupo abeliano con identidad 0.
- ii.  $(R, \times)$  es un monoide con identidad 1.
- iii. La multiplicación distribuye la adición

$$\forall a, b, c \in R \quad a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

## Campos

Un campo  $(F, +, \times)$  es un conjunto  $F$  junto a la adición  $+$  y a la multiplicación  $\times$ , que cumplen

- i.  $(F, +)$  es un grupo abeliano con identidad 0.
- ii.  $(F^*, \times)$  es un grupo abeliano con identidad 1.
- iii. La multiplicación distribuye a la adición

$$\forall a, b, c \in R \quad a \times (b + c) = a \times b + a \times c .$$

Los elementos de un campo se conocen como **escalares**.

**Ejemplo.**  $(\mathbb{R}, +, \times)$  y  $(\mathbb{C}, +, \times)$  son anillos y campos.

Los **reales** y **complejos** son escalares!

## Definición de espacio vectorial

Un conjunto  $V$  es un espacio vectorial sobre un campo  $(F, +, \times)$  si

- i.  $(V, +)$  es un grupo abeliano con identidad  $0$ .
- ii.  $\forall a \in F$  y  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ :  $a \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \times \mathbf{v} + a \times \mathbf{w}$
- iii.  $\forall a, b \in F$  y  $\forall \mathbf{v} \in V$ :  $(a + b) \times \mathbf{v} = (a \times \mathbf{v}) + (b \times \mathbf{v})$
- iv.  $\forall a, b \in F$  y  $\forall \mathbf{v} \in V$ :  $(a \times b) \times \mathbf{v} = a \times (b \times \mathbf{v})$
- v.  $\forall \mathbf{v} \in V$ :  $1 \times \mathbf{v} = \mathbf{v}$  "1 es la identidad multiplicativa de  $F$ "
- vi.  $\forall a \in F$  y  $\forall \mathbf{v} \in V$ :  $a \mathbf{v} \in V$

Los elementos de un espacio vectorial se conocen como **vectores**.

**Ejemplo.** Pruebe que  $V = \mathbb{R}^n$  con  $F = \mathbb{R}$  es un espacio vectorial. Verifique que los elementos pueden ser escalados y sumados.

Si  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  entonces  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  con  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

*Escalados.* Si  $a \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  entonces  $a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) \in \mathbb{R}^n$ .

*Sumados.* Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  entonces  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

## Espacio vectorial $L_1$

$$L_1 = \left\{ f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty \right\}$$

Está formado por todas las señales integrables en magnitud.

**Ejemplo.**  $L_1$  es un espacio vectorial con campo los complejos.

$$\text{Si } x(t) \in L_1 \text{ entonces } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty .$$

$$\text{Escalados. Si } a \in \mathbf{C} \text{ y } x(t) \in L_1 \text{ entonces } \int_{-\infty}^{\infty} |ax(t)| dt = |a| \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty .$$

*Sumados.* Si  $x(t), y(t) \in L_1$  entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) + y(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt + \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt < \infty .$$

## Norma de un espacio vectorial

Una norma  $\|\cdot\|$  es una "medida", que se le asigna a cada elemento (vector) de un espacio vectorial  $V$ , que debe cumplir

$$i. \quad \forall \mathbf{v} \in V : \quad \|\mathbf{v}\| \geq 0 \quad \text{y} \quad \|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$$

$$ii. \quad \forall a \in F \quad \text{y} \quad \forall \mathbf{v} \in V : \quad \|a\mathbf{v}\| = |a| \|\mathbf{v}\|$$

$$iii. \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : \quad \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

Por tal motivo, una norma es una función del espacio vectorial a los números reales mayores iguales a cero, es decir,

$$\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$$

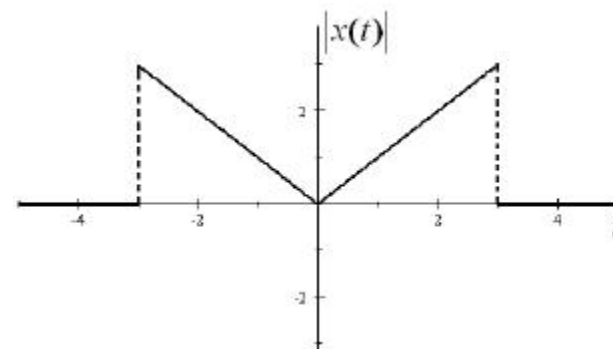
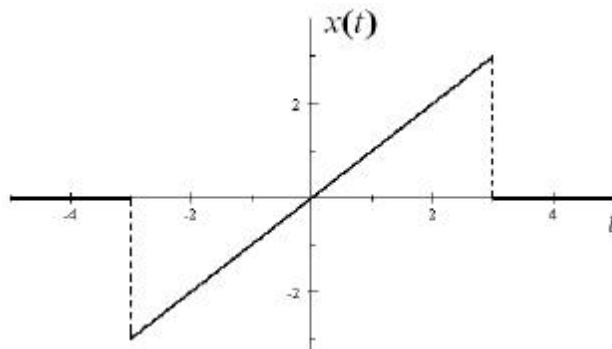
Un **espacio normado** es un espacio vectorial dotado con norma.

**Ejemplo.**  $\mathbb{R}^n$  y  $L_1$  son espacios vectoriales normados.

- Si  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  entonces  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$
- Si  $x(t) \in L_1$  entonces  $\|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$  (**Norma  $L_1$** )

**Ejemplo.** Encuentre la norma  $L_1$  de las siguientes señales y determine si pertenecen a  $L_1$ .

- $x(t) = t[u(t+3) - u(t-3)]$



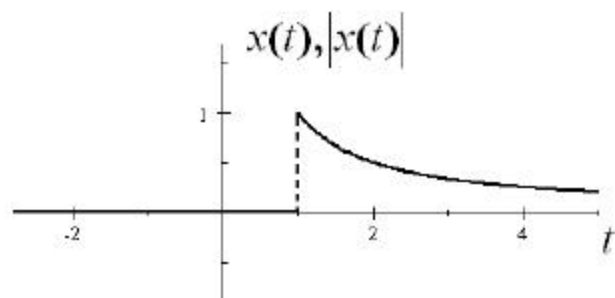
$$\|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \int_{-3}^3 |t| dt$$

$$\|x(t)\|_1 = \int_{-3}^0 -t dt + \int_0^3 t dt = 9$$

Esta señal pertenece a  $L_1$ , pues su norma  $L_1$  es finita.



- $x(t) = \frac{1}{t} u(t-1)$

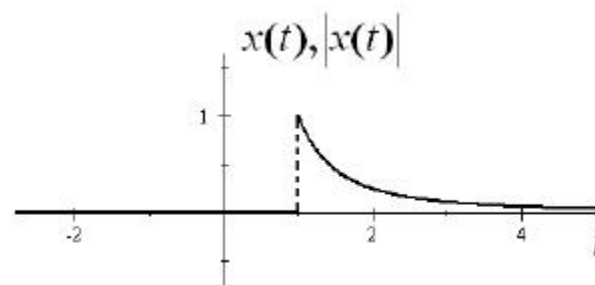


$$\|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \int_1^{\infty} |1/t| dt$$

$$\|x(t)\|_1 = \int_1^{\infty} 1/t dt = \ln(\infty) - \ln(1) = \infty$$

La señal no pertenece a  $L_1$ .

- $x(t) = \frac{1}{t^2} u(t-1)$



$$\|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \int_1^{\infty} |1/t^2| dt$$

$$\|x(t)\|_1 = \int_1^{\infty} 1/t^2 dt = -1/t \Big|_1^{\infty} = 1$$

La señal pertenece a  $L_1$ .

## Métrica

Una métrica  $\rho$  es una “medida de distancia”, entre dos vectores de un espacio vectorial, que debe cumplir

- i.  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : \quad \rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \geq 0 \quad \text{y} \quad \rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$
- ii.  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : \quad \rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \rho(\mathbf{w}, \mathbf{v})$
- iii.  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V : \quad \rho(\mathbf{v}, \mathbf{z}) \leq \rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \rho(\mathbf{w}, \mathbf{z})$

Una métrica es una función que toma dos elementos del espacio vectorial y asigna un número real mayor igual a cero, es decir,

$$\rho : V \times V \rightarrow [0, \infty)$$

Un *espacio métrico* es un espacio vectorial dotado con métrica.

**Observación.** Todo espacio vectorial normado es también un espacio métrico, con métrica definida como  $\rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ .

**Ejemplo.**  $\mathbb{R}^n$  y  $L_1$  son espacios vectoriales métricos.

- Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  entonces

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

- Si  $x(t), y(t) \in L_1$  entonces  $\rho[x(t), y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)| dt$

## Espacio vectorial $L_2$

$$L_2 = \left\{ f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 < \infty \right\}$$

Está formado por todas las señales de energía.  $L_2$  es un espacio normado, con norma definida como

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{E}$$

**Ejemplo.** Encuentre la norma  $L_2$  de la  $x(t) = \frac{1}{t}u(t-1)$  y determine si pertenecen a  $L_2$ .

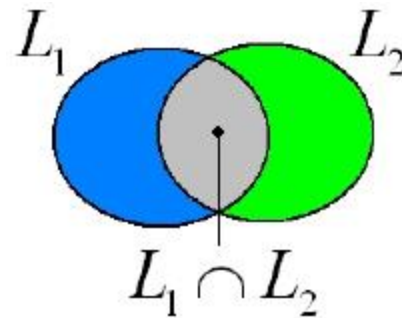
$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_1^{\infty} |1/t|^2 dt}$$

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_1^{\infty} 1/t^2 dt} = \sqrt{-1/t} \Big|_1^{\infty} = 1$$

La señal pertenece a  $L_2$  pues tiene norma  $L_2$  finita.

**Observación.** Una señal en  $L_1$  no necesariamente pertenece a  $L_2$ , y viceversa.

**Ejemplo.** Si  $x(t) = \frac{1}{t}u(t-1)$  entonces  $x(t) \notin L_1$  pero  $x(t) \in L_2$ .



## Producto interno

El producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se define para dos elementos de un espacio vectorial  $V$  con campo  $F$  y debe cumplir  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in F$  y  $\forall a \in F$  con

$$i. \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$$

$$ii. \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle^*$$

$$iii. \quad \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle$$

$$iv. \quad \langle a\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} \rangle = a^* \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

El producto interno es una función que toma dos elementos del espacio vectorial y asigna un elemento del campo, es decir,

$$\rho : V \times V \rightarrow F$$

Un **espacio vectorial euclídeo** es un espacio vectorial dotado con producto interno.

**Ejemplo.**  $\mathbb{R}^n$  y  $L_2$  son espacios vectoriales euclídeos.

- Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  entonces  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$
- Si  $x(t), y(t) \in L_2$  entonces  $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$

**El producto interno es una medida de similitud entre dos vectores!**

**Observación.** Todo espacio vectorial euclídeo es también un espacio normado, con norma definida como  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ .

**Ejemplo.**  $L_2$  es un espacio vectorial normado, con norma definida como

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

**Ejercicio.** Demuestre que  $L_2$  es un espacio vectorial.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz  $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$