Análisis de Señales

Señales continuas y discretas

Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar

Objetivo

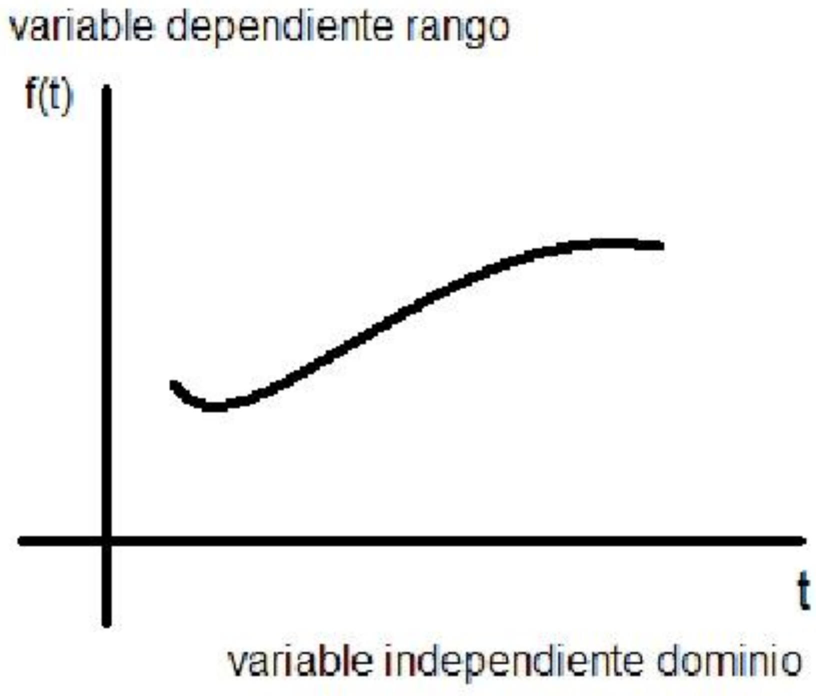
- Definir las propiedades básicas y realizar la clasificación de las señales continuas y discretas.

Introducción

- Las señales son magnitudes físicas o variables detectables mediante las que se pueden transmitir mensajes o información
- La señal se define como la representación eléctrica de una cantidad física que varía con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable o variables independientes $A = f(t)$ $\quad V = f(t)$
- EJ: la voz, Imágenes TV, Temperatura, datos sísmicos
- En este curso nos centraremos en el estudio de señales representadas matemáticamente por funciones de una sola variable

Definición y clasificación de señales

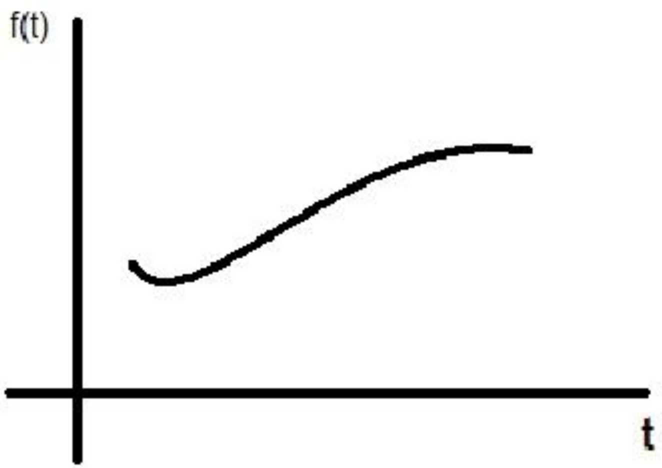
- Señal representada mediante una función:



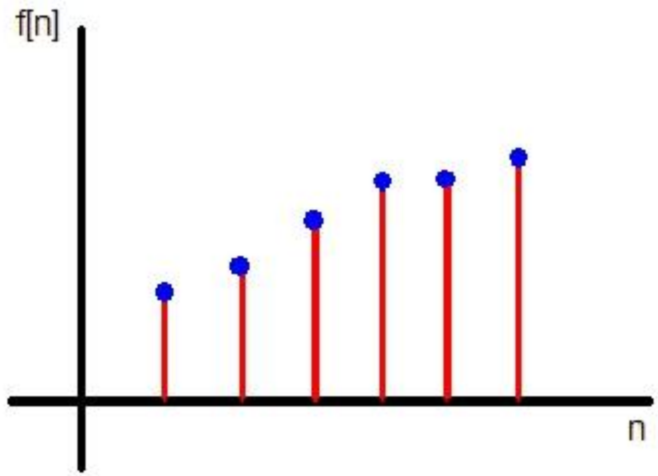
Definición y clasificación de señales

De acuerdo a su dominio "variable independiente"

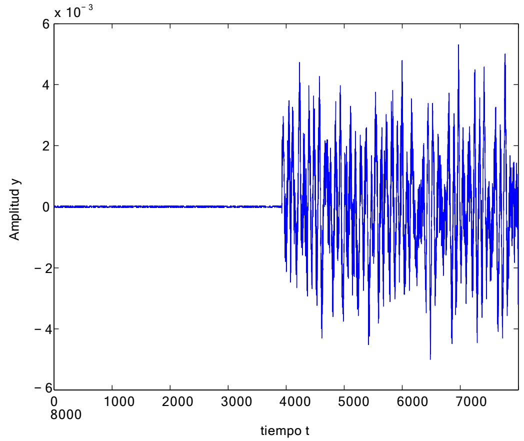
- Continua
- t ->f(t)

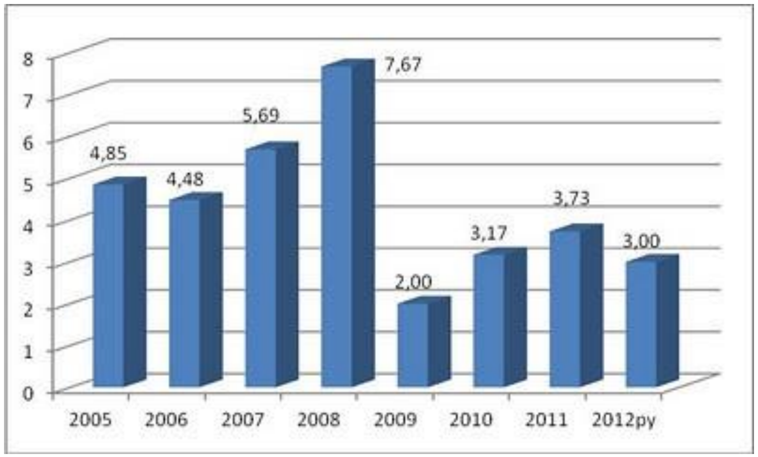


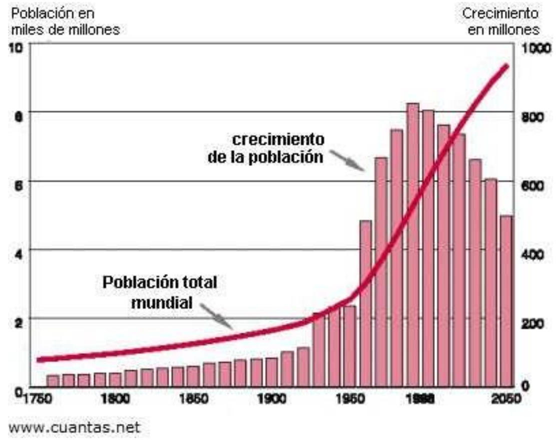
- Discreta
- n -> f[n]

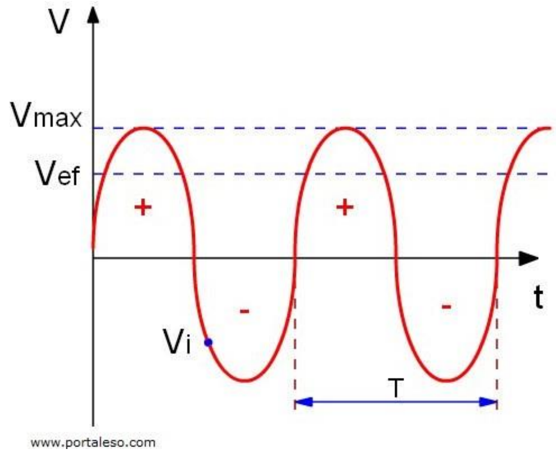


Señales Continuas y discretas









Ejemplo señales Continuas

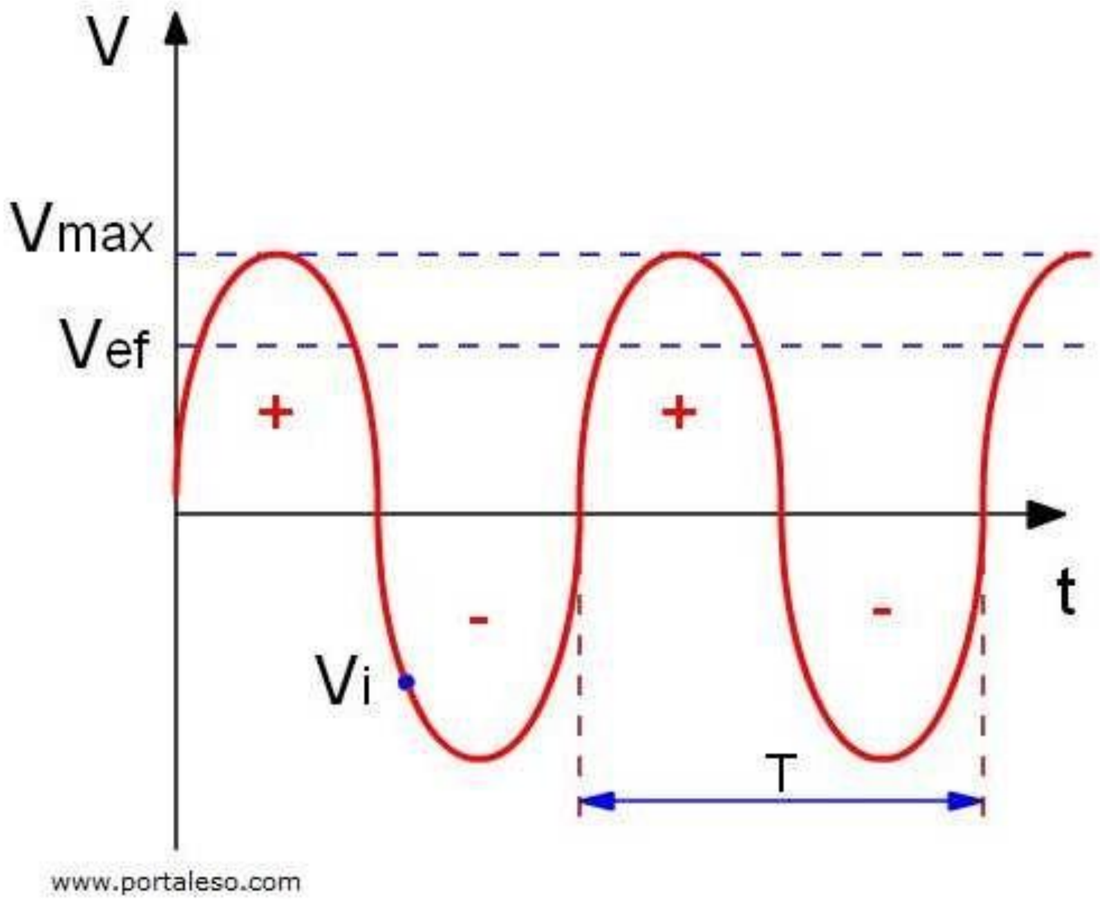


Figura: Magnitudes de corriente alterna

Ejemplo señales discretas

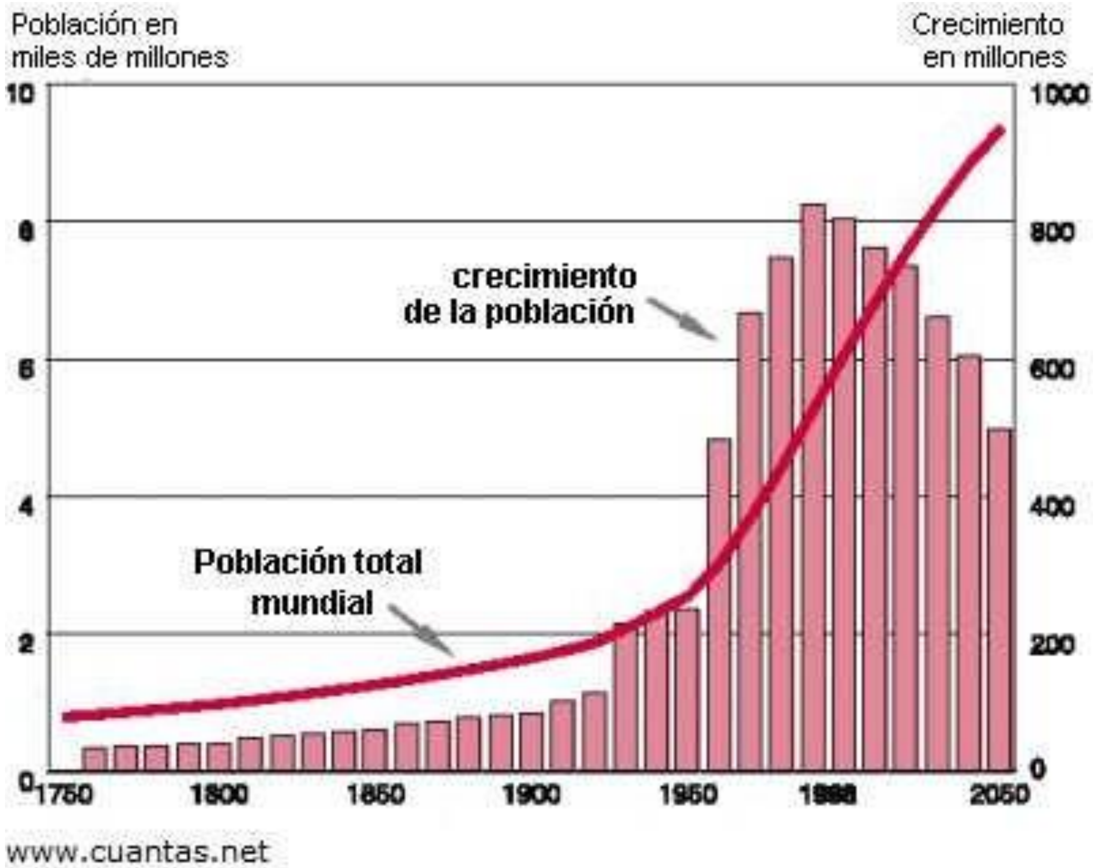


Figura: Estimación de población

Ejemplo señales discretas

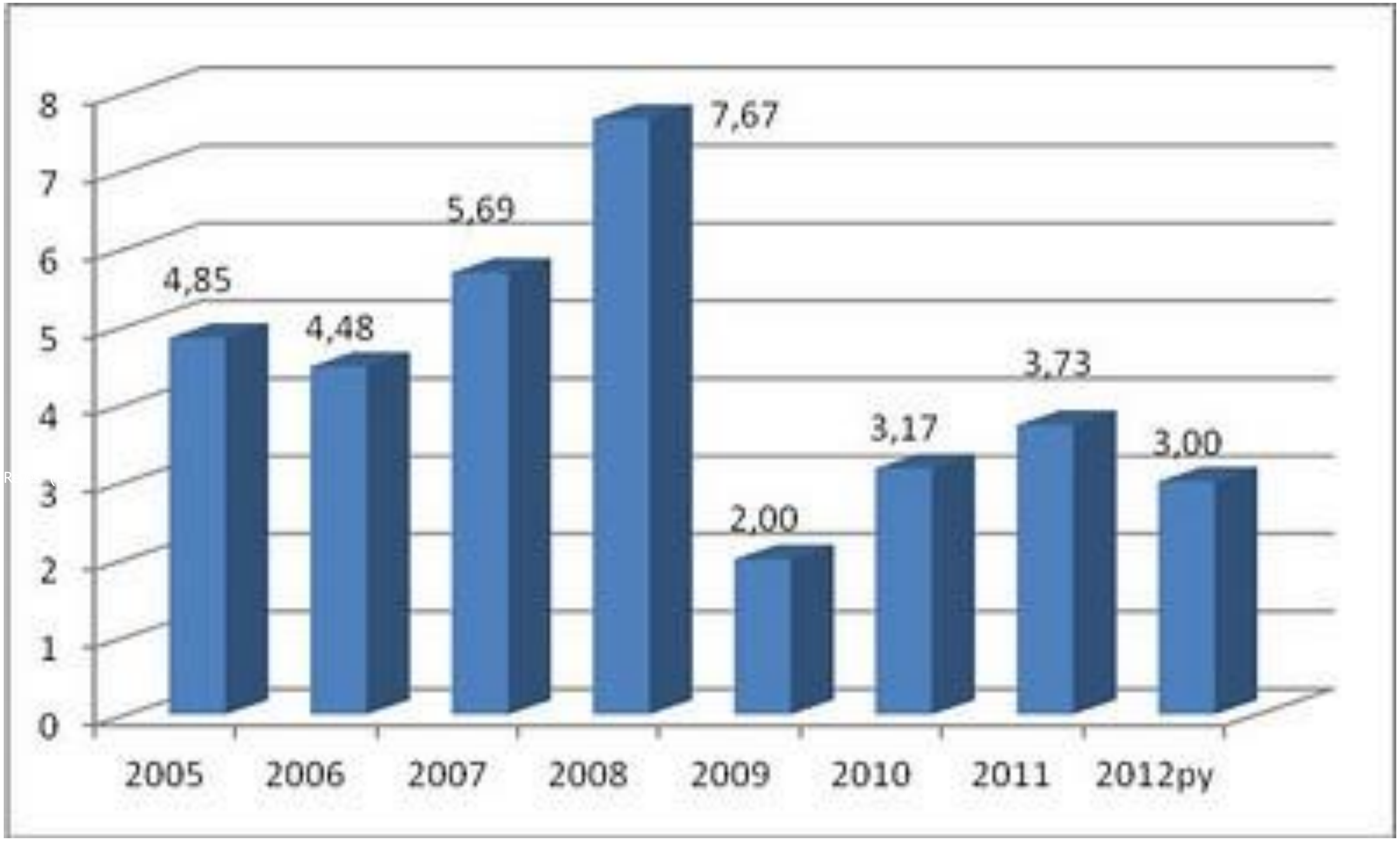


Figura: Inflación en Colombia (fuente:DANE)

Notación matemática de señales continuas y discretas

$x(t)$

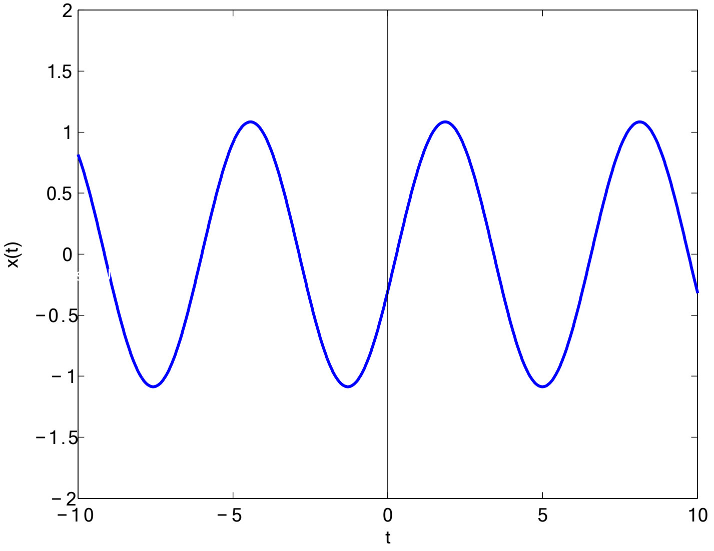


Figura: Señal continua

$x[n]$

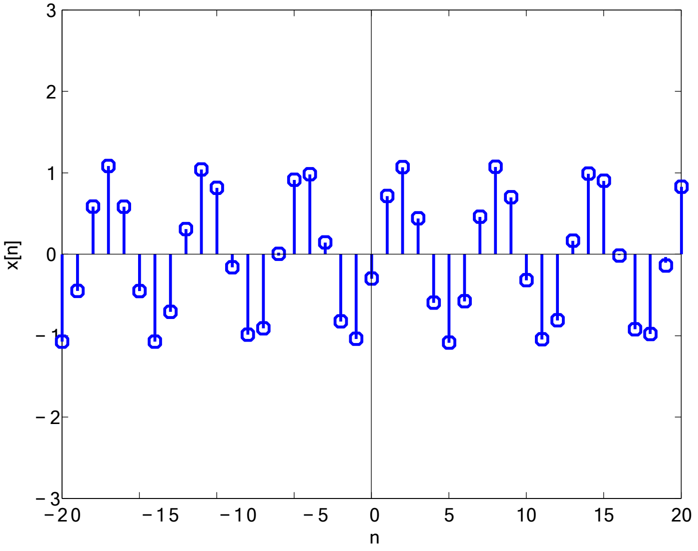


Figura: Señal discreta

Definición y clasificación de señales

Clasificación según su rango "variable dependiente"

- Sea t_1 un instante de tiempo y ε un número que pertenece a los reales positivo e infinitesimalmente pequeño
- y sean:

$$t_+ = t_1 + \varepsilon$$

$$t_- = t_1 - \varepsilon$$

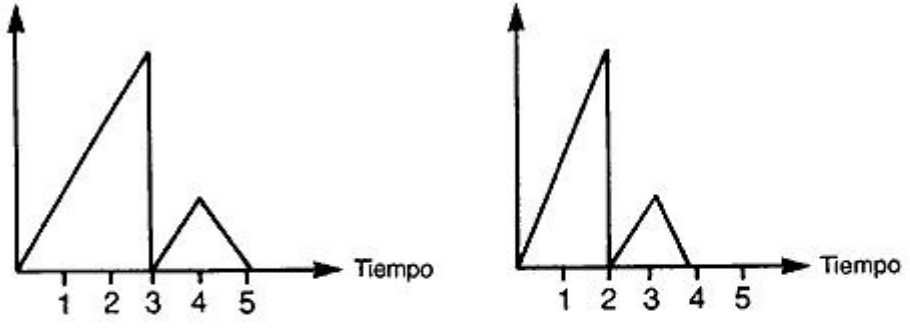
- Si se cumple $$x(t_+) = x(t_-) = x(t_1)$$
- Se dice que la señal es continua en $t=t_1$ si no se dice que la señal es discontinua en t_1, y la amplitud de la señal $x(t)$ presentará un salto en ese punto

Definición y clasificación de señales

En lo sucesivo, para indicar de manera explícita que la señal es función del tiempo, se utilizará la siguiente notación:

y, x, u otra letra indica la amplitud de la señal; t representa el tiempo;

y(t) o x(t) indica que y o x son función del tiempo.



Definición y clasificación de señales

Clasificación según su rango “variable dependiente”

- Se dice que una señal es:
- Continua si es continua en todo t (Se definen para todo tiempo t)

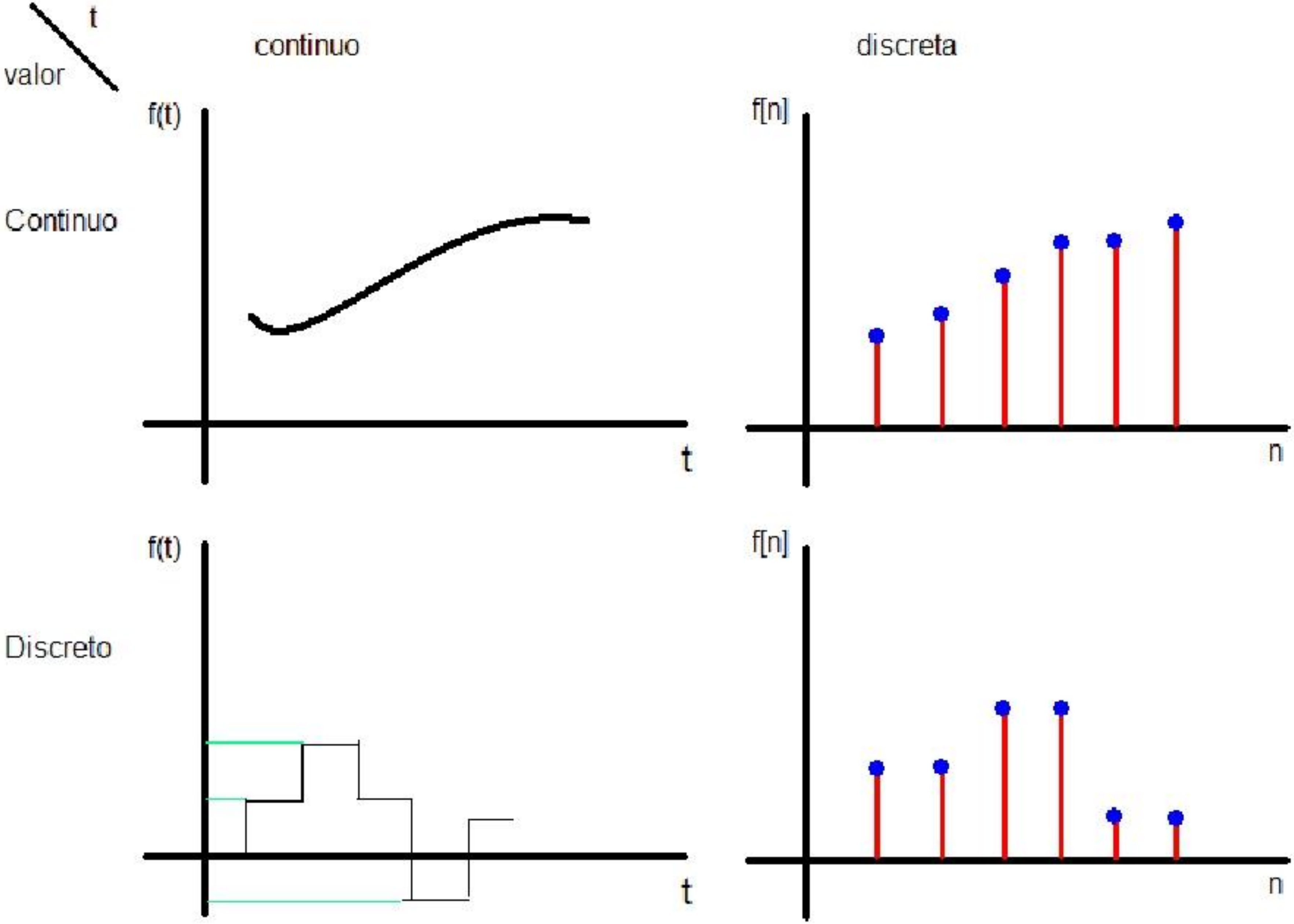
- Continua a tramos si presenta un valor finito o infinito numerable de discontinuidades siempre y cuando se produzcan saltos de amplitud finita

Definición y clasificación de señales

Clasificación según su rango “variable dependiente”

- Se dice que una señal es:
- Valor discreto si la variable dependiente solo toma valores de un conjunto numerable.

- Valor continuo si la variable dependiente toma valores en un conjunto en los reales


t
valor
continuo
discreta
f(t)
Continuo
t
f[n]
n
f(t)
Discreto
t
f[n]
n

Definición y clasificación de señales

- Una señal acotada es cualquier señal tal que existe un valor donde el valor absoluto de la señal nunca es mayor a este.

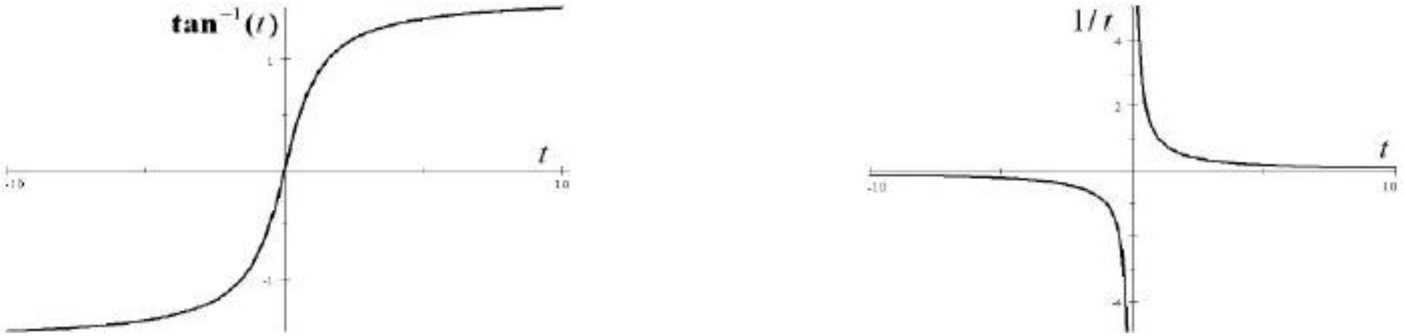


Fig. Señal acotada con infimo supremo igual a $\pm\,\pi/2$ y señal no acotada.

Una señal *x(t)* es acotada si existe un valor M ϵ $\mathbb{R}$, tal que $|x(t)| \leq M$.
Es decir una señal es acotada si tiene supremo e ínfimo reales.

Un número *x* es una cota superior del conjunto *A*, si ∀a ε A se cumple que x ≥ a ,es decir, a es mayor o igual a cada uno de los elementos de A- La mínima cota superior de un conjunto A se conoce como supremo (sup). Si el supremo pertenece al conjunto, entonces es el máximo, en caso contrario, el conjunto no tiene máximo

Definición y clasificación de señales

- El soporte de una función se define como el subconjunto del dominio dentro del cual la función toma un valor distinto de cero.
- Si su soporte es acotado se dice que tiene soporte compacto.

El Soporte de una señal continua *x(t)* es el subconjunto cerrado y conexo más pequeño del tiempo que contiene todos los valores no nulos de *x(t)*

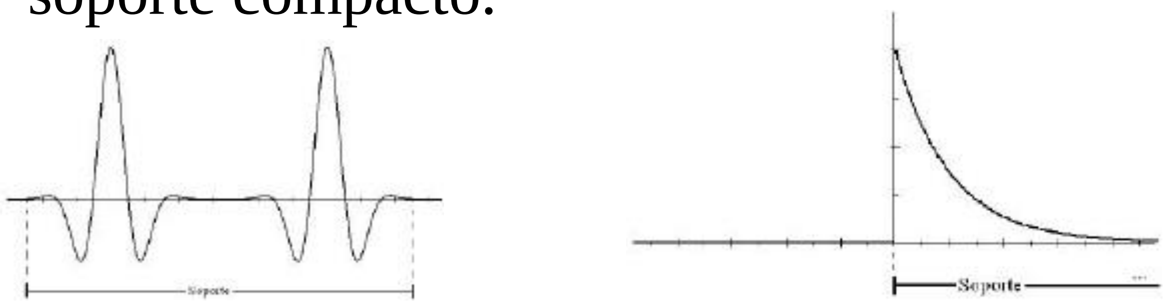


Fig. Ejemplo de soportes de señales.

Fig. Señal de soporte no acotado y señal de soporte compacto.

Definición y clasificación de señales

- $sí \; \forall \, x \; \in D$ se cumple que

$$f(x) = f(-x)$$

se dice que la señal es par

- $sí \; \forall \, x \; \in D$ se cumple que:

$$f(x) = -f(-x)$$

se dice que la señal es impar

Señales par e impar

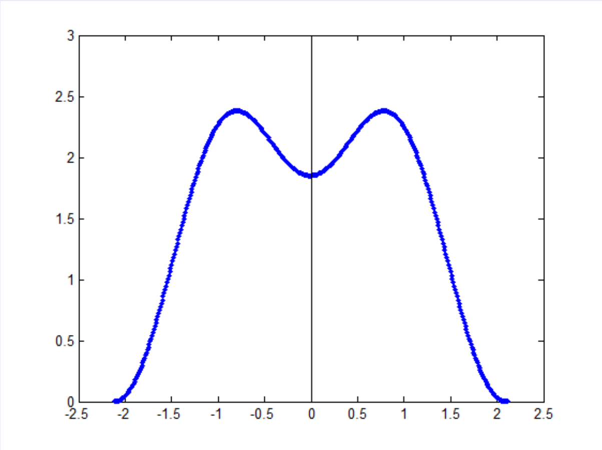
Par

Es par si es idéntica a su contraparte invertida en el tiempo:

$$x(-t) = x(t)$$

Es par en tiempo discreto si:

$$x[-n] = x[n]$$



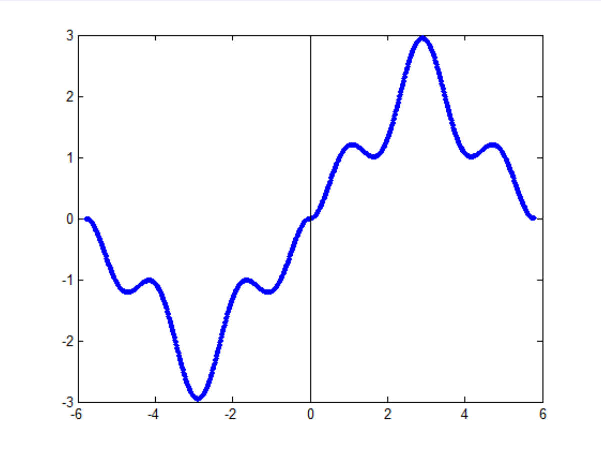
Impar

A una señal se le considera impar si:

$$x(-t) = -x(t)$$

Debe ser 0 en $t = 0$. Es impar en caso discreto si:

$$x[-n] = -x[n]$$



Señales par e impar

Par

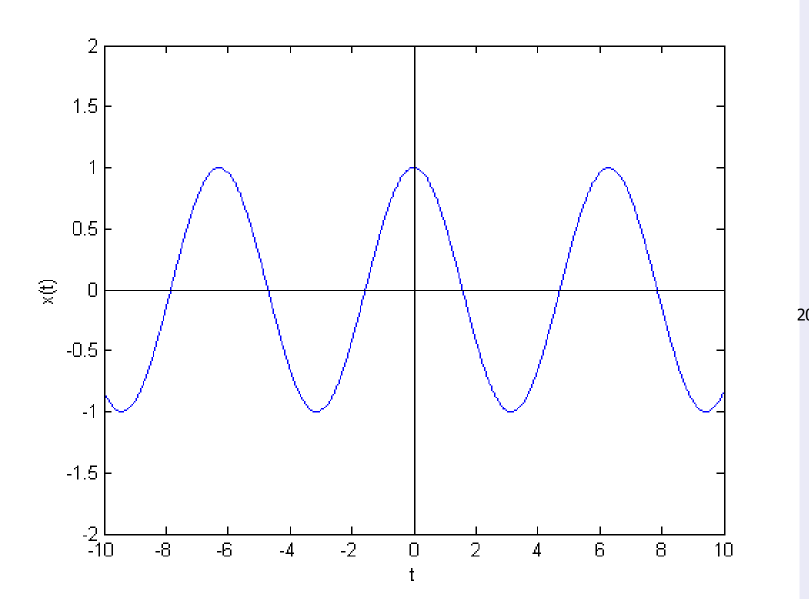


Figura: Coseno

Impar

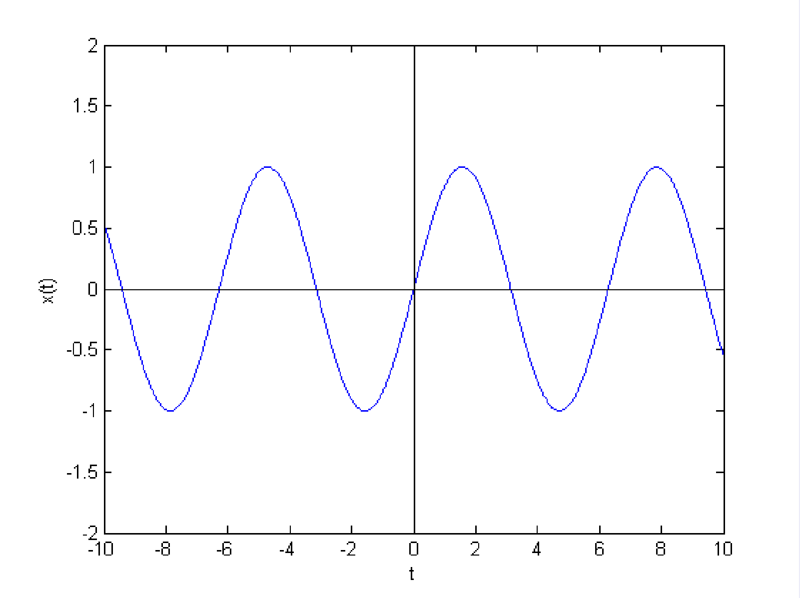


Figura: Seno

Componente par e impar de una señal

- Toda señal puede descomponerse en una parte par e impar así:

$$x(t) = x_{par}(\mathrm{t}) + x_{impar}(t)$$

- Donde:
- $x_{par}(t) = \dfrac{x(t)+x(-t)}{2}$
- $x_{impar}(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2}$

Componente par e impar de una señal

- Ejemplo 1 Descomponer una señal $x(t)$ aplicando las definiciones, es decir hallar la expresion matemática para
- $x_p(t)$ y $x_i(t)$

$$x(t) = x_i(t) + x_p(t) \qquad (1)$$

Evaluamos en $-t$

$$x(-t) = x_i(-t) + x_p(-t)$$

De las definiciones tenemos que

$$x_i(-t) = -x_i(t)$$

y

$$x_p(-t) = x_p(t)$$

Reemplazamos y obtenemos

$$x(-t) = x_p(t) - x_i(t) \qquad (2)$$

Componente par e impar de una señal

Señal par e impar (Solución)

Despejamos $x_p(t)$ y $x_i(t)$ de 1 y 2 respectivamente, y obtenemos:

$$x_p(t) = x(t) - x_i(t) \qquad (3)$$

$$x_i(t) = x_p(t) - x(-t) \qquad (4)$$

Finalmente para obtener la expresion de $x_i(t)$ reemplazamos 3 en 4

$$x_i(t) = x(t) - x_i(t) - x(-t)$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2}\,(x(t) - (x - t))$$

y para la expresion de $x_p(t)$ reemplazamos 4 en 3

$$x_p(t) = x(t) - x_p(t) + x(-t)$$

$$x_p(t) = \frac{1}{2}((x(t) + x(-t))$$

Componente par e impar de una señal

Conjugado simétrico

Si se satisface la condición

$$x(-t) = x_*(t)$$

Si $x(t) = a(t) + jb(t)$ entonces $x_*(t) = a(t) - jb(t)$ que es lo mismo que $x(-t) = a(-t) + jb(-t)$

De esta afirmación concluimos que una señal de valores complejos $x(t)$ es **conjugada simétrica** si la parte real es par y la parte imaginaria impar.

Señales periódicas y aperiódicas continuas

Una señal periódica es una señal que repite su valor después de un determinado tiempo, denominado periodo. Las señales periódicas son las funciones elegidas para la representación de señales en la teoría de Fourier.

- Cualquier señal que cumpla:

$$x(t) = x(t + nT), n = 1,2,3, \ldots$$

- Con T>0, se considera periódica de periodo fundamental T
- NOTA: T puede ser real

Señales periodicas y aperiodicas continuas

- Ejemplo

$$x(t) = Asen(w_0 \mathrm{t} + \theta)$$

A= amplitud

$$w_0 = frecuencia\ angular\ en\ \frac{rad}{seg}$$

$$\emptyset = angulo\ de\ fase$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}, T = \frac{1}{f_0}, w_0 = 2\pi f_0$$

Suma de señales periodicas

- La suma de dos señales periodicas puede o no ser periodica.
- Consideremos la suma dos señales x(t) y y(t) periodicas de periodo T_1 y T_2.

- $z(t) = ax(t) + by(t)$

Suma de señales periodicas

- Tenemos
- $z(t) = ax(t) + by(t) \quad x(t) = x(t + kT_1), k \in IN$
- $y(t) = y(t + kT_2), l \in IN$
- $z(t) = ax(t + kT_1) + by(t + lT_2)$
- $ax(t) + by(t) = ax(t + kT_1) + by(t + lT_2)$

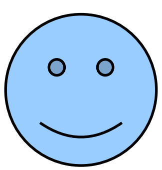
$$z(t) = z(t + nT)$$

Suma de señales periodicas

$$ax(t) + by(t) = ax(t + kT_1) + by(t + lT_2)$$
$$z(t) = z(t + nT)$$

- Se puede decir:

$$ax(t) + by(t) = ax(t + kT_1) + by(t + lT_2)$$



$$T = kT_1 = lT_2$$

En otras palabras, la suma de dos señales periódicas es periódica solo si el cociente de sus respectivos períodos se puede expresar como un número racional

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{l}{k} \in \mathbb{Q}$$

ejercicio: determinar el periodo de:

$$x_1(t) = sen\left(\frac{2\pi}{5}t\right) + sen\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$$

Referencias

- *Señales y sistemas continuos y discretos, Soliman. S y Srinath. M. 2ª edición cap 1*
- *Apuntes de clase Prof. José Ramón Iglesias UPC*