

Análisis de Señales

Señales exponenciales y sinusoidales

Dr. José Ramón Iglesias

DSP-ASIC BUILDER GROUP

Director Semillero TRIAC

Ingeniería Electrónica

Universidad Popular del Cesar

Agenda

- 1 Señales exponenciales y sinusoidales
- 2 Sistemas continuos y discretos
- 3 Propiedades básicas de los sistemas

Señales continuas exponencial compleja y sinusoidal

Definición

La señal continua exponencial compleja es de la forma

$$x(t) = Ce^{at},$$

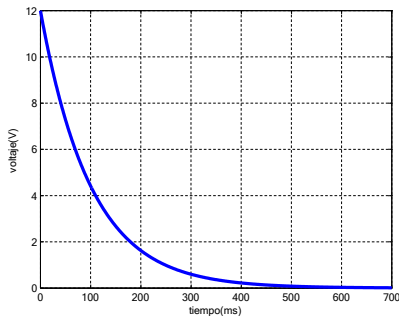


Figura: Descarga de un condensador.

Señales exponencial reales

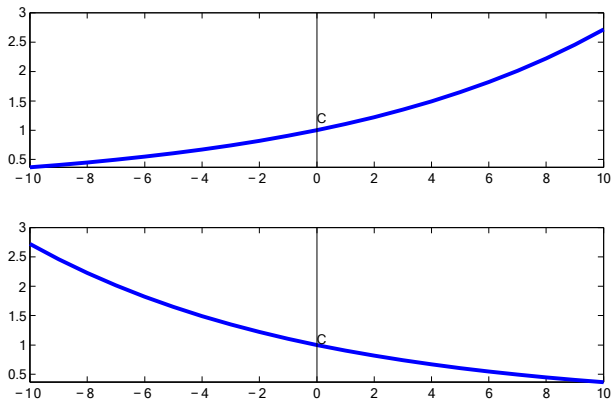


Figura: Exponencial real continua $x(t) = Ce^{at}$

Señales periódicas exponencial compleja y sinusoidal

Se obtiene considerando el campo puramente imaginario

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Señales periódicas exponencial compleja y sinusoidal

Se obtiene considerando el campo puramente imaginario

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Esta señal será periódica con periodo T si

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

Señales periódicas exponencial compleja y sinusoidal

Se obtiene considerando el campo puramente imaginario

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Esta señal será periódica con periodo T si

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

Para que sea periódica debemos tener

$$e^{j\omega_0 T} = 1$$

Señales periódicas exponencial compleja y sinusoidal

Usando la relación de Euler, la exponencial compleja se puede escribir en términos de señales sinusoidales con el mismo periodo fundamental

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

Señales periódicas exponencial compleja y sinusoidal

Usando la relación de Euler, la exponencial compleja se puede escribir en términos de señales sinusoidales con el mismo periodo fundamental

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

- Si $\omega_0 = 0$, entonces $x(t) = 1$, la cual es periódica para cualquier valor de T . Si $\omega_0 \neq 0$ entonces el periodo fundamental T_0 de $x(t)$ es

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

Señales periódicas exponencial compleja y sinusoidal

Una señal relacionada en forma muy estrecha con la exponencial periódica compleja es la *señal sinusoidal*

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

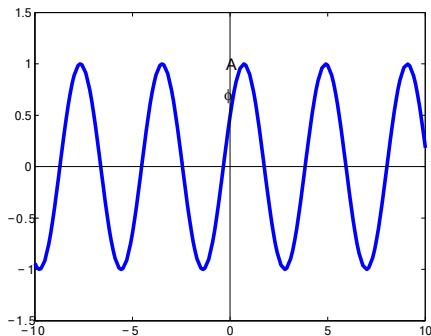


Figura: Señal sinusoidal continua $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Señales periódicas exponencial compleja y sinusoidal

Usando la relación de Euler, la exponencial compleja se puede escribir en términos de señales sinusoidales con el mismo periodo fundamental

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

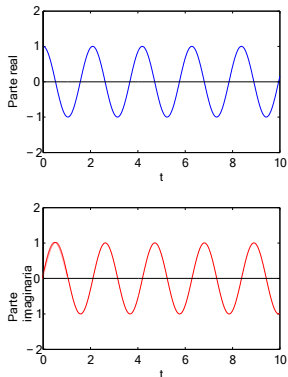


Figura: Parte imaginaria y real de una exponencial compleja

Señales periódicas exponencial compleja y sinusoidal

Usando la relación de Euler

$$Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)} = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + jA \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$Ae^{-j(\omega_0 t + \varphi)} = A \cos(\omega_0 t + \varphi) - jA \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

La señal sinusoidal en términos de exponenciales complejas periódicas

$$2A \cos(\omega_0 t + \varphi) = Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)} + Ae^{-j(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}}{2}$$

$$A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 t}$$

Señales periódicas exponencial compleja y sinusoidal

Usando la relación de Euler

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sen \omega_0 t$$

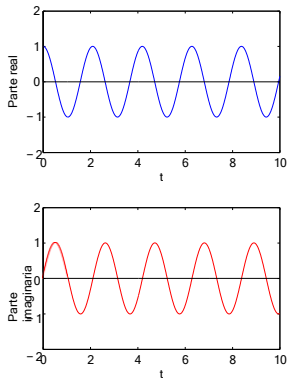


Figura: Parte imaginaria y real de una exponencial compleja

Señales periódicas exponencial compleja y sinusoidal

Usando la relación de Euler

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sen \omega_0 t$$

- Podemos expresar una sinusoidal en términos de la señal exponencial compleja

$$A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \operatorname{Re} e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

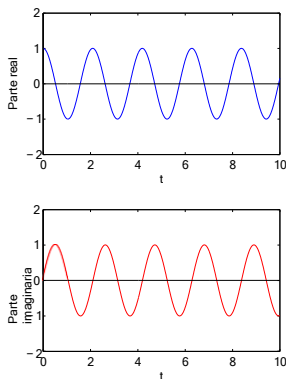


Figura: Parte imaginaria y real de una exponencial compleja

Señales periódicas exponencial compleja y sinusoidal

Usando la relación de Euler

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sen \omega_0 t$$

- Podemos expresar una sinusoidal en términos de la señal exponencial compleja

$$A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \operatorname{Re} e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

- Para la parte imaginaria

$$A \sen(\omega_0 t + \varphi) = A \operatorname{Im} e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

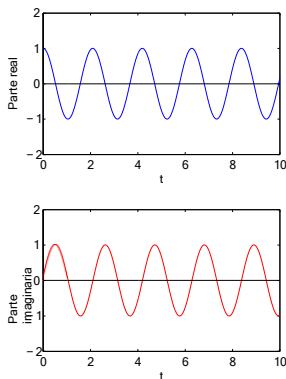


Figura: Parte imaginaria y real de una exponencial compleja

Señales periódicas exponencial compleja y sinusoidal

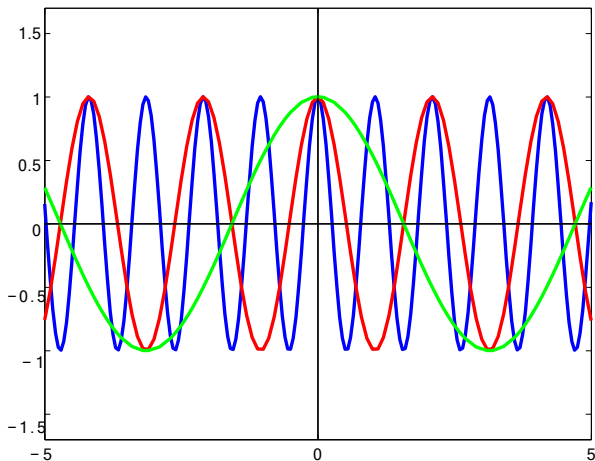


Figura: Relación entre la frecuencia fundamental y el periodo; $T_1 < T_2 < T_3$,
 $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$

Señales periódicas exponencial compleja y sinusoidal

Definición

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

El periodo fundamental T_0 de una señal sinusoidal continua o una exponencial compleja periódica es inversamente proporcional a $|\omega_0|$, a la cual nos referimos como *frecuencia fundamental*

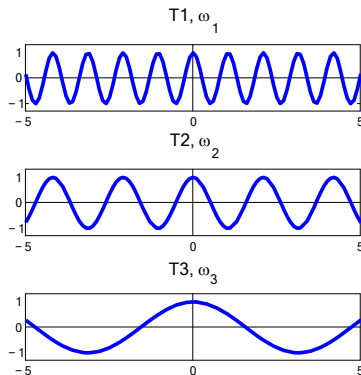


Figura: Relación entre la frecuencia fundamental y el periodo;

$$T_1 < T_2 < T_3, \omega_1 > \omega_2 > \omega_3$$

Conjuntos de exponenciales complejas *relacionadas armónicamente*

Son conjuntos de exponenciales periódicas , las cuales son periódicas, con un periodo común T_0 . Para que sea periódica con periodo T_0

$$e^{j\omega T_0} = 1,$$

Conjuntos de exponenciales complejas *relacionadas armónicamente*

Son conjuntos de exponenciales periódicas, las cuales son periódicas, con un periodo común T_0 . Para que sea periódica con periodo T_0

$$e^{j\omega T_0} = 1,$$

lo cual implica que ωT_0 sea un múltiplo de 2π

$$\omega T_0 = 2\pi k,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Conjuntos de exponenciales complejas *relacionadas armónicamente*

Son conjuntos de exponenciales periódicas, las cuales son periódicas, con un periodo común T_0 . Para que sea periódica con periodo T_0

$$e^{j\omega T_0} = 1,$$

lo cual implica que ωT_0 sea un múltiplo de 2π

$$\omega T_0 = 2\pi k,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

■ Por lo tanto

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0} k$$

Conjuntos de exponenciales complejas *relacionadas armónicamente*

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Para $k = 0$, $\varphi_k(t)$ es una constante, mientras que para cualquier otro valor de k , $\varphi_k(t)$ es periódica con frecuencia fundamental $|k|\omega_0$ y periodo fundamental

$$\frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|}$$

Señales exponencial complejas generales

En una exponencial compleja Ce^{at} donde C se expresa en forma polar y a en forma rectangular

$$C = |C|e^{j\vartheta}$$

y

$$a = r + j\omega_0$$

Señales exponencial complejas generales

En una exponencial compleja Ce^{at} donde C se expresa en forma polar y a en forma rectangular

$$C = |C|e^{j\vartheta}$$

y

$$a = r + j\omega_0$$

Entonces

$$Ce^{at} = |C|e^{j\vartheta}e^{(r+j\omega_0)t} = |C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t + \vartheta)}$$

Señales exponencial complejas generales

En una exponencial compleja Ce^{at} donde C se expresa en forma polar y a en forma rectangular

$$C = |C|e^{j\vartheta}$$

y

$$a = r + j\omega_0$$

Entonces

$$Ce^{at} = |C|e^{j\vartheta}e^{(r+j\omega_0)t} = |C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t + \vartheta)}$$

Usando la relación de Euler

$$Ce^{at} = |C|e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta)$$

Señales exponencial complejas generales

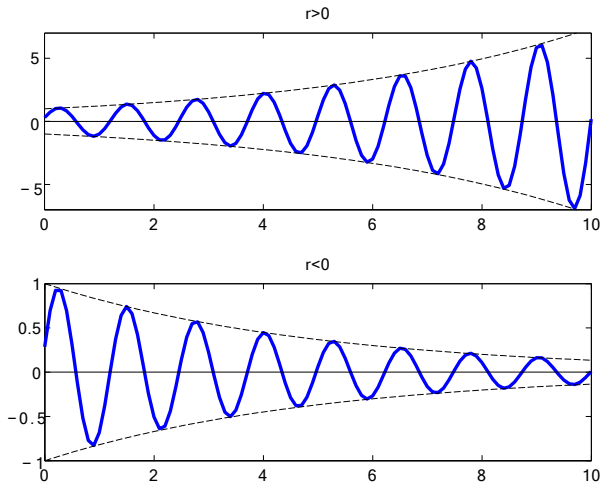


Figura: Señales sinusoidal creciente y decreciente $x(t) = Ce^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta)$

Señales discretas exponencial compleja y sinusoidal

En tiempo discreto la señal o secuencia exponencial compleja está definida por

$$x[n] = Ca^n,$$

donde C y a son, en general, números complejos.



Figura: Ingresos del mercado online de viajes

Señales discretas exponencial compleja y sinusoidal

En tiempo discreto la señal o secuencia exponencial compleja está definida por

$$x[n] = Ca^n,$$

donde C y a son, en general, números complejos.

Se puede escribir como

$$x[n] = Ce^{\beta n},$$

donde

$$a = e^{\beta}$$

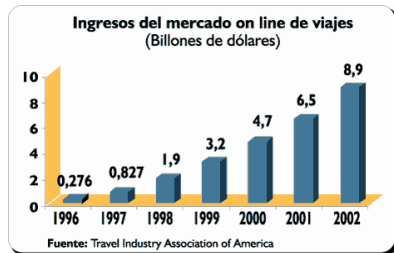


Figura: Ingresos del mercado online de viajes

Señales exponenciales reales

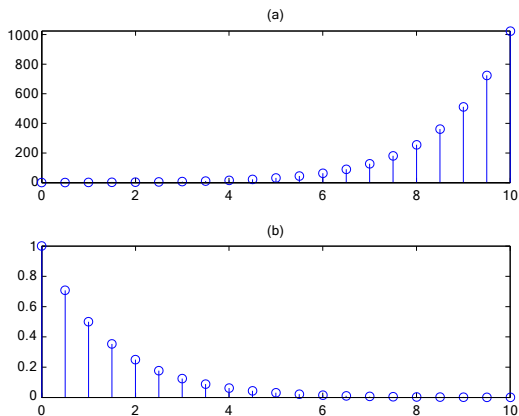


Figura: Señal exponencial real $x[n] = Ca^n$ (a) $a > 1$; (b) $0 < a < 1$

Señales exponenciales reales

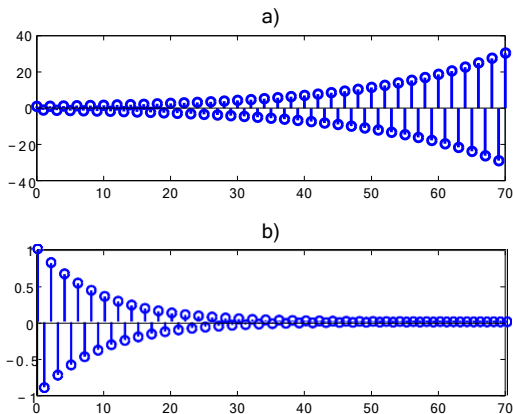


Figura: Señal exponencial real $x[n] = Ca^n$ (a) $a < -1$; (b) $-1 < a < 0$

Señales sinusoidales

Si β es puramente imaginaria

$$x[n] = e^{\beta n} = e^{j\omega_0 n}$$

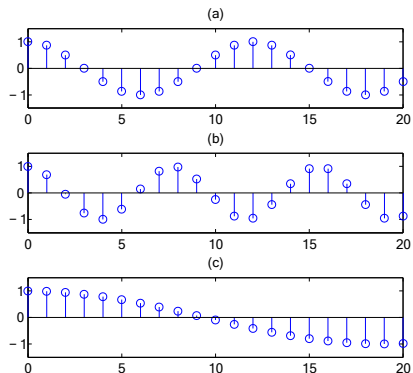


Figura: Señales sinusoidales discretas.
(a) $\cos(2\pi n/12)$; (b) $\cos(8\pi n/31)$;
(c) $\cos(n/6)$

Señales sinusoidales

Si β es puramente imaginaria

$$x[n] = e^{\beta n} = e^{j\omega_0 n}$$

- Esta señal está relacionada en forma muy estrecha con una señal sinusoidal

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$$

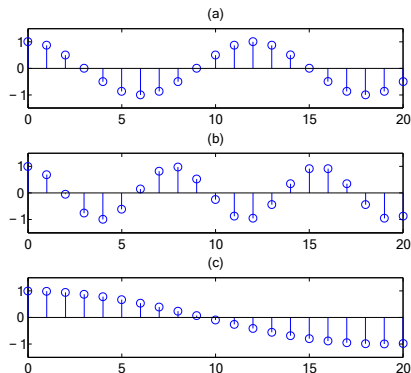


Figura: Señales sinusoidales discretas.
(a) $\cos(2\pi n/12)$; (b) $\cos(8\pi n/31)$;
(c) $\cos(n/6)$

Señales sinusoidales

Como antes, la relación de Euler nos permite relacionar las exponenciales complejas y sinusoidales

$$e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)$$

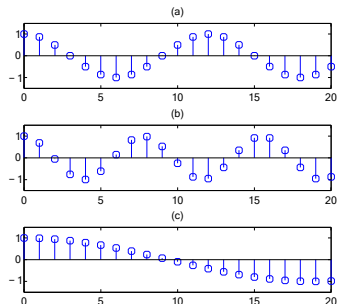


Figura: Señales sinusoidales discretas. (a) $\cos(2\pi n/12)$; (b) $\cos(8\pi n/31)$; (c) $\cos(n/6)$

Señales sinusoidales

Como antes, la relación de Euler nos permite relacionar las exponenciales complejas y sinusoidales

$$e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)$$

■ y

$$A \cos(\omega_0 n + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}$$

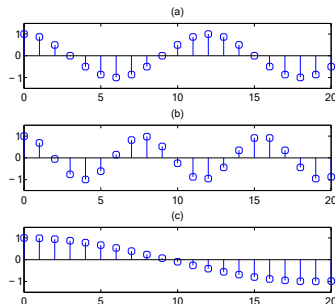


Figura: Señales sinusoidales discretas. (a) $\cos(2\pi n/12)$; (b) $\cos(8\pi n/31)$; (c) $\cos(n/6)$

Señales exponencial complejas generales

Si escribimos C y a en forma polar, a saber

$$C = |C|e^{j\vartheta}$$

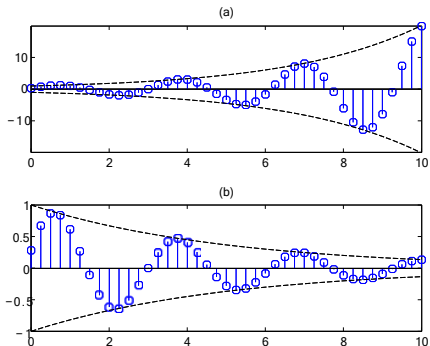


Figura: (a) Señales sinusoidales crecientes discretas; (b) sinusoidal decreciente discreta.

Señales exponencial complejas generales

Si escribimos C y a en forma polar, a saber

$$C = |C|e^{j\vartheta}$$

y

$$a = |a|e^{j\omega_0}$$

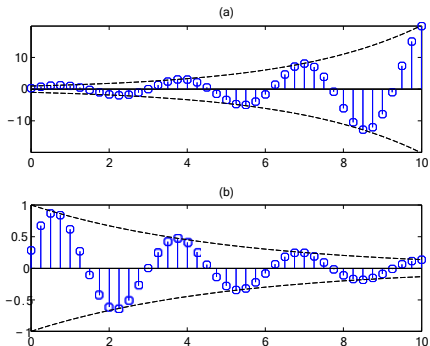


Figura: (a) Señales sinusoidales crecientes discretas; (b) sinusoidal decreciente discreta.

Señales exponencial complejas generales

Si escribimos C y a en forma polar, a saber

$$C = |C|e^{j\vartheta}$$

■ y

$$a = |a|e^{j\omega_0}$$

■ entonces

$$Ca^n = |C||a|^n \cos(\omega_0 n + \theta)$$

$$+ j|C||a|^n \sin(\omega_0 n + \theta)$$

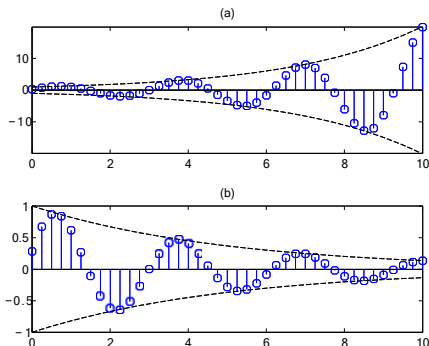


Figura: (a) Señales sinusoidales crecientes discretas; (b) sinusoidal decreciente discreta.

Propiedades de periodicidad de exponenciales discretas

Propiedad 1

Considere la exponencial compleja discreta con frecuencia $\omega_0 + 2\pi$

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

Propiedades de periodicidad de exponenciales discretas

Propiedad 1

Considere la exponencial compleja discreta con frecuencia $\omega_0 + 2\pi$

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

La exponencial con frecuencia $\omega_0 + 2\pi$ es la misma que aquella con frecuencia ω_0 .

Propiedades de periodicidad de exponenciales discretas

Propiedad 1

Considere la exponencial compleja discreta con frecuencia $\omega_0 + 2\pi$

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

La exponencial con frecuencia $\omega_0 + 2\pi$ es la misma que aquella con frecuencia ω_0 .

Para $\omega_0 = \pi$ o cualquier otro múltiplo impar de π

$$e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n$$

De manera que la señal oscila rápidamente, cambiando el signo en cada punto de tiempo.

Propiedades de periodicidad de exponenciales discretas

Propiedad 2

Para que la señal $e^{j\omega_0 n}$ sea periódica con periodo $N > 0$, debemos tener

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$$

Propiedades de periodicidad de exponenciales discretas

Propiedad 2

Para que la señal $e^{j\omega_0 n}$ sea periódica con periodo $N > 0$, debemos tener

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$$

o, de manera equivalente

$$e^{j\omega_0 N} = 1$$

Propiedades de periodicidad de exponenciales discretas

Propiedad 2

Para que la señal $e^{j\omega_0 n}$ sea periódica con periodo $N > 0$, debemos tener

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$$

o, de manera equivalente

$$e^{j\omega_0 N} = 1$$

Para que se cumpla $\omega_0 N$ debe ser un múltiplo de 2π . Debe haber un entero m tal que

$$\omega_0 N = 2\pi m$$

Propiedades de periodicidad de exponenciales discretas

Propiedad 2

Para que la señal $e^{j\omega_0 n}$ sea periódica con periodo $N > 0$, debemos tener

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$$

o, de manera equivalente

$$e^{j\omega_0 N} = 1$$

Para que se cumpla $\omega_0 N$ debe ser un múltiplo de 2π . Debe haber un entero m tal que

$$\omega_0 N = 2\pi m$$

o equivalente

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

Secuencia de sinusoidales discretas para diferentes frecuencias

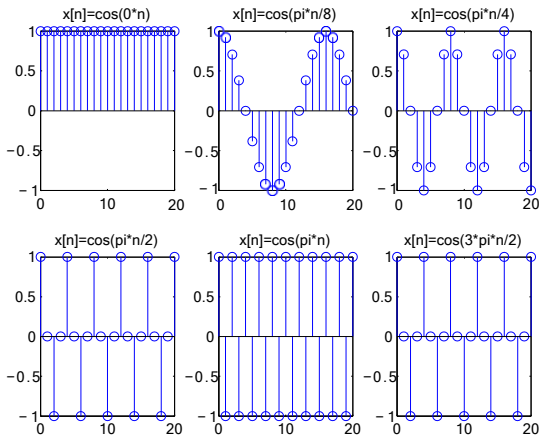


Figura: Secuencia de sinusoidales discretas para diferentes frecuencias

Secuencia de sinusoidales discretas para diferentes frecuencias

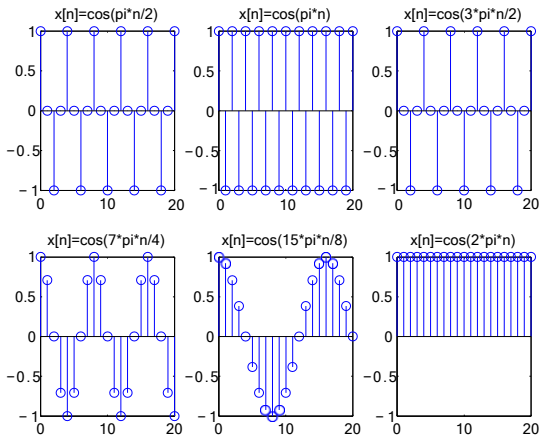


Figura: Secuencia de sinusoidales discretas para diferentes frecuencias

Propiedades

Continuas $e^{j\omega_0 t}$

Señales para distintos valores de ω_0 .

Discretas $e^{j\omega_0 n}$

Señales idénticas para valores de ω_0 separadas por múltiplo de 2π .

Propiedades

Continuas $e^{j\omega_0 t}$

Señales para distintos valores de ω_0 .

Periódica para cualquier elección de ω_0 .

Discretas $e^{j\omega_0 n}$

Señales idénticas para valores de ω_0 separadas por múltiplo de 2π .

Periódica sólo si $\omega_0 = 2\pi m/N$ para algunos enteros $N > 0$ y m .

Propiedades

Continuas $e^{j\omega_0 t}$

Señales para distintos valores de ω_0 .

Periódica para cualquier elección de ω_0 .

Frecuencia fundamental ω_0 .

Discretas $e^{j\omega_0 n}$

Señales idénticas para valores de ω_0 separadas por múltiplo de 2π .

Periódica sólo si $\omega_0 = 2\pi m/N$ para algunos enteros $N > 0$ y m .

Frecuencia fundamental ω_0/m (se supone que m y N no tienen ningún factor en común).

Propiedades

Continuas $e^{j\omega_0 t}$

Señales para distintos valores de ω_0 .

Periódica para cualquier elección de ω_0 .

Frecuencia fundamental ω_0 .

Periodo fundamental

$\omega_0 = 0$: indefinido

$$\omega_0 \neq 0 : \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Discretas $e^{j\omega_0 n}$

Señales idénticas para valores de ω_0 separadas por múltiplo de 2π .

Periódica sólo si $\omega_0 = 2\pi m/N$ para algunos enteros $N > 0$ y m .

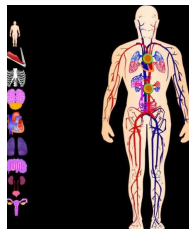
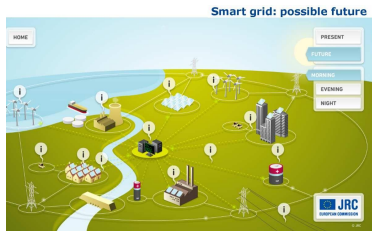
Frecuencia fundamental ω_0/m (se supone que m y N no tienen ningún factor en común).

Periodo fundamental

$\omega_0 = 0$: indefinido

$$\omega_0 \neq 0 : m \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Ejemplos sencillos de sistemas



Ejemplos sencillos de sistemas

Smart grid: possible future



Figura: Sistema de transmisión eléctrica. <http://ses.jrc.ec.europa.eu//>

Ejemplos sencillos de sistemas

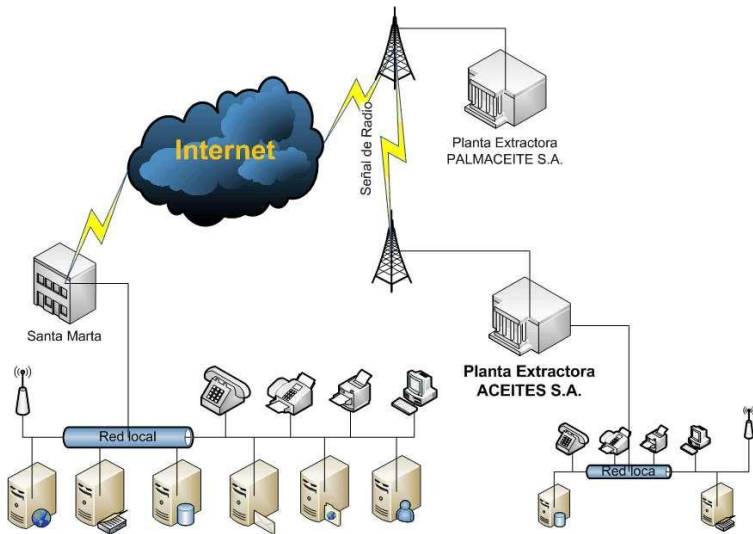


Figura: Sistema de comunicaciones. Fuente: www.aceitesa.com

Ejemplos sencillos de sistemas



Figura: Refinación de petróleo. Fuente: www.acuna-sa.cl

Ejemplos sencillos de sistemas



Figura: Diagrama circular económico. Fuente: e-educativa.catedu.es

Ejemplos sencillos de sistemas

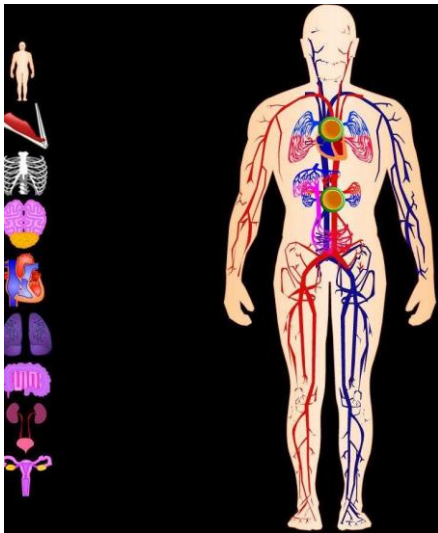


Figura: Cuerpo humano. cuerpohumano23.blogspot.com

Ejemplos sencillos de sistemas

Considere un circuito RC. Si consideramos a $v_s(t)$ como la señal de entrada y a $v_c(t)$ como señal de salida. La caída de voltaje a través del resistor

$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}$$

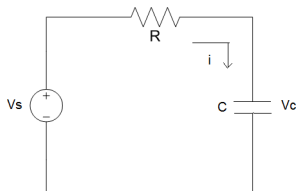


Figura: Circuito eléctrico

Ejemplos sencillos de sistemas

Considere un circuito RC. Si consideramos a $v_s(t)$ como la señal de entrada y a $v_c(t)$ como señal de salida. La caída de voltaje a través del resistor

$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}$$

- La relación básica para un condensador, relacionando $i(t)$ con la razón del cambio del voltaje

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

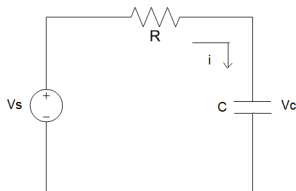


Figura: Circuito eléctrico

Ejemplos sencillos de sistemas

$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}$$

- La relación básica para un condensador, relacionando $i(t)$ con la razón del cambio del voltaje

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

- Igualando se obtiene una relación entrada-salida

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_s(t)$$

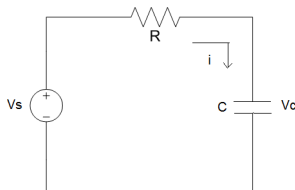


Figura: Circuito eléctrico

Propiedades básicas de los sistemas

- Sistemas con y sin memoria
- Invertibilidad y sistemas inversos
- Causalidad
- Estabilidad
- Invariancia en el tiempo
- Linealidad

Sistemas con y sin memoria

Definicion

Se dice que un sistema es *sin memoria* si su salida para cada valor de la variable independiente en un tiempo dado depende solamente de la entrada en el mismo tiempo.

$$y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2$$

$$y[n] = x[n - 1]$$

$$y[n] = x[n + 1]$$

Sistemas con y sin memoria

Definicion

Se dice que un sistema es *sin memoria* si su salida para cada valor de la variable independiente en un tiempo dado depende solamente de la entrada en el mismo tiempo.

$$y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2 \text{ sin memoria}$$

$$y[n] = x[n - 1] \text{ con memoria}$$

$$y[n] = x[n + 1] \text{ con memoria}$$

Invertibilidad y sistemas inversos

Definición

Se dice que un sistema es invertible si distintas entradas producen distintas salidas.

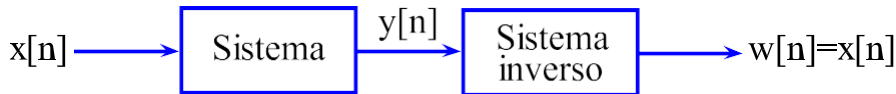


Figura: Sistema general invertible

Causalidad

Definicion

Un sistema es *causal* si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de los valores de la entrada en el momento presente y en el pasado.

$$x(t + 1)$$

$$x(t) \cos(t + 1)$$

Causalidad

Definición

Un sistema es *causal* si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de los valores de la entrada en el momento presente y en el pasado.

$x(t + 1)$ No causal

$x(t) \cos(t + 1)$ causal

Estabilidad

Definicion

Un sistema estable es aquel en el que entradas pequeñas conducen a respuestas que no divergen.

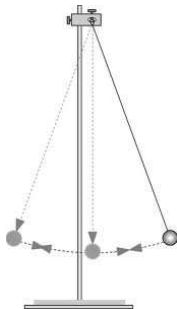


Figura: Péndulo simple

Invariancia en el tiempo

Definicion

Un sistema es invariante en el tiempo si el comportamiento y características del mismo están fijos en el tiempo.

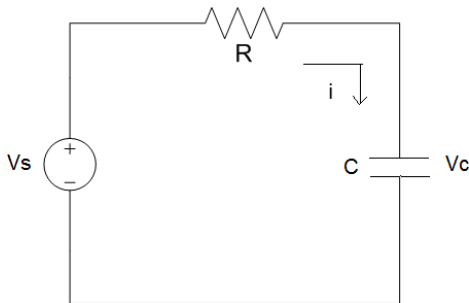


Figura: Es invariante si R y C son constantes en el tiempo

Linealidad

Definicion

Un sistema lineal, en tiempo continuo o en tiempo discreto, es aquel que posee la importante propiedad de la superposición. Sea $y_1(t)$ la respuesta del sistema continuo a una entrada $x_1(t)$, y sea $y_2(t)$ la salida correspondiente a la entrada $x_2(t)$. Entonces es lineal si:

La respuesta a $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$.

La respuesta a $ax_1(t)$ es $ay_1(t)$, donde a es una constante compleja cualquiera.

Resumen de sesión

- Señales exponenciales y sinusoidales
- Sistemas continuos y discretos
- Propiedades básicas de los sistemas

Siguiente sesión

- Sistemas LTI discretos: La suma de convolución
- Sistemas LTI continuos: La integral de convolución
- Tarea: realizar la lectura de las secciones
 - 2.1
 - 2.2

del libro *Señales y Sistemas*, Alan V. Oppenheim, Segunda Edición.