# Análisis de Señales

## Análisis de Fourier para señales Discretas

Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar

# Objetivos

1. Definir la DTFT y estudiar algunas de sus propiedades.
2. Analizar señales y SLIT discretos utilizando la transformada de Fourier.
3. Definir la DFT y estudiar algunas de sus propiedades.

# Desarrollo en serie de fourier de señales discretas y periódicas

- Una señal en tiempo discreto es periódica de periodo N si:

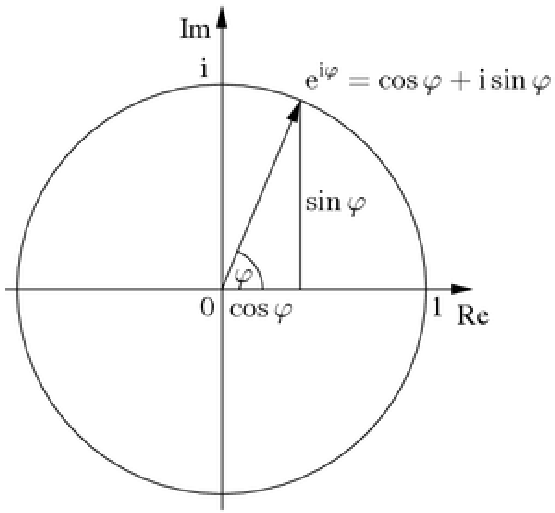
$$x(n) = x(n+N)$$

- Donde N es un entero positivo

# Desarrollo en serie de fourier de señales discretas y periódicas

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\Omega_k n}$$

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{N}$$




- Solo hay N valores de k

k ={0,1,2,3…,N-1}

# Desarrollo en serie de fourier de señales discretas y periódicas

- Reemplazando en el desarrollo en series de fourier generalizado:

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{j\frac{2\pi k n}{N}}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

- Como cada uno de los términos de la serie tiene periodo N por lo tanto su suma también tiene periodo N

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi n t}{T}} \qquad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j\frac{2\pi n t}{T}} dt$$

# Propiedades de la Serie discreta de Fourier.

- Suponiendo que x(n) es una señal periódica, de frecuencia fundamental:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

- Y con los coeficientes de la serie de fourier discreta notados como:

$$x(n) \overset{SFD}{\longleftrightarrow} a_k$$

# Propiedades de la Serie Continua de Fourier.

- **Linealidad:**

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \qquad y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$$

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k$$

- **Desplazamiento de tiempo:**

$$x(t - t_0) \overset{FS}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

# Propiedades de la Serie Continua de Fourier.

- **Convolución**

$$x(n)*h(n)\ \text{periodico} \xleftrightarrow{SFD} a_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$H(\Omega_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\Omega_k n}$$

- **Modulación**

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{SFD} c_k = a_k * b_k$$

# Propiedades de la Serie Continua de Fourier.

- **Conjugación y simetría:**

$$a_k = a^{*}_{N-k}$$

- **Convolución periódica**

$$x(t) \otimes y(t) \xleftrightarrow{SFD} c_k = N a_k b_k$$

# Transformada de fourier en tiempo discreto DTFT

Recordando la pareja transformada de fourier en tiempo discreto:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{w=-\infty}^{\infty}X(w)e^{jwt}dw \qquad X(w)=\int_{t=-\infty}^{\infty}x(t)e^{-jwt}dt$$

$$X_s(w)=\int_{t=-\infty}^{\infty}x_s(t)e^{-jwt}dt=\int_{t=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)\right)e^{-jwt}dt$$

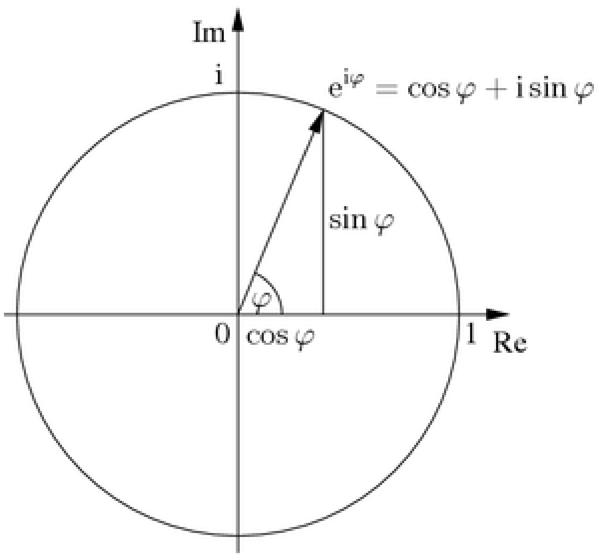
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-jwnT}$$

# Transformada de fourier en tiempo discreto DTFT

- Sustituyendo wT por la nueva frecuencia discreta Ω “en Radianes”

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$



# Propiedades de la Transformada de fourier en tiempo discreto DTFT

- Usando la notación:

$$x(n) \underset{\Im^{-1}}{\overset{\Im}{\longleftrightarrow}} X(\Omega)$$

- Y sean

$$x(n) \overset{\Im}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \qquad y(n) \overset{\Im}{\longleftrightarrow} Y(\Omega)$$

# Propiedades de la Transformada de fourier en tiempo discreto DTFT

- **Periodicidad**

$$X(\Omega + 2\pi) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$$

- **Linealidad:**

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega)$$

- **Desplazamiento de tiempo:**

$$x(n - n_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

# Propiedades de la Transformada de fourier en tiempo discreto DTFT

- **Desplazamiento en frecuencia:**

$$x(n)e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega-\omega_0)$$

- **Multiplicación “modulación”:**

$$x(n)y(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}\int X(\lambda)Y(\omega-\lambda)\,d\lambda$$

# Propiedades de la Transformada de fourier en tiempo discreto DTFT

- **Diferenciación en frecuencia**

$$n x(n) \overset{\Im}{\longleftrightarrow} \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

- **Convolución**

$$x(n) * y(n) \overset{\Im}{\longleftrightarrow} X(\Omega)\, Y(\Omega)$$

- **Desplazamiento en frecuencia:**

$$e^{j\Omega_0 n} x(n) \overset{\Im}{\longleftrightarrow} X(\Omega - \Omega_0)$$

# Propiedades de la Transformada de fourier en tiempo discreto DTFT

- **DTFT de señales periódicas:**

$$X(\Omega) = \Im\left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-jk\Omega_0 n}\right), \text{con } \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \Im\left(e^{-jk\Omega_0 n}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

$$k = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\} \qquad N\Omega_0 = 2\pi$$

$$X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$$

# Transformada discreta de Fourier DFT

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j\frac{2\pi n}{N}}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Se pretende encontrar la transformada de fourier de la secuencia discreta

$$x(n) = \begin{cases} x_{original}(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \end{cases}$$

# Transformada discreta de Fourier DFT

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{M}$$

Puede tomarse cualquier valor de M por practicidad se toma M=N

# Transformada discreta de Fourier DFT y su inversa IDFT

$$X(\Omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\Omega_k n}$$

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{N} \qquad c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\Omega_k) e^{j\Omega_k n}$$

# Propiedades de la Transformada discreta de Fourier DFT

- Usando la notación:

$$x(n) \underset{DFT^{-1}}{\overset{DFT}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

- Y sean

$$x(n) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X(k) \qquad y(n) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} Y(k)$$

# Propiedades de la Transformada discreta de Fourier DFT

- **Periodicidad**

$$X(k+N)=X(N)$$

- **Linealidad:**

[illegible]

- **Desplazamiento en n:**

[illegible]

# Propiedades de la Transformada discreta de Fourier DFT

- **IDFT inversión alternativa “y rápida”**

$$x(n) = \frac{1}{N}\{DFT(X^*(k))\}^* \qquad x(n) \xleftrightarrow[DFT^{-1}]{DFT} X(k)$$

- **Convolución**

$$X(k)H(k) \xleftrightarrow{IDFT} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)h(n-$$

# Convolución lineal mediante la DFT

Para realizar la convolución lineal de dos secuencias x(n) de longitud N y y(n) de longitud M mediante la DFT, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se expanden al final de las dos secuencias con ceros de tal manera que tengan una nueva longitud K que cumpla:

$$k \geq M + N - 1$$

2. Con estas nuevas secuencias $y_a(k)$ y $x_a(n)$ se calcula:

$$y(n) = IDFT[Y_a(k)X_a(k)]$$

# Referencias


- *Señales y sistemas continuos y discretos, Soliman. S y Srinath. M. 2ª edición cap 7*
- *Señales y sistemas ,Oppenheim, alan cap 5*
- *Apuntes de clase Prof. José Ramón Iglesias UPC*