Análisis de Señales

Series de Fourier

Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar

SERIES DE FOURIER

La serie exponencial de Fourier es un caso particular de representación señales, en el cual el conjunto de señales es la base ortogonal de exponenciales complejos de la forma $\phi_n(t) = e^{jn\Omega_0 t}$, donde $n \in \mathbf{Z}$. La elección de esta familia de señales base complejas permite la representación de señales periódicas reales y complejas.

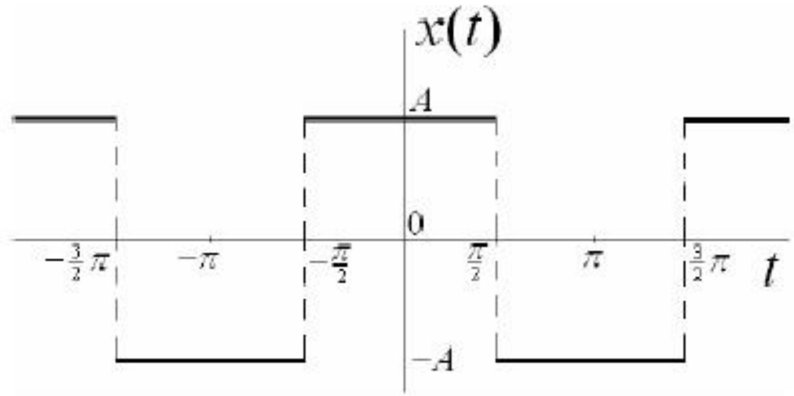
Definición. La serie exponencial de Fourier de una señal periódica $x(t)$, con periodo T, está dada por

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}}$$

donde la constante Ω_0 se conoce como *frecuencia fundamental* de la señal $x(t)$ y está definida como $\Omega_0 = 2\pi / T$. Los coeficientes c_n se conocen como *coeficientes complejos de Fourier* y pueden ser encontrados de acuerdo a

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jn\Omega_0 t}\, dt}$$

Ejemplo 4.2. Encuentre la serie exponencial de Fourier de la señal periódica que se ilustra en la Figura.



$$x(t) = \begin{cases} -A & -\pi \le t \le -\dfrac{\pi}{2} \\ A & -\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ -A & \dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi \end{cases}$$

Solución. Claramente $x(t)$ cumple con las condiciones de Dirichlet, entonces su serie exponencial de Fourier puede ser encontrada. El periodo de la señal es 2π, por lo cual $\Omega_0 = 1$ y los coeficientes de la serie son encontrados como

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-jnt}dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} -Ae^{-jnt}dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Ae^{-jnt}dt + \int_{\pi/2}^{\pi} -Ae^{-jnt}dt\right]$$

$$c_n = \frac{A}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} -e^{-jnt}dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jnt}dt - \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-jnt}dt\right]$$

Caso 1: $n = 0$

$$c_0 = \frac{A}{2\pi}\left[-\int_{-\pi}^{-\pi/2} dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt - \int_{\pi/2}^{\pi} dt\right]$$

$$c_0 = \frac{A}{2\pi}\left[\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi\right] = 0$$

Caso 2: $n \neq 0$

$$c_n = \frac{A}{2\pi}\left[\left.\frac{e^{-jnt}}{jn}\right|_{-\pi}^{-\pi/2} + \left.\frac{e^{-jnt}}{jn}\right|_{\pi/2}^{-\pi/2} - \left.\frac{e^{-jnt}}{jn}\right|_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

$$c_n = \frac{A}{2\pi jn}\left[e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{jn\pi} + e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}} + e^{-jn\pi} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$c_n = \frac{A}{2\pi jn}\left[2e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{jn\pi} - 2e^{-jn\frac{\pi}{2}} + e^{-jn\pi}\right]$$

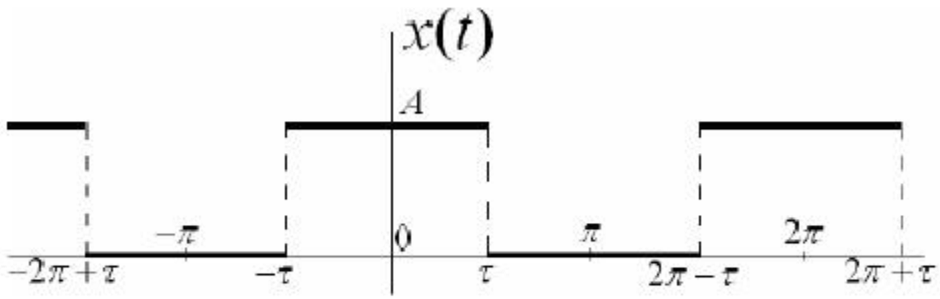
$$c_n = \frac{A}{\pi n}\left[\frac{2e^{jn\frac{\pi}{2}} - 2e^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2j} + \frac{e^{-jn\pi} - e^{jn\pi}}{2j}\right]$$

$$c_n = \frac{A}{\pi n}\left[2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2\sin(n\pi)\right] = \frac{2A}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{2A}{n\pi}\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2A}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)e^{jnt}$$

Ejemplo 4.3. Considere un tren de pulsos de ancho 2τ, como se ilustra en la Figura. Represente la señal utilizando la serie exponencial de Fourier. Considere τ como un número real en el intervalo $(0,\pi)$.



$$x(t)=\begin{cases} A & -\tau<t<\tau \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Solución. El periodo de la señal es 2π, por lo cual $\Omega_0=1$. La serie exponencial puede escribirse como

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jnt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-jnt}dt$$

En el intervalo $[-\pi,\pi]$ la señal sólo toma valor en $[-\tau,\tau]$, entonces

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau} Ae^{-jnt}dt=\frac{A}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau} e^{-jnt}dt$$

Caso 1: $n=0$

$$c_0=\frac{A}{2\pi}\left[\int_{-\tau}^{\tau} dt\right]=\frac{A}{2\pi}\left[t\Big|_{-\tau}^{\tau}\right]=\frac{A\tau}{\pi}$$

Caso 2: $n \neq 0$

$$c_n = \frac{A}{2\pi}\left[\left. \frac{-e^{-jnt}}{jn} \right|_{-\tau}^{\tau} \right] = \frac{A}{2\pi jn}\left[e^{jn\tau} - e^{-jn\tau} \right]$$

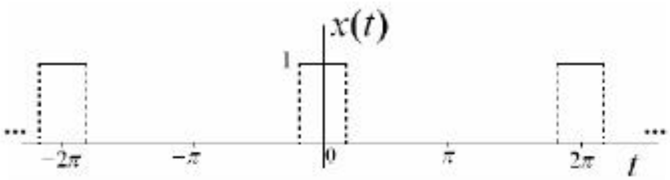
$$c_n = \frac{A}{n\pi}\sin(n\tau)$$

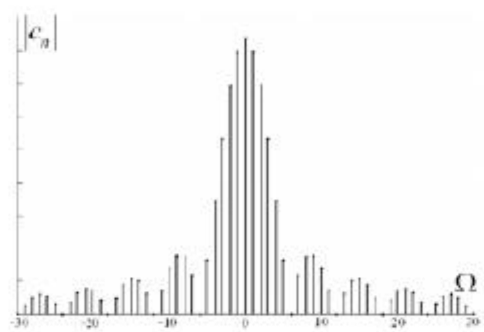
La serie exponencial de la señal puede escribirse como

$$x(t) = \frac{A\tau}{\pi} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{A}{n\pi}\sin(n\tau)e^{jnt}$$

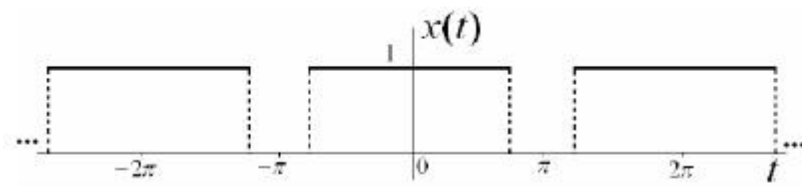
Espectro de Fourier

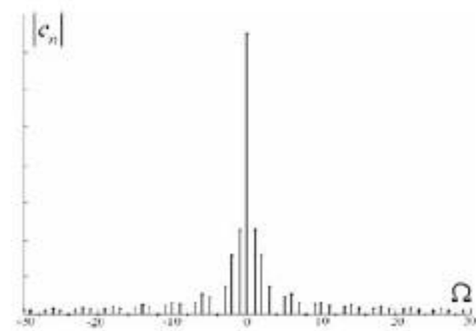
$A = 1$ y $\tau = \pi/6$





$A = 1$ y $\tau = 3\pi/4$





Ejemplo 4.4. Represente la señal $x(t) = 2\cos^2(t) + 4\sin(4t)$ como una serie exponencial de Fourier y encuentre los coeficientes c_n.

Solución. Conociendo que $\cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$, la señal puede reescribirse como

$$x(t) = 1 + \cos(2t) + 4\sin(4t) = 1 + \left(\frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2}\right) + 4\left(\frac{e^{j4t} - e^{-j4t}}{2j}\right)$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t} + \frac{2}{j}e^{j4t} - \frac{2}{j}e^{-j4t}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}$$ el coeficiente c_n acompaña al término $e^{jn\Omega_0 t}$

Para este caso, el coeficiente c_n acompaña al término e^{jn2t}, por lo cual $c_0 = 1$, $c_1 = 1/2$, $c_{-1} = 1/2$, $c_2 = -2j$ y $c_{-2} = 2j$; los demás coeficientes son cero.

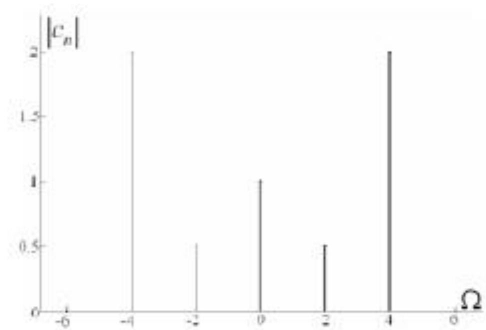


Fig. Espectro de Fourier de la señal periódica.

Serie Trigonométrica

Si se conoce que $x(t)$ es una señal real, es decir $\mathbf{Im}\{x(t)\}=0$, existe una forma equivalente de representar $x(t)$ como una serie de Fourier utilizando sólo funciones base reales que forman un sistema ortogonal.

Sea $x(t)$ una señal real con periodo T, entonces $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}$

Representemos sólo la parte real de la señal $x(t)$, para ello

$$\mathbf{Re}\{x(t)\}=\mathbf{Re}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{Re}\{c_n e^{jn\Omega_0 t}\}$$

Propiedad 4.3. $\mathbf{Re}\{x(t)y(t)\}=\mathbf{Re}\{x(t)\}\mathbf{Re}\{y(t)\}-\mathbf{Im}\{x(t)\}\mathbf{Im}\{y(t)\}$

Demostración.

$$x=\mathbf{Re}\{x\}+j\,\mathbf{Im}\{x\} \qquad (1)$$

$$x^*(t)=\mathbf{Re}\{x\}-j\,\mathbf{Im}\{x\} \qquad (2)$$

$$\mathbf{Re}\{x\}=\frac{1}{2}\left(x+x^*\right) \qquad (3)$$

$$\mathbf{Im}\{x\}=\frac{1}{2j}\left(x-x^*\right) \qquad (4)$$

$$\mathbf{Re}\{xy\}=\frac{1}{2}\left[xy+(xy)^*\right]=\frac{1}{2}\left(xy+x^*y^*\right)$$

$$\mathbf{Re}\{xy\}=\frac{1}{2}\Big[\left(\mathbf{Re}\{x\}+j\,\mathbf{Im}\{x\}\right)\left(\mathbf{Re}\{y\}+j\,\mathbf{Im}\{y\}\right)$$
$$+\left(\mathbf{Re}\{x\}-j\,\mathbf{Im}\{x\}\right)\left(\mathbf{Re}\{y\}-j\,\mathbf{Im}\{y\}\right)\Big]$$

Serie Trigonométrica (Cont.)

$$\mathbf{Re}\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\mathbf{Re}\{c_n\}\,\mathbf{Re}\{e^{jn\Omega_0 t}\}\right) - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\mathbf{Im}\{c_n\}\,\mathbf{Im}\{e^{jn\Omega_0 t}\}\right)$$

$$\mathbf{Re}\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{Re}\{c_n\}\,\mathbf{cos}(n\Omega_0 t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{Im}\{c_n\}\,\mathbf{sin}(n\Omega_0 t)$$

$$\mathbf{Re}\{x\} = \frac{1}{2}\left(x + x^*\right)$$

$$\mathbf{Im}\{x\} = \frac{1}{2j}\left(x - x^*\right)$$

$$\mathbf{Re}\{x(t)\} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c_n + c_n^*\right)\mathbf{cos}(n\Omega_0 t) - \frac{1}{2j}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c_n - c_n^*\right)\mathbf{sin}(n\Omega_0 t)$$

Dado que $x(t)$ es real, $\mathbf{Re}\{x(t)\} = x(t)$ y $c_n^* = c_{-n}$, por lo cual

$$x(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(c_n + c_{-n}\right)\mathbf{cos}(n\Omega_0 t)}_{\text{par}} + \frac{j}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(c_n - c_{-n}\right)\mathbf{sin}(n\Omega_0 t)}_{\text{par}}$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n + c_{-n}\right)\mathbf{cos}(n\Omega_0 t) + j\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - c_{-n}\right)\mathbf{sin}(n\Omega_0 t)$$

Serie Trigonométrica (Cont.)

Definamos los coeficientes de la serie trigonométrica, de acuerdo a

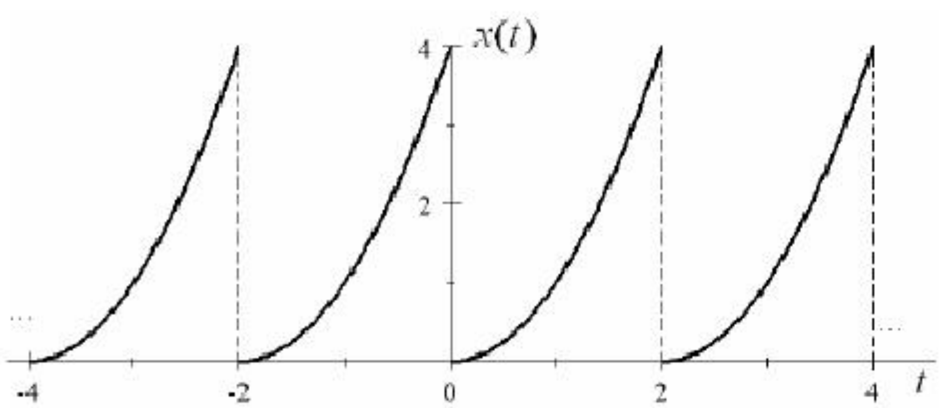
$$\boxed{a_0 = c_0} \qquad \boxed{a_n = c_n + c_{-n}} \qquad \boxed{b_n = j(c_n - c_{-n})}$$

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega_0 t)}$$

donde

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt} \qquad \boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(n\Omega_0 t)dt} \qquad \boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(n\Omega_0 t)dt}$$

Ejemplo 4.9. Represente la señal $x(t)$ utilizando la serie trigonométrica de Fourier.



$$x(t) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ (t+2)^2 & -2 < t < 0 \\ t^2 & 0 < t < 2 \\ (t-2)^2 & 2 < t < 4 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Serie Trigonométrica (Cont.)

Solución. La señal $x(t)$ tiene periodo $T=2$, por lo tanto $\Omega_0=\pi$.

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^T t^2 dt=\left.\frac{t^3}{6}\right|_0^2=\frac{4}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\Omega_0 t)dt=\int_0^2 t^2\cos(n\pi t)dt=\frac{4}{(n\pi)^2}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\Omega_0 t)dt=\int_0^2 t^2\sin(n\pi t)dt=-\frac{4}{n\pi}$$

La serie trigonométrica de Fourier para $x(t)$ viene dada por

$$x(t)=\frac{4}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n\pi t)-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi t)$$

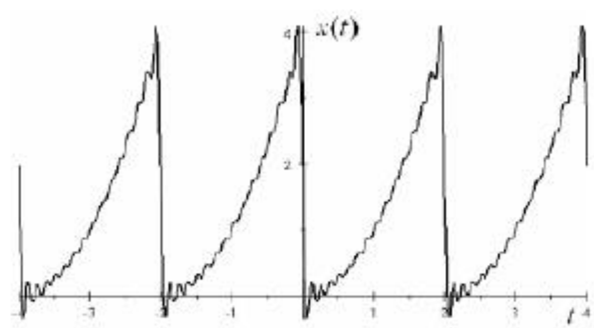


Fig. Representación de $x(t)$ utilizando los primeros 15 términos de la serie trigonométrica de Fourier.

Serie Trigonométrica (Cont.)

Conocer que una señal es par o impar es muy útil para agilizar el cálculo de los coeficientes de la STF cuando se toma el intervalo $[-T/2, T/2]$. En este caso la serie puede reducirse dependiendo si $x(t)$ es par o impar.

$x(t)$ par

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega_0 t)}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{x(t)\sin(n\Omega_0 t)}_{\text{impar}}\, dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{x(t)\cos(n\Omega_0 t)}_{\text{par}}\, dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} x(t)\cos(n\Omega_0 t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{x(t)}_{\text{par}}\, dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} x(t)\,dt$$

$x(t)$ impar

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega_0 t)}$$

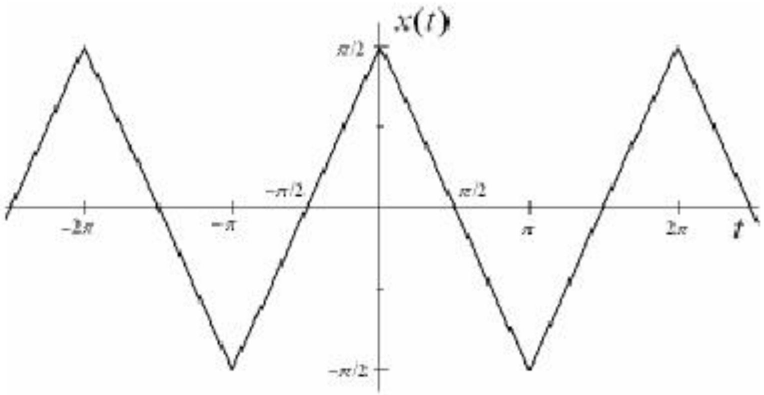
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{x(t)\cos(n\Omega_0 t)}_{\text{impar}}\,dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{x(t)\sin(n\Omega_0 t)}_{\text{par}}\,dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} x(t)\sin(n\Omega_0 t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{x(t)}_{\text{impar}}\, dt = 0$$

Serie Trigonométrica (Cont.)

Ejemplo 4.13. Encuentre la serie trigonométrica de Fourier de la señal.



$$x(t)=\begin{cases} t+\dfrac{\pi}{2} & -\pi<t<0 \\ -t+\dfrac{\pi}{2} & 0<t<\pi \end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}x(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)dt=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=0$$

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}x(t)\cos(nt)dt=\begin{cases}\dfrac{4}{n^2\pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par}\end{cases}$$

La serie trigonométrica puede escribirse como

$$x(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(nt)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left[(2n-1)t\right]$$