Análisis de Señales

SLIT's DISCRETOS

Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar

Definición

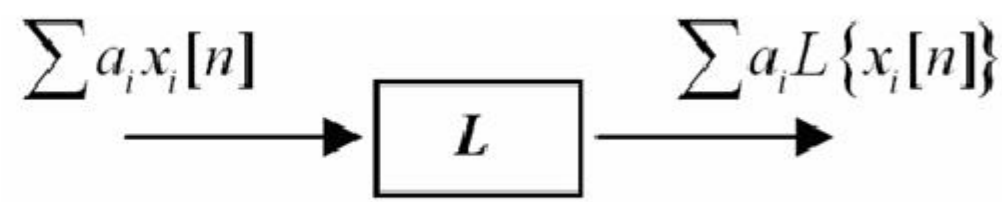
Un sistema discreto es un sistema que opera sobre señales discretas.

Propiedades

Linealidad

Superposición $L[x_n + y_n] = L[x_n] + L[y_n]$

Homogeneidad $L[ax_n] = aL[x_n]$



Sistema lineal

Invarianza temporal (IT)

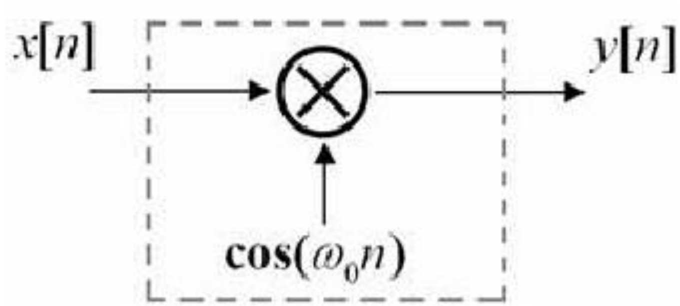
Un sistema es IT si

$$x_n \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow y_n \quad \text{implica} \quad x_{n-n_0} \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow y_{n-n_0}$$

Un desplazamiento temporal de la entrada sólo implica un desplazamiento temporal igual en la salida.

SLIT: sistema lineal e invariante en el tiempo

Ejemplo 1. Modulación



$$L\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}=\left(a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\right)\cos(\omega_0 n)$$

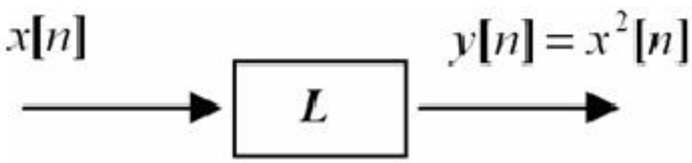
$$=a_1x_1[n]\cos(\omega_0 n)+a_2x_2[n]\cos(\omega_0 n)=a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$$

El sistema es lineal.

$$L\{x[n-n_0]\}=x[n-n_0]\cos(\omega_0 n)\neq y[n-n_0]=x[n-n_0]\cos\left[\omega_0(n-n_0)\right]$$

El sistema no es invariante en el tiempo.

Ejemplo 2.



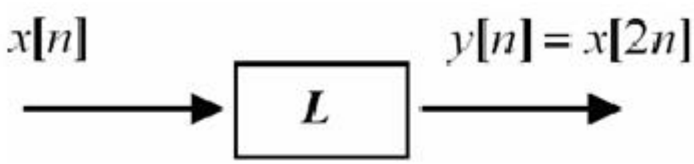
$$L\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1^2x_1^2[n] + a_2^2x_2^2[n] + 2a_1a_2x_1[n]x_2[n]$$

El sistema no cumple con superposición ni con homogeneidad.

$$L\{x[n-n_0]\} = x^2[n-n_0] = y[n-n_0]$$

El sistema es invariante en el tiempo.

Ejemplo 3. Diezmado



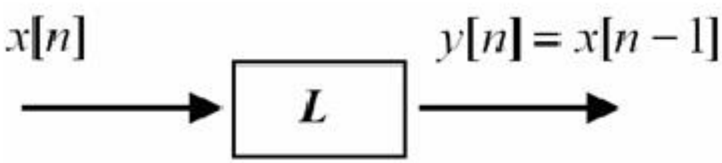
$$L\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1x_1[2n] + a_2x_2[2n] = a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$$

El sistema es lineal.

$$L\{x[n-n_0]\} = x[2n-n_0] = x[2(n-n_0/2)] = y[n-(n_0/2)] \neq y[n-n_0]$$

El sistema no es invariante en el tiempo.

Ejemplo 4. Retardo unitario



$$L\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 x_1[n-1] + a_2 x_2[n-1] = a_1 y_1[n-1] + a_2 y_2[n-1]$$

El sistema es lineal.

$$L\{x[n-n_0]\} = x[(n-1)-n_0] = y[n-n_0]$$

El sistema es invariante en el tiempo.

Definición

Un sistema discreto es un sistema que opera sobre señales discretas.

SLIT: sistema lineal e invariante en el tiempo

Análisis de un SLIT

Si se multiplica un señal por un impulso ubicado en $n = n_0$ se tiene

$$x_n \delta_{n-n_0} = x_{n_0} \delta_{n-n_0}$$

Por tal motivo, toda señal discreta puede escribirse como una suma de impulsos, de acuerdo a

$$x_n = \dots + x_{-1}\delta_{n+1} + x_0\delta_n + x_1\delta_{n-1} + x_2\delta_{n-2} + \dots$$

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_{n-k} = x_n * \delta_n$$

Suponga que la señal x_n es aplicada a un SLIT, entonces conociendo que el sistema es **lineal** la salida se encuentra como

$$y_n = L[x_n] = L\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_{n-k}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} L[x_k \delta_{n-k}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k L[\delta_{n-k}]$$

Definamos la señal h_n como la respuesta a un impulso discreto del SLIT, es decir

$$\xrightarrow{\delta_n} \boxed{L} \xrightarrow{h_n}$$

Dado que el sistema es **invariante en el tiempo** entonces $L[\delta_{n-k}] = h_{n-k}$ y la respuesta del sistema se puede escribir como

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} = x_n * h_n$$

La respuesta de un SLIT a una señal corresponde a la **convolución** entre la señal de entrada x_n y la respuesta al impulso del sistema h_n.

$$\xrightarrow{x_n} \boxed{h_n} \xrightarrow{y_n = x_n * h_n}$$

Que es la convolución?

Es una función que indica la **cantidad de traslape** (suma del producto) entre una señal ***fija*** y la versión ***reflejada y desplazada*** de otra señal.

$$y_n = x_n * h_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k}$$

Propiedades de la convolución: conmutatividad (serie), asociatividad y distribuye la suma (paralelo).

Ejemplo. Halle la respuesta de un SLIT a un exponencial complejo

$$e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{h_n} \xrightarrow{\;?\;}$$

$$y_n = e^{j\omega_0 n} * h_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 (n-k)} h_k$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(\omega_0)$$

La respuesta a un exponencial complejo de frecuencia ω_0 es el mismo exponencial multiplicado por una función H que depende de ω_0.

Ejemplo. Demuestre que un SLIT es **causal** si su respuesta impulso cumple $h_n = 0$ para $n < 0$.

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x_{n-k} h_k = \sum_{k=0}^{k=\infty} x_{n-k} h_k = x_n h_0 + x_{n-1} h_1 + x_{n-2} h_2 + \ldots$$

Estabilidad

Un sistema es **estable** en sentido EASA si a toda entrada acotada le corresponde una salida acotada.

¿Cuándo un SLIT discreto es estable?

$$|y_n| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k| |h_{n-k}|$$

Si x_n es acotada entonces $\exists M \in \mathbf{R}^+$ tal que $|x_n| \leq M$ y podemos escribir

$$|y_n| \leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|$$

Por tal motivo, un SLIT es estable si su respuesta impulso $h_n \in l_1$.

Clasificación de un SLIT

Los SLIT's discretos puede clasificarse de acuerdo a su respuesta impulsos en sistemas **FIR** o **IIR**.

Sistemas FIR

Si h_n tiene soporte compacto entonces el sistema es de **respuesta impulso finita** (**FIR**).

Ejemplo. Un sistema causal cuya respuesta impulso es $h_n = 0$ para $n \geq M$ (soporte compacto de longitud M) tiene salida dada por

$$y_n = \sum_{k=0}^{M-1} x_{n-k} h_k$$

$$y_n = x_n h_0 + x_{n-1} h_1 + \ldots + x_{n-(M-1)} h_{M-1}$$

La salida es una combinación lineal de las M entradas más recientes de la señal!

Por ejemplo, si $h_n = 1/M$ para $0 \le n < M$, entonces

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1} + \ldots + x_{n-(M-1)}}{M}$$ Promedio móvil

Fácil de implementar!

Sistemas IIR

Si h_n no tiene soporte acotado entonces el sistema es de **respuesta impulso infinita** (**IIR**).

Ejemplo. Un sistema causal cuya respuesta impulso es $h_n = \alpha^n u_n$, con $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (soporte no acotado), tiene salida dada por

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_{n-k} \alpha^n$$

$$y_n = x_n + x_{n-1}\alpha + x_{n-2}\alpha^2 + x_{n-3}\alpha^3 + \ldots$$

Combinación lineal de todas las entradas anteriores de la señal!

La implementación de un sistema IIR utilizando convolución requiere:

- infinitas posiciones de memoria
- infinitas sumas
- infinitas multiplicaciones

No es posible
en la practica!

Solución: Implementar los sistemas IIR con **otro modelo** que no sea la convolución, por ejemplo, en **ecuaciones en diferencias.**

Sistemas en ecuaciones en diferencias

Todo sistema **SLIT discreto causal** puede escribirse como

$$y_n = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k}$$

En este modelo, la salida del sistema en un tiempo n es función de

- de la entrada actual x_n
- de las M entradas anteriores $\{x_{n-1}, \dots, x_{n-M}\}$
- de las N salidas anteriores $\{y_{n-1}, \dots, y_{n-M}\}$

N es el **orden** de la ecuación en diferencias.

Los coeficientes b_k ponderan las **entradas anteriores** y los coeficientes a_k ponderan las **salidas anteriores**.

Por tal motivo, el sistema se caracteriza por:

- Los $M+1$ coeficientes $\{b_0, b_1, ..., b_M\}$
- Los N coeficientes $\{a_1, ..., a_M\}$

Este modelo es fácilmente implementado!

Sistema recursivo: la salida y_n depende de salidas anteriores (por lo menos algún coeficiente $a_k \neq 0$).

Sistema no recursivo: la salida y_n depende sólo de las entradas anteriores (todos los coeficientes a_k son cero).

Un sistema **no recursivo** puedes expresarse como

$$y_n = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k}$$

Equivalente a la convolución!

Los coeficientes corresponden a los valores de la respuesta impulso

$$b_k = h_k \quad \text{para } k = 0,1,...,M$$