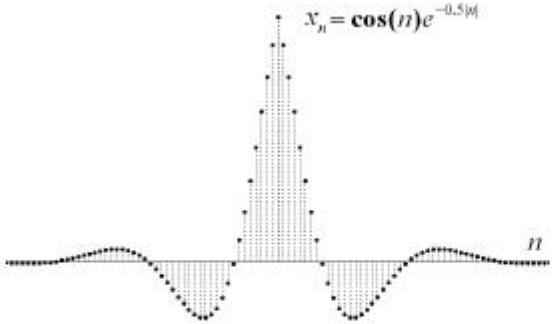
Análisis de Señales

Señales discretas y Espacios Vectoriales

Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar

Definición

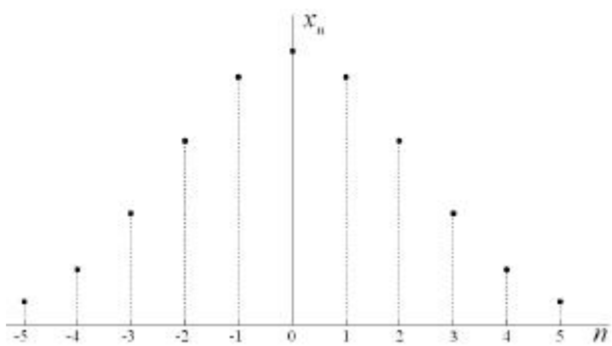
Una señal de tiempo discreto (TD) sólo toma valor en ciertos instantes de tiempo.



Toda señal discreta puede verse como una señal continua que ha sido muestreada. La señal discreta almacena cada una de las muestras.

$$x[n] = x(nT_m) \qquad n \in \mathbf{Z}$$

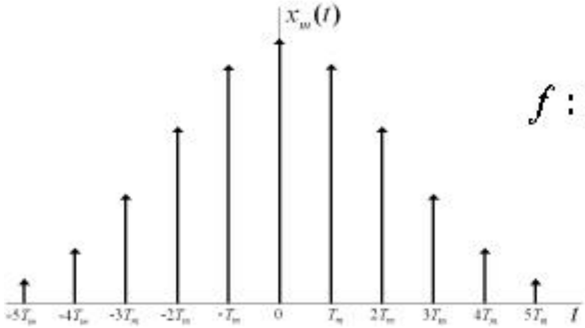
Al visualizar una señal de TD sólo se presentan las muestras y no el tiempo en el cual éstas fueron tomadas.



Señales discretas y muestreadas

La señal muestreada $x_m(t)$ y la señal discreta $x[n]$ contienen información sobre las muestras de $x(t)$ en los tiempos nT_m.

Señal muestreada

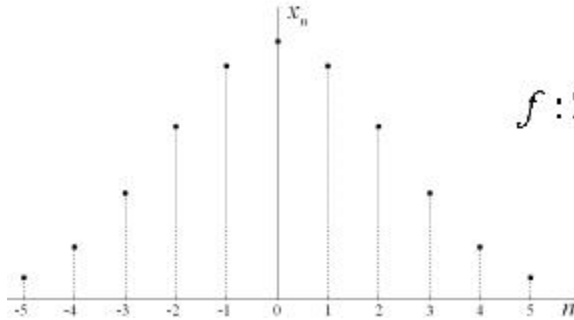


$f : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$

$$x_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m)\delta(t - nT_m)$$

El área del impulso es proporcional a la muestra

Señal discreta



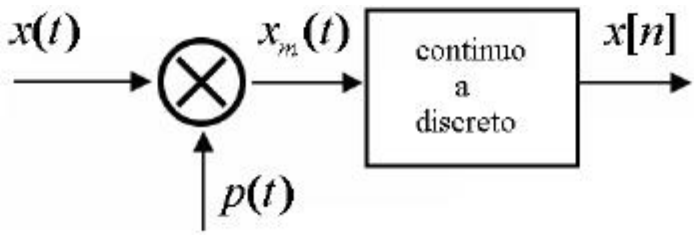
$f : \mathrm{Z} \to \mathrm{C}$

$$x[n] = x(nT_m)$$

Altura proporcional a la muestra

Señales discretas y muestreadas

Conversor continuo
a discreto



Conversión continuo a discreto

Si la señal continua $x(t) = e^{j\Omega t}$ se muestrea cada T_m segundos se obtiene la señal discreta x_n definida como

$$x_n = x(nT_m) = e^{j(\Omega T_m)n}$$

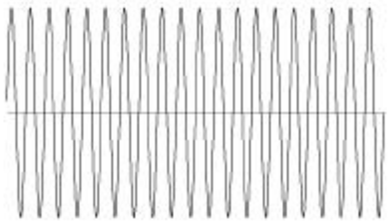
Por tal motivo, la frecuencia continua y discreta se relacionan como

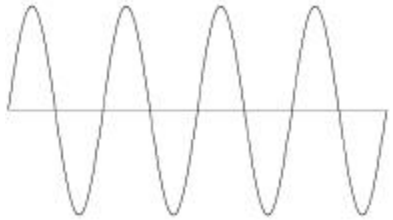
$$\omega = \Omega T_m$$

Tiempo de muestreo y señales discretas

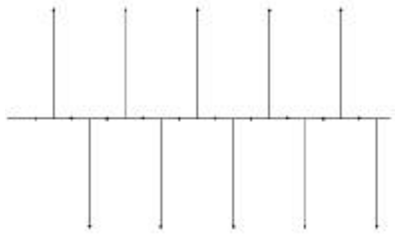
Dos señales de TC pueden generar la misma señal de TD al ser muestreadas.

Consideremos las siguientes dos señales





La señales son muestreadas en cada **máximo** y en **cada corte con cero**, en ambos casos se tiene la señal discreta

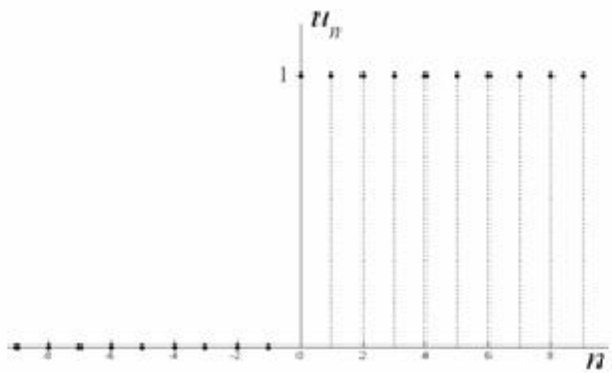


Es importante conocer el tiempo de muestreo!

Señales singulares

Escalón unitario discreto

La función escalón unitario discreto se define como

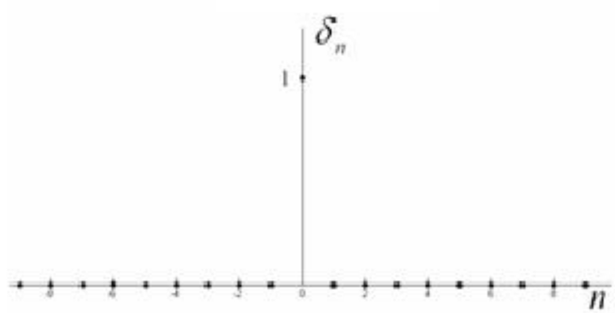


$$u_n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

El escalón presenta su transición de 0 a 1, en el valor de n que anula su argumento.

Impulso unitario discreto (Delta de Kronecker)

La función impulso discreto δ_n, está definida como



$$\delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La función impulso sólo toma valor diferente de cero en aquel instante del tiempo en el cual su argumento es igual a cero.

Ejemplo. El impulso δ_{n-n_0} se encuentra ubicado en $n=n_0$, ya que al igualar el argumento a cero se tiene que $n-n_0=0$.

Propiedad de selección

Al multiplicar una señal x_n por un impulso ubicado en el tiempo $n=n_0$, se obtiene un impulso ubicado $n=n_0$ de altura x_{n_0}, es decir,

$$x_n \delta_{n-n_0} = x_{n_0} \delta_{n-n_0}$$

Por tal motivo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta_{n-n_0} = x_{n_0}$$

Potencia y energía

Potencia instantánea $$p_n = |x_n|^2$$

Energía $$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$

Si $E < \infty$ entonces la señal es de **energía**.

Potencia promedio $$\overline{P}_{n_1,n_2} = \left(\frac{1}{n_2 - n_1 + 1}\right) \sum_{n=n_1}^{n_2} |x_n|^2$$

Si la potencia promedio permanece **finita** pero **no cero** a medida que el intervalo tiende a infinito entonces la señal es de **potencia**, i.e.

Si $\overline{P} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2N+1}\right) \sum_{n=-N}^{N} |x_n|^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad x_n$ es de potencia

Espacios vectoriales

Espacio vectorial l_1

$$l_1 = \left\{ f : \mathbf{Z} \to \mathbf{C} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f| < \infty \right\}$$

Está formado por todas las señales sumables en magnitud, es decir, señales con norma l_1 finita.

Norma l_1: $$\|x_n\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|$$

Ejemplo: l_1 es un espacio vectorial con campo los complejos.

Si $x_n \in l_1$ entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty$.

Escalados. Si $a \in \mathbf{C}$ y $x_n \in l_1$ entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a\, x_n| = |a| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty$

Sumados. Si $x_n, y_n \in l_1$ entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n| < \infty$

Ejemplo: encuentre la norma l_1 de la señal $x_n = \alpha^n u_n$, con $\alpha \in \mathbf{R}^+$.

$$\|x_n\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha^n u_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ \infty & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Espacio vectorial l_2

$$l_2 = \left\{ f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f|^2 < \infty \right\}$$

Está formado por todas las señales de energía, es decir, señales con norma l_2 finita.

Norma l_2: $\|x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2}$

Adicionalmente l_2 está dotado con producto interno, definido como

$$\langle x_n, y_n \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n y_n^*$$

Ejemplo: las señales $x_n, y_n \in l_2$ son ortogonales si

$$\langle x_n, y_n \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n y_n^* = 0$$

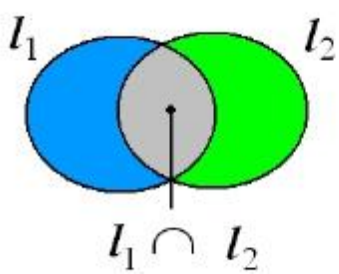
La señales con **energía finita** en un intervalo $[n_1, n_2]$ forman un **espacio vectorial euclídeo** con producto interno definido como

$$\langle x_n, y_n \rangle = \sum_{n=n_1}^{n_2} x_n y_n^*$$

Por tal motivo, las señales x_n y y_n son ortogonales en $[n_1, n_2]$ si

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} x_n y_n^* = 0$$

En la practica todas la señales tienen energía finita ($\in l_2$). Sin embargo, existen señales que pertenecen a l_2 y no a l_1 y viceversa.



Señales periódicas discretas

$a \in \mathbb{Z}$ es un **tiempo de repetición** de una señal discreta x_n si

$$x_{n+a} = x_n$$

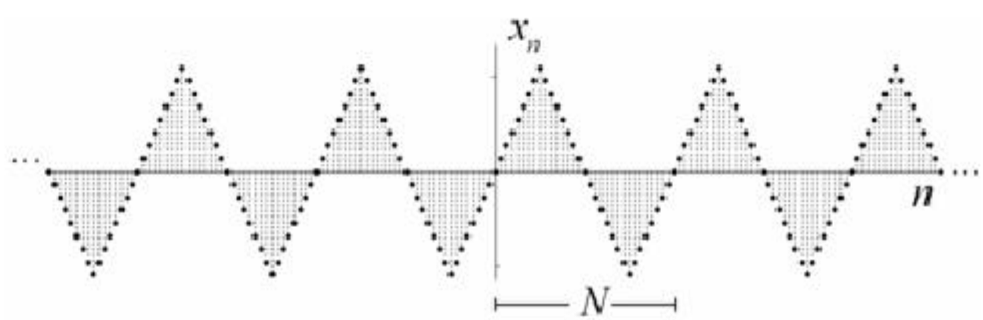
Periodo (N): mínimo tiempo de repetición positivo.

Si una señal x_n tiene periodo N, entonces cumple

$$x_{n+N} = x_n$$

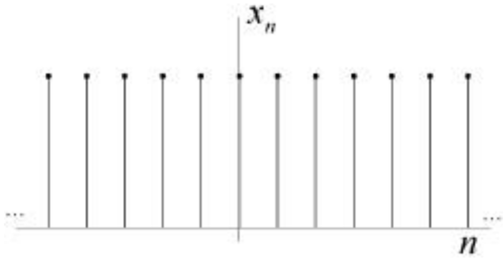
$$x_{n+kN} = x_n\,, \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}$$

Es suficiente conocer una señal periódica sobre un intervalo N



Copias infinitas del mismo intervalo

Ejemplo. Periodo de una señal constante.



$$\mathrm{TR}^+ = \mathrm{Z}^+ \quad \Rightarrow \quad N = 1$$

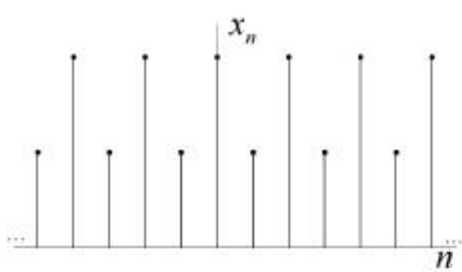
Una señal constante discreta tiene dos periodos: $N=1$ y $N=\infty$.

Frecuencia discreta (f): se define como el inverso del periodo

$$f = 1/N$$

La frecuencia da información de la **velocidad de repetición**.

Ejemplo. El periodo más pequeño de una señal periódica discreta no constante es 2.



Señal más rápida!

Por tal motivo la frecuencia discreta más alta es 1/2.

Periodo: $N \in \{2,3,4,...\} = [2,\infty)$

Frecuencia: $f \in \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\right\} = [0,1/2]$

Ejemplo. La señal $e^{j\omega n}$ es periódica?

Si $e^{j\omega n}$ es una señal periódica, debe existir $N \in \mathbf{Z}^{+}$, tal que

$$e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n} \qquad \Rightarrow \qquad e^{j\omega N} = 1$$

Por tal motivo se debe cumplir que $\omega = 2\pi\left(\frac{k}{N}\right)$ Múltiplo racional de 2π!

De forma similar, las señales $\sin(\omega n)$ y $\cos(\omega n)$ son periódicas sólo si su frecuencia angular ω es un múltiplo racional de 2π.

Frecuencia angular discreta (ω): se define como

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\left(\frac{1}{N}\right)$$

La frecuencia angular discreta ω se encuentra en el intervalo

$$\Omega \in \left\{\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{5} \ldots\right\} = [0, \pi]$$

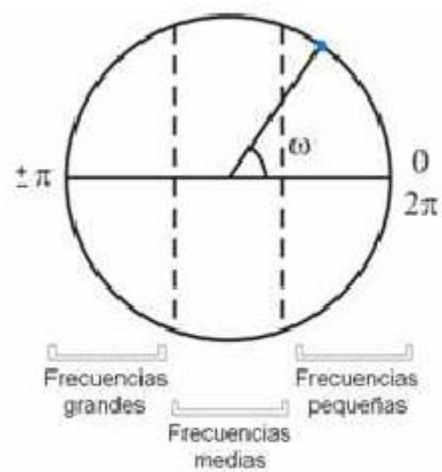
Circularidad de la frecuencia discreta

$$e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n} e^{j2\pi n} = e^{j\omega n}$$

La frecuencias ω y $\omega + 2\pi k$ son equivalentes.

Ejemplo. Las señales $\cos(\pi n)$, $\cos(3\pi)$ y $\cos(11\pi n)$ tienen el mismo periodo.

De acuerdo a esto, la frecuencia angular discreta es circular



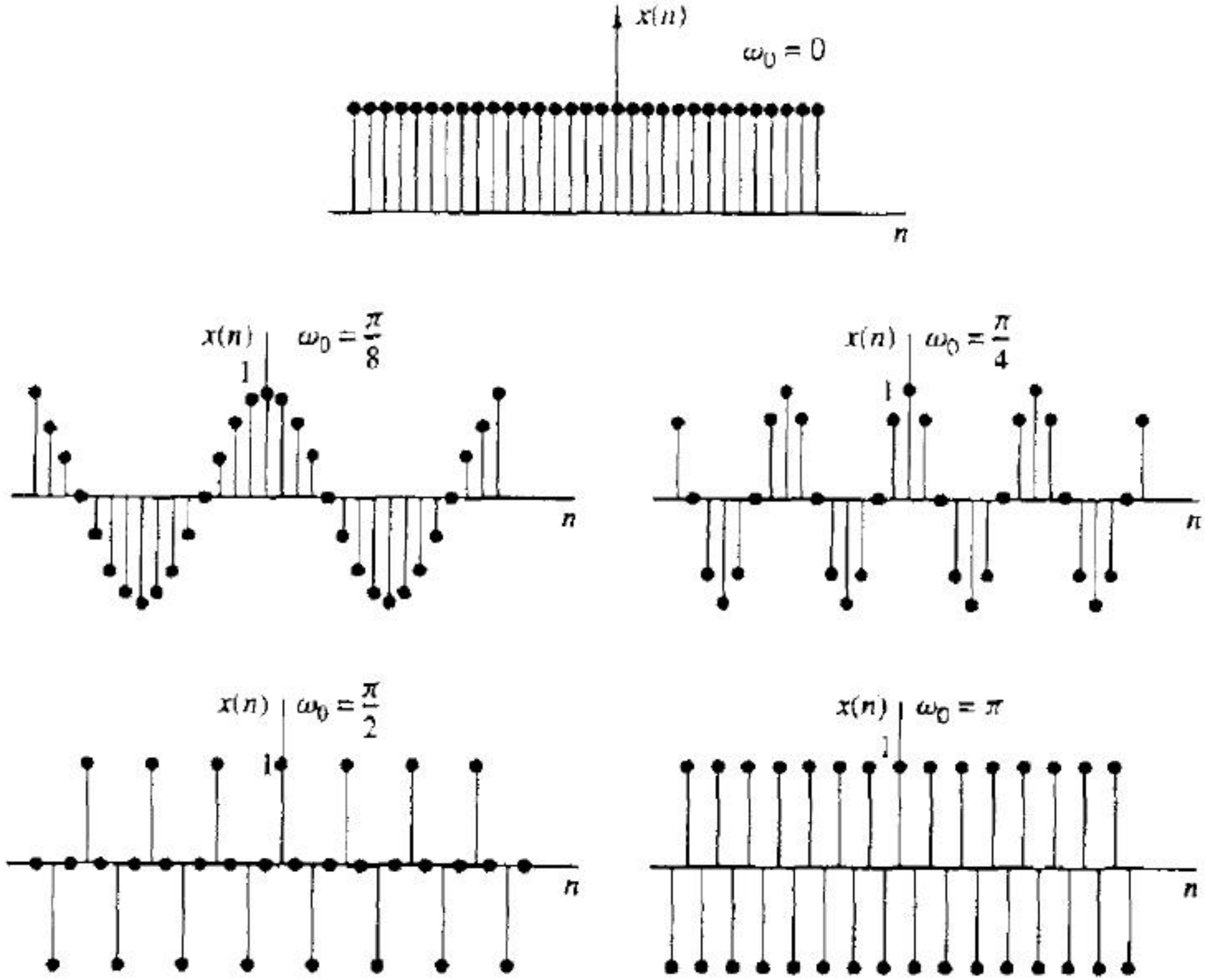


Figure 1.13 Signal $x(n) = \cos \omega_0 n$ for various values of the frequency ω_0.

Suma de señales periódicas discretas

Toda suma de señales periódicas discretas es periódica.

Ejemplo. La señal $x_n = e^{j\frac{2\pi}{N_1}n} + e^{j\frac{2\pi}{N_2}n}$ tiene periodo $MCM(N_1, N_2)$.

Ejercicio. Encuentre dos señales discretas con periodos 10 y 15, tales que su suma tenga periodo 6.

Conversión continuo a discreto

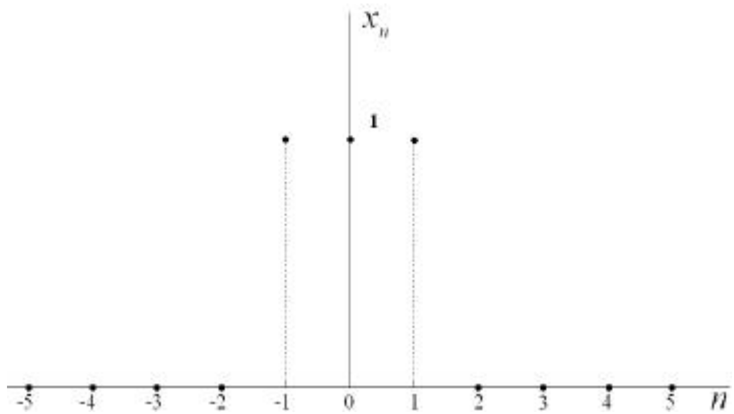
Si la señal continua $x(t) = e^{j\Omega t}$ se muestrea cada T_m segundos se obtiene la señal discreta x_n definida como

$$x_n = x(nT_m) = e^{j(\Omega T_m)n}$$

Por tal motivo, la frecuencia continua y discreta se relacionan como

$$\omega = \Omega T_m$$

3 Formas de representar una señal discreta: *Gráfica*, *Vector* e *Suma de impulsos*



GRAFICA

$$x[n]=\left\{1,\underset{\uparrow}{1},1\right\}$$

VECTOR (Secuencia)

$$x[n]=\delta[n+1]+\delta[n]+\delta[n-1]$$

SUMA DE IMPULSOS