



## Tratamiento de Señales

Version 2022-I

# Introducción a la Restauración de Imágenes

[ Capítulo 6 ]

**Dr. José Ramón Iglesias**

DSP-ASIC BUILDER GROUP  
Director Semillero TRIAC  
Ingeniería Electronica  
Universidad Popular del Cesar

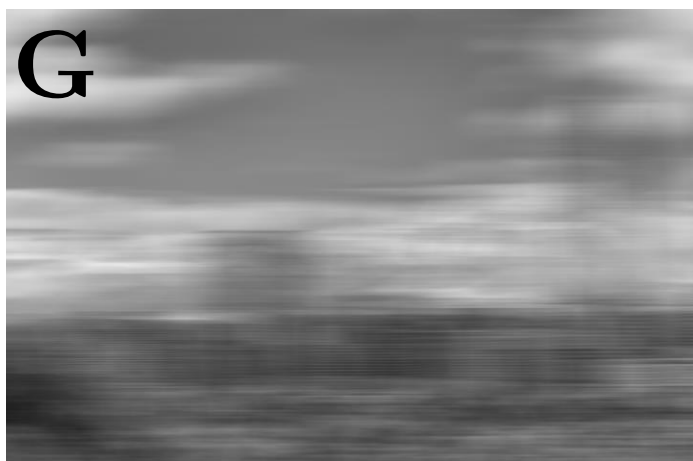
# Restauración de Imágenes

En restauración de imágenes la idea es recuperar una imagen **ORIGINAL** a partir de

1) imagen **DEGRADADA** y

2) conocimiento a priori del proceso de degradación.

La imagen recuperada se le conoce como **RESTAURADA**.



**DEGRADADA**

Restauración



**RESTAURADA**

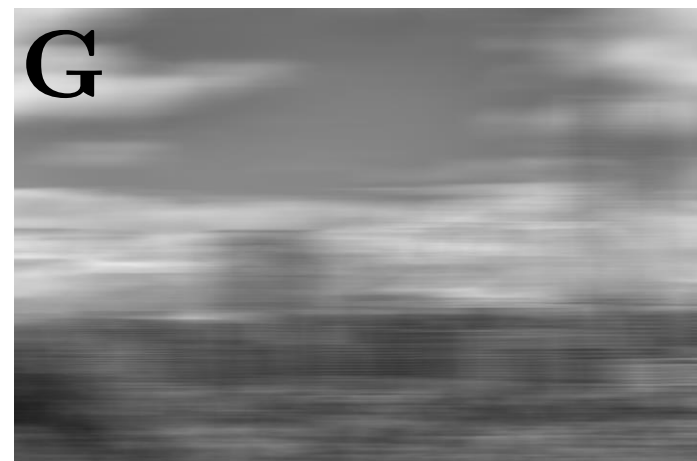
# Restauración de Imágenes

La degradación es un proceso que puede ser modelado. En este ejemplo la imagen degradada se produce por un movimiento horizontal de la cámara.



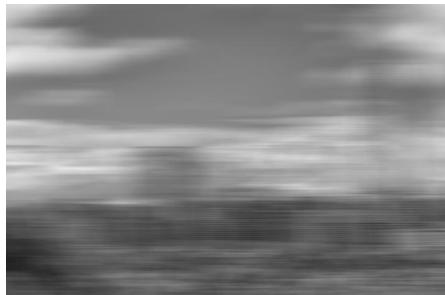
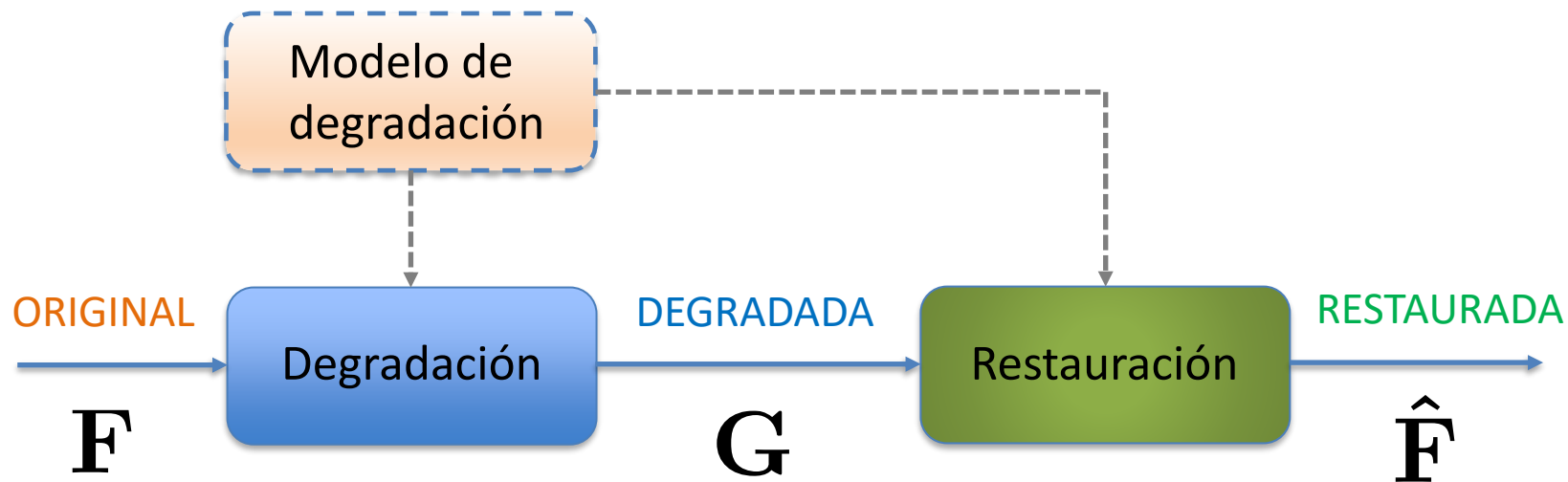
ORIGINAL

Degradación



DEGRADADA

# Restauración de Imágenes

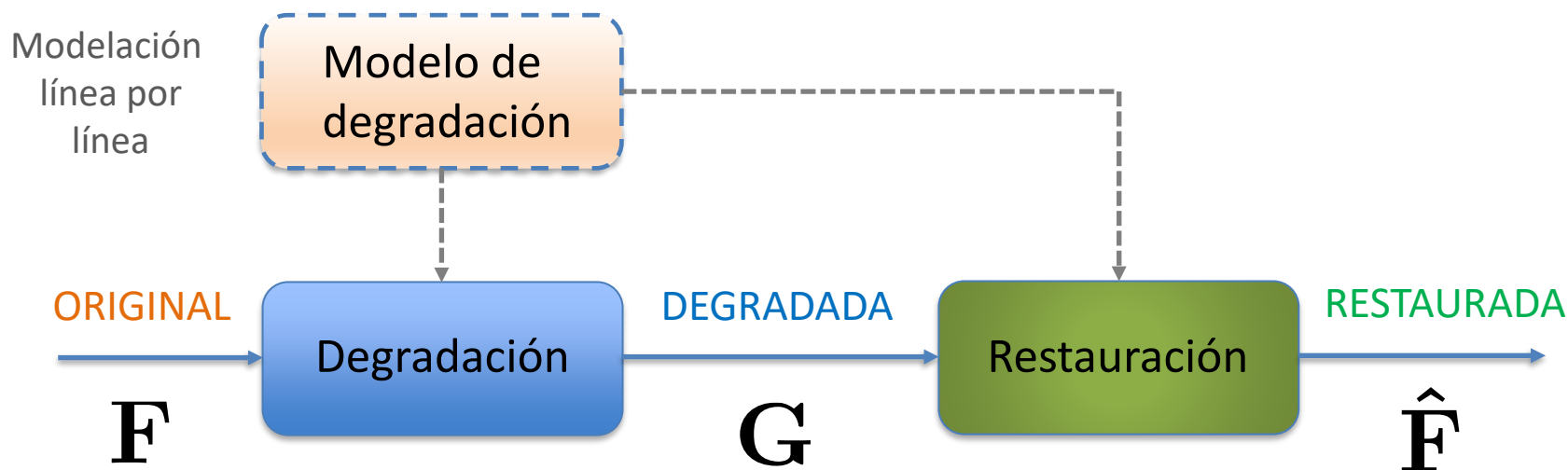


# Ejemplo

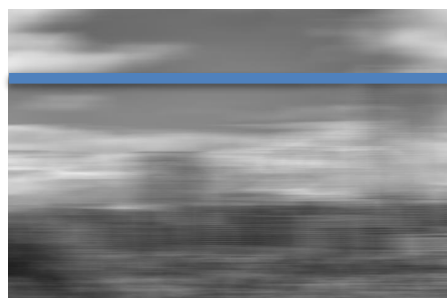
Foto tomada desde un vehículo en  
movimiento horizontal



# Restauración de Imágenes en Movimiento Uniforme Horizontal



$f$



$g$



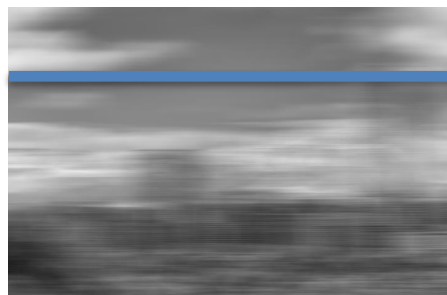
$\hat{f}$





$f$

$M$



$g$

$N$



$\hat{f}$

$M$



# Modelación de una línea degradada

## Movimiento Uniforme Horizontal

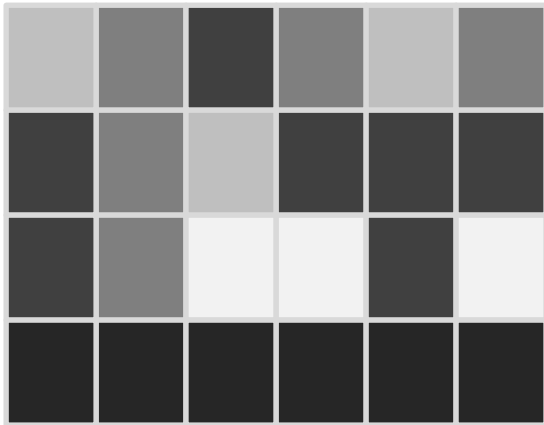
Para un movimiento de  $n$  píxeles, se podría pensar que un pixel en  $\mathbf{g}$  es el promedio de  $n$  píxeles contiguos de  $\mathbf{f}$ .

$$g_i = (f_i + f_{i+1} + \cdots + f_{i+n-1})/n$$



# Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F



# Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

# Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

# Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3			

Average:  $(4+6+9) / 3 = 6.33$

# Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7		

Average:  $(6+9+6) / 3 = 7$

# Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7	6.3	

Average:  $(9+6+4) / 3 = 6.33$



# Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7	6.3	5.3

En cada fila de F, sólo hay 4 tríos de pixels contiguos que se pueden promediar.

Por esta razón, G solo tiene 4 columnas.

$$\text{Average: } (6+4+6) / 3 = 6.33$$

# Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7	6.3	5.3
6.3	6.3	7.3	9
5.7	3.3	4.3	4.3
10	10	10	10

# Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10



M = 6

G

6.3	7	6.3	5.3
6.3	6.3	7.3	9
5.7	3.3	4.3	4.3
10	10	10	10



N = 4

Pregunta: ¿de qué ancho son las imágenes? ¿por qué F tiene más columnas que G?

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7	6.3	5.3
6.3	6.3	7.3	9
5.7	3.3	4.3	4.3
10	10	10	10

Pregunta: ¿de qué ancho son las imágenes? ¿por qué F tiene más columnas que G?

Si F tiene M columnas y el filtro tiene n elementos ¿cuántas columnas tiene G?

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

← M →

G

6.3	7	6.3	5.3
6.3	6.3	7.3	9
5.7	3.3	4.3	4.3
10	10	10	10

← N →

h

1/3	1/3	1/3
-----	-----	-----

← n →

$$N = M - n + 1$$

Pregunta: ¿de qué ancho son las imágenes? ¿por qué F tiene más columnas que G?

Si F tiene M columnas y el filtro tiene n elementos ¿cuántas columnas tiene G?

# Modelación de una línea degradada

## Movimiento Uniforme Horizontal

Para un movimiento de  $n$  pixeles, se podría pensar que un pixel en  $\mathbf{g}$  es el promedio de  $n$  pixeles de  $\mathbf{f}$ .

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} * \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

$h_i = 1/n$  (modelo)
 ORIGINAL
DEGRADADA

La degradación de un movimiento lineal uniforme de  $n$  pixeles equivale a una convolución fila por fila con una máscara  $h$ . En esta convolución se toman sólo los elementos válidos de salida, es decir, sólo aquellos que fueron modelados con el promedio de  $n$  pixeles.

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{g}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} * \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

$$h_i = 1/n$$

(modelo)

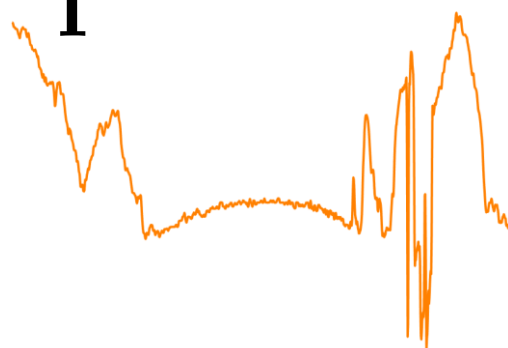
ORIGINAL

DEGRADADA

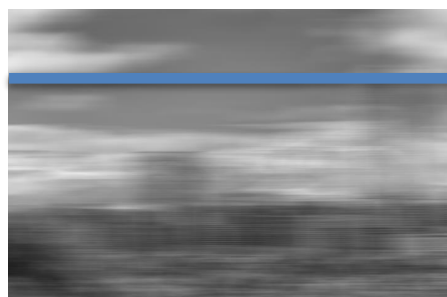




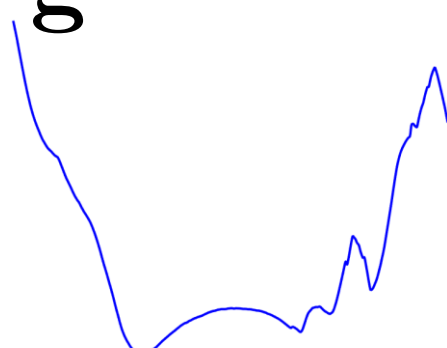
$f$



$M$



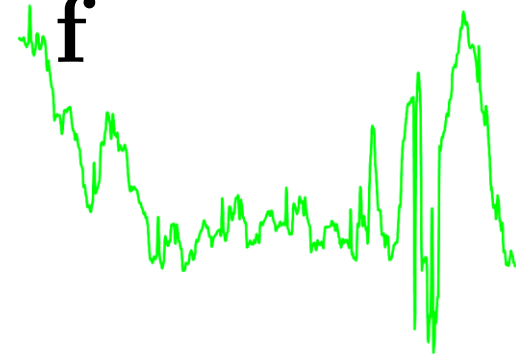
$g$



$N$



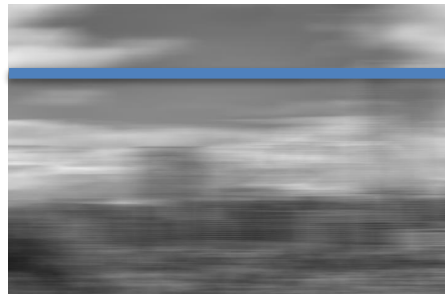
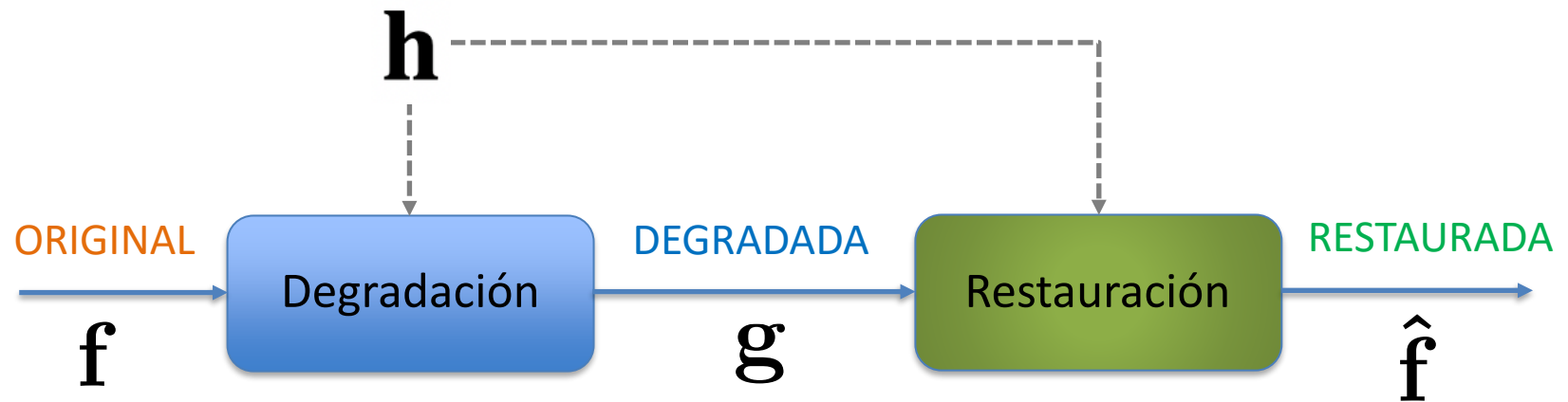
$\hat{f}$



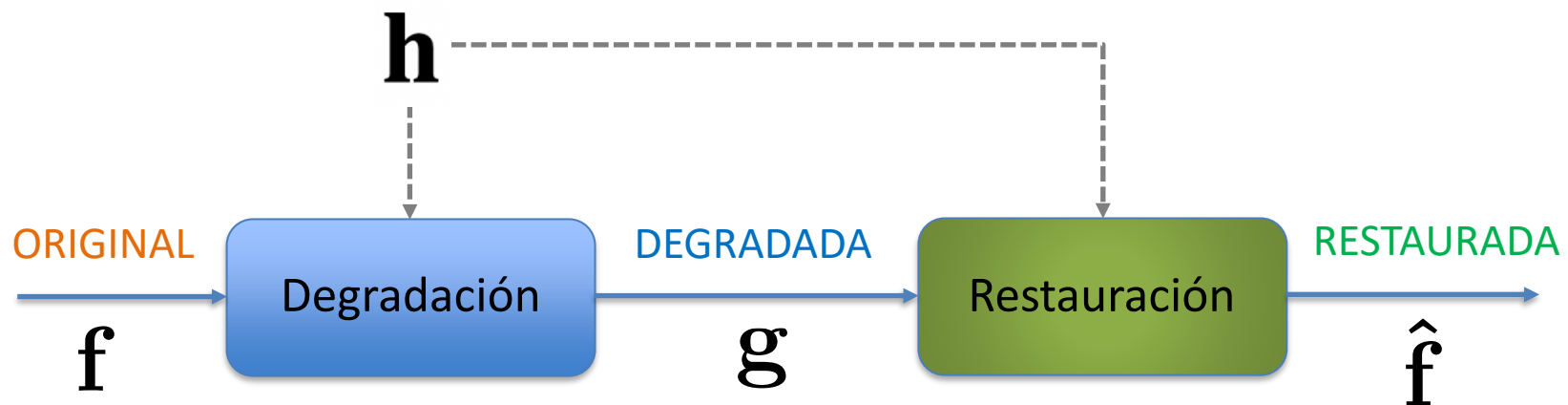
$M$

Para un movimiento de  $n$  pixeles:  $M = N + n - 1$

PREGUNTA: Conociendo  $g$  y  $h$ , ¿cómo obtener  $\hat{f}$ ?



PREGUNTA: Conociendo  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{h}$ , ¿cómo obtener  $\hat{\mathbf{f}}$ ?



$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} \quad ? \quad \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_M \end{bmatrix}$$

CONOCIDO      DESCONOCIDO CONOCIDO

PREGUNTA: Conociendo  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{h}$ , ¿cómo obtener  $\hat{\mathbf{f}}$ ?

El problema consiste en resolver este sistema de  $N$  ecuaciones con  $M$  incógnitas

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & \textcircled{h_r} & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \textcolor{red}{\cancel{f_2}} \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \textcircled{g_2} \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

Pero  $M > N$  ya que:  $M = N + n - 1$

Hay más incógnitas  
que ecuaciones !!!

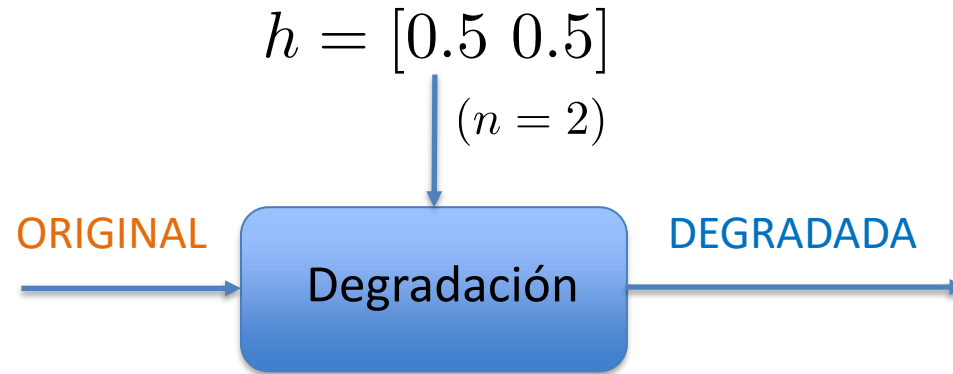
PREGUNTA: Conociendo  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{h}$ , ¿cómo obtener  $\hat{\mathbf{f}}$ ?

Como hay  $N$  ecuaciones con  $M$  incógnitas con  $M > N$ ,  
existen infinitas soluciones

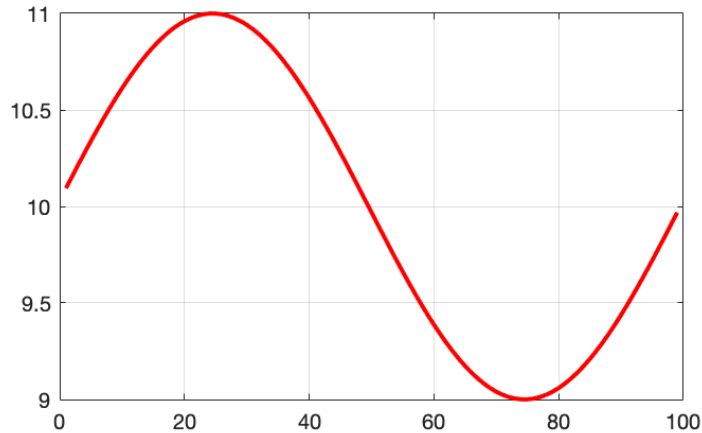
$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

La pregunta entonces sería ¿cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración?

# Un ejemplo muy simple

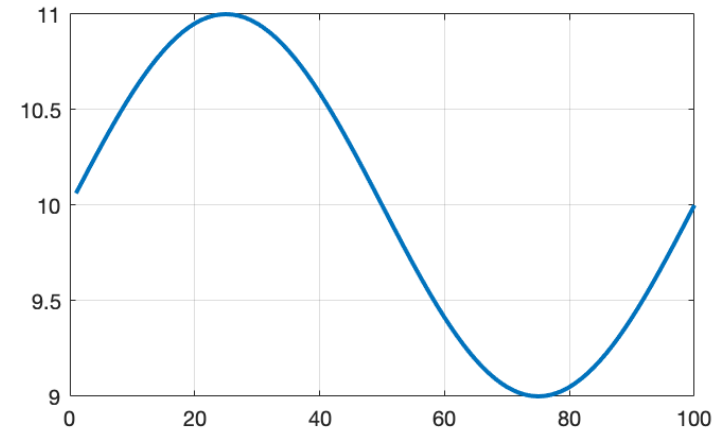


**f**



$$M = 100$$

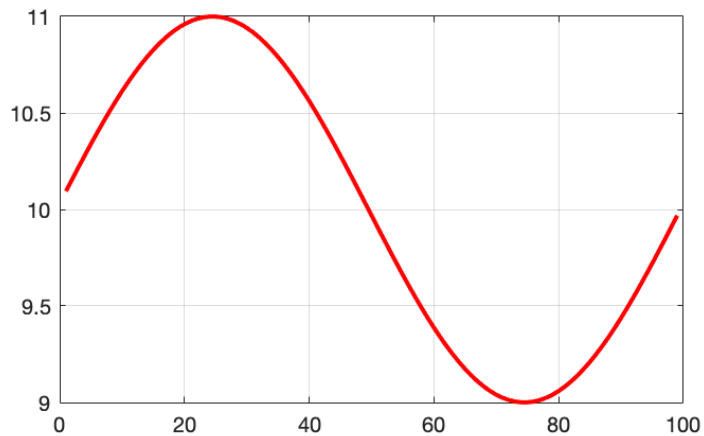
**g**



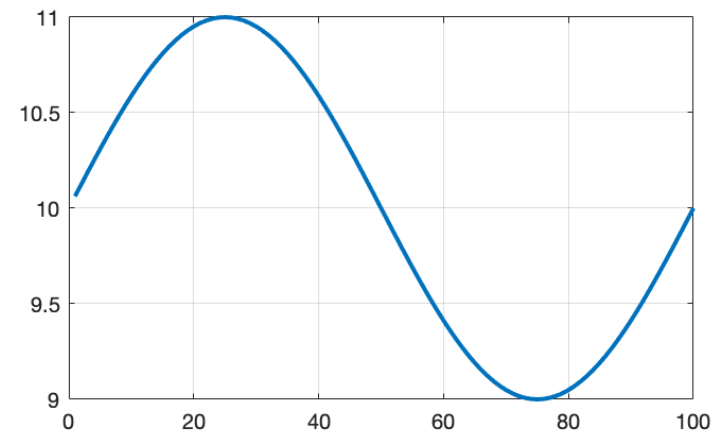
$$N = 99$$

# Un ejemplo muy simple

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \\ f_{100} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} \end{bmatrix}$$



$$M = 100$$



$$N = 99$$



# Un ejemplo muy simple

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \\ f_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} \end{bmatrix}$$

99x100

Tenemos 100 ecuaciones con 99 incógnitas.

Vamos a asumir que  $f_{100}$  es conocido:  $f_{100} = x$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} \end{bmatrix}$$

99x100

Ahora tenemos 99 ecuaciones con 99 incógnitas.

La solución es simple usando álgebra lineal

# Un ejemplo muy simple

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \\ f_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} \end{bmatrix}$$

99x100

Vamos a asumir que  $f_{100}$  es conocido:  $f_{100} = x$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} \end{bmatrix}$$

99x100

La solución es simple usando álgebra lineal

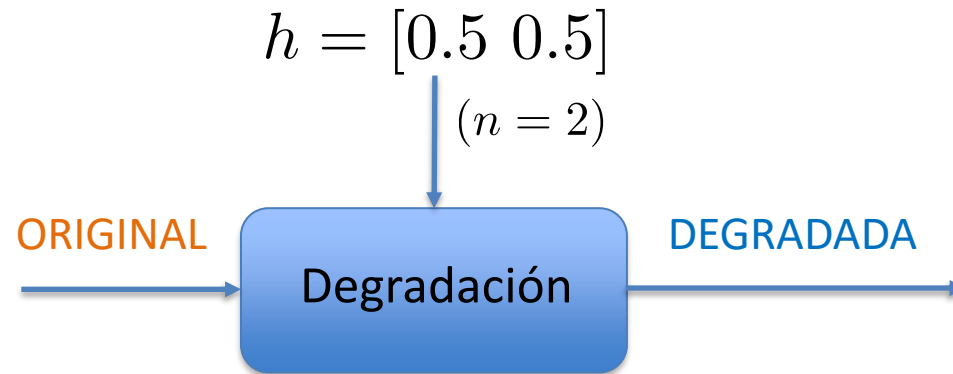
# Un ejemplo muy simple

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}_{99 \times 100} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} \end{bmatrix}$$

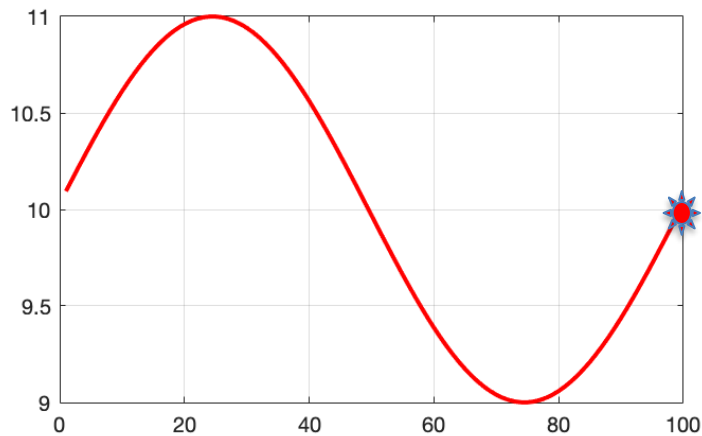
La solución es simple usando álgebra lineal

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 \end{bmatrix}_{99 \times 99} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} - 0.5x \end{bmatrix}$$

# Un ejemplo muy simple



**f**



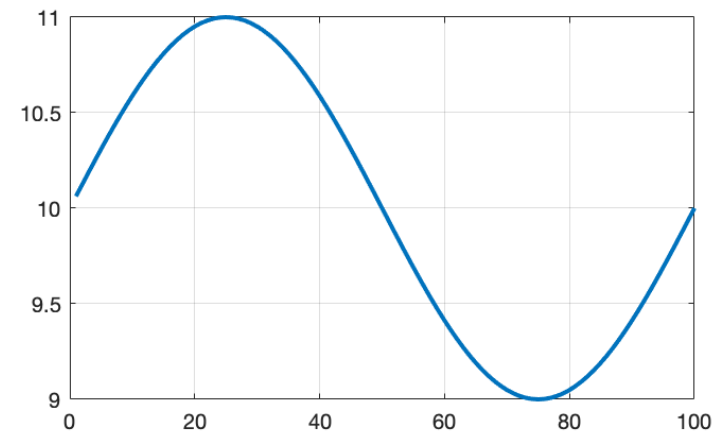
$$M = 100$$

Valor conocido  
Ideal: 10

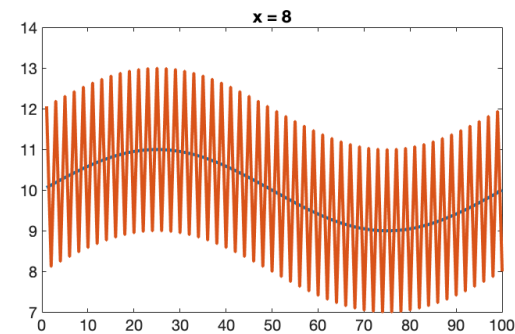
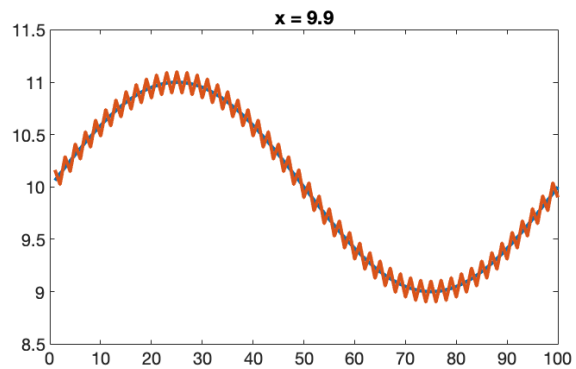
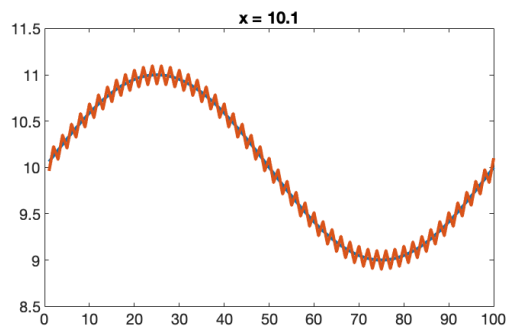
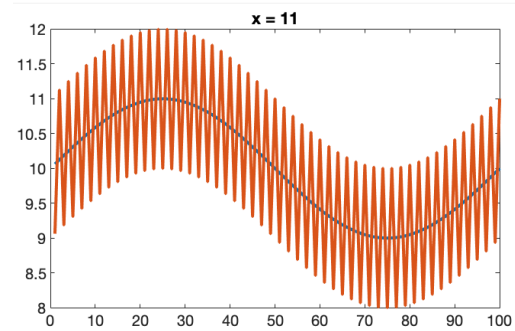
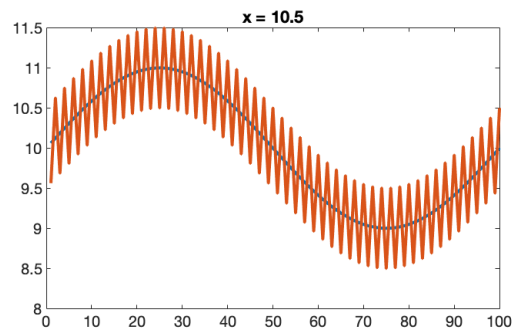
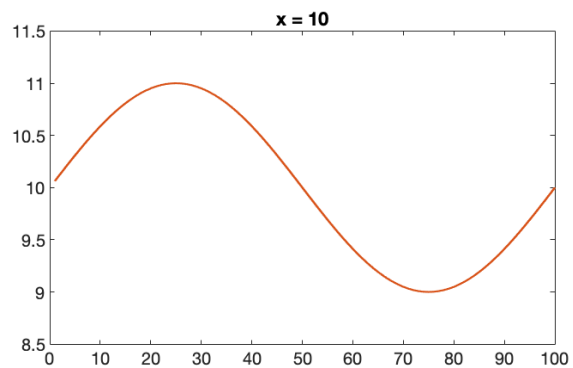
Qué pasa si

$x = 10,$   
 $10.1$   
 $10.5, \text{ etc.}?$

**g**



$$N = 99$$



# Un ejemplo muy simple



Se observa que un pequeño error en la estimación de uno de los valores de  $\mathbf{f}$  genera fuertes oscilaciones!

Como hay  $N$  ecuaciones con  $M$  incógnitas con  $M > N$ , existen infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

La pregunta entonces sería ¿cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración?

Es necesario contar con un criterio adicional para eliminar el rizado.



Como hay  $N$  ecuaciones con  $M$  incógnitas con  $M > N$ , existen infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

La pregunta entonces sería ¿cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración?

Es necesario contar con un criterio adicional para eliminar el rizado.

Entonces la solución  $\hat{\mathbf{f}}$  debe satisfacer:

1)  $\mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$

Como hay  $N$  ecuaciones con  $M$  incógnitas con  $M > N$ ,  
existen infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

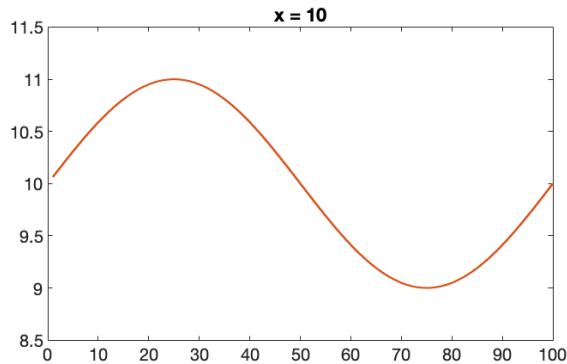
La pregunta entonces sería ¿cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración?

Es necesario contar con un criterio adicional para eliminar el rizado.

Entonces la solución  $\hat{\mathbf{f}}$  debe satisfacer:

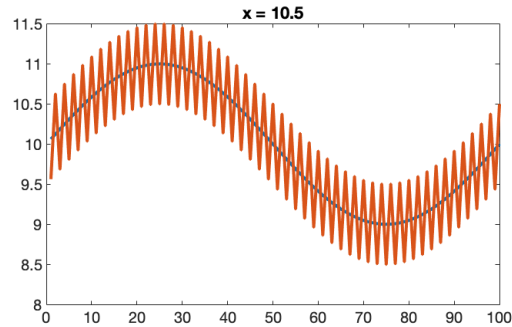
$$1) \quad \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g} \qquad 2) \quad \text{rizado}(\hat{\mathbf{f}}) \rightarrow \min$$

# La norma $||\hat{f}||$ es una buena métrica del rizado

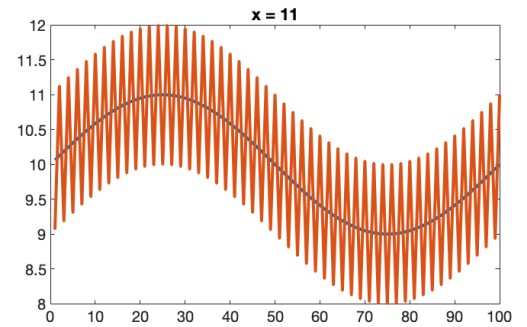


100.2497

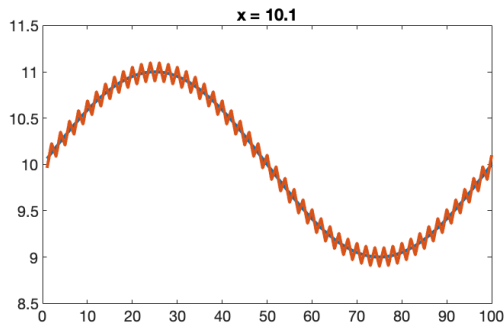
mínimo



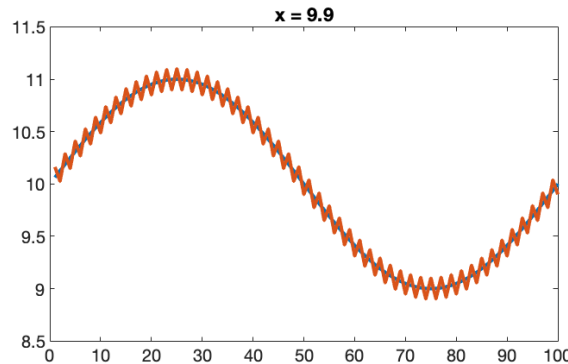
100.3743



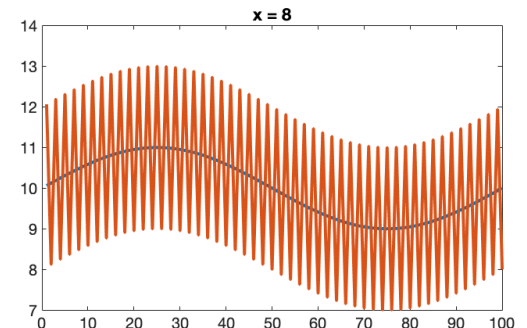
100.7472



100.2547



100.2547



102.2252

Como hay  $N$  ecuaciones con  $M$  incógnitas con  $M > N$ ,  
existen infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

La pregunta entonces sería ¿cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración?

Es necesario contar con un criterio adicional para eliminar el rizado.

Entonces la solución  $\hat{\mathbf{f}}$  debe satisfacer:

$$1) \quad \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g} \qquad 2) \quad ||\hat{\mathbf{f}}|| \rightarrow \min$$

# Formulación del problema:

1) Se tiene una señal  $\mathbf{g}$  de  $M$  elementos que ha sido producida por un proceso de degradación de la señal  $\mathbf{f}$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{g} = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

2) Se debe encontrar la señal original a partir de  $\mathbf{g}$  y de  $\mathbf{H}$  usando un algoritmo de optimización planteado de la siguiente manera:

$$\|\hat{\mathbf{f}}\| \rightarrow \min \quad \text{sujeto a } \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$$

La estimación de  $\mathbf{f}$  es  $\hat{\mathbf{f}}$ .

# Solución del Problema:

(1/2)

$$\|\hat{\mathbf{f}}\| \rightarrow \min \quad \text{sujeto a} \quad \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$$

Usando multiplicadores de Lagrange: <sup>con</sup> ( $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ )

$$V(\mathbf{f}) = \lambda \|\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 + \|\mathbf{f}\|^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} V(\mathbf{f}) = 2\lambda \mathbf{H}^\top (\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}) + 2\mathbf{W}^\top \mathbf{W}\mathbf{f} = \mathbf{0},$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \lambda \underbrace{[\lambda \mathbf{H}^\top \mathbf{H} + \mathbf{W}^\top \mathbf{W}]^{-1} \mathbf{H}^\top}_{\mathbf{A}} \mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{g}$$

$\mathbf{A}$   
no depende de  $\mathbf{g}$ .

# Solución del Problema:

(2/2)

$$||\hat{\mathbf{f}}|| \rightarrow \min \quad \text{sujeto a} \quad \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$$

:

Solución para una fila de la imagen

$$\hat{\mathbf{f}} = \underbrace{\lambda [\lambda \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{W}^T \mathbf{W}]^{-1} \mathbf{H}^T}_{\mathbf{A}} \mathbf{g} = \mathbf{A} \mathbf{g}$$

Para un movimiento horizontal de la imagen, las señales son vectores-fila, es necesario entonces calcular la transpuesta:

$$\hat{\mathbf{f}}^T = [\mathbf{A} \mathbf{g}]^T = \mathbf{g}^T \mathbf{A}^T$$



$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{G} \mathbf{A}^T$$

Solución para  
toda la  
imagen