Tratamiento de Señales

Version 2021-2

Convolución 2D usando Fourier

[Capítulo 4]

Transparencias Originales de Marcelo Guarini

Dr. José Ramón Iglesias

DSP-ASIC BUILDER GROUP

Director Semillero TRIAC

Ingenieria Electronica

Universidad Popular del Cesar

Extensión a Funciones de Dos Variables

- Teorema de la convolución en dos dimensiones

- Extendiendo (41) a dos dimensiones resulta en la siguiente expresión para la *convolución circular 2-D*:

$$f(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m, y-n) \tag{82}$$

para $x = 0, 1, 2, \cdots, M-1$ e $y = 0, 1, 2, \cdots, N-1$.

- El teorema de la convolución en dos dimensiones está dado por la expresión

$$f(x,y) * h(x,y) \Longleftrightarrow F(\omega,\nu)H(\omega,\nu) \tag{83}$$

y por

$$f(x,y)h(x,y) \Longleftrightarrow F(\omega,\nu) * H(\omega,\nu) \tag{84}$$

Extensión a Funciones de Dos Variables

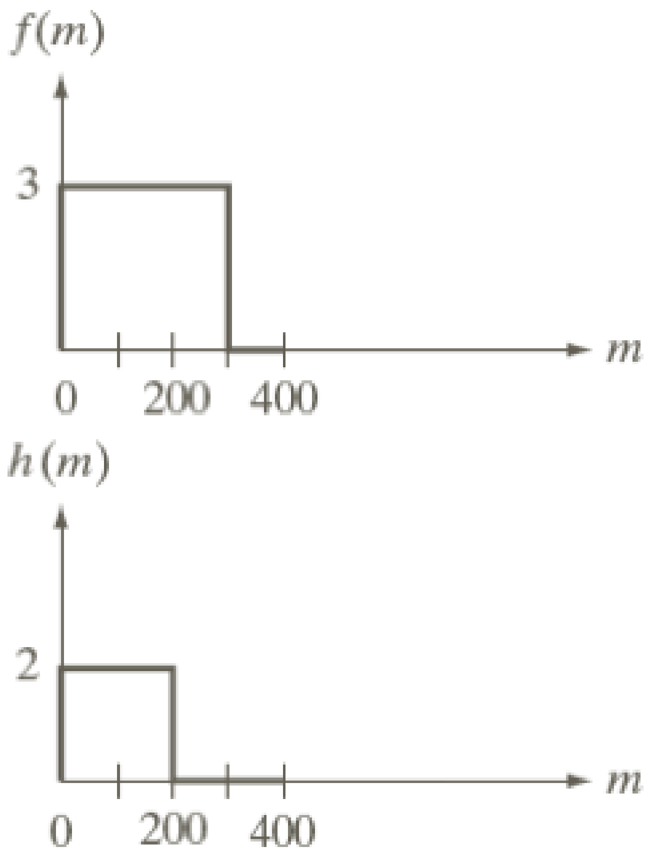
- Convolución en dos dimensiones - consideraciones

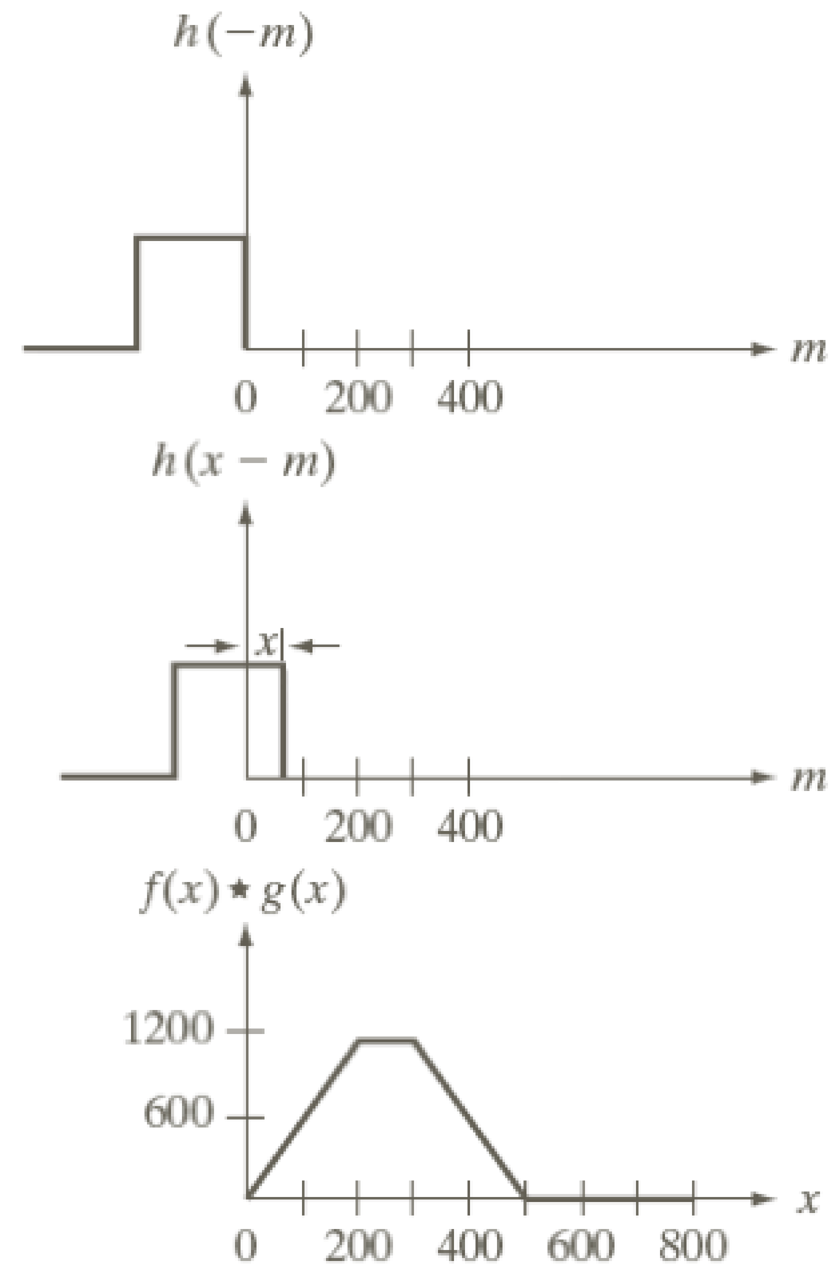
- Si escogemos realizar la convolución espacial utilizando la IDFT del producto de las dos transformadas, es necesario considerar las consecuencias de la periodicidad de la DFT.
- A continuación veremos gráficamente un ejemplo 1-D para ilustrar el punto y luego estenderemos las conclusiones a 2-D.
- consideraremos dos funciones del mismo tamaño, de 400 muestras cada una.
- la convolución entre las dos funciones f y h está dada por

$$f(x) * h(x) = \sum_{m=0}^{399} f(x)h(x-m)$$

Extensión a Funciones de Dos Variables

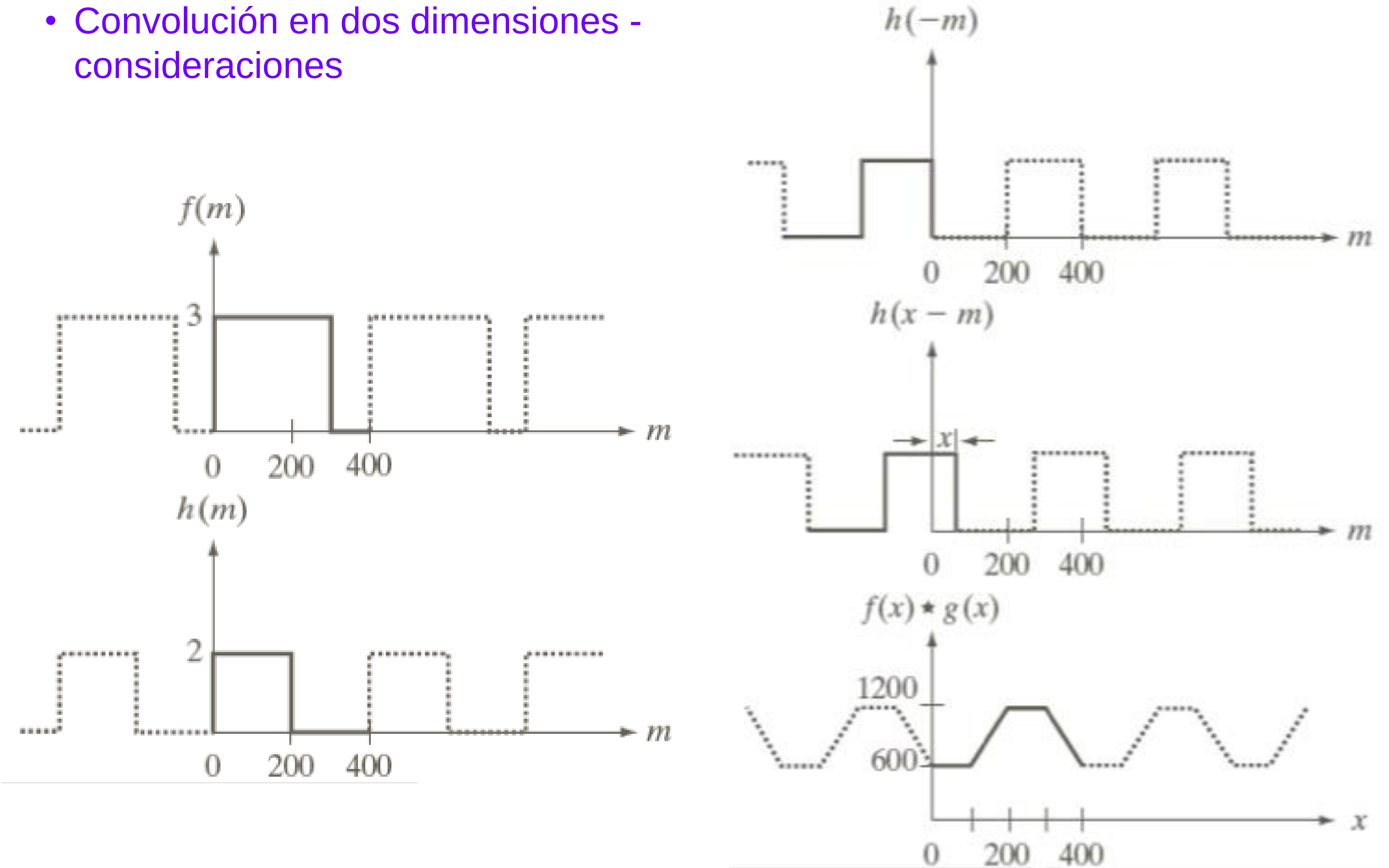
- Convolución en dos dimensiones - consideraciones





Extensión a Funciones de Dos Variables

- Convolución en dos dimensiones - consideraciones



Extensión a Funciones de Dos Variables

- Convolución en dos dimensiones - consideraciones

- La cercanía de los períodos es tal que se interfieren entre sí causando lo que conmunmente se conoce como *wraparound error* (error de envoltura)

- De acuerdo al teorema de la convolución, si hubiésemos calculado la DFT de las dos funciones (de 400 muestras c/u), f y h, multiplicado las dos transformadas (punto a punto) y luego calculado la IDFT, tendríamos la respuesta errónea de la segunda figura.

- La solución al problema del *error de envoltura* consiste en agregar ceros (*zero padding*) a ambas funciones de acuerdo a la siguiente regla (Brigham [1988]). Sea $f(x)$ y $h(x)$ compuestas de A muestras y B muestras respectivamente, a ambas secuencias se le agregan ceros a la derecha de tal forma que las dos tengan en mismo número P de muestras, donde

$$P \geq A + B - 1 \tag{85}$$

Extensión a Funciones de Dos Variables

• Convolución en dos dimensiones - consideraciones

- La visualización del problema en dos dimensiones es más compleja pero se llega a un resultado similar.

- Sea $f(x,y)$ y $h(x,y)$ dos imágenes muestreadas de tamaños $A \times B$ y $C \times D$, respectivamente. El error de envoltura se evita agregando ceros como sigue:

$$f_p(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & 0 \leq x \leq A-1 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq P \quad \text{o} \quad B \leq y \leq Q \end{cases} \tag{86}$$

y

$$h_p(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & 0 \leq x \leq C-1 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq P \quad \text{o} \quad D \leq y \leq Q \end{cases} \tag{87}$$

con $P \geq A + C - 1$ y $Q \geq B + D - 1$, resultando dos imágenes de tamaño $P \times Q$. Si ambos arreglos son del mismo tamaño $M \times N$, entonces $P \geq 2M - 1$ y $Q \geq 2N - 1$