Universidad Popular del Cesar

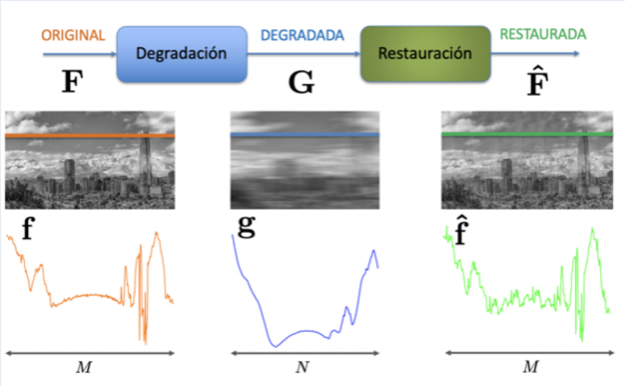
Tratamiento de Señales

Version 2021-2

Guía de Preguntas

[Capítulo 6]

Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar



Zoom

3

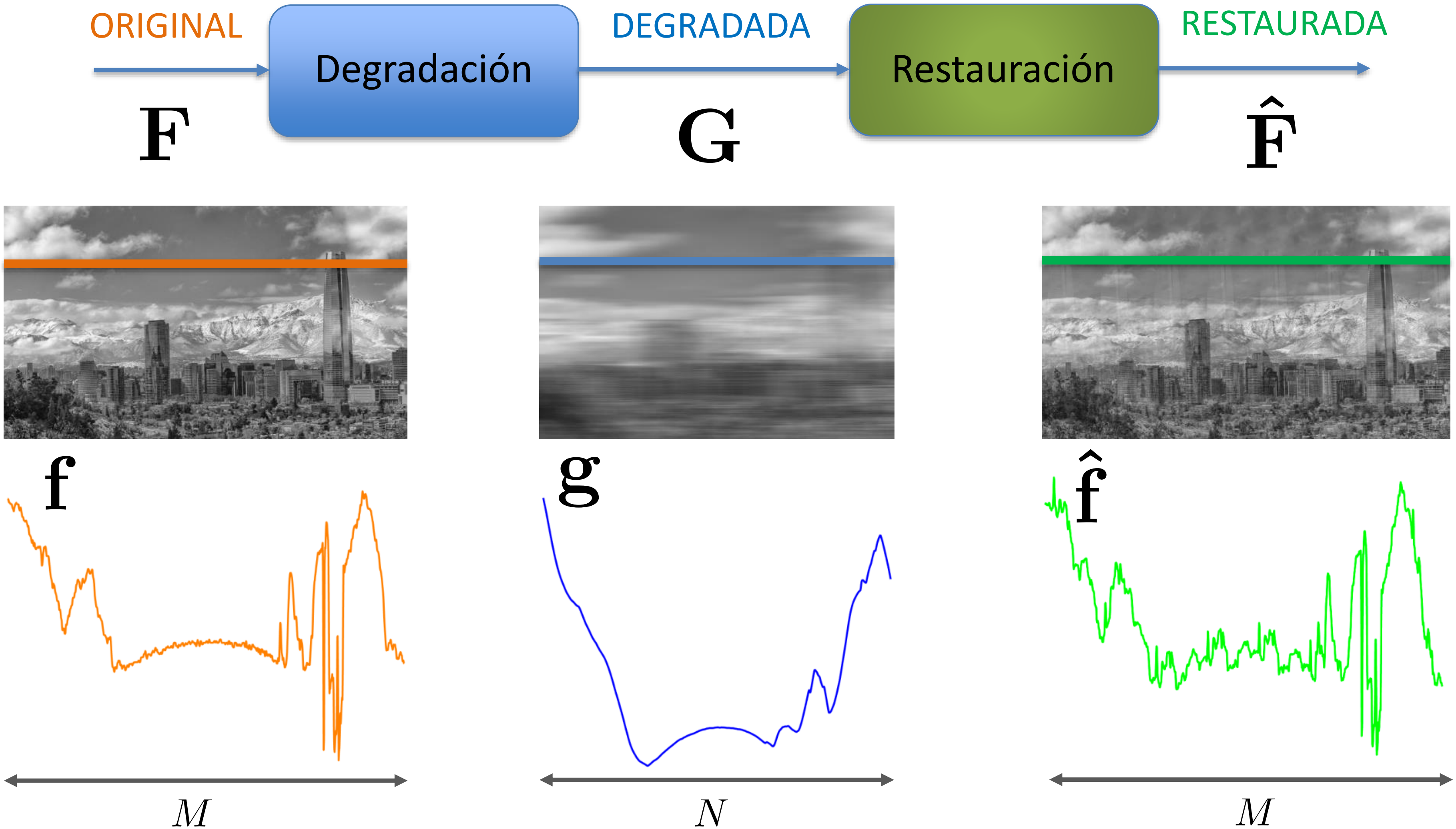
En el esquema de la figura (que está al costado de esta pregunta) hay una degradación producida por un movimiento uniforme horizontal de n=150 pixeles. Si el ancho de la imagen original es M=600, cuál es el ancho de la imagen degrada N?

A N = M - n + 1, es decir N = 451

B N = M - n , es decir N = 450

C N = M, es decir N = 600

D N = M - n - 1, es decir N = 449.



Para un movimiento de *n* pixeles: $M = N + n - 1$

A) $$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} \quad \text{con } h_i = 1/n$$

B) $$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} \quad \text{con } h_i = (i-1)/n$$

C) $$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_N & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_M \end{bmatrix} \quad \text{con } h_i = 1/n$$

D) $$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/n & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1/n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_M \end{bmatrix}$$

Zoom

4

Para restaurar una fila **g** de una imagen **G** de *N* columnas que haya sido degradada a partir de la fila **f** de una imagen original **F** de *M* columnas que sufrió un movimiento horizontal uniforme de *n* pixeles, se puede plantear la siguiente ecuación. Ver alternativas en la figura al costado.

A Respuesta A

B Respuesta B

C Respuesta C

D Respuesta D

La degradación de un movimiento lineal uniforme de n pixeles equivale a una convolución fila por fila con una máscara h. En esta convolución se toman sólo los elementos válidos de salida, es decir, sólo aquellos que fueron modelados con el promedio de n pixeles.

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{g}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} * \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & \ldots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \ldots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & h_1 & \ldots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

$$h_i = 1/n$$

(modelo)

ORIGINAL

DEGRADADA

5

La ecuación de la pregunta anterior puede escribirse en forma matricial como:

A $\mathbf{H}(\mathbf{f}-\mathbf{g})=0$

B $\mathbf{H}\mathbf{f}=\mathbf{g}$

C $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}=f$

D $\mathbf{H}\mathbf{g}=\mathbf{f}$

6

Conociendo **g** y la máscara **h** = $[h_1, h_2, \ldots h_n]$ vemos que el sistema de ecuaciones tiene {R1} ecuaciones y {R2} incógnitas. Como M es {R3} N, entonces existen {R4} soluciones.

A {R1: M}, {R2: N}, {R3: mayor que}, {R4: N}

B {R1: N}, {R2: M}, {R3: mayor que}, {R4: infinitas}

C {R1: N}, {R2: M}, {R3: igual a}, {R4: N}

D {R1: M}, {R2: N}, {R3: menor que}, {R4: cero}

7

Si se cumple **Hf = g**, entonces se puede decir que

A $||\mathbf{f}||^2 - ||\mathbf{g}||^2 = 0$

B $||\mathbf{Hf} - \mathbf{g}||^2 = 0$

C $||\mathbf{Hg} - \mathbf{f}||^2 = 0$

D $||\mathbf{H}^{-1}\mathbf{g} - \mathbf{f}||^2 = 0$

8

Para restaurar la fila degradada **g**, es necesario imponer una restricción para **f**. Esta restricción puede ser planteada como $||\mathbf{Wf}||^2 \rightarrow \min$, donde **Wf** es una señal por ejemplo que deja pasar las frecuencias altas de **f**. De esta manera la solución que se busca es una función **f** que cumpla simultáneamente:

1) $||\mathbf{Hf-g}||^2 = 0$

2) $||\mathbf{Wf}||^2 \rightarrow \min$

Las dos ecuaciones anteriores tienen la estructura de un problema de optimización que puede resolverse usando el multiplicador de Lagrange, que se denota con la variable lambda (en este caso un número muy grande, por ejemplo lambda = 10^6). Usando el multiplciador de Lagrange, la función objetivo *V*(**f**) a minimzar puede plantearse como:

A. $V(\mathbf{f}) = \text{lambda}\, ||\mathbf{Hf-g}||^2 - ||\mathbf{Wf}||^2 \rightarrow \min$

B. $V(\mathbf{f}) = \text{lambda}\, ||\mathbf{Hf-g}||^2 - \text{lambda}\, ||\mathbf{Wf}||^2 \rightarrow \min$

C. $V(\mathbf{f}) = ||\mathbf{Hf-g}||^2 + \text{lambda}\, ||\mathbf{Wf}||^2 \rightarrow \min$

D. $V(\mathbf{f}) = \text{lambda}\, ||\mathbf{Hf-g}||^2 + ||\mathbf{Wf}||^2 \rightarrow \min$

Formulación del problema:

1) Se tiene una señal $\mathbf{g}$ de M elementos que ha sido producida por un proceso de degradación de la señal $\mathbf{f}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{Hf} = \mathbf{g} = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

2) Se debe encontrar la señal original a partir de $\mathbf{g}$ y de $\mathbf{H}$ usando un algoritmo de optimización planteado de la siguiente manera:

$||\hat{\mathbf{f}}|| \rightarrow \min$ sujeto a $\mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$

La estimación de $\mathbf{f}$ es $\hat{\mathbf{f}}$.

Solución del Problema: (1/2)

$$||\hat{\mathbf{f}}|| \rightarrow \min \qquad \text{sujeto a} \quad \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$$

Usando multiplicadores de Lagrange:

con $(\mathbf{W} = \mathbf{I})$

$$V(\mathbf{f}) = \lambda \parallel \mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g} \parallel^2 + \parallel \mathbf{f} \parallel^2 \rightarrow \min$$

9

Para encontrar **f**, podemos derivar V(**f**) con respecto a **f** e igualar a cero. La derivada parcial de un escalar x con respecto a un vector **f**, se escribirá a partir de ahora como d{x}/d**f**. Recordar que

d{||**Xf**+**z**||^2 }/d**f** = 2**X'**(**Xf**+**z**) ,

donde **X** es una matriz, **X'** es la transpuesta de **X**, y **z** un vector.

Cuál sería la expresión para d{||**Hf**-**g**||^2 }/d**f** y para d{||**Wf**||^2 }/d**f** ?

A
d{||**Hf-g**||^2 }/d**f** = **H'**(**Hf-g**)/2
d{||**Wf**||^2 }/d**f** = **W'Wf/2**

B
d{||**Hf-g**||^2 }/d**f** = 2**H'**(**Hf-g**)
d{||**Wf**||^2 }/d**f** = 2**W'**(**Wf-g**)

C
d{||**Hf-g**||^2 }/d**f** = 2**H'**(**Hf-g**)
d{||**Wf**||^2 }/d**f** = 2**W'Wf**

D
d{||**Hf-g**||^2 }/d**f** = 2**H'Hf**
d{||**Wf**||^2 }/d**f** = 2**W'**(**Wf-g**)

Solución del Problema: (1/2)

$$||\hat{\mathbf{f}}|| \rightarrow \min \qquad \text{sujeto a} \quad \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$$

Usando multiplicadores de Lagrange: con $(\mathbf{W} = \mathbf{I})$

$$V(\mathbf{f}) = \lambda \parallel \mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g} \parallel^2 + \parallel \mathbf{W}\mathbf{f} \parallel^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} V(\mathbf{f}) = 2\lambda \mathbf{H}^{\mathsf{T}}(\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}) + 2\mathbf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{W}\mathbf{f} = \mathbf{0},$$

10

Sabiendo entonces que para minimizar la función objetivo V(**f**), su derivada debe ser cero, tenemos:

d{V(**f**)}/d**f** = 2 lambda **H'**(**Hf**-**g**) + 2**W'Wf** = 0

Despejando la ecuación anterior para **f** obtenemos la fila restaurada **f*** (**f** gorro en las clases). En este caso **f*** es la estimación de **f**.

A. **f*** = lambda [lambda **H'H** + **W'W**]$^{-1}$**H'g**

B. **f*** = lambda [**H'H** +lambda **W'W**]$^{-1}$**H'g**

C. **f*** = lambda [**H'H** +lambda **W'W**]$^{-1}$**H'f**

D. **f*** = lambda [**H'W** +lambda **W'H**]$^{-1}$**H'W'g**

Solución del Problema: (1/2)

$$||\hat{\mathbf{f}}|| \rightarrow \min \qquad \text{sujeto a} \quad \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$$

Usando multiplicadores de Lagrange:

con $(\mathbf{W} = \mathbf{I})$

$$V(\mathbf{f}) = \lambda \parallel \mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g} \parallel^2 + \parallel \mathbf{W}\mathbf{f} \parallel^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} V(\mathbf{f}) = 2\lambda \mathbf{H}^\mathsf{T}(\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}) + 2\mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{W}\mathbf{f} = \mathbf{0},$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \underbrace{\lambda \left[\lambda \mathbf{H}^\mathsf{T}\mathbf{H} + \mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{W}\right]^{-1} \mathbf{H}^\mathsf{T}}_{\mathbf{A}}\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{g}$$

no depende de $\mathbf{g}$.

11 La solución anterior para una fila restaurada puede ser expresada como:

$\mathbf{f}^* = \mathbf{A}\mathbf{g}$

con

$\mathbf{A} = \text{lambda}\ [\text{lambda}\ \mathbf{H'H} + \mathbf{W'W}]^{-1}\mathbf{H'}$

Usando **A,** cómo obtendríamos la restauración de la imagen completa **G**, que fue degradada fila por fila con un movimiento uniforme lineal (horizontal)?

A. **F* = AG**

B. **F* = AG'**

C. **F* = G' A'**

D. **F* = G A'**

Solución del Problema: (2/2)

$$||\hat{\mathbf{f}}|| \to \min \qquad \text{sujeto a} \quad \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$$

:

Solución para una fila de la imagen

$$\boxed{\hat{\mathbf{f}} = \underbrace{\lambda\left[\lambda \mathbf{H}^{\mathsf{T}}\mathbf{H} + \mathbf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{W}\right]^{-1}\mathbf{H}^{\mathsf{T}}}_{\mathbf{A}}\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{g}}$$

Para un movimiento horizontal de la imagen, las señales son vectores-fila, es necesario entonces calcular la transpuesta:

$$\hat{\mathbf{f}}^{\mathsf{T}} = [\mathbf{A}\mathbf{g}]^{\mathsf{T}} = \mathbf{g}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{G}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}}$$

Solución para toda la imagen

12 De que tamaño es la matriz **A**?

Recordemos que:

A = lambda [lambda **H'H** + **W'W**]$^{-1}$**H'**

A N x M elementos

B K x N elementos, sabiendo que la matriz **W** es de K x M elementos

C M x N elementos

D M x K elementos, sabiendo que la matriz **W** es de K x M elementos

13 Los pasos para restaurar una imagen **G** conociendo, lambda, **h** y **W** serian:

A

1. Calcular **H** a partir de **h** como una matriz que tiene en su diagonal el vector **h**.
2. Calcular **A** = lambda [lambda **W'W** + **H'H**]$^{-1}$**W'**
3. Calcular **F* = GA'**

B

1. Calcular **H** a partir de **h** como una matriz que tiene en su diagonal el vector **h**.
2. Calcular **F* = H**$^{-1}$**W'G**

C

1. Calcular **H** = **W h'**
2. Calcular **A** = lambda [lambda **H'H** + **W'W**]$^{-1}$**H'**
3. Calcular **F* = GA'**

D

1. Calcular **H** a partir de **h** como una matriz que tiene en su diagonal el vector **h**.
2. Calcular **A** = lambda [lambda **H'H** + **W'W**]$^{-1}$**H'**
3. Calcular **F* = GA'**

14

Una forma de restaurar este tipo de imágenes degradadas es usando $\mathbf{W} = \mathbf{I}$, es decir la matriz identidad. Por qué?

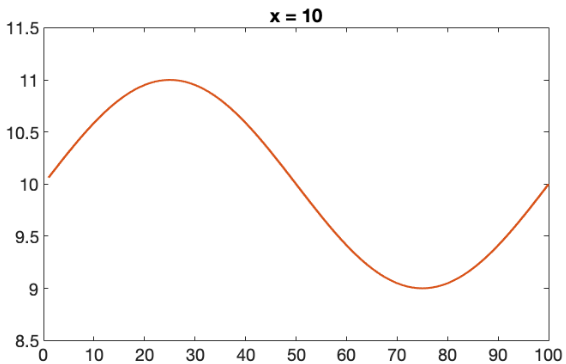
A. Porque con este criterio al minimizar $||\mathbf{f}||$, estamos minimizando el rizado de **f**, ya que experimentalmente se puede observar que la norma $||\mathbf{f} + \text{rizado}||$ es mayor que $||\mathbf{f}||$.

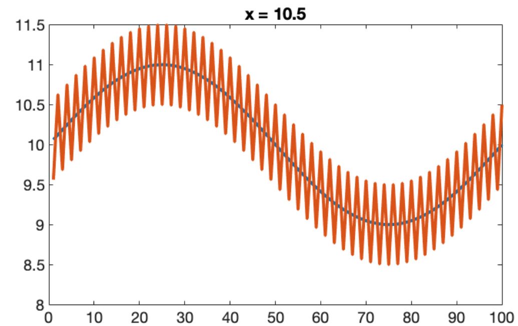
B. Este criterio hace que la función objetivo $V(\mathbf{f})$ sea derivable.

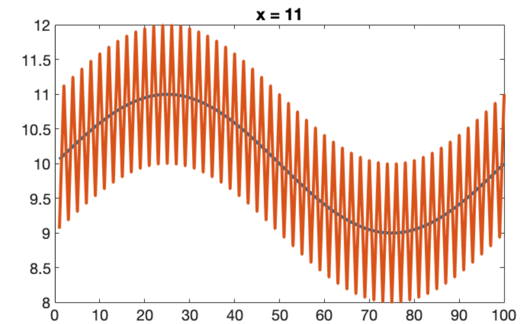
C. Con este criterio la formulación de $V(\mathbf{f})$ es más simple aunque la solución no es del todo satisfactoria.

D. De esta manera hacemos que $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, lo cual es una solución óptima.

La norma $\|\hat{\mathbf{f}}\|$ es una buena métrica del rizado





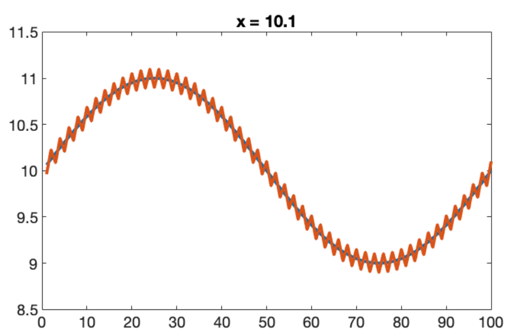


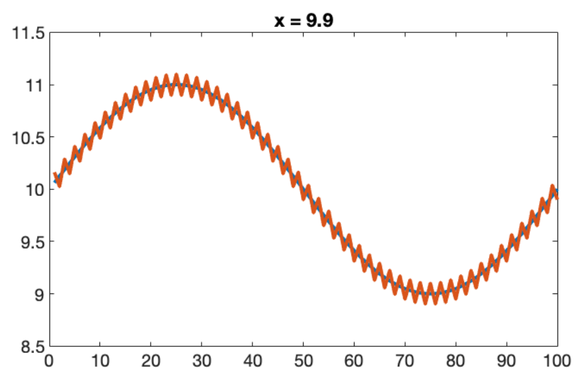
100.2497

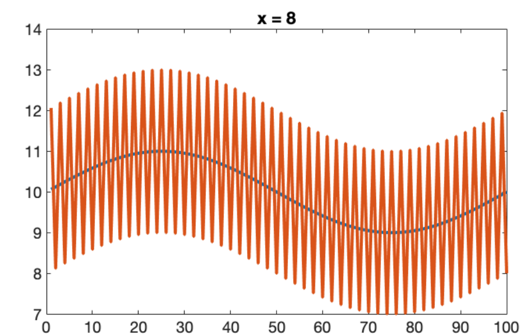
mínimo

100.3743

100.7472







100.2547

100.2547

102.2252

15 Cómo quedaría la solución para **f*** con **W**=**I**?

A. **f*** = lambda [lambda **H'H**]$^{-1}$**H'g**

B. **f*** = lambda [lambda **I'H'H I** + **H**]$^{-1}$**H'g**

C. **f*** = lambda [lambda **H'H** + **I**]$^{-1}$**H'g**

D. **f*** = lambda [lambda **H'H** + **I'I**]$^{-1}$**g**

16

Otro criterio para minimizar el rizado es empleado el criterio 'MINIO', que minimiza la norma entre la entrada y la salida. Como la entrada **g** y la salida **f** tienen largos distintos (**g** tiene N elementos y **f** tiene M elementos, con M>N), se usa la diferencia entre **g** y los primeros N elementos de **f**. Para la implementación de este criterio se minimiza

$||\mathbf{f}^{+}-\mathbf{g}||^{2} \rightarrow \min,$

donde $\mathbf{f}^{+}$ corresponde a un vector que toma los primeros N elementos de f, es decir

$\mathbf{f}^{+} = \mathbf{Pf},$

donde **P** es una matriz de N x M donde la parte de la izquierda es la matriz identidad de NxN elementos y la parte de la derecha es una matriz de ceros de Nx(M-N) elementos, o sea $\mathbf{P} = [\,\mathbf{I} \mid \mathbf{O}\,]$.

Como quedaría **W** en este caso?

A. **W** = **I**

B. **W** = **HP**

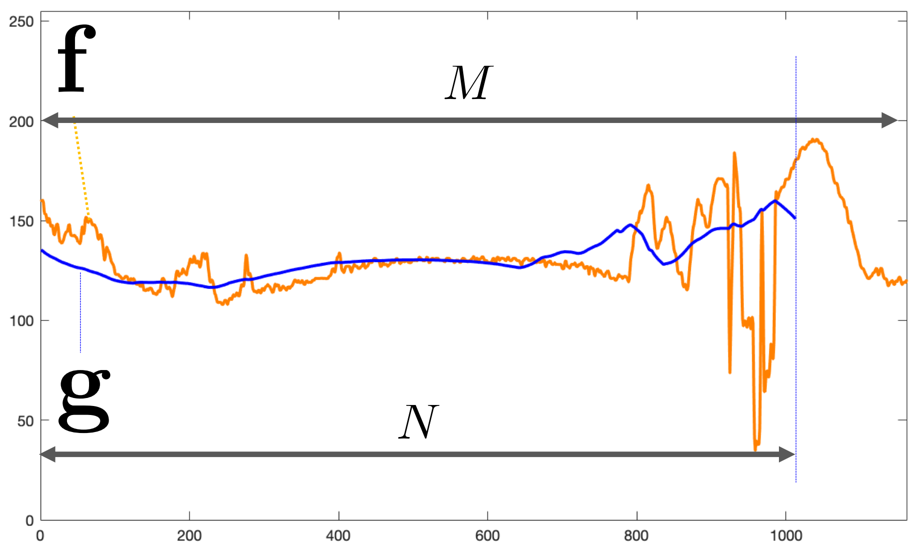
C. **W** = **P**

D. **W** = **P-H**

Criterio MINIO

$\mathbf{F}$

$\mathbf{G}$



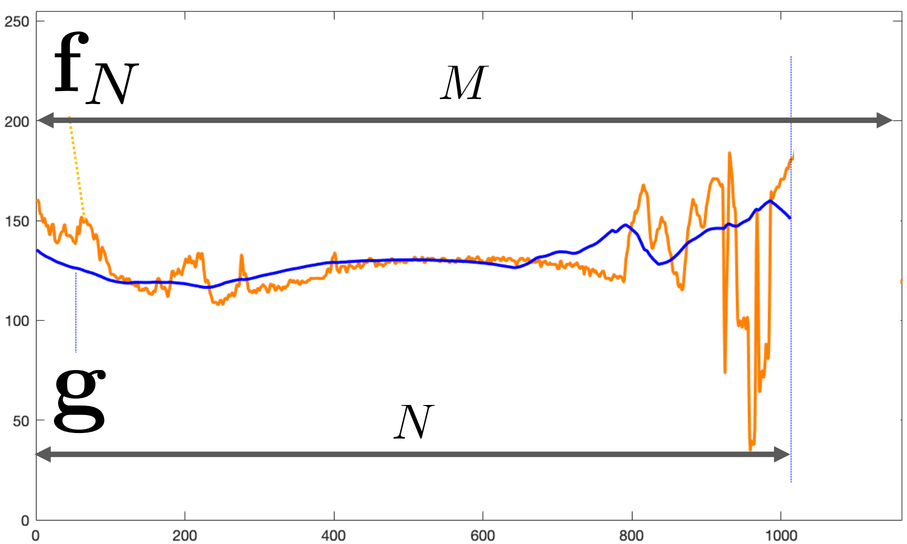
$$||\mathbf{f}_N - \mathbf{g}||^2 \rightarrow \min$$

donde $\mathbf{f}_N$ es el vector que contiene los primeros N elementos de $\mathbf{f}$.

Criterio MINIO

$\mathbf{F}$

$\mathbf{G}$



$$||\mathbf{f}_N - \mathbf{g}||^2 \rightarrow \min$$

donde $\mathbf{f}_N$ es el vector que contiene los primeros N elementos de $\mathbf{f}$.

Criterio MINIO

$$\mathbf{f}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \vdots & & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{f} = \mathbf{P}\mathbf{f}$$

$$\begin{aligned} ||\mathbf{f}_N - \mathbf{g}||^2 &= ||\mathbf{P}\mathbf{f} - \mathbf{g}||^2 \\ &= ||\mathbf{P}\mathbf{f} - \mathbf{H}\mathbf{f}||^2 \\ &= ||(\mathbf{P} - \mathbf{H})\mathbf{f}||^2 \\ &= ||\mathbf{W}\mathbf{f}||^2 \rightarrow \min \end{aligned}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{P} - \mathbf{H}$$

16

Otro criterio para minimizar el rizado es empleado el criterio 'MINIO', que minimiza la norma entre la entrada y la salida. Como la entrada **g** y la salida **f** tienen largos distintos (**g** tiene N elementos y **f** tiene M elementos, con M>N), se usa la diferencia entre **g** y los primeros N elementos de **f**. Para la implementación de este criterio se minimiza

$||\mathbf{f}^{+}-\mathbf{g}||^{2} \rightarrow \min,$

donde $\mathbf{f}^{+}$ corresponde a un vector que toma los primeros N elementos de f, es decir

$\mathbf{f}^{+} = \mathbf{P}\mathbf{f},$

donde **P** es una matriz de N x M donde la parte de la izquierda es la matriz identidad de NxN elementos y la parte de la derecha es una matriz de ceros de Nx(M-N) elementos, o sea $\mathbf{P} = [\,\mathbf{I} \mid \mathbf{O}\,]$.

Como quedaría **W** en este caso?

A **W = I**

B **W = HP**

C **W = P**

D **W = P-H**

▲ HIDE EXPLANATION

$||\mathbf{f}^{+}-\mathbf{g}||^{2}$ se puede expresar como (aquí usaremos $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$)

$||\mathbf{f}^{+}-\mathbf{g}||^{2} = ||\mathbf{P}\mathbf{f}-\mathbf{g}||^{2} = ||\mathbf{P}\mathbf{f}-\mathbf{H}\mathbf{f}||^{2} = ||(\mathbf{P}-\mathbf{H})\mathbf{f}||^{2}$, entonces $\mathbf{W} = \mathbf{P}-\mathbf{H}$ y así queda

$||\mathbf{f}^{+}-\mathbf{g}||^{2} = ||\mathbf{W}\mathbf{f}||^{2}$

17

Otro criterio muy intuitivo que se puede utilizar para reducir el rizado de **f** es minimizar las frecuencias altas de **f** (usando su transformada de Fourier). Es posible definir una matriz **D** de MxM con las funciones bases de Fourier, de tal forma que la transformada discreta de Fourier de **f** , que llamaremos **F_** es la multiplicación de **D** con **f,** es decir

F_ = **Df**

De la misma manera, un filtro pasa altos (en el dominio de Fourier) se puede calcular como la multiplicación de una matriz **K** de MxM elementos por **F_**, donde **K** es una matriz diagonal que contiene la información del filtro, es decir para un filtro basa bajos ideal, la diagonal tendría unos en los extremos y ceros en el medio (recordar que la transformada discreta de Fourier es simétrica y que las frecuencias bajas están en los extremos). Como sería **W** en este caso?

A. **W** = **DK**, donde la diagonal de **K** es [0 0 0 ...... 1 1 1 1 .... 0 0 0]

B. **W** = **KD**, donde la diagonal de **K** es [0 0 0 ...... 1 1 1 1 .... 0 0 0]

C. **W** = **KD**, donde la diagonal de **K** es [1 1 1 ...... 0 0 0 0 ....1 1 1]

D. **W** = **DK**, donde la diagonal de **K** es [1 1 1 ...... 0 0 0 0 ....1 1 1]

$$\mathbf{F}_{\_} = DFT(\mathbf{f})$$

$$F_{\_}(k) = \sum_{n=0}^{M-1} f(i) e^{-\frac{j2\pi}{M} ki}$$

$$\begin{bmatrix} F_{\_}(0) \\ \vdots \\ F_{\_}(k) \\ \vdots \\ F_{\_}(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{j2\pi}{M} 0\cdot 0} & e^{-\frac{j2\pi}{M} 1\cdot 0} & e^{-\frac{j2\pi}{M} 2\cdot 0} & \dots & e^{-\frac{j2\pi}{M} (M-1)\cdot 0} \\ \vdots & & & & \\ e^{-\frac{j2\pi}{M} 0k} & e^{-\frac{j2\pi}{M} 1k} & e^{-\frac{j2\pi}{M} 2k} & \dots & e^{-\frac{j2\pi}{M} (M-1)k} \\ \vdots & & & & \\ e^{-\frac{j2\pi}{M} 0(M-1)} & e^{-\frac{j2\pi}{M} 1(M-1)} & e^{-\frac{j2\pi}{M} 2(M-1)} & \dots & e^{-\frac{j2\pi}{M} (M-1)(M-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(M-1) \end{bmatrix}$$

PASA ALTOS

$$\mathbf{F'}_{\_} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\_}(0) \\ \vdots \\ F_{\_}(k) \\ \vdots \\ F_{\_}(M-1) \end{bmatrix} = \mathbf{KF}_{\_} = \mathbf{KDf}$$

FILTRO

$$||\mathbf{KDf}||^2 = ||\mathbf{Wf}||^2 \rightarrow \min$$

17

Otro criterio muy intuitivo que se puede utilizar para reducir el rizado de **f** es minimizar las frecuencias altas de **f** (usando su transformada de Fourier). Es posible definir una matriz **D** de MxM con las funciones bases de Fourier, de tal forma que la transformada discreta de Fourier de **f** , que llamaremos **F_** es la multiplicación de **D** con **f,** es decir

F_ = **Df**

De la misma manera, un filtro pasa altos (en el dominio de Fourier) se puede calcular como la multiplicación de una matriz **K** de MxM elementos por **F_**, donde **K** es una matriz diagonal que contiene la información del filtro, es decir para un filtro basa bajos ideal, la diagonal tendría unos en los extremos y ceros en el medio (recordar que la transformada discreta de Fourier es simétrica y que las frecuencias bajas están en los extremos). Como sería **W** en este caso?

A. **W** = **DK**, donde la diagonal de **K** es [0 0 0 ...... 1 1 1 1 .... 0 0 0]

B. **W** = **KD**, donde la diagonal de **K** es [0 0 0 ...... 1 1 1 1 .... 0 0 0]

C. **W** = **KD**, donde la diagonal de **K** es [1 1 1 ...... 0 0 0 0 ....1 1 1]

D. **W** = **DK**, donde la diagonal de **K** es [1 1 1 ...... 0 0 0 0 ....1 1 1]