Tratamiento de Señales

Version 2022-I

Teoría Transformada de Fourier en 1D

[Capítulo 4]

Dr. José Ramón Iglesias

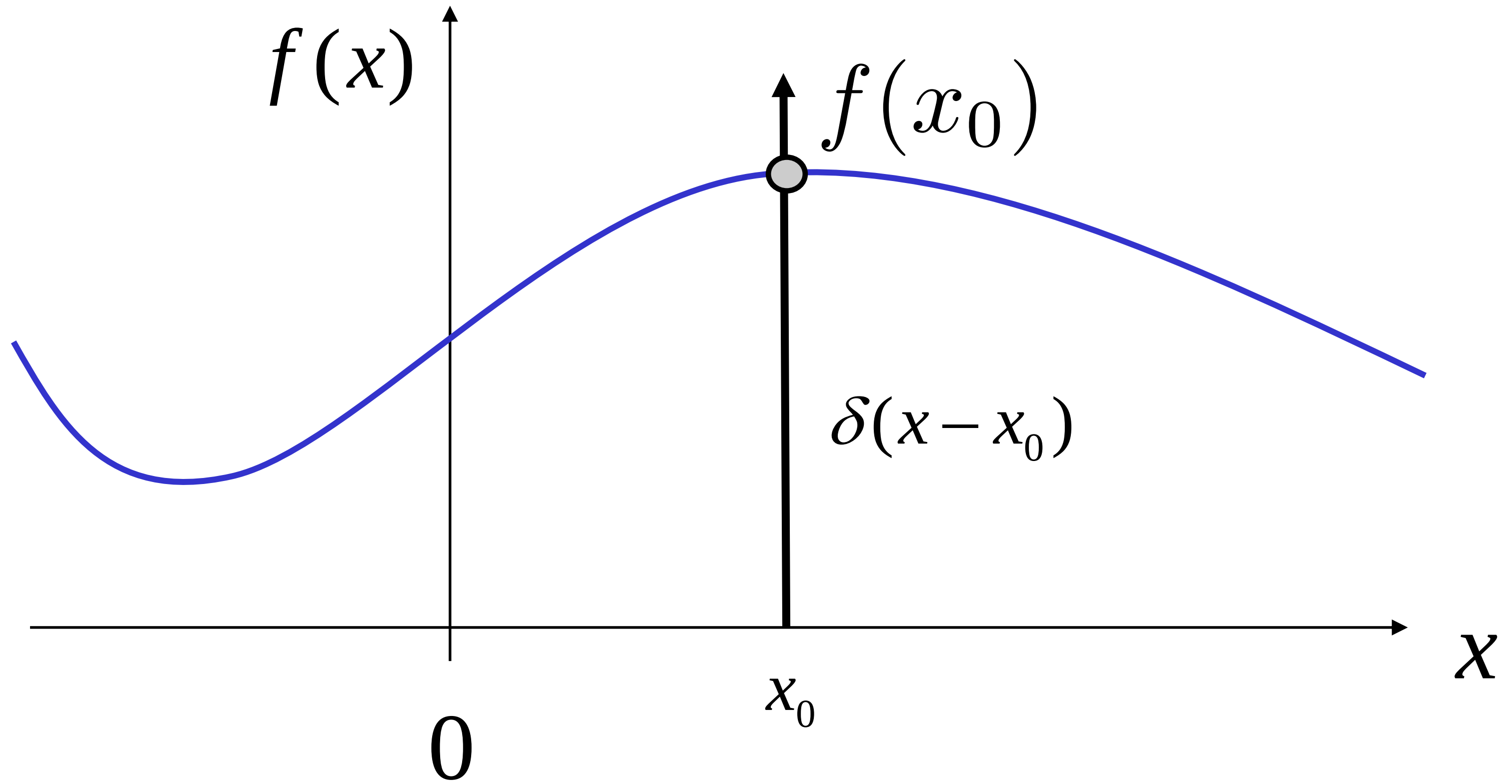
DSP-ASIC BUILDER GROUP

Director Semillero TRIAC

Ingenieria Electronica

Universidad Popular del Cesar

Función Impulso



$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau+x_0)\delta(\tau)d\tau = f(x_0)}$$

Convolución 1D

Continua: $$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

Transformada de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\omega t} dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+j2\pi\omega t} dt$$

$$j = \sqrt{-1}$$

Series de Fourier

- Una función $f(t)$ de variable contínua t, que es periódica con período T, puede expresarse como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

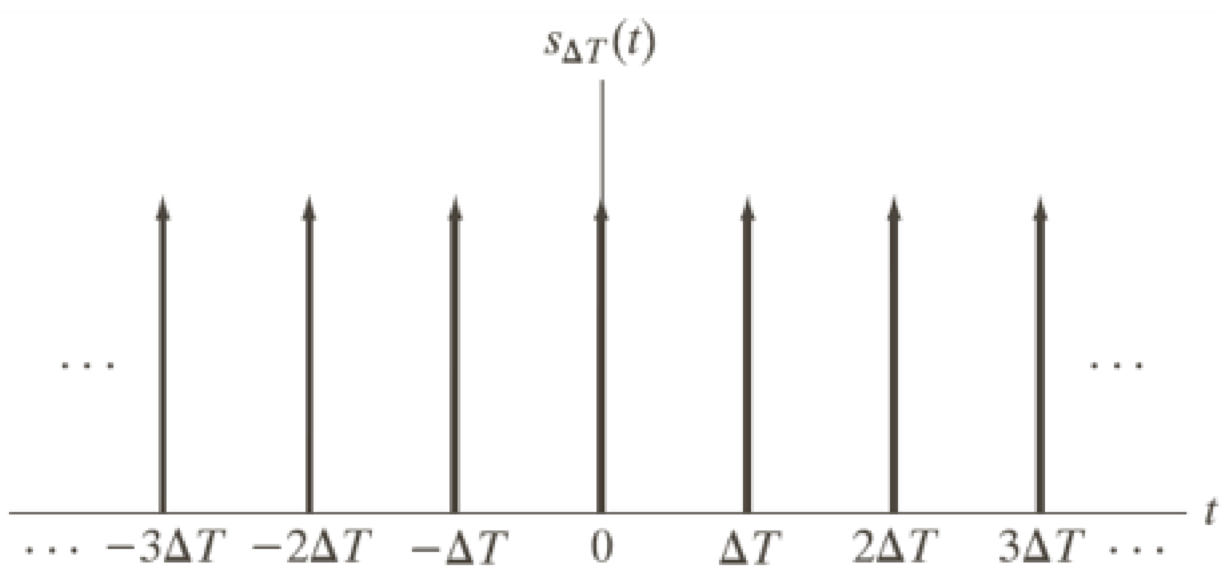
donde

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt, \qquad \text{para} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Tren de Impulsos

- El *tren de impulsos* es de particular importancia. Este se define como

$$S_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$



Serie de Fourier del Tren de Impulsos

- Vimos que el tren de impulsos $s_{\Delta T}(t)$ periódico con período ΔT, puede expresarse como la serie de Fourier

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{\Delta T}\int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} s_{\Delta T}(t) e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} dt$$

Serie de Fourier del Tren de Impulsos

- Vimos que el tren de impulsos $s_{\Delta T}(t)$ periódico con período ΔT, puede expresarse como la serie de Fourier

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} \quad = \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{\Delta T}\int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} s_{\Delta T}(t) e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} dt$$

- La integral en el intervalo $[-\Delta T/2, \Delta T/2]$ contiene sólo al impulso localizado en el origen, por lo tanto:

$$c_n = \frac{1}{\Delta T}\int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} dt \quad = \frac{1}{\Delta T} e^0 = \frac{1}{\Delta T}$$

Transformada de Fourier del Impulso

- La transformada de Fourier de un impulso unitario ubicado en el origen es:

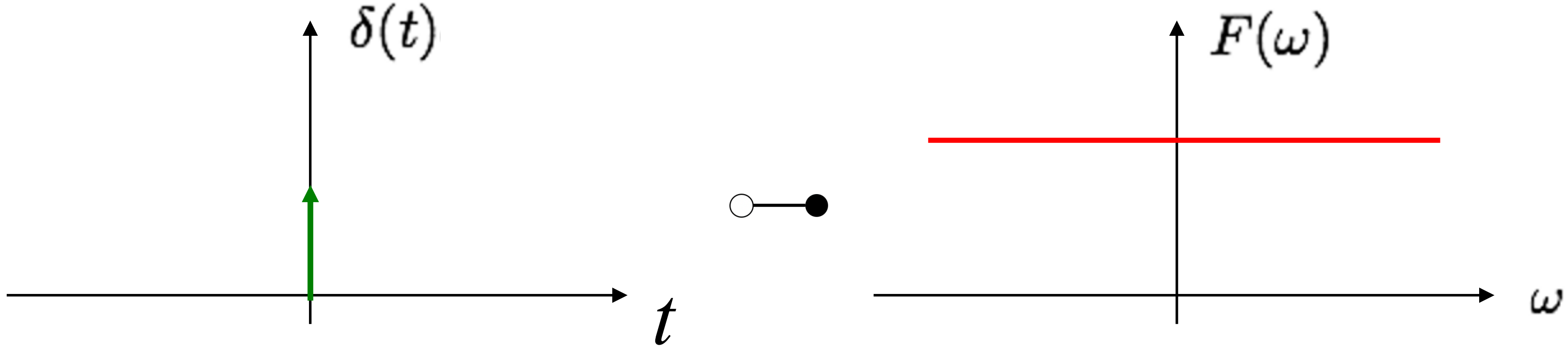
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\omega t} dt$$

Transformada de Fourier del Impulso

- La transformada de Fourier de un impulso unitario ubicado en el origen es:

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\omega t} dt \\
&= e^{-j2\pi\omega 0} = e^{0} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Transformada de Fourier del Impulso

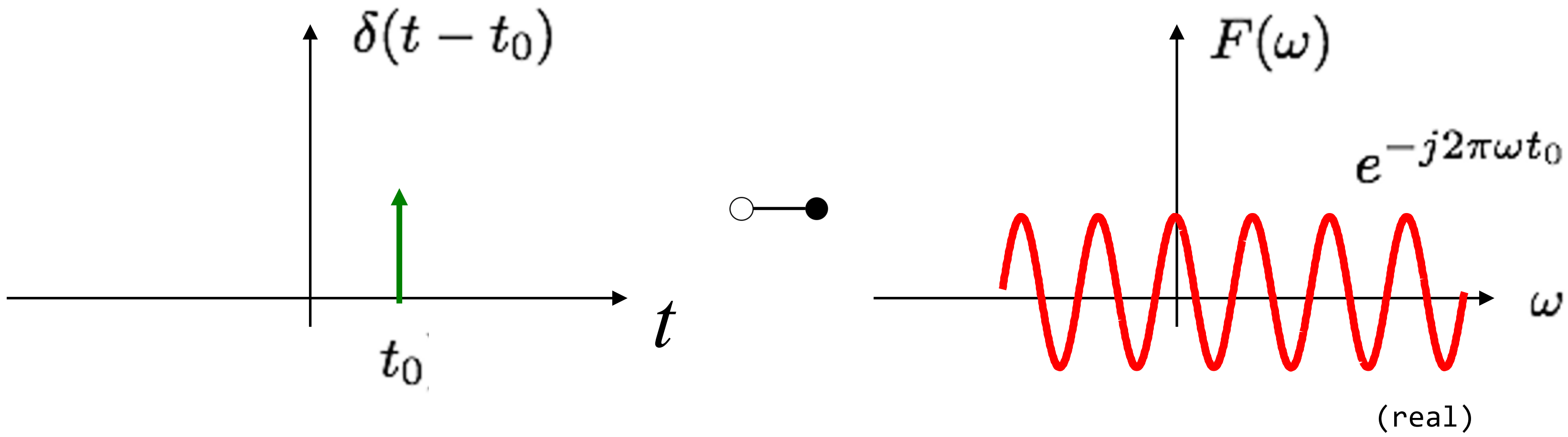


Transformada de Fourier del Impulso

- La transformada de Fourier de un impulso unitario ubicado $t = t_0$ es:

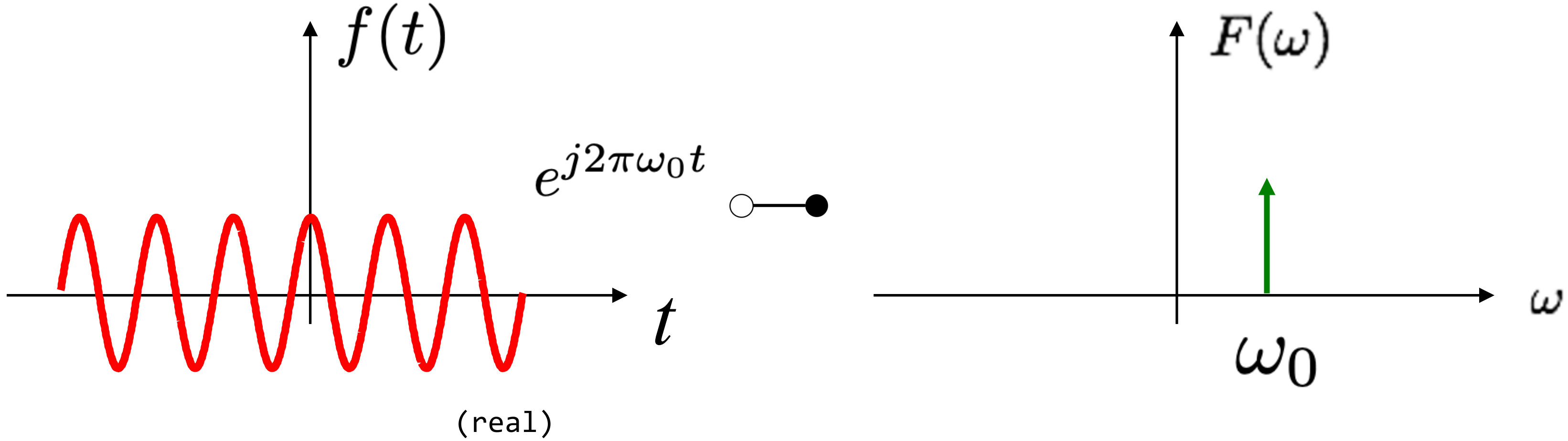
$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-j2\pi\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\omega t}\delta(t-t_0)dt \\
&= e^{-j2\pi\omega t_0} \\
&= \cos(2\pi\omega t_0) - j\sin(2\pi\omega t_0)
\end{aligned}
$$

Transformada de Fourier del Impulso



Transformada Inversa de Fourier de un Impulso

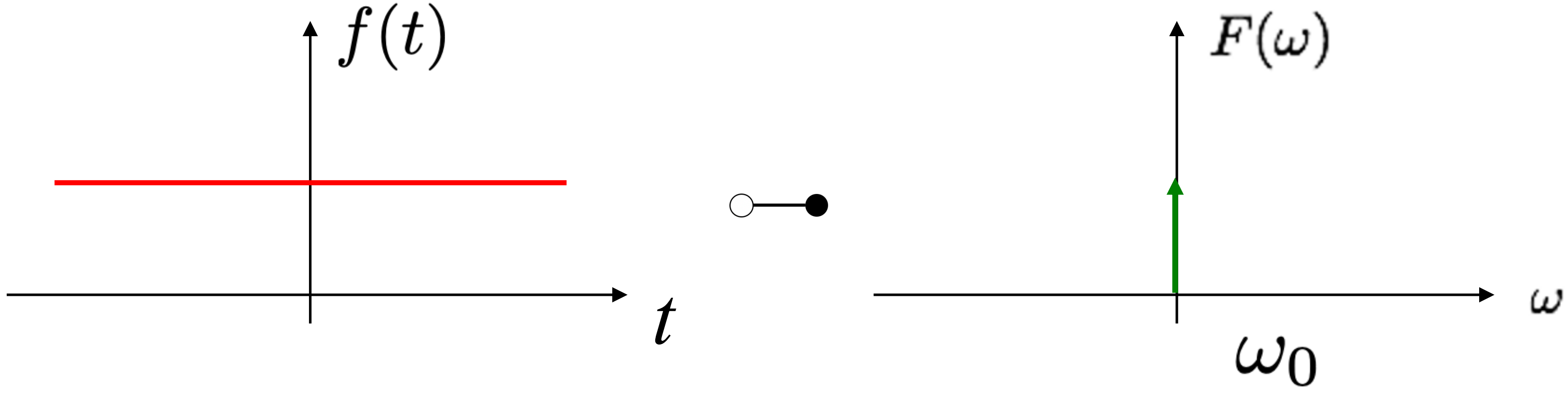
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j2\pi\omega t} d\omega = e^{j2\pi\omega_0 t}$$



Transformada Inversa de Fourier de un Impulso

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j2\pi\omega t} d\omega = e^{j2\pi\omega_0 t}$$

Para $\omega_0 = 0$, $f(t) = 1$

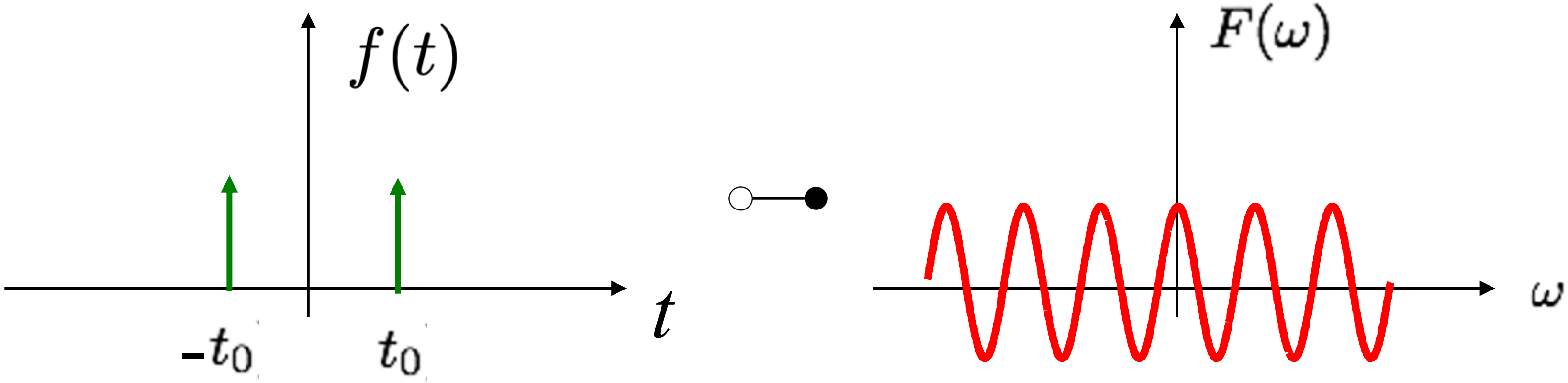


Transformada de un Coseno

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)\right]$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\left[e^{-j2\pi\omega t_0} + e^{+j2\pi\omega t_0}\right]$$

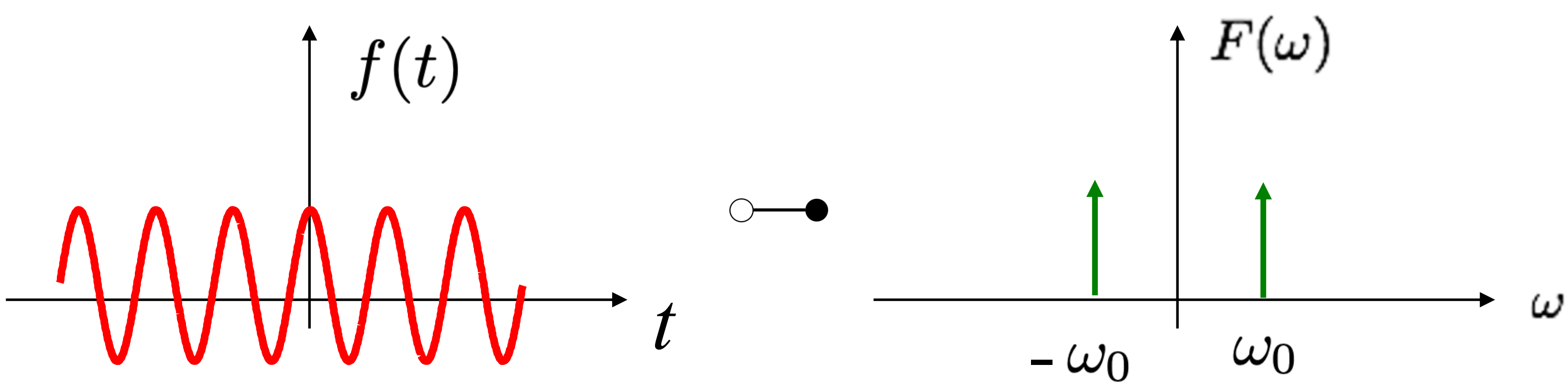
$$= \cos(2\pi\omega t_0)$$



Transformada de un Coseno

$$f(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$$



Transformada de Fourier del Tren de Impulsos

- Vimos que el tren de impulsos $s_{\Delta T}(t)$ periódico con período ΔT, puede expresarse como la serie de Fourier

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$$

$$s_{\Delta t}(t) = \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$$

- cada uno de los componentes de esta suma son exponenciales y sabemos que

$$\mathfrak{F}\{e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}\} = \delta(\omega - \frac{n}{\Delta T})$$

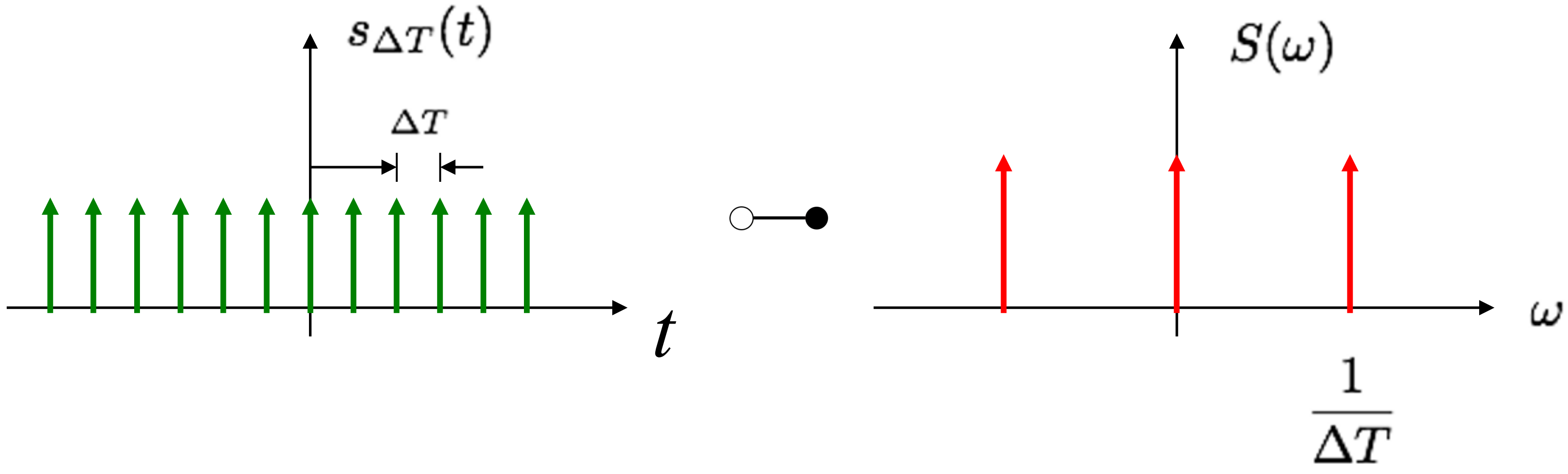
Transformada de Fourier del Tren de Impulsos

- Entonces la transformada de Fourier del tren de impulsos, $S(\omega)$ es

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \mathfrak{F}\{s_{\Delta T}(t)\} \\ &= \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}\right\} \\ &= \frac{1}{\Delta T}\mathfrak{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}\right\} \\ &= \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{n}{\Delta T}\right) \end{aligned}$$

- Este resultado fundamental nos indica que la TF de un tren de impulsos con período ΔT, también es un tren de impulsos, cuyo período es $1/\Delta T$.

Transformada de Fourier del Tren de Impulsos



Transformada de Fourier de la Convolución

- Como vimos, la convolución entre dos funciones contínuas $f(t)$ y $h(t)$, denotada por $*$, está definida por:

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

t es el desplazamiento requerido para desplazar una función sobre la otra.

- Nos interesa ahora encontrar la transformada de Fourier de

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-j2\pi\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi\omega t}dt\right]d\tau\end{aligned}$$

Transformada de Fourier de la Convolución

- En la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi\omega t}dt\right]d\tau$$

- la expresión entre paréntesis cuadrados es la transformada de Fourier de $h(t-\tau)$. Más tarde demostraremos que $\mathfrak{F}\{h(t-\tau)\} = H(\omega)e^{-j2\pi\omega\tau}$, donde $H(\omega)$ es la transformada de fourier de $h(t)$. Utilizando esto resulta

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\{f(t) * h(t-)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left[H(\omega)e^{-j2\pi\omega\tau}\right]d\tau \\
&= H(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j2\pi\omega\tau}d\tau \\
&= H(\omega)F(\omega)
\end{aligned}$$

Transformada de Fourier de la Convolución

- Entonces

$$f(t) * h(t) \Longleftrightarrow H(\omega)F(\omega)$$

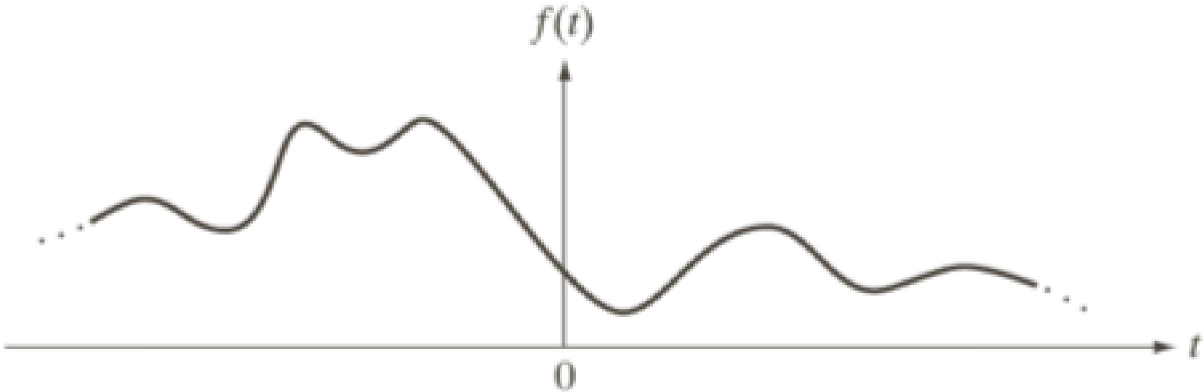
y

$$f(t)h(t) \Longleftrightarrow H(\omega) * F(\omega)$$

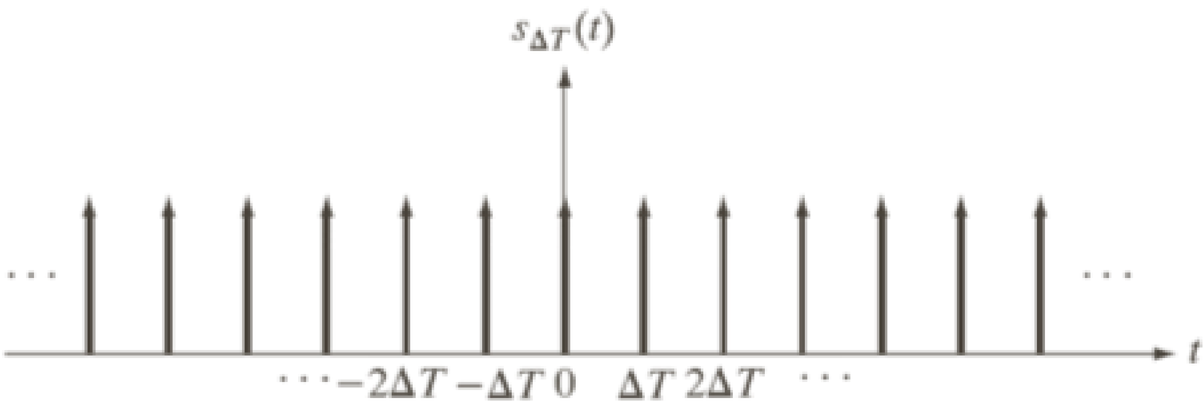
Muestreo y Transformada de Fourier de Señales Muestreadas

- Las funciones contínuas deben convertirse a una secuencia de valores discretos antes de ser procesadas en un computador.
- Esto se logra utilizando muestreo y cuantización.
- En lo que sigue veremos en detalle que se entiende por muestreo y su representación matemática.

Muestreo y Transformada de Fourier de Señales Muestreadas

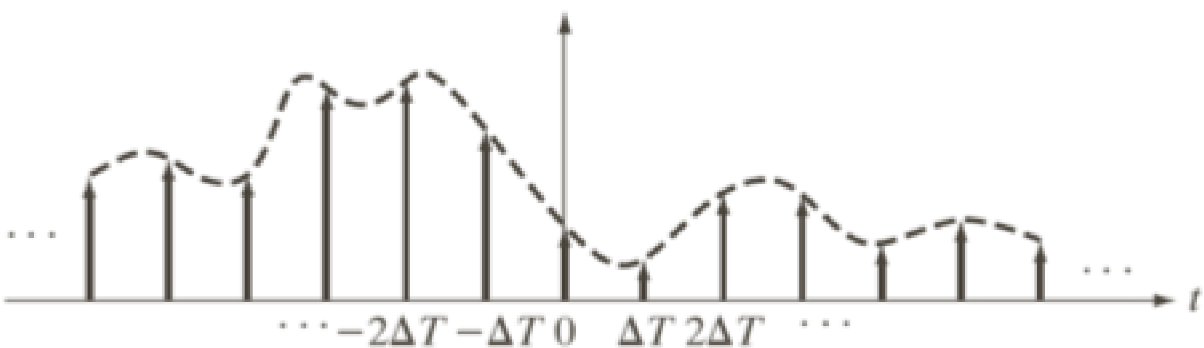


Función contínua



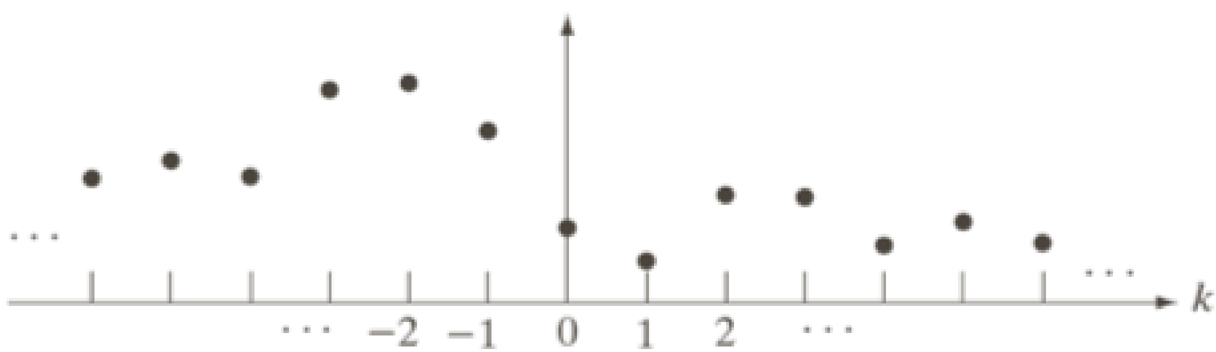
Tren de impulsos para modelar el proceso de muestreo

Muestreo y Transformada de Fourier de Señales Muestreadas



Producto de la señal contínua (a muestrear) y el trén de impulsos

$f_k = f(k\Delta T)$



Valores muestreados obtenidos por integración y utilizando la propiedad del cedazo del impulso

Muestreo y Transformada de Fourier de Señales Muestreadas

- Consideremos $f(t)$ contínua entre $-\infty$ y ∞ y que queremos muestrear a intervalos uniformes ΔT.

- Una forma de modelar el muestreo es multiplicar $f(t)$ por una *función de muestreo* igual a un tren de impulsos separados por ΔT.

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

- Cada componente de la suma es un impulso ponderado por el valor de $f(t)$ en la posición del impulso.

Muestreo y Transformada de Fourier de Señales Muestreadas

- El valor de cada muestra es obtiene por integración. Esto es, el valor f_k de una muestra arbitraria en la secuencia está dada por

$$\begin{aligned} f_k &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - k\Delta T)dt \\ &= f(k\Delta T) \end{aligned}$$

- Esta propiedad se cumple para cualquier valor entero

$$k = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$$

Muestreo y Transformada de Fourier de Señales Muestreadas

- Sea $F(\omega)$ la transformada de Fourier de una función contínua $f(t)$.
- Como vimos, la función muestreada $\tilde{f}(t)$ es el producto de $f(t)$ con un tren de impulsos.
- Por el teorema de convolución sabemos que la T de F del producto de dos funciones en el dominio temporal (o espacial) es la convolución de la T de F de las funciones en el dominio de la frecuencia. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\omega) &= \mathfrak{F}\left\{\tilde{f}(t)\right\} \\ &= \mathfrak{F}\left\{f(t)s_{\Delta T}(t)\right\} \\ &= F(\omega) * S(\omega)\end{aligned}$$

Muestreo y Transformada de Fourier de Señales Muestreadas

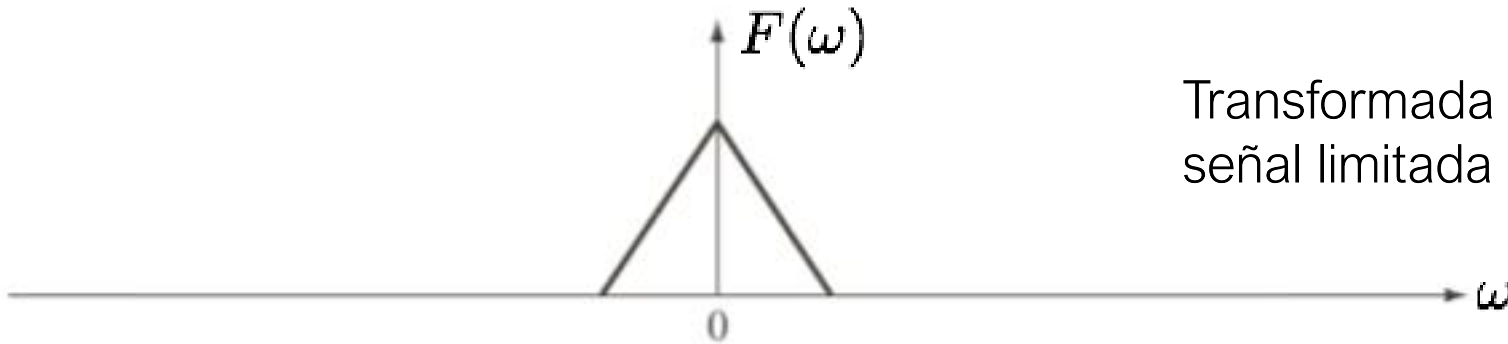
- Ya se demostró que

$$S(\omega) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

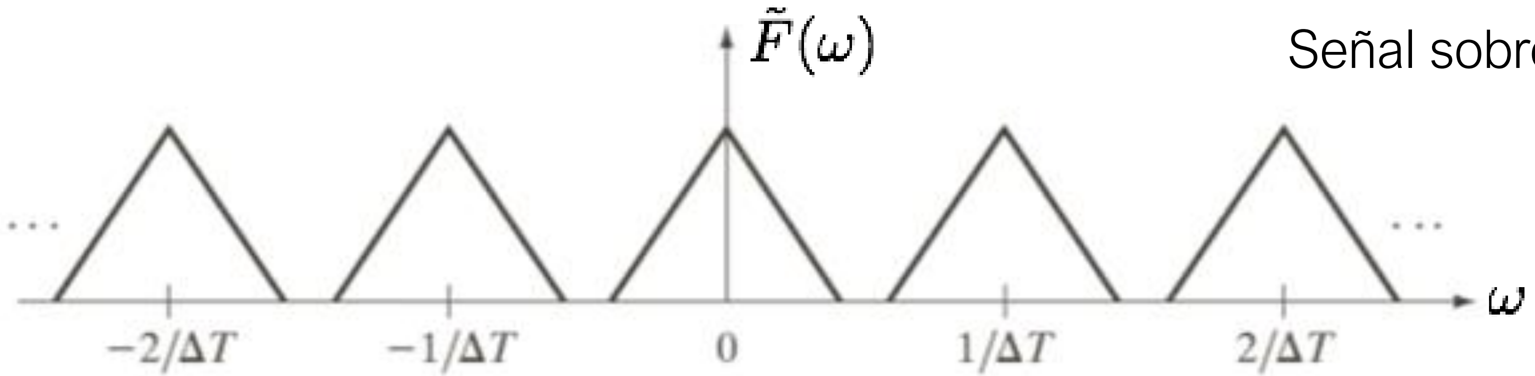
- La convolución de $F(\omega)$ con $S(\omega)$ se obtiene directamente de la definición

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\omega) = F(\omega) * S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) S(\omega - \tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \delta\left(\omega - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{n}{\Delta T}\right)
\end{aligned}$$

Muestreo y Transformada de Fourier de Señales Muestreadas

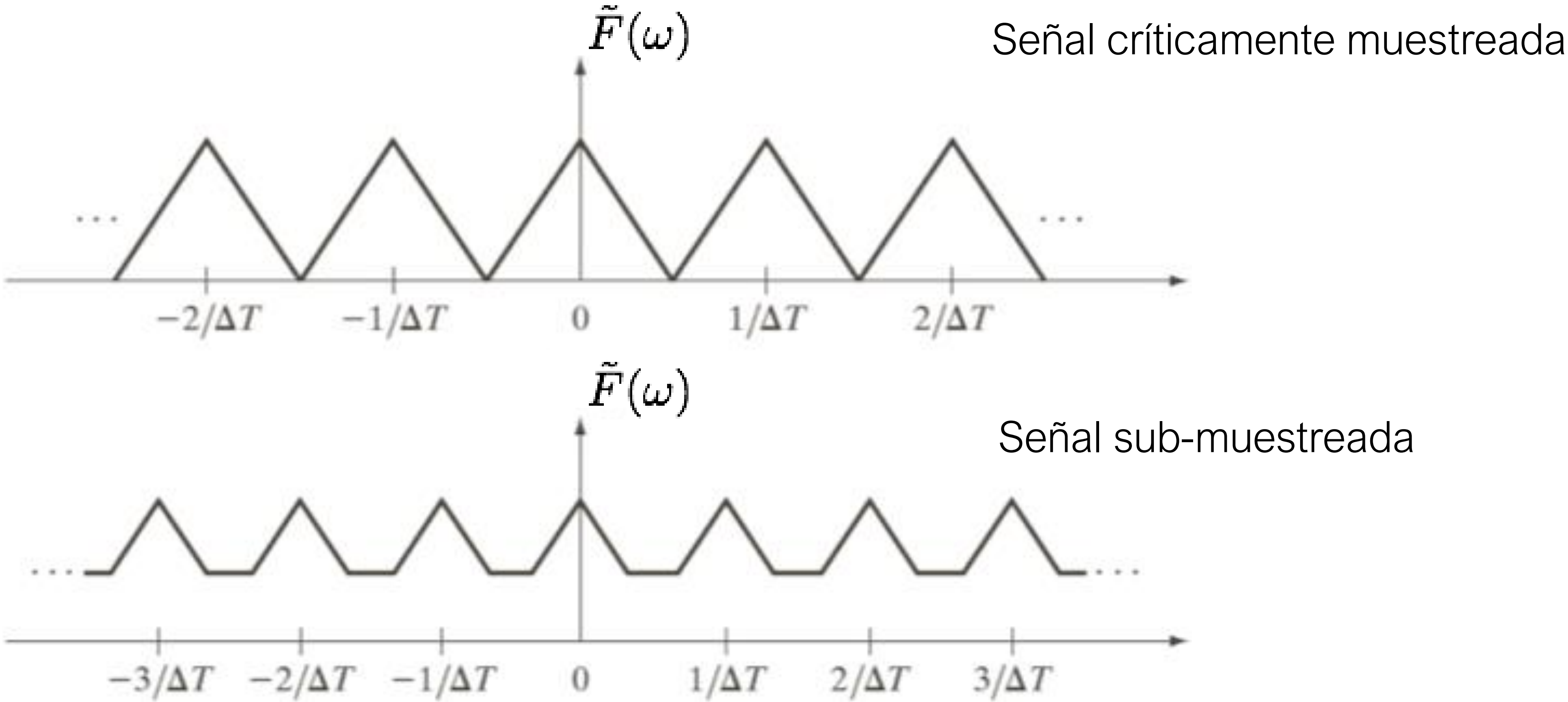


Transformada de Fourier de una señal limitada en frecuencia.



Señal sobre-muestreada

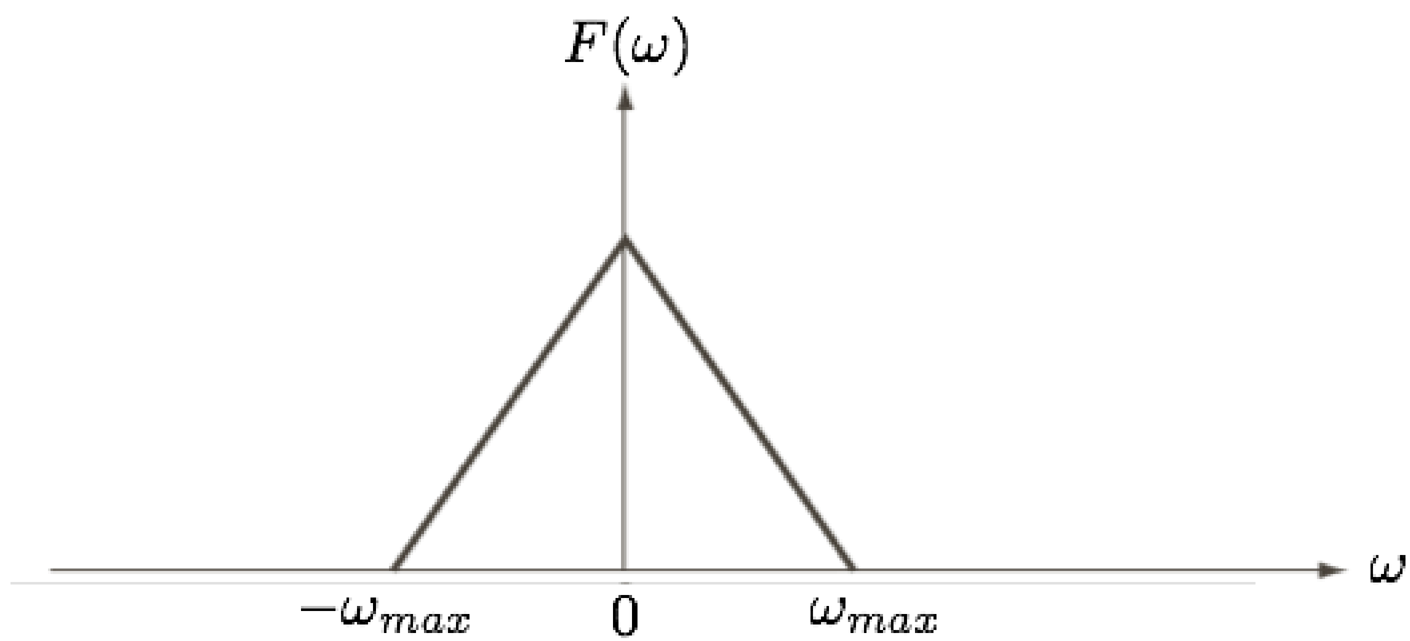
Muestreo y Transformada de Fourier de Señales Muestreadas



Teorema del Muestreo

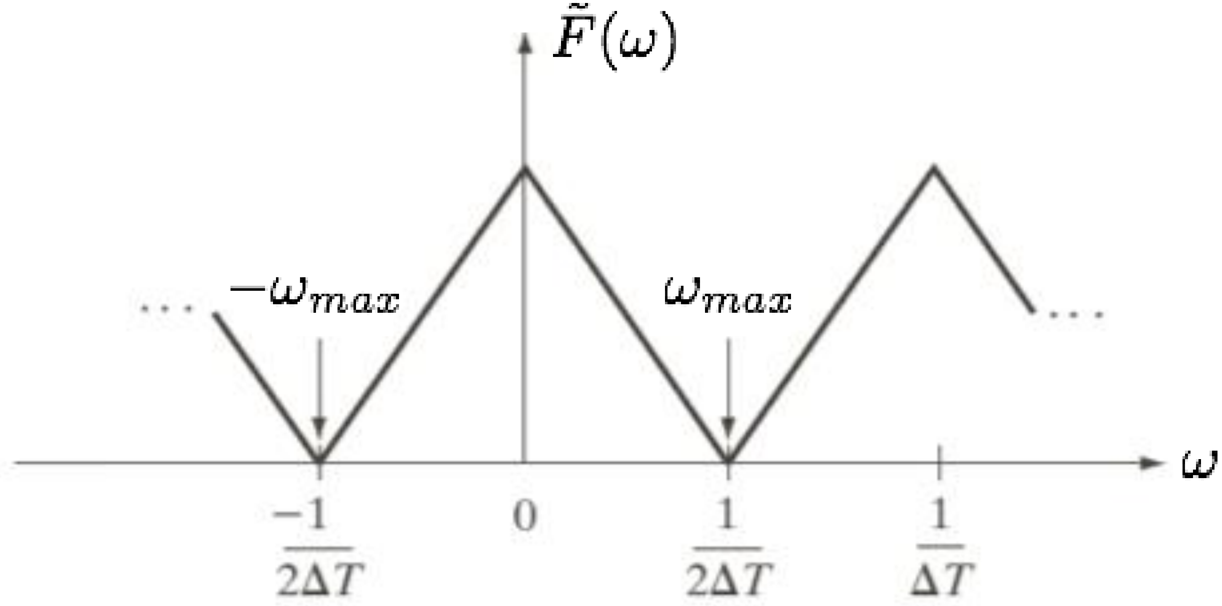
- Introducimos ahora las condiciones bajo las cuales una función contínua puede ser *recuperada en forma única* a partir de un conjunto de muestras.

- Una función $f(t)$ cuya T de F es cero para valores de freccuencia fuera de un intervalo finito $[-\omega_{max}, \omega_{max}]$ se denomina *limitada en la banda.*



Teorema del Muestreo

- La siguiente figura muestra una versión detallada de la de la T de F de la función criticamente muestreada:



- La recuperación de $f(t)$ a partir de la señal muestreada se logra si es posible aislar una copia de $F(\omega)$ de la secuencia periódica de copias de esta función contenidas en $\tilde{F}(\omega)$ (T de F de $\tilde{f}(t)$).

Teorema del Muestreo

- La separación está garantizada si:

$$\frac{1}{2\Delta T} > \omega_{max} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{\Delta T} > 2\omega_{max}$$

- Este resultado se conoce como el *teorema del muestreo.*
- La frecuencia mínima de muestreo que permite la recuperación total recibe el nombre de *frecuencia de Nyquist* o *tasa de muestreo de Nyquist.*

Recuperación de una Función

- Consideremos la función:

$$H(\omega) = \begin{cases} \Delta T & \text{si } -\omega_{max} \leq \omega \leq \omega_{max}, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor de } \omega \end{cases}$$

- Multiplicándola por $\tilde{F}(\omega)$ se obtiene $F(\omega)$. Es decir $F(\omega) = H(\omega)\tilde{F}(\omega)$
- Con $F(\omega)$, $f(t)$ se recupera utilizando la T inversa de F.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j2\pi\omega t} d\omega$$

- La función $H(\omega)$ se llama *filtro pasabajos* debido a que deja pasar frecuencias en el extremo bajo del eje de frecuencias.