Trabajo en Grupo sobre Restauración de Imágenes

Objetivos:

- Comprender nociones básicas de restauración de imágenes
- Restaurar imágenes degradadas por movimiento horizontal uniforme

Para restaurar una imagen G de N columnas que haya tenido un proceso de degradación fila por fila, como por ejemplo, el movimiento horizontal uniforme de n pixeles, se puede plantear la siguiente ecuación. Esta ecuación modela el proceso de degradación de una fila f de la imagen original F de M columnas. La fila degradada g (de la imagen G) es la convolución de f con la máscara h de n elementos:

[RELLENAR TODOS LOS ESPACIOS VACIOS]

$$\mathbf{g} = f * h = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \quad\quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad\quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}}$$

Esta ecuación puede escribirse matricialmente como:

________________________ (1)

Conociendo $\mathbf{g}$ y la máscara $\mathbf{h}$, vemos que el sistema de ecuaciones tiene ____ ecuaciones y _____ incógnitas. Como M es mayor/menor (tachar) que N, entonces existen _______ soluciones. Estos sistemas se llaman completos/subdeterminados/superdeterminados (tachar).

Para resolver (1), es necesario imponer una restricción para $\mathbf{f}$. Esta restricción puede ser planteada como:

$$||\mathbf{Wf}||^2 \rightarrow \min \quad (2)$$

Donde $\mathbf{Wf}$ es una señal por ejemplo que deja pasar las frecuencias altas de $\mathbf{f}$. De esta manera la solución que andamos buscando es una función $\mathbf{f}$ que cumpla (1) y que tenga un rizado mínimo. La solución será llamada $\hat{\mathbf{f}}$

La solución para $\mathbf{f}$ debe ser tal que se cumplan (1) y (2) simultáneamente. La ecuación (1) puede replantearse de la siguiente forma:

$$|| \quad\quad\quad\quad\quad\quad ||^2 = 0 \quad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) tienen la estructura de un problema de optimización que puede resolverse usando el multiplicador de Lagrange λ (en este caso un número múy grande como 10^6). Usando el multiplciador de Lagrange, la función objetivo $V(\mathbf{f})$ a minimzar puede plantearse como:

$$V(\mathbf{f}) = \lambda||\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{\text{término que} \\ \text{debe ser cero}}}||^2 + ||\underbrace{\qquad}_{\substack{\text{término a} \\ \text{minimizar}}}||^2 \rightarrow \min \tag{4}$$

¿Por qué al minimizar esta función objetivo se cumplen simultáneamente las ecuaciones (1) y (2)?

Para encontrar $\mathbf{f}$, podermos derivar $V(\mathbf{f})$ con respecto a $\mathbf{f}$ e igualar a cero.

Utilizando la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}}||\mathbf{X}\mathbf{f} + \mathbf{z}||^2 = 2\mathbf{X}^{\mathsf{T}}(\mathbf{X}\mathbf{f} + \mathbf{z}) \tag{5}$$

donde $\mathbf{X}$ es una matriz y $\mathbf{z}$ un vector, encuentre:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}}||\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}||^2 = \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}}||\mathbf{W}\mathbf{f}||^2 = \tag{7}$$

Usando (6) y (7), encuentre:

$$\frac{\partial V(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} = \tag{8}$$

Igualando a cero la ecuación anterior, encuentre $\mathbf{f}$:

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f} = \tag{9}$$

Buenos resultados en imágenes se obtienen con $\lambda = 10^6$.

Ejercicios:

1) Escriba una ecuación matricial para encontrar la imagen restaurada $\hat{\mathbf{F}}$ conociendo G, H, W y λ. (aquí H es mayúscula)

2) Escriba un programa en Matlab o Python que restaure una imagen G que tenga como parámetros de entrada G, h y W. (aquí h es mayúscula)

3) Un criterio simple para minimizar el rizado de la fila restaurada es que la solución encontrada para f tenga mínima norma

   a) ¿Por qué?,

   b) Encuentre cómo sería W en la ecuación (2) para este criterio.

   c) ¿Cómo quedaría (4) en este caso?

4) En clase vimos que un criterio que puede ser utilizado para minimizar el rizado de la solución f, es minimizando la diferencia entre g y un vector conformado por los primeros N elementos de f, que llamamos f_N. En este caso la restricción (2) puede ser escrita como

$$||\mathbf{f}_N - \mathbf{g}|| \rightarrow \min \tag{10}$$

donde f_N puede ser escrito en forma matricial como

$$\mathbf{f}_N = \mathbf{P}\mathbf{f} \tag{11}$$

con P una matriz de N x M elementos con una diagonal de "unos":

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Usando las ecuaciones (10), (11) y (1),

a) Encuentre cómo sería W en la ecuación (2) para este criterio.

b) ¿Cómo quedaría (4) en este caso?

5) Un criterio muy intuitivo para reducir el rizado de la solución es minimizar las frecuencias altas de f (usando transformada de Fourier).

   a) Encuentre cómo sería W en la ecuación (2) para este criterio.

   b) ¿Cómo quedaría (4) en este caso?

   [TIP] La expresión Wf en (2) deberían ser las frecuencias altas de f solamente, es decir, si X es la transformada discreta de Fourier de f, donde X es un vector de M elementos (el mismo número de elementos de f), podríamos multiplicar por cero los elementos de X correspondientes a las bajas frecuencias, esto se realiza multiplicando X por una matriz Q de MxM elementos con algunos "unos" en la diagonal y "ceros" en el resto. De esta manera Wf puede ser reemplazado por QX. Sabemos que la transformada discreta de Fourier de f puede ser computada como una multiplicación de f con una matriz B de MxM elementos con las funciones base de Fourier, es decir X es Bf. En este ejercicio debe definir las matrices Q y B, y con ellos encontrar W en la ecuación (2).

6) Encuentre n a partir de G sabiendo que el movimiento fue horizontal y uniforme.

   [TIP] Estudie el promedio de las filas de la Transformada de Fourier de G para distintos valores de n. Pruebe con estos comandos y obtenga conclusiones.

```
F = imread('cameraman.tif'); % imagen original
n = 15; h = ones(1,n)/n; % mascara de degradacion
G = conv2(F,h,'valid'); % imagen degradada
X = fftshift(fft2(G)); % transformada de fourier de G centrada
K = log(abs(X)+1); % transformada en escala logaritmica
plot(mean(K)) % promedio de todas las filas de K
```

Se recomienda ver el Artículo de referencia disponible en la página web del curso.