Universidad Popular del Cesar

Tratamiento de Señales

Version 2024-1

# Filtros usando Fourier en 2D

[ Capítulo 4 ]

Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar

# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos ideal.

- Un filtro pasa-bajos ideal es aquel que deja pasar sin atenuación todas las frecuencias comprendidas en un c'irculo de radio $D_0$ centrado en el origen y corta todas las frecuencias que caen fuera de el. Se especifica por la función:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases} \tag{95}$$

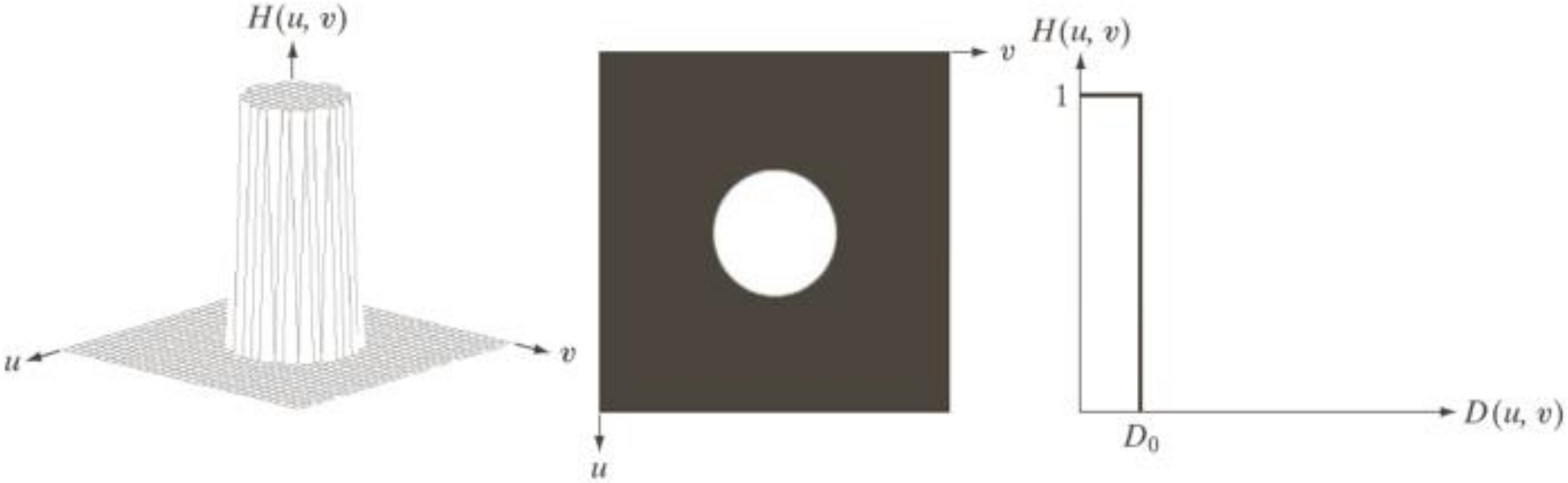
  donde $D_0$ es una constante positiva, y $D(u,v)$ es la distancia entre un punto $(u,v)$ en el dominio de la frecuencia y el origen, esto es:

$$D(u,v) = [(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2]^{1/2} \tag{96}$$

- El punto de transición entre $H(u,v) = 1$ y $H(u,v) = 0$ recibe el nombre de frecuencia de corte.

# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos ideal.



# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos ideal.

- Los filtros pasa-bajos se comparan en general, estudiando su comportamiento como función de la misma frecuencia de corte.

- Una forma de establecer un conjunto de frecuencias de corte estándar, es construír círculos que encierren cantidades específicas de potencia $P_T$.

- Estas cantidades se obtienen sumando los componentes del espectro de potencia de las imágenes *padded* en cada punto $(u, v)$.

$$P_T = \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{v=0}^{Q-1} P(u, v) \tag{97}$$

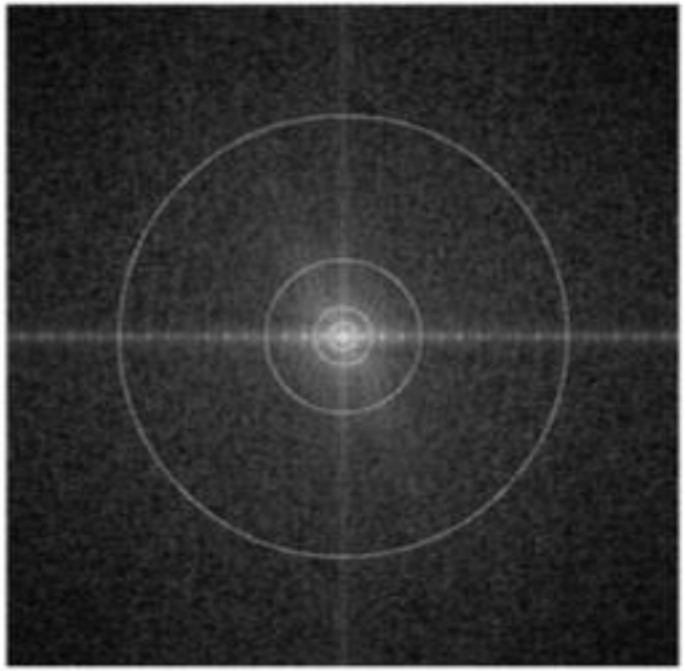
- Si la DFT ha sido centrada, un círculo de radio $D_0$ con origen en el centro del rectángulo de frecuencia, encierra $\alpha$ % de potencia, donde

$$\alpha = 100 \left[ \sum_u \sum_v P(u, v)/P_T \right] \tag{98}$$

# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos ideal.


Imagen de prueba de 688 x 688



Espectro de Fourier con círculos sobreimpuestos de radios 10, 30, 60,160 y 460, encerrando 87.0, 93.1, 95.7, 97.8. y 99.2 % de la potencia de la imagen

# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos ideal.

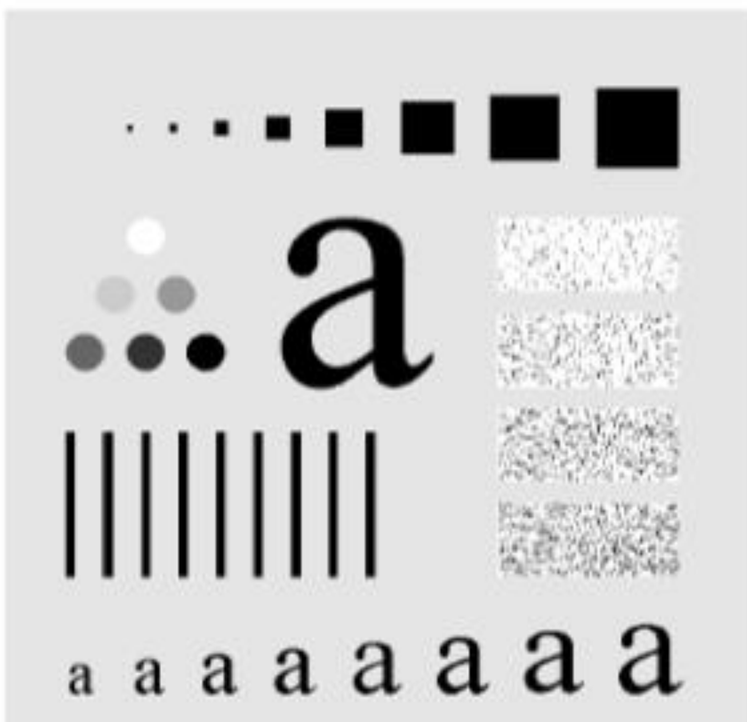


Imagen de prueba de 688 x 688

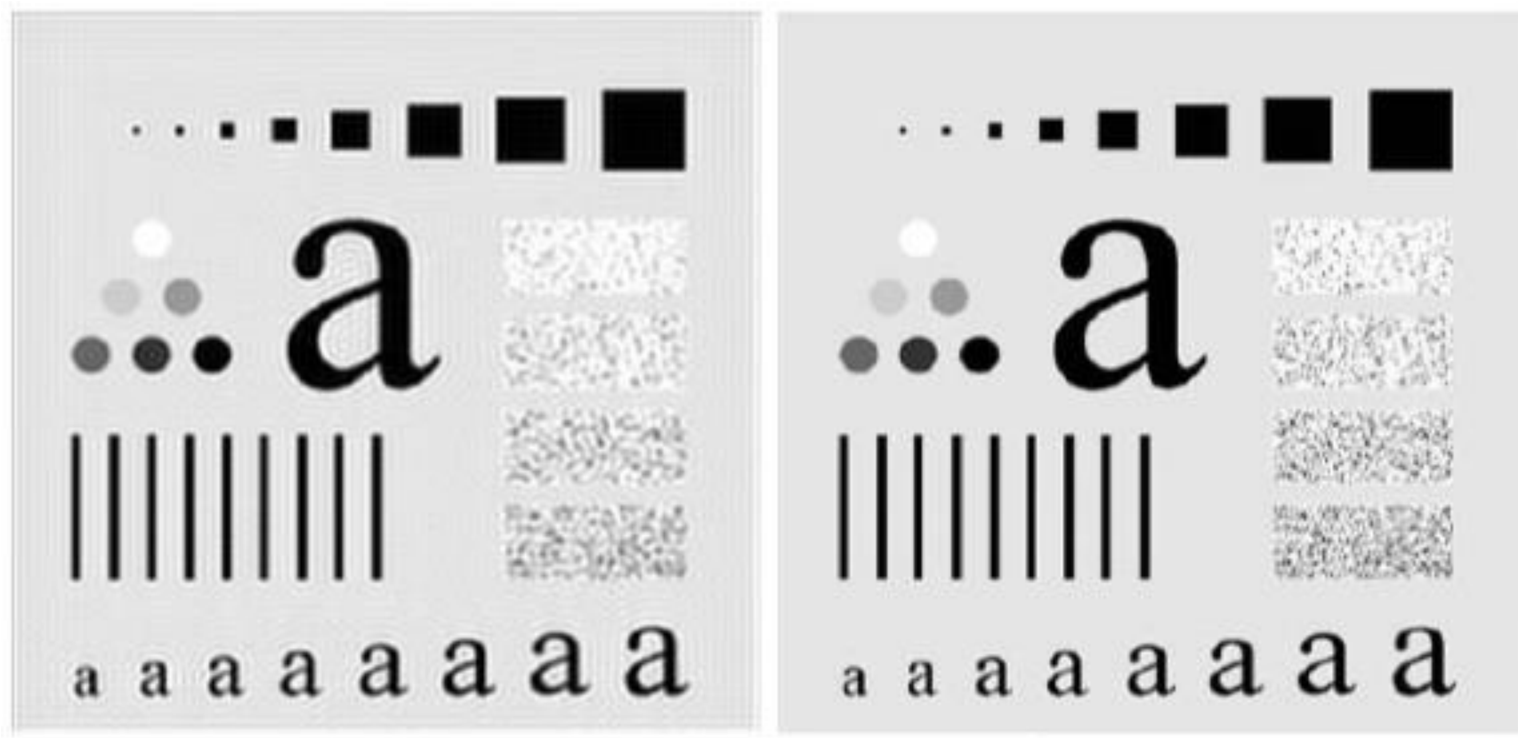
Imagen de prueba filtrada con filtro de radio 10

# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos ideal.

# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

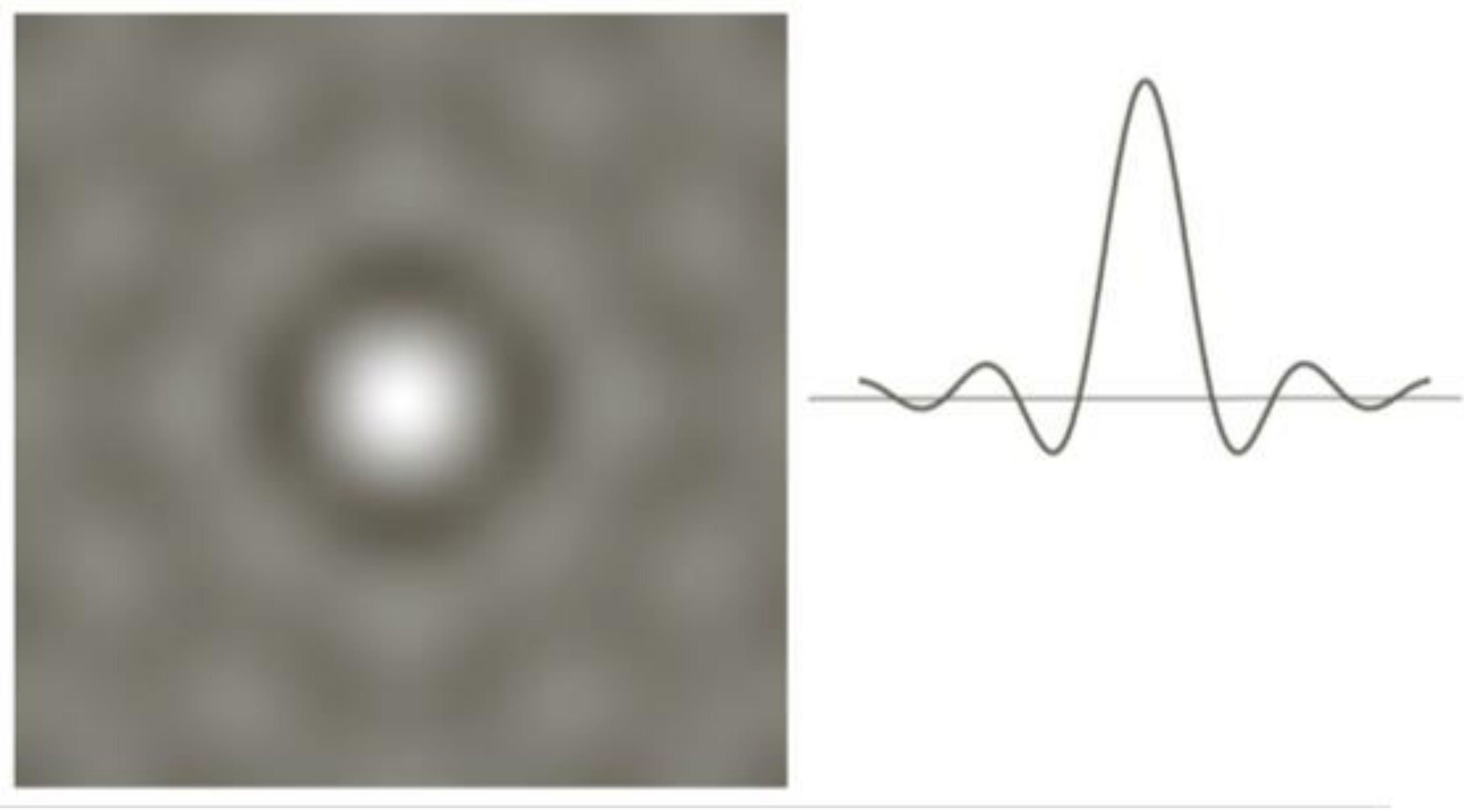
- Filtro pasabajos ideal.



# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos ideal

Representación en el dominio del espacio
de un filtro pasabajos ideal de radio 5 y
tamaño 1000 x 1000



# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

•Filtro pasabajos Butterworth

- Función de transferencia:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}} \tag{99}$$

  donde $n$ es el orden del filtro, $D_0$ la frecuencia de corte y $D(u,v)$ está dado por (96).

- Contrariamente al FPBI, el FPBB tiene una función de transferencia suave.

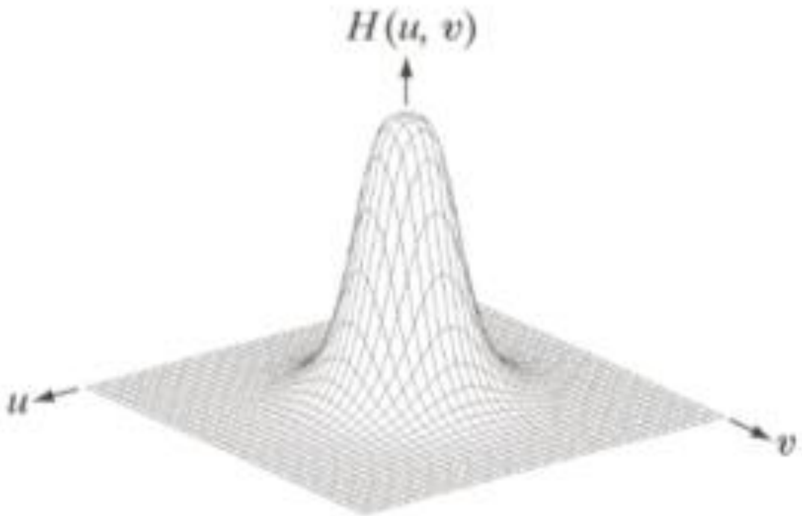
- Para este tipo de filtros, de transición suave, se acostumbra a definir el punto de 50% de amplitud como la frecuencia de corte, es decir cuando $D(u,v) = D_0$.

# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

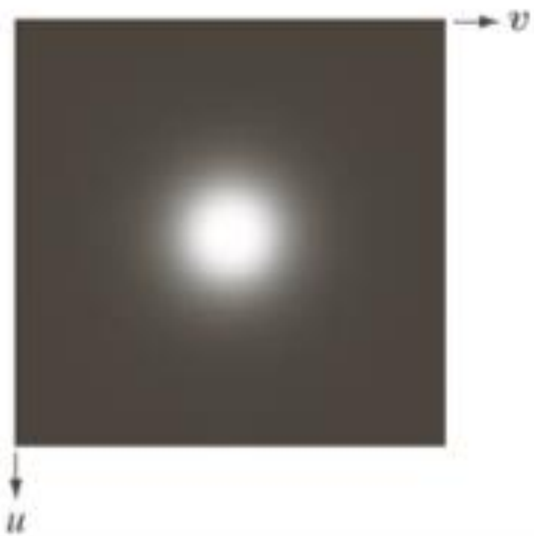
## •Filtro pasabajos Butterworth

Función de transferencia de un filtro pasabajos Butterworth

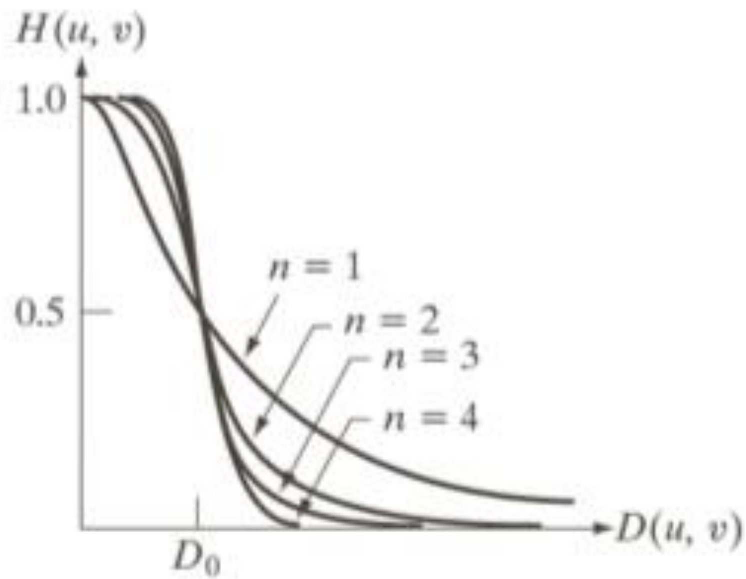
Perspectiva




Imagen



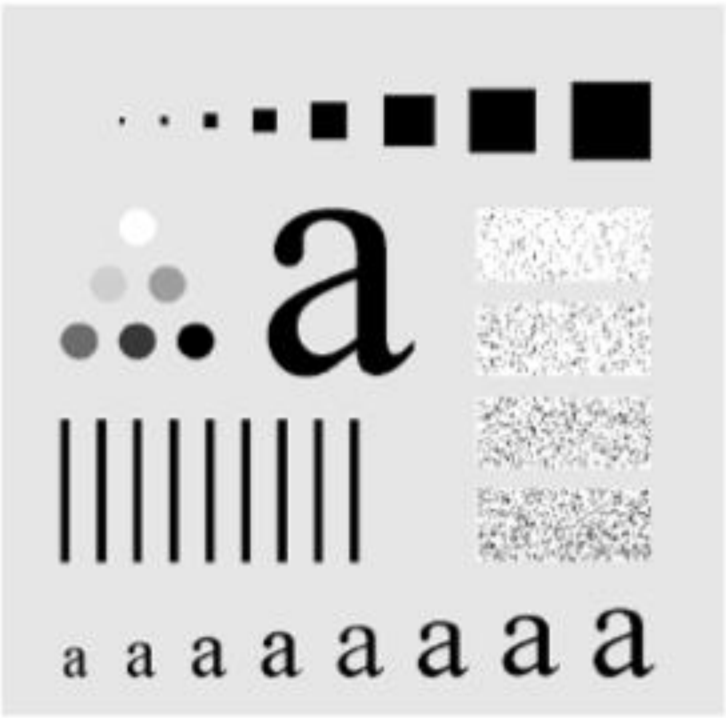

Sección cruzada radial para órdenes del 1 al 4.



# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos Butterworth

Imagen Original

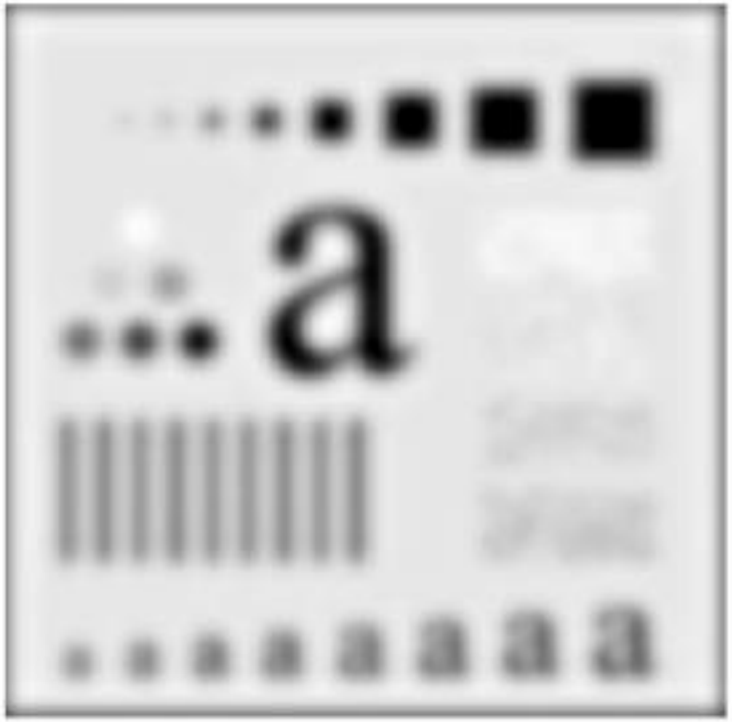


Filtro PB Butterworth orden 2 y frecuencia de corte = 10

# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

•Filtro pasabajos Butterworth

Filtro PB Butterworth orden 2 y frecuencia de corte = 30

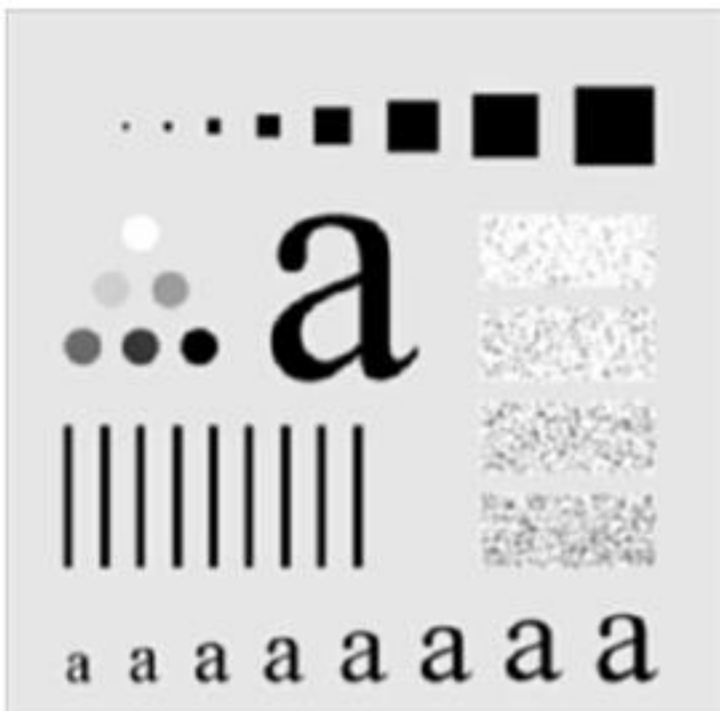


Filtro PB Butterworth orden 2 y frecuencia de corte = 60

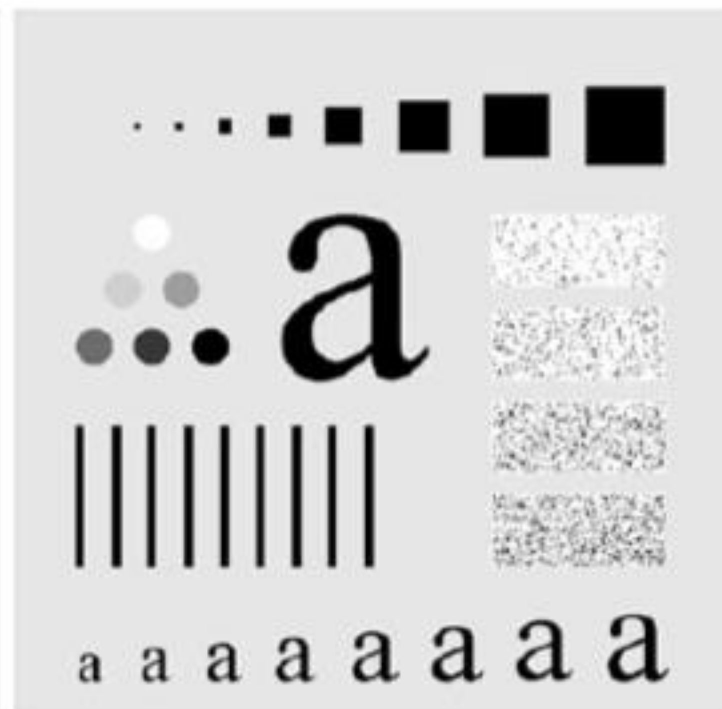
# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos Butterworth

Filtro PB Butterworth orden 2 y frecuencia de corte = 160



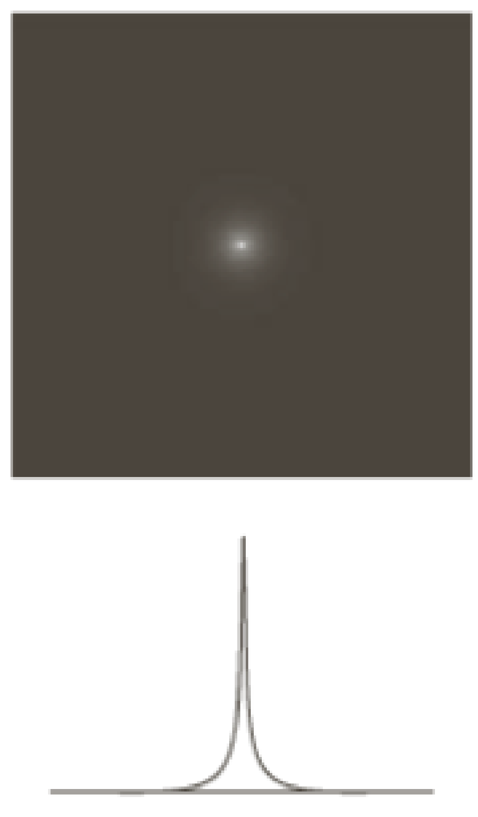
Filtro PB Butterworth orden 2 y frecuencia de corte = 460



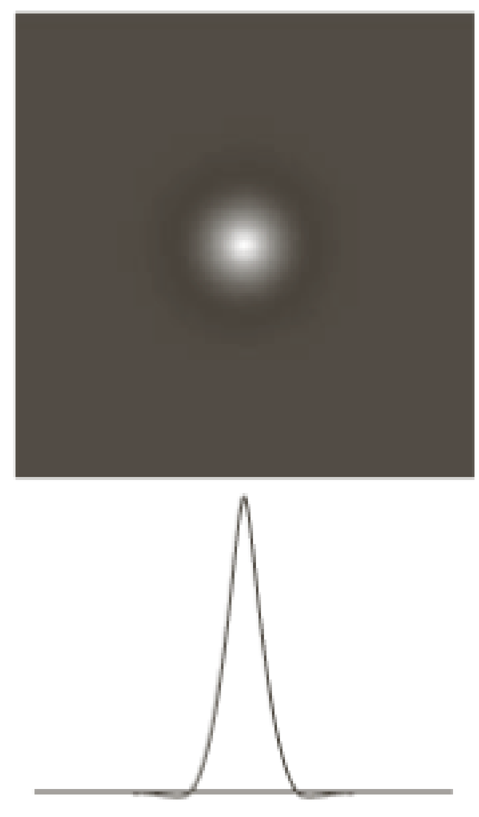
# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos Butterworth

Representación espacial de un PB Buterworth de orden 1 y perfil de intensidad a través del centro del filtro.



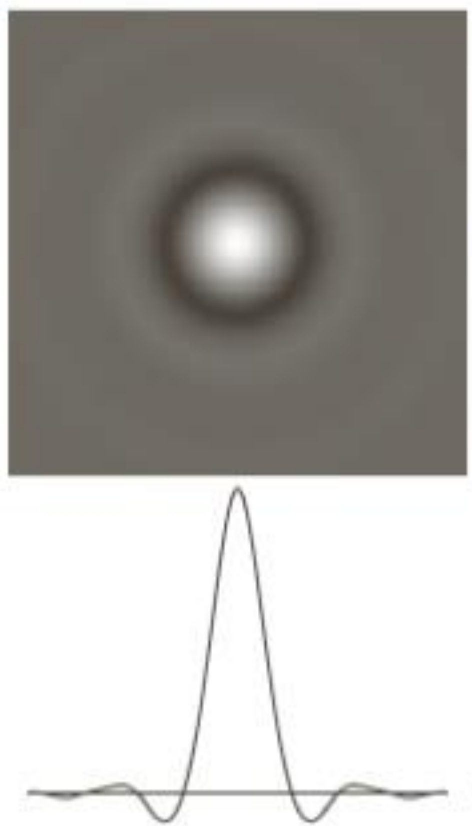
Representación espacial de un PB Buterworth de orden 2 y perfil de intensidad a través del centro del filtro.



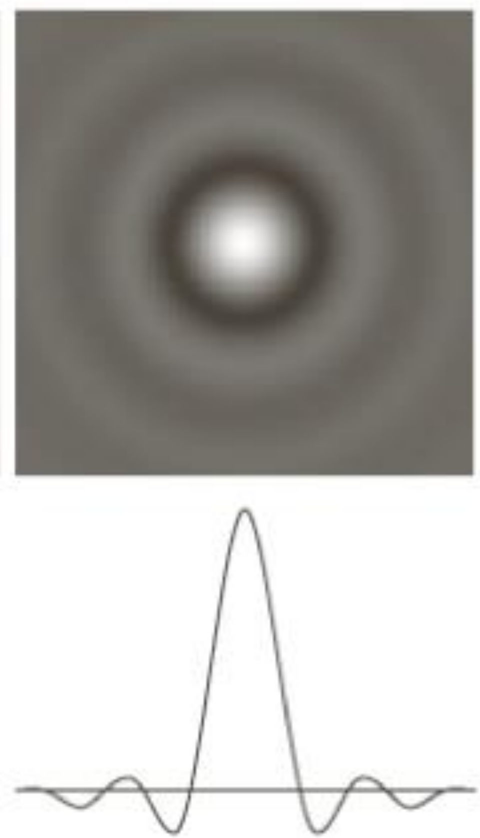
# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

## •Filtro pasabajos Butterworth

Representación espacial de un PB Buterworth de orden 5 y perfil de intensidad a través del centro del filtro.



Representación espacial de un PB Buterworth de orden 20 y perfil de intensidad a través del centro del filtro.



# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

•Filtro pasabajos Gaussiano

- Como ya vimos en forma introductoria, los filtros Gaussianos pasa-bajos en dos dimensiones tienen la forma.

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2} \tag{100}$$

  donde $D(u,v)$, nuevamente es la distancia desde el cetro del rectángulo de freceuncia.

- Hacinedo $\sigma = D_0$ podemos expresar el filtro en la notación de los otros filtros de esta sección:

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2} \tag{101}$$

  donde $D_0$ se define como la freceuncia de corte. Notar que cuando $D(u,v) = D_0$, la función de transferencia es 0.607 de su valor máximo.

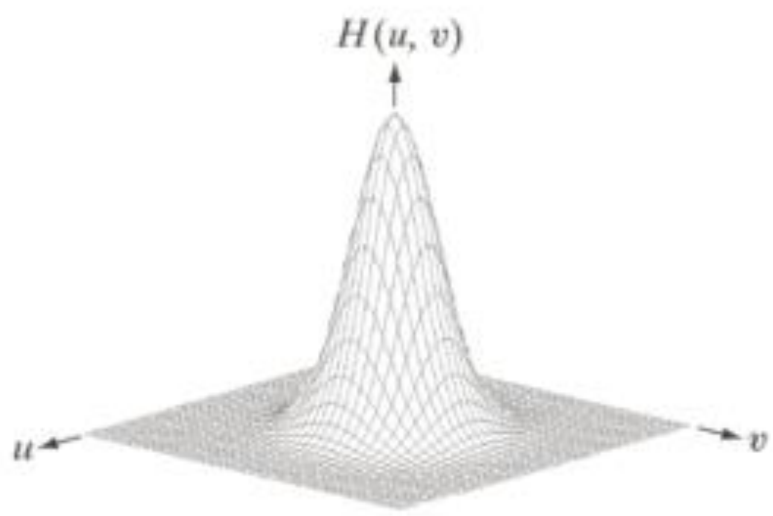
- Es importante recordar que la Transformada Inversa de Fourier de un filtro Gaussiano es una función Gaussiana.

# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

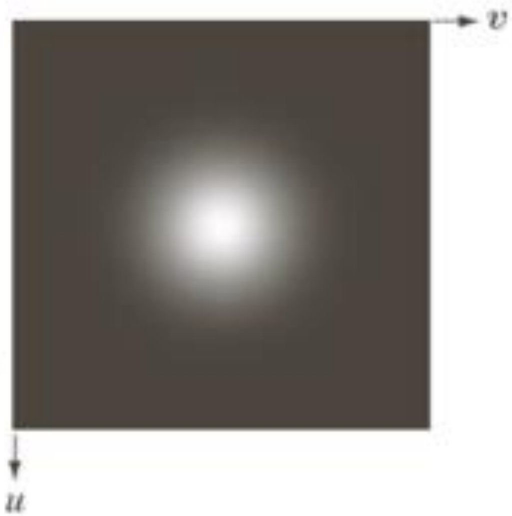
- Filtro pasabajos Gaussiano

Función de transferencia de un filtro pasabajos Gaussiano

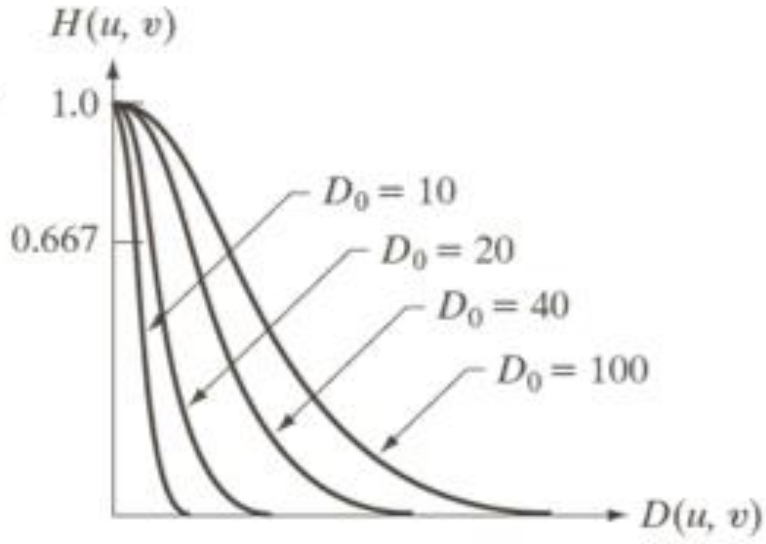
Perspectiva




Imagen



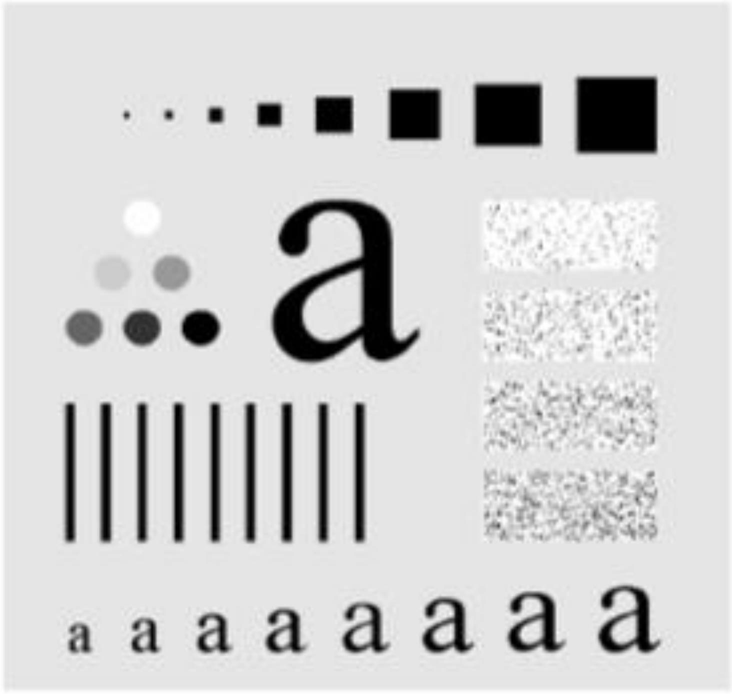

Sección cruzada radial para varios valores de *Do*.



# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos Gaussiano

Imagen Original



Filtro PB Gaussiano con frecuencia de corte = 10

# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos Gaussiano

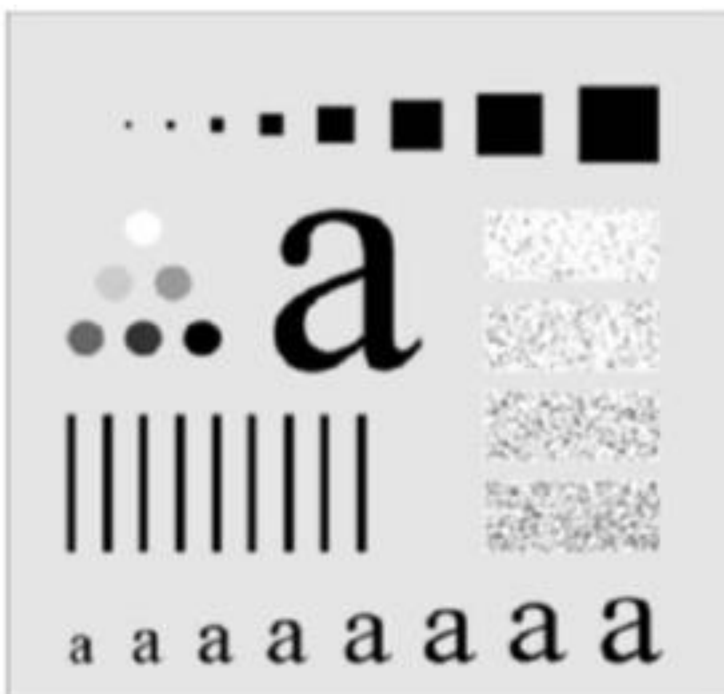
Filtro PB Gaussiano con frecuencia de corte = 30

Filtro PB Gaussiano con frecuencia de corte = 60

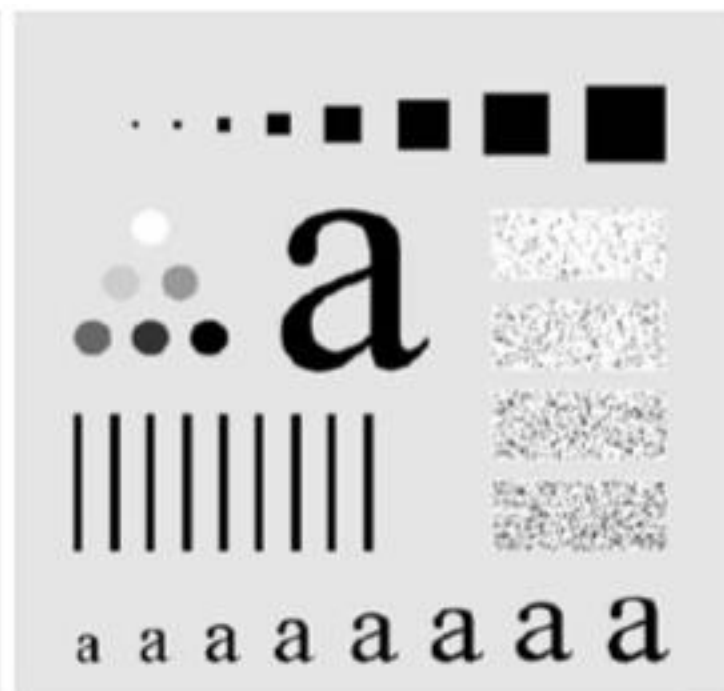
# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos Gaussiano

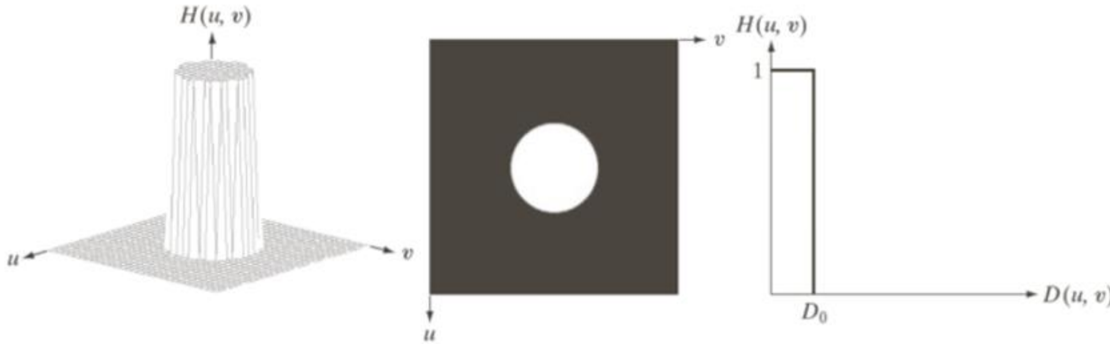
Filtro PB Gaussiano con frecuencia de corte = 160




Filtro PB Gaussiano con frecuencia de corte = 460



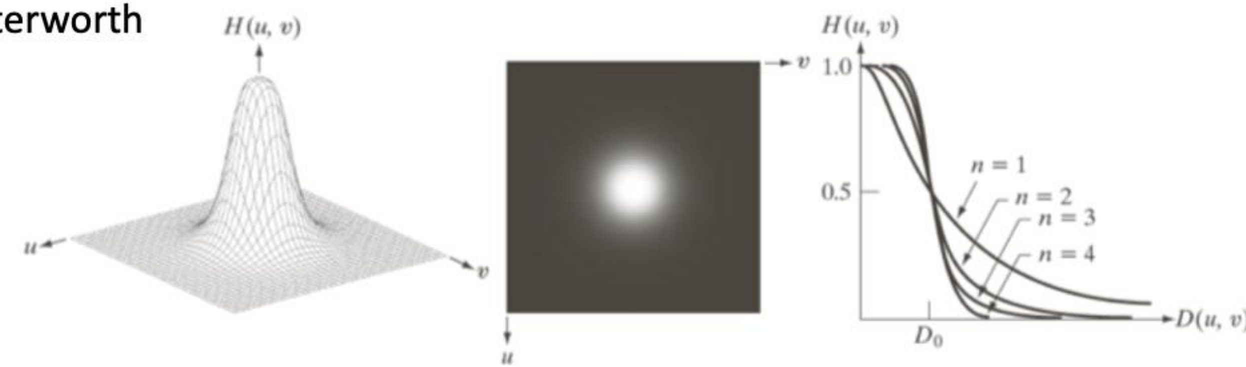
Ideal




$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u,v) \le D_0 \\ 0 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

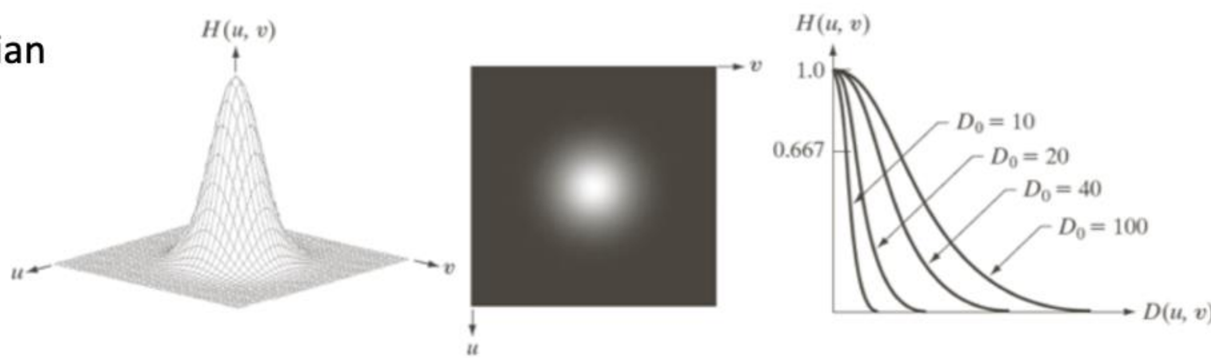
$$D(u,v) = [(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2]^{1/2}$$

Butterworth




$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

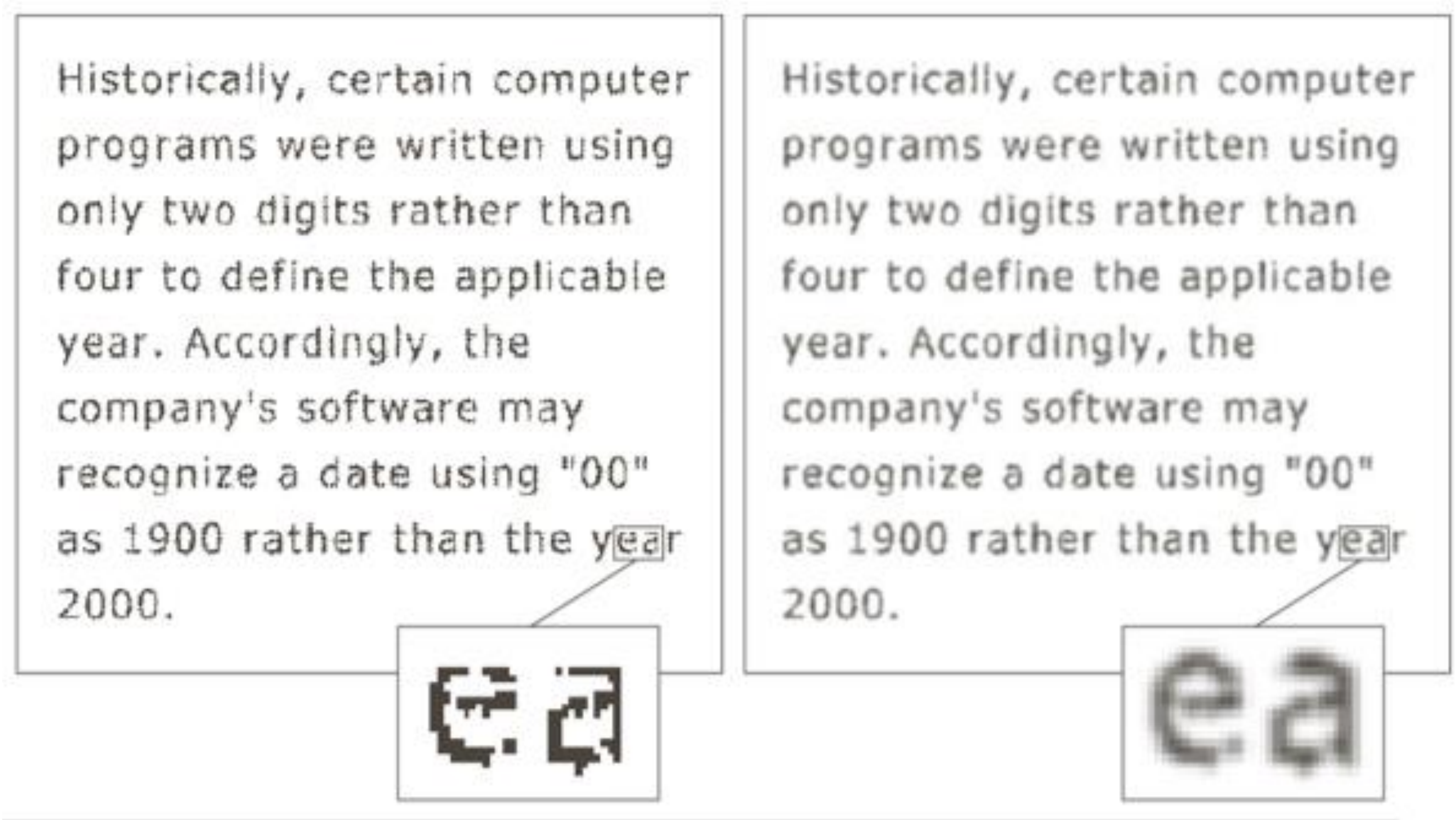
Gaussian




$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos Gaussiano (Aplicación)



# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasabajos Gaussiano (Aplicación)

Imagen Original

Procesada con filtro Gaussiano con *Do* = 100

Procesada con filtro Gaussiano con *Do* = 80

# Suavizamiento de Imágenes utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

•Filtros pasabajos (Resumen de Fórmulas)

- Filtro pasa-bajos ideal:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- Filtro pasa-bajos Butterworth de orden $n$ y frecuencia de corte $D_0$:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}}$$

- Filtro pasa-bajos Gaussiano con frecuencia de corte $D_0$:

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

# Aumento de nitidez utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

•Filtros pasa-altos

- Considerando lo visto para filtros pasa-bajos, todos los filtros de esta sección se basan en procedimientos ya descritos.
- Se asumirá entonces que $H(u, v)$ es una función discreta de tamaño $P \times Q$.
- Un filtro pasa-altos se obtiene a partir de un filtro pasa-bajos utilizando

$$H_{PA}(u, v) = 1 - H_{PB}(u, v) \tag{102}$$

donde $H_{PB}(u, v)$, es la función de transferencia del filtro pasa-bajos

# Aumento de nitidez utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

•Filtros pasa-altos

- El filtro pasa-altos ideal 2-D se define:

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases} \tag{103}$$

  donde $D_0$ es la frecuencia de corte y $D(u,v)$ está dado por (96)

- Un filtro pasa-altos Butterworth de orden $n$ y frecuencia de corte $D_0$ se define:

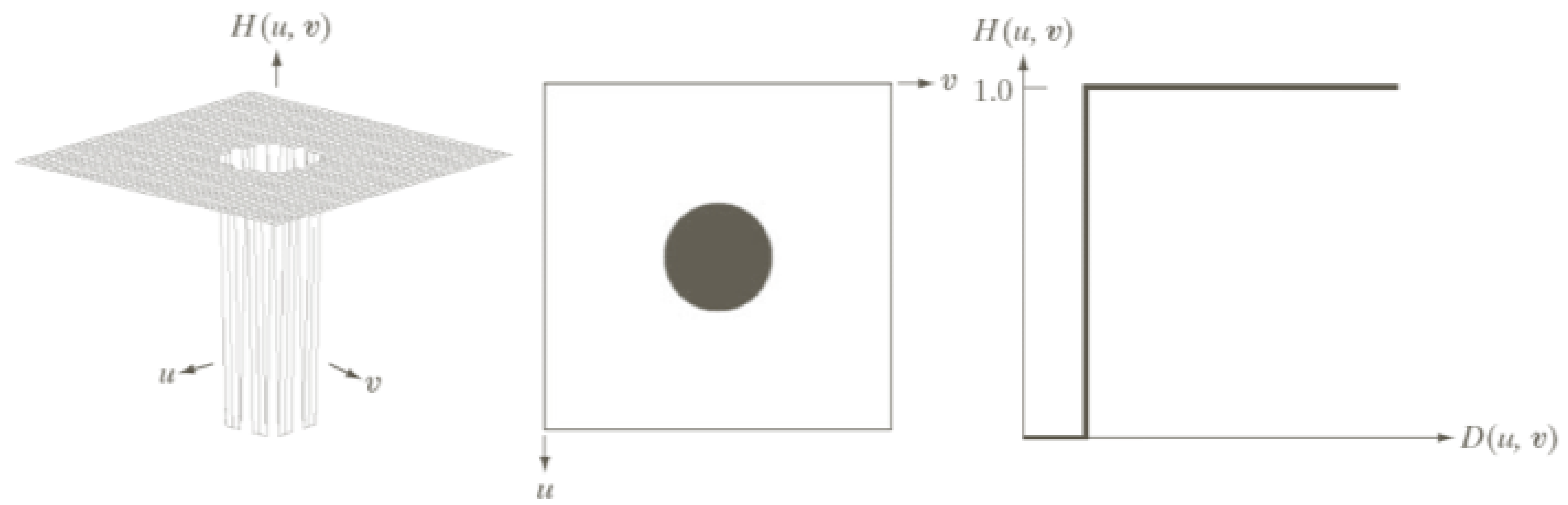
$$H(u,v) = \frac{1}{1 - [D_0/D(u,v)]^{2n}} \tag{104}$$

- La función de transferencia de un filtro pasa-altos Gaussiano se define:

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2} \tag{105}$$

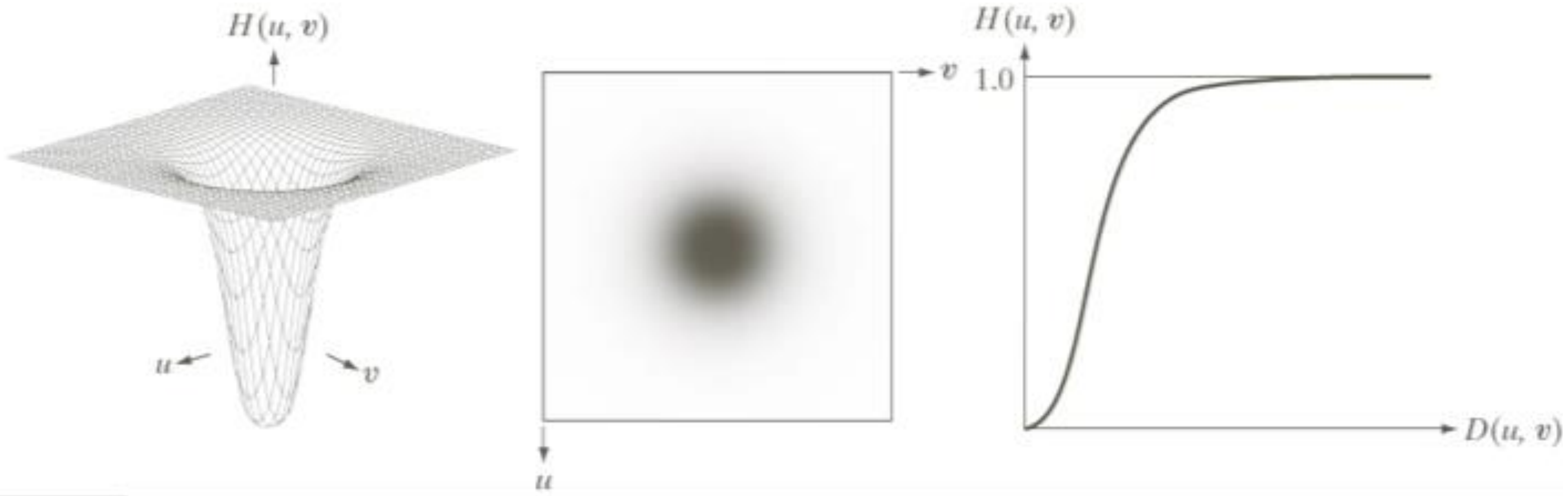
# Aumento de nitidez utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro pasa-altos ideal



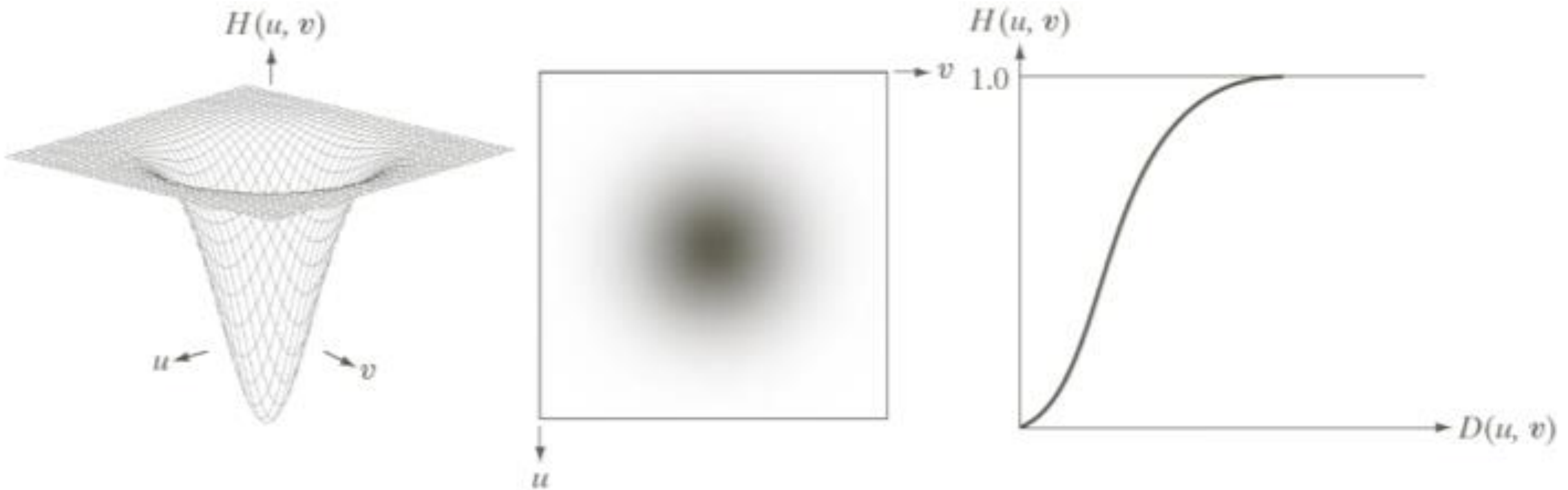
# Aumento de nitidez utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

•Filtro pasa-altos de Butterworth



# Aumento de nitidez utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

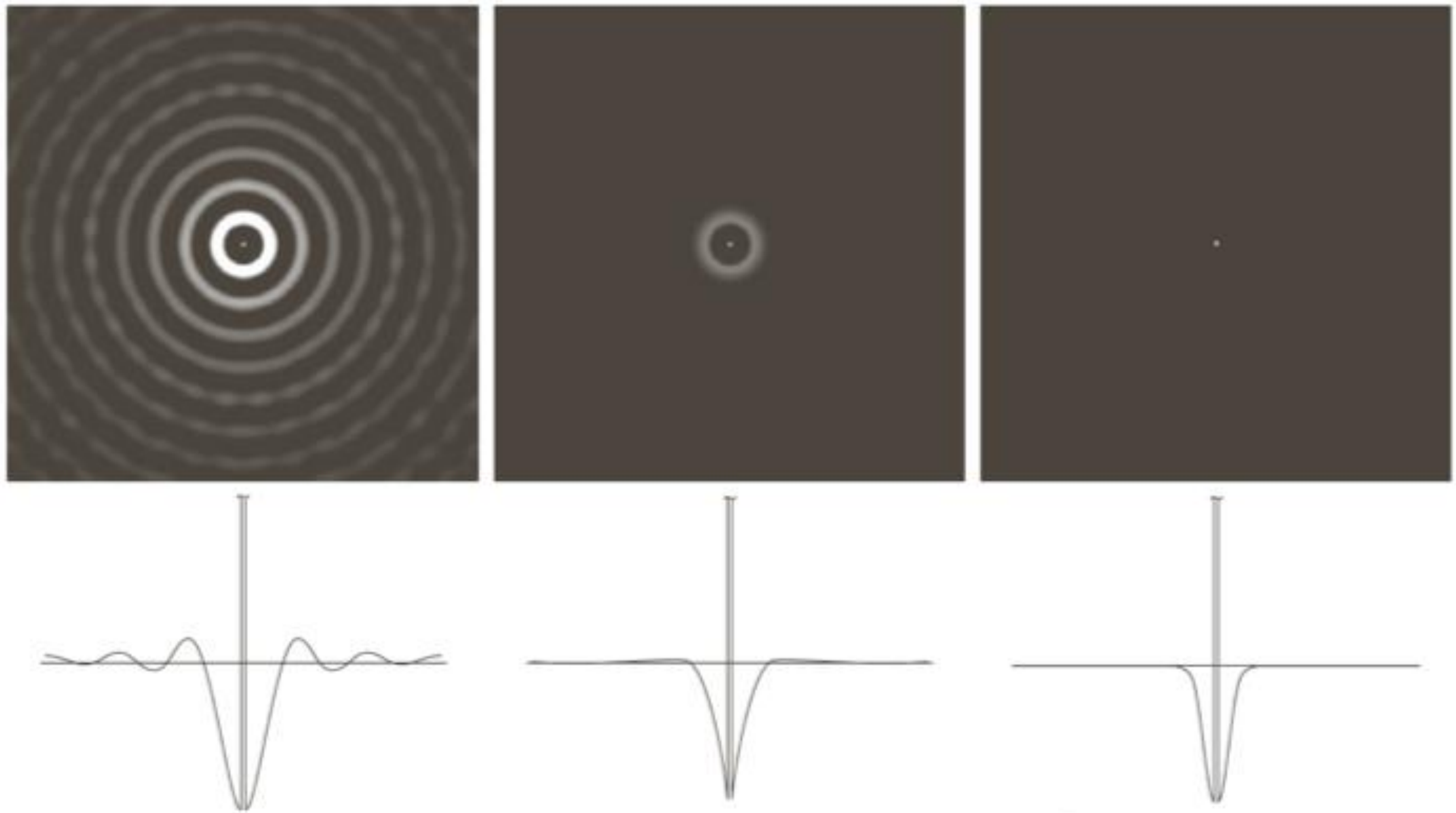
- Filtro pasa-altos Gaussiano



# Aumento de nitidez utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtros pasa-altos (Representación espacial)

Pasa-altos ideal — Pasa-altos de Butterworth — Pasa-altos Gaussiano



# Aumento de nitidez utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

•Filtros pasa-altos ideal (aplicación a la imagen de prueba)

Do = 30

Do = 60

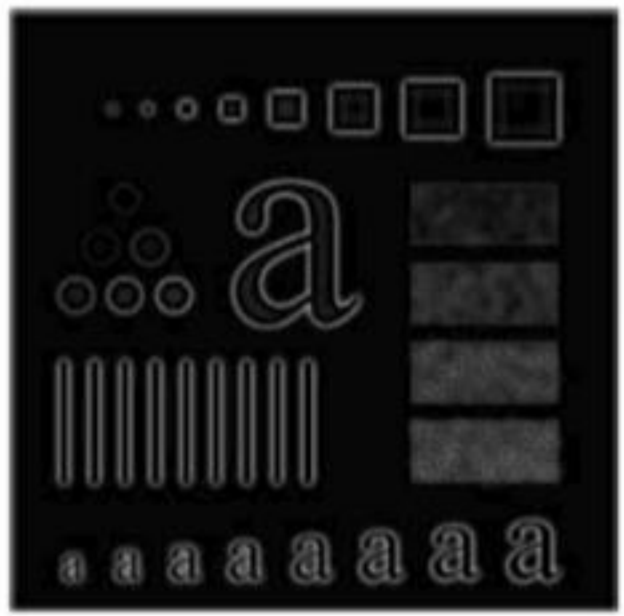
Do = 160

# Aumento de nitidez utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

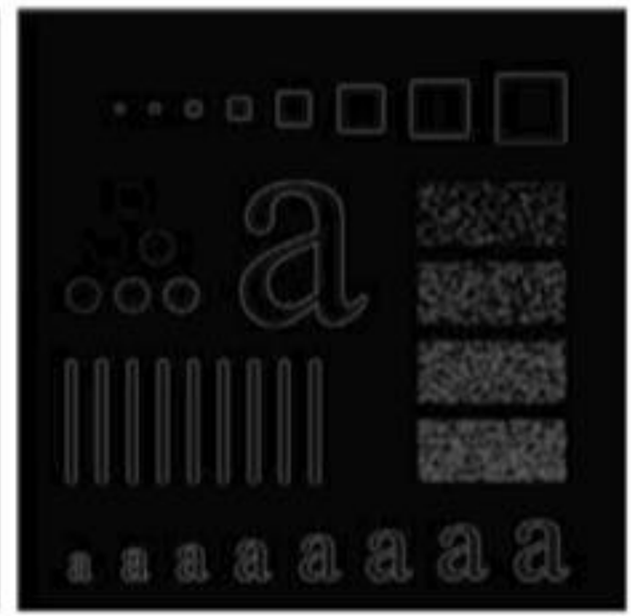
- Filtros pasa-altos de Butterworth de 2do orden (aplicación a la imagen de prueba)

Do = 30

Do = 60



Do = 160



# Aumento de nitidez utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtros pasa-altos Gaussiano (aplicación a la imagen de prueba)

Do = 30 Do = 60 Do = 160

# Aumento de nitidez utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

•Filtros pasa-altos (aplicación típica)

Imagen de huella digital

huella Filtrada con pasa-altos

resultado de aplicar un umbral

# Aumento de nitidez utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Laplaciano en el dominio de la frecuencia (aplicación a una imagen de la luna)

Imagen original

Imagen filtrada

# Aumento de nitidez utilizando Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Unsharp Mask (máscara borrosa)

Imagen de rayos X

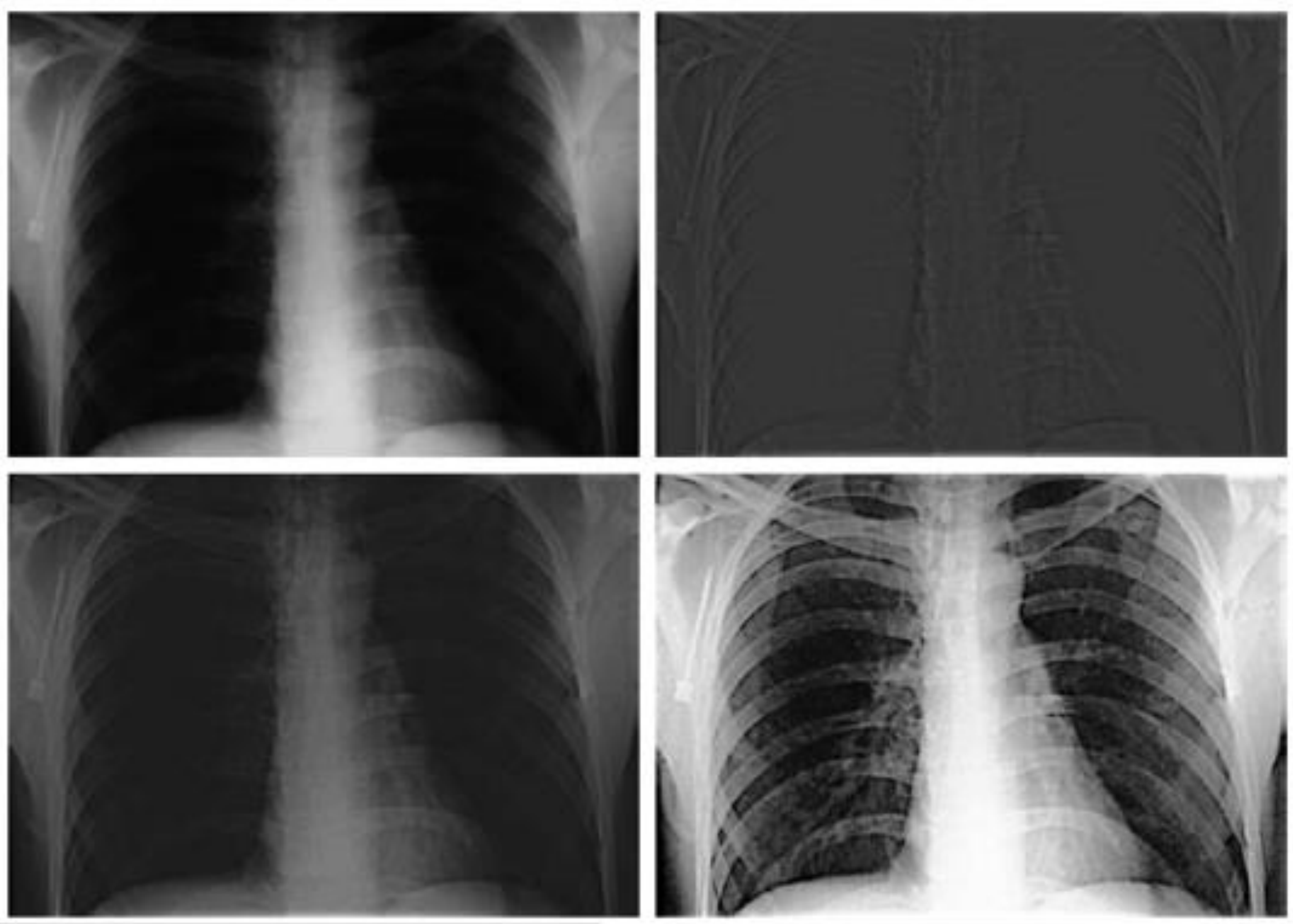


Imagen procesada con un filtro Gaussiano pasa altos

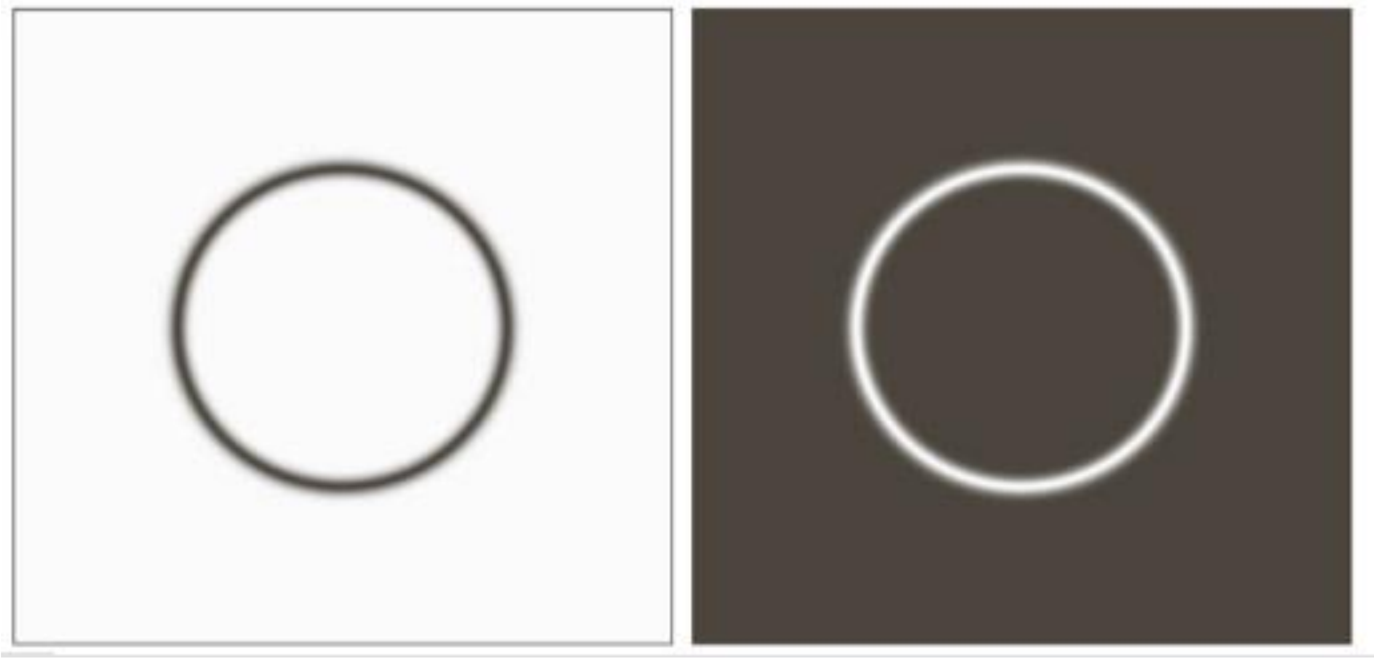
Resultado de énfasis de altas frecuencias utilizando el mismo filtro

Resusltado de equalizar el histograma de la imagen procesada de la izquierda.

# Filtros selectivos

- Combinaciones de distintos filtros filtros

Filtro
rechaza-banda

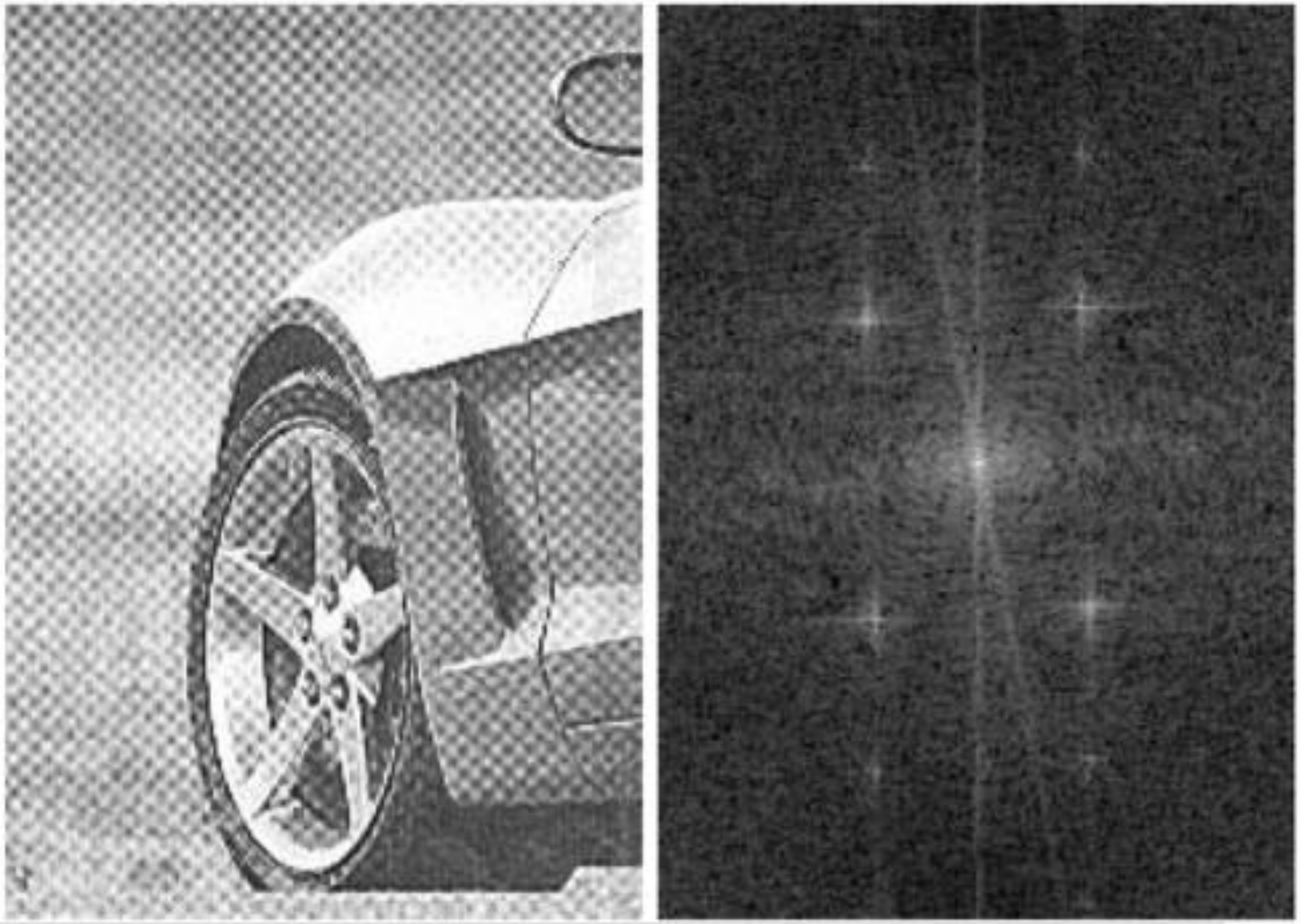


Filtro
pasa-banda

# Filtros selectivos

•Filtros *Notch*

Imagen de diario escaneada, mostrando un patron de moiré.

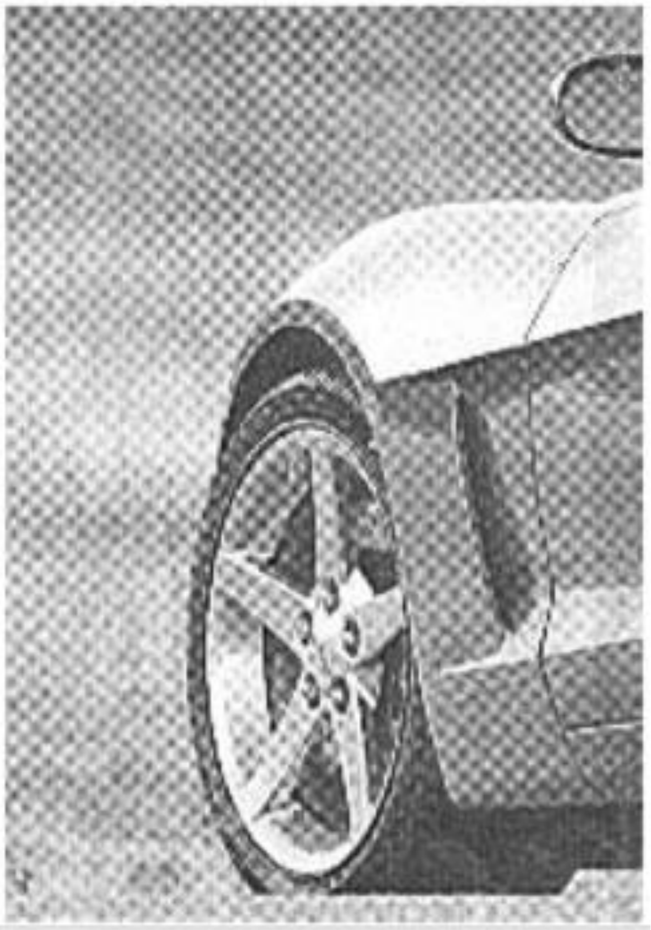


Espectro de la imagen, donde se aprecian las componentes relacionadas con la señal periódica.

# Filtros selectivos

•Filtros *Notch*

Imagen de diario escaneada, mostrando un patron de moiré.



# Filtros selectivos

• Filtros *Notch*

Filtro notch de Butterworth multiplicado por el espectro de la imagen

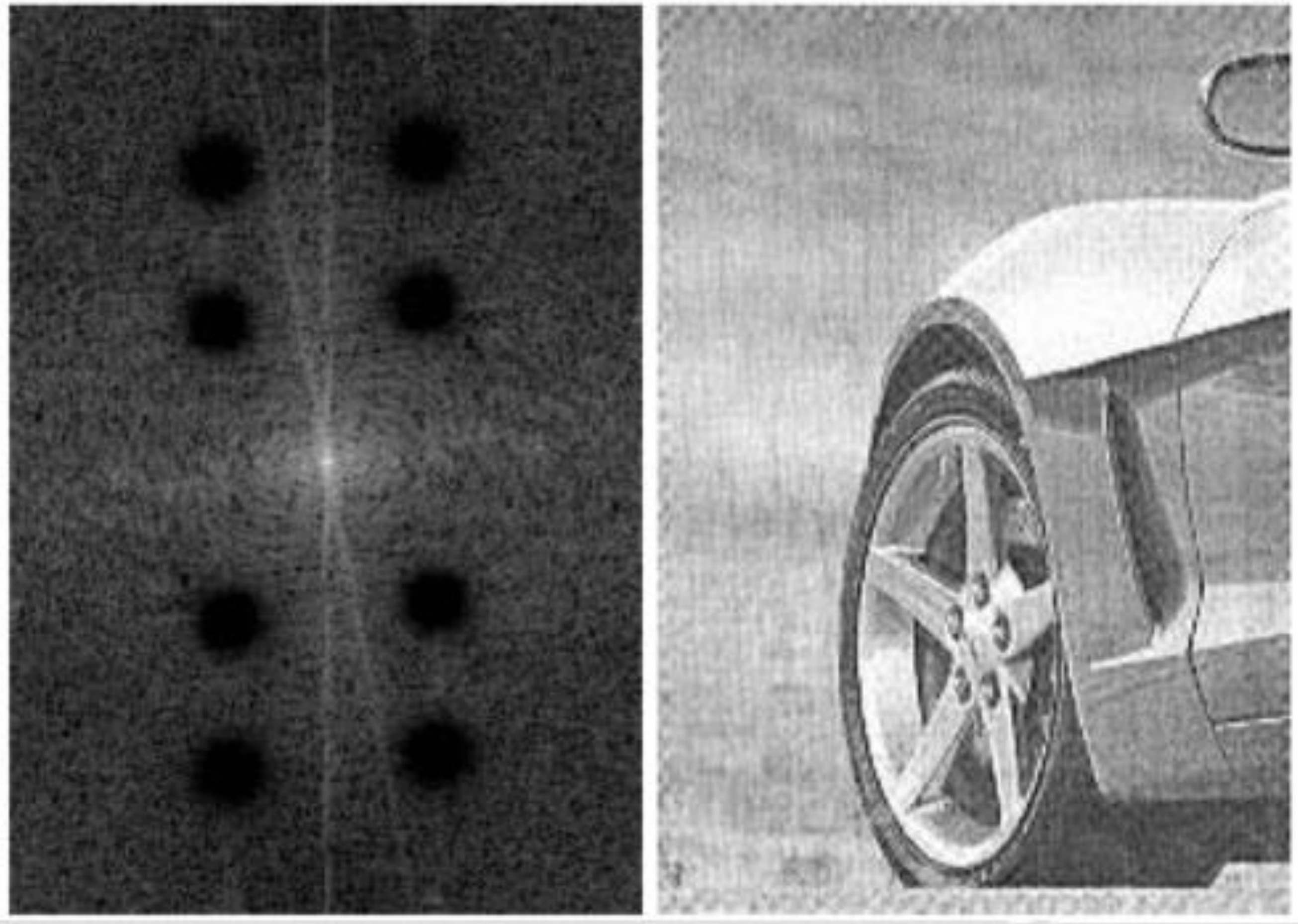


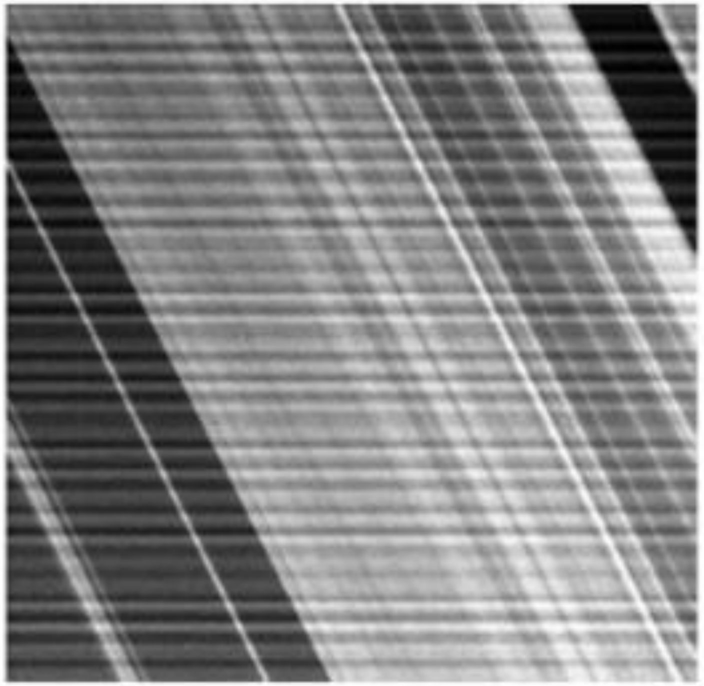
Imagen filtrada

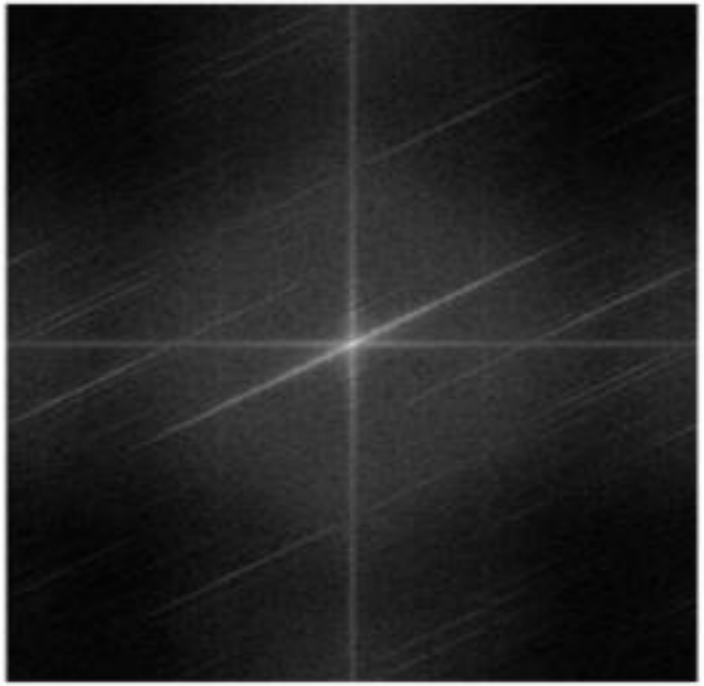
# Filtros selectivos

- Filtros *Notch*

Imagen de los anillos de Saturno que muestra una interferencia casi periódica

Espectro de la imagen





# Filtros selectivos

- Filtros *Notch*

Filtro vertical de rechazo *nothch*

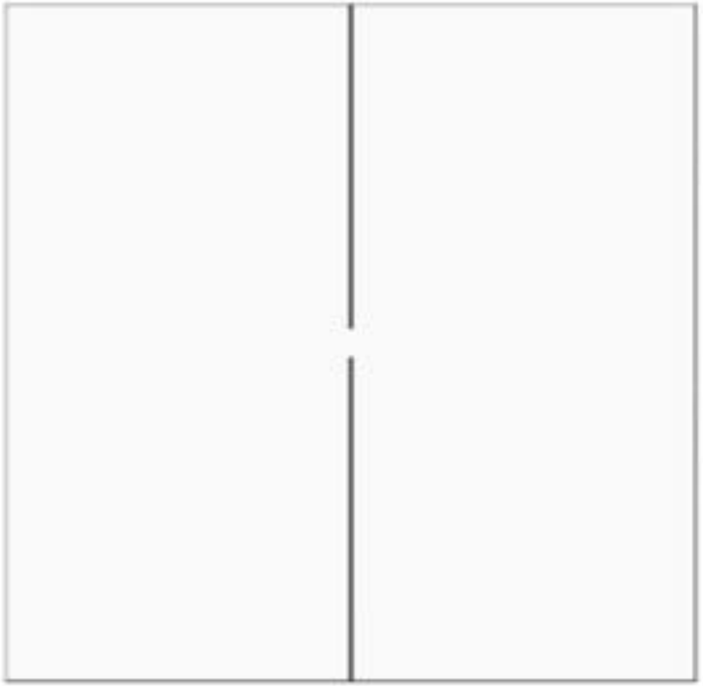
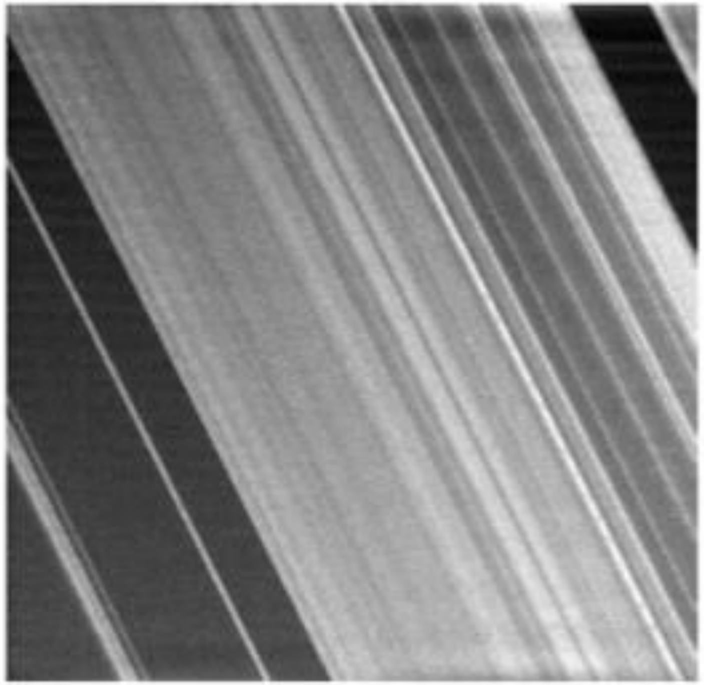
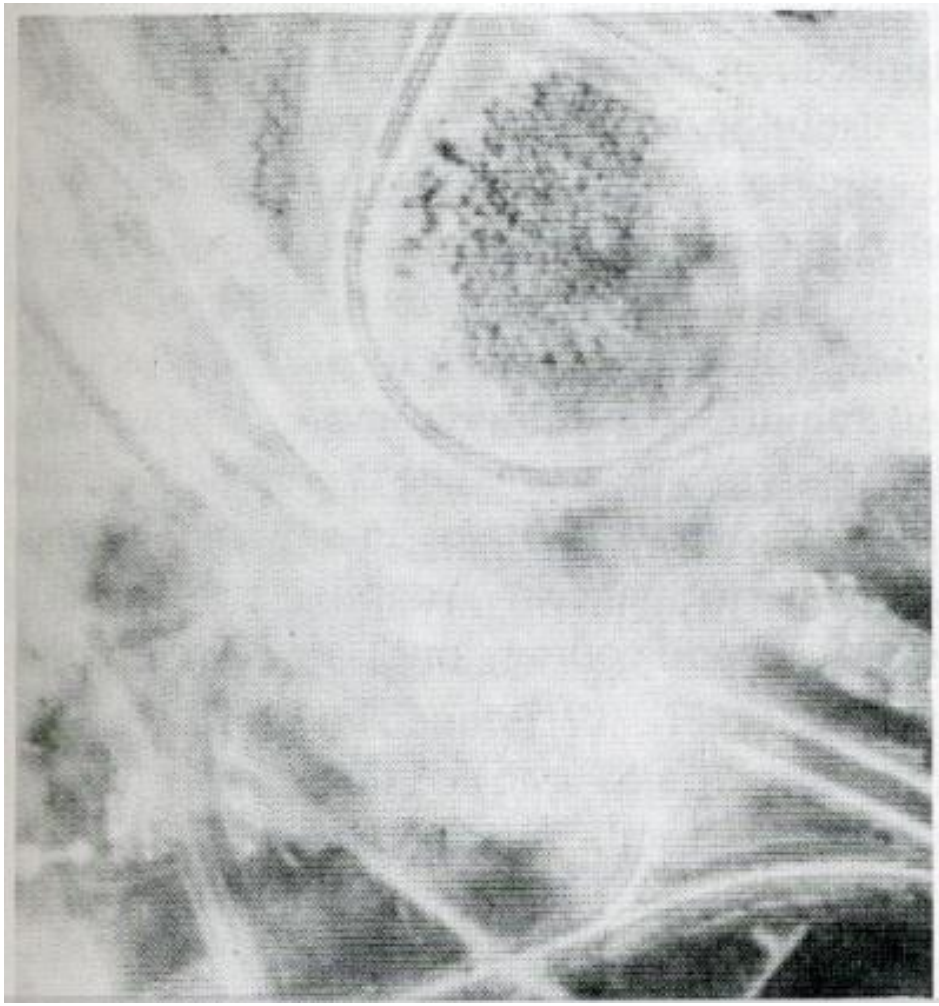


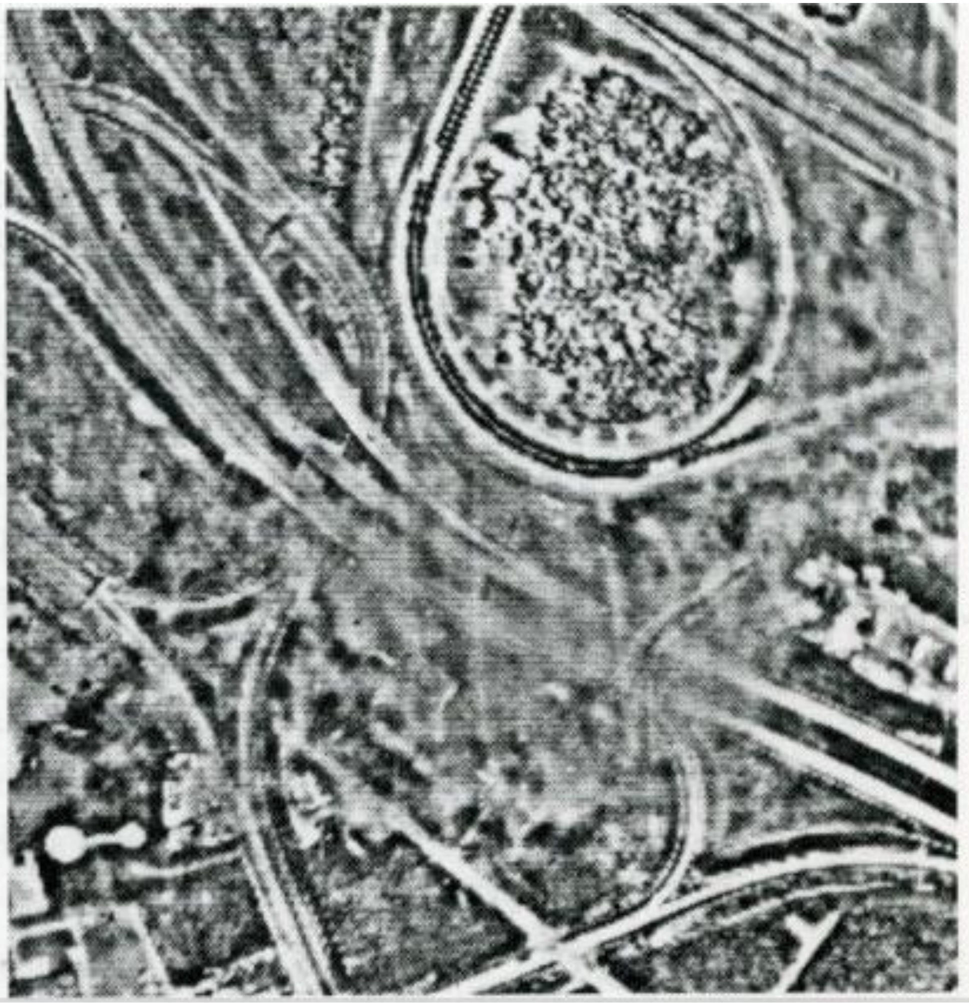
Imagen filtrada



# Filtros selectivos

•Filtros no lineales





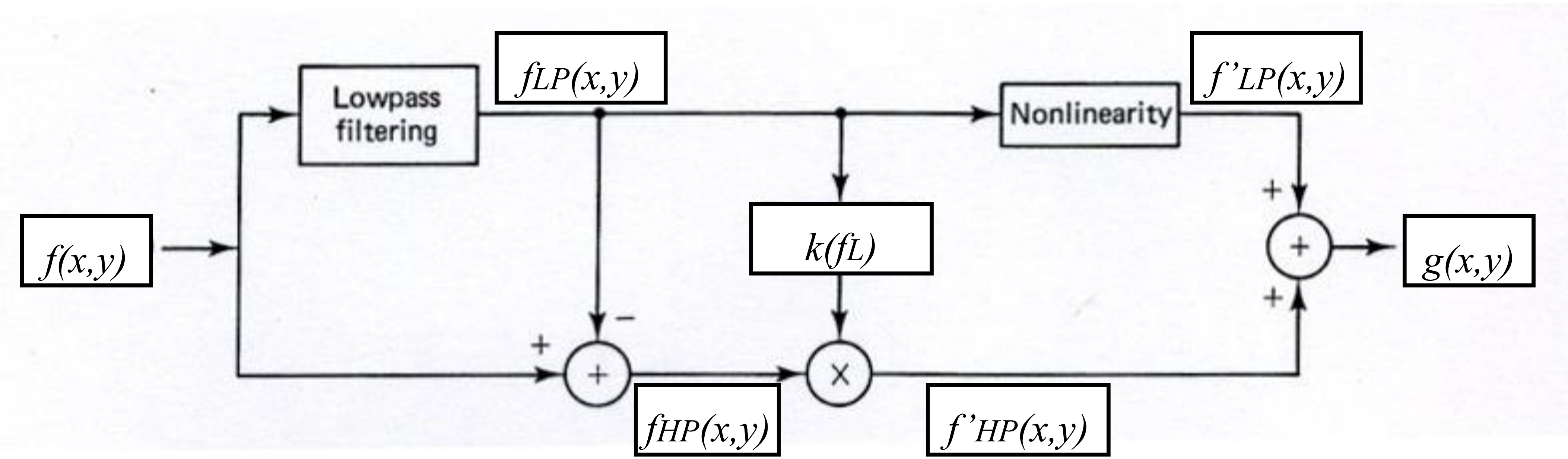
# Filtros selectivos

•Filtros no lineales

- Un filtro desarrollado para reducir el efecto de cobertura de nubes consiste en modificar el contraste local y la media de luminancia local.
- Asumiendo la imagen no procesada $f(x, y)$, la media de la luminancia local se obtine filtrando la imagen original con un pasabajos $(f_{LP}(x, y))$.
- El contraste local se obtiene haciendo $f(x, y) - f_{LP}(x, y) = f_{HP}(x, y)$.
- El contraste local se modifica multiplicando $f_{HP}(x, y)$ con $k(f_{LP})$, que es un escalar función de $f_{LP}(x, y)$.
- La media de la luminancia local se modifica utilizando una función no-lineal.
- La imagen de contraste local modificado se combina con la imagen de luminancia media modificada para obtener la imagen procesada.

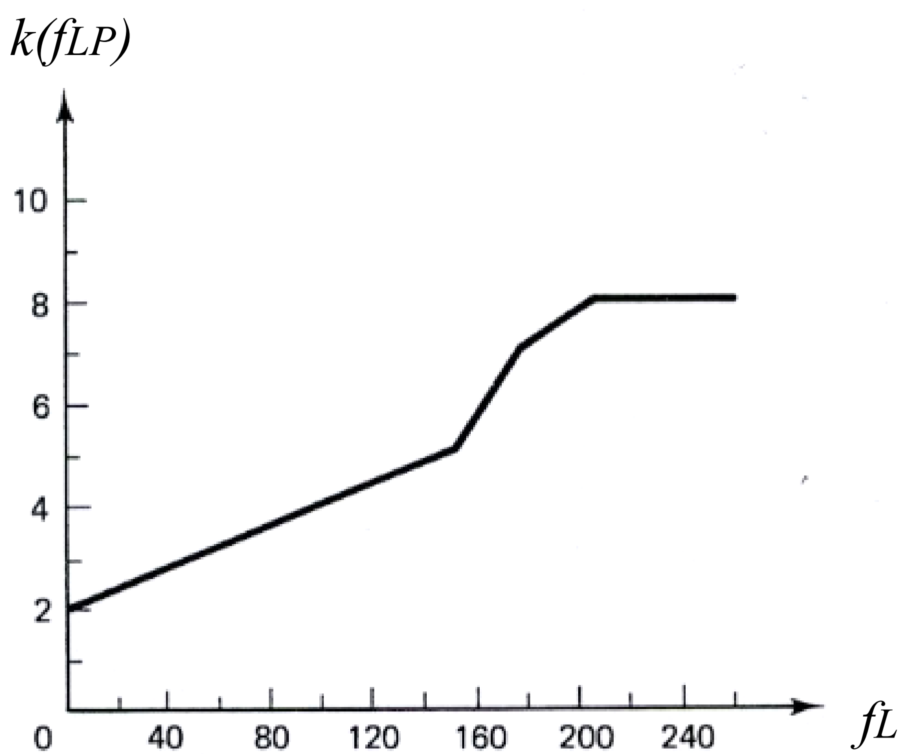
# Filtros selectivos

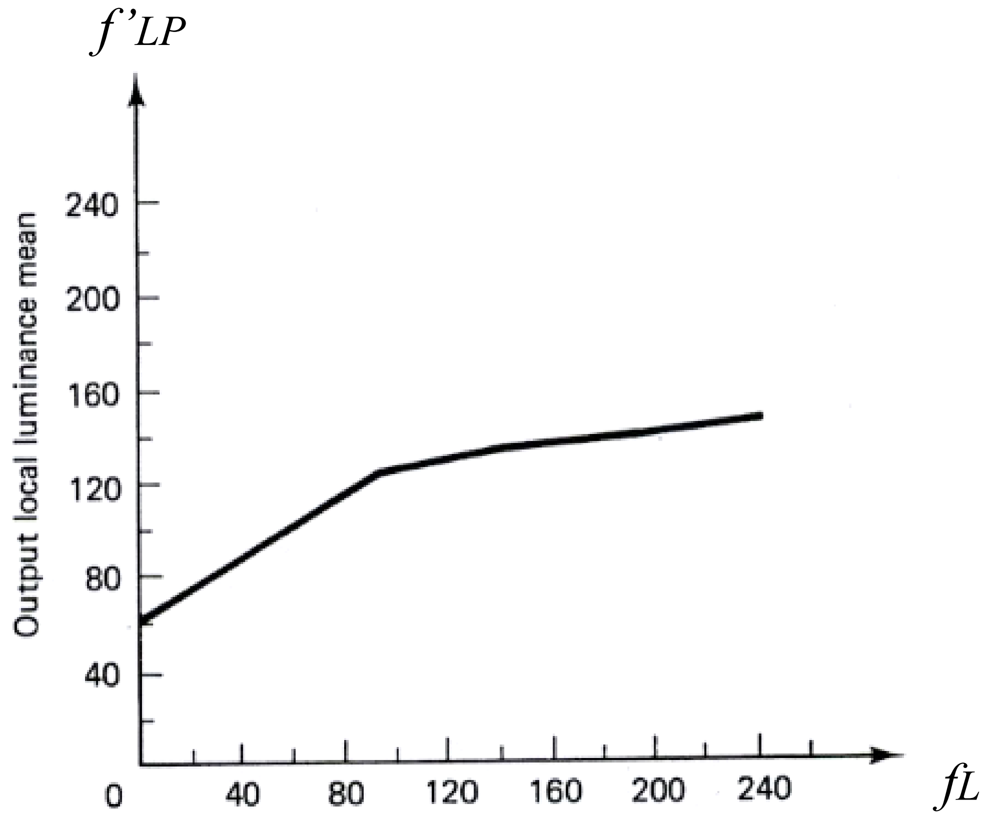
•Filtros no lineales



# Filtros selectivos

•Filtros no lineales



# Filtros selectivos

- Filtros no lineales