TRANSFORMADAS

Señal en 1D: $\underline{f} = [f_0 \; f_1 \; \cdots \; f_{N-1}]^T$

o

Transformada de $\underline{f}$: $\underline{F} = [F_0 \; F_1 \; \cdots \; f_{N-1}]^T$

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \, b_{m,n}$$

$b_{m,n}$: función base, por ejemplo en DFT $b_{m,n} = e^{-i\frac{2\pi mn}{N}}$

Notación matricial:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & \cdots & b_{0,N-1} \\ & & & \\ b_{N-1,0} & & \cdots & b_{N-1,b_{N-1}} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{F} = \underline{B}\,\underline{f}$$

Muchas veces $\underline{B}$ es ortonormal $\Rightarrow$ $\underline{B}^T \underline{B}^* = I \Rightarrow \underline{f} = \underline{B}^T \underline{F}$

Aplicaciones: La información contenida en $\underline{F}$ es más fácil
de interpretar que la información en $\underline{f}$, como
si fueran dos idiomas.

Importante: Las bases deben ser funciones que sean represen-
tativas dentro de las posibles funciones que pueden
estar presentes en $\underline{f}$

Compresión: Si $\underline{f}$ es representada con pocos elementos en $\underline{F}$,
es decir si hay muchos elementos $|F_m| < \varepsilon$, enton-
ces es posible almacenar $\underline{f}$ sólo guardando los
elementos de F que sean mayores a $> \varepsilon$. Como
las bases son conocidas entonces la reconstrucción
es posible. De esta manera hay una reducción del
tamaño en bytes de la señal.

Señal en 2D:

imágen $\underline{f} = \begin{bmatrix} f_{00} & f_{01} & \cdots & f_{0,N-1} \\ & & \ddots & \\ & & & f_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$

La transformada queda definida como:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \underbrace{b(u,x)}_{\downarrow} \underbrace{b(y,v)}_{\downarrow}$$

En Fourier:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j\frac{2\pi u x}{N}}\, e^{-j\frac{2\pi v y}{N}}$$

Matricialmente

$$F(u,v) = \begin{bmatrix} b_{u,0} & b_{u,1} \cdots & b_{u,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{00} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,v} \\ b_{1,v} \\ \vdots \\ b_{N-1,v} \end{bmatrix}$$

o bien

$\underline{F} = B^T \underline{f}\, B \longrightarrow$ en caso que sean ortonormales $\underline{f} = B F B^T$