Tratamiento de Señales
Version 2024-1

Introducción a la Restauración de Imágenes

[Capítulo 6]

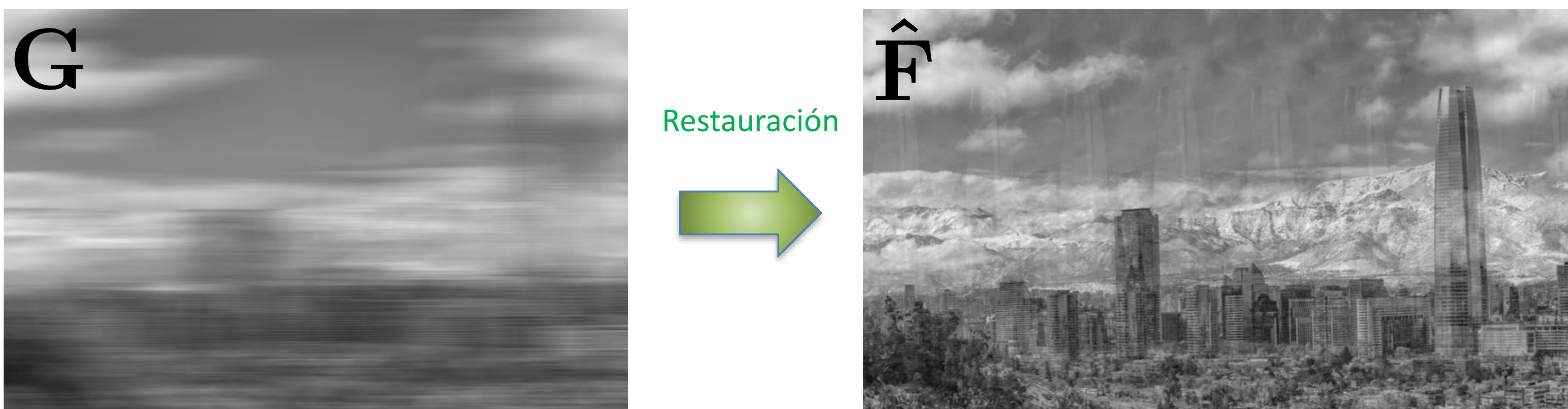
Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar

Restauración de Imágenes

En restauración de imágenes la idea es recuperar una imagen ORIGINAL a partir de

1) imagen DEGRADADA y
2) conocimiento a priori del proceso de degradación.

La imagen recuperada se le conoce como RESTAURADA.



DEGRADADA

RESTAURADA

Restauración de Imágenes

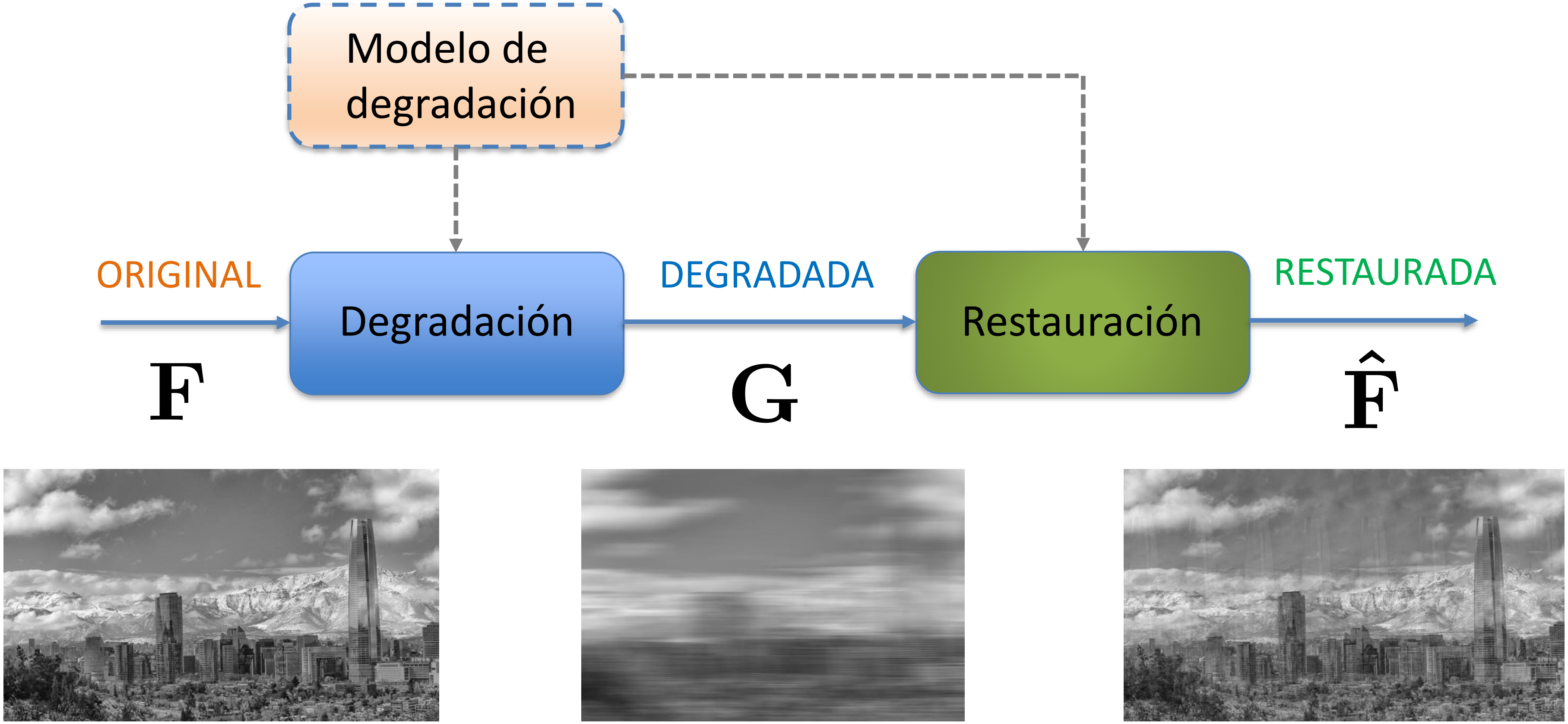
La degradación es un proceso que puede ser modelado. En este ejemplo la imagen degradada se produce por un movimiento horizontal de la cámara.

ORIGINAL

Degradación

DEGRADADA

Restauración de Imágenes

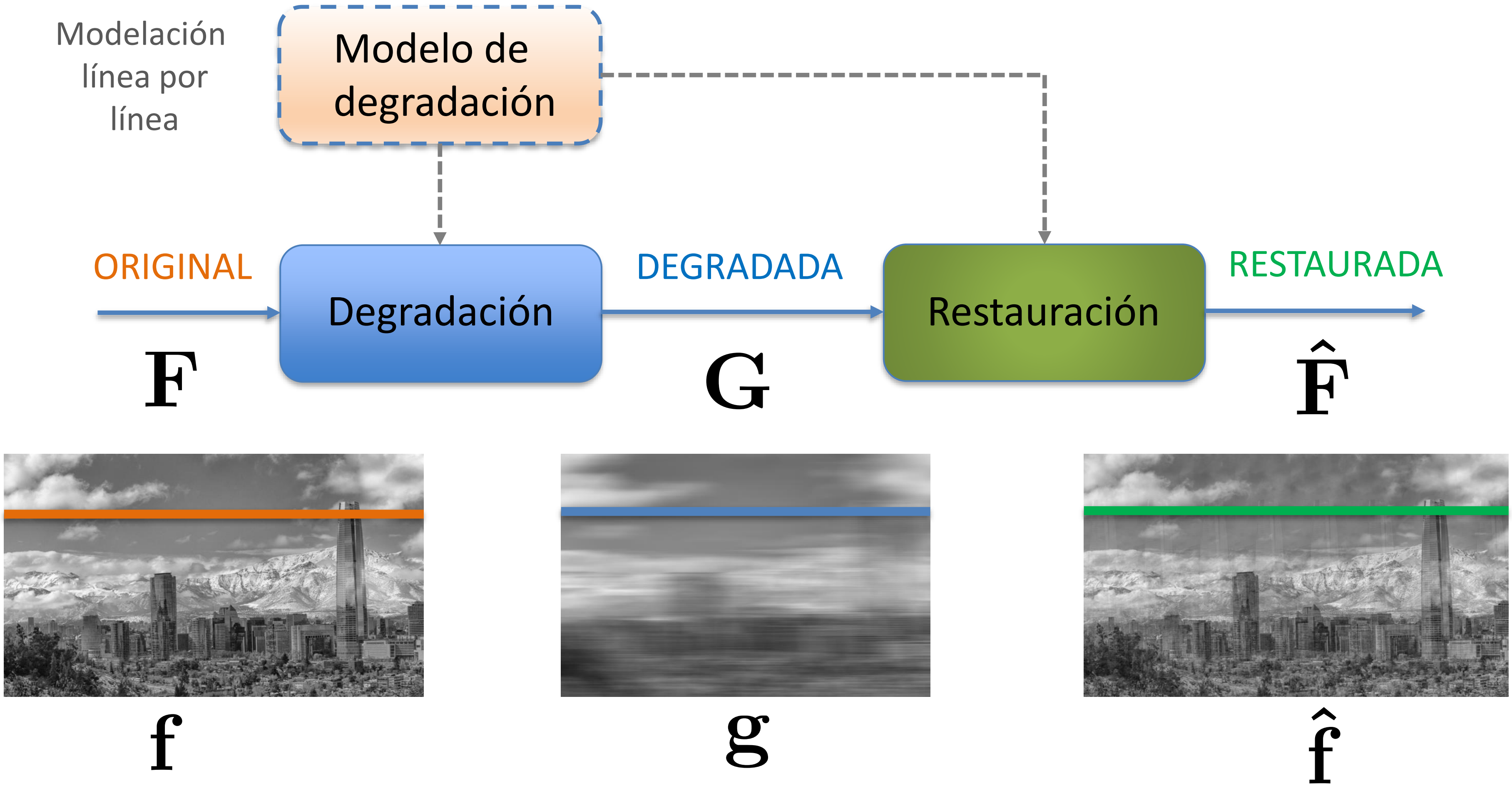


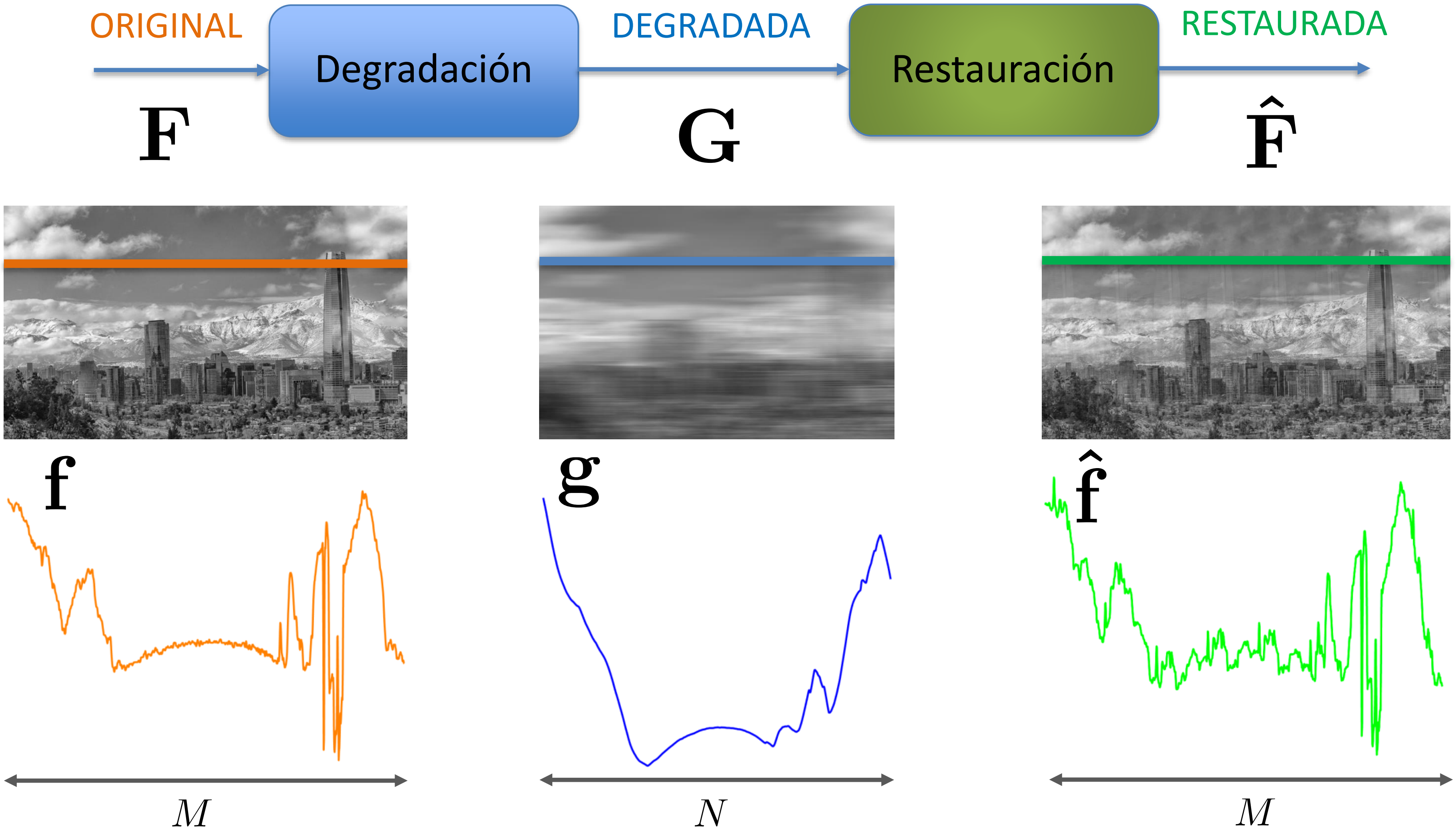
Ejemplo

Foto tomada desde un vehículo en movimiento horizontal


Google Street View

Restauración de Imágenes en Movimiento Uniforme Horizontal




ORIGINAL
Degradación
DEGRADADA
Restauración
RESTAURADA
$\mathbf{F}$
$\mathbf{G}$
$\hat{\mathbf{F}}$
$\mathbf{f}$
$\mathbf{g}$
$\hat{\mathbf{f}}$
M
N
M

Modelación de una línea degradada Movimiento Uniforme Horizontal

Para un movimiento de n pixeles, se podría pensar que un pixel en $\mathbf{g}$ es el promedio de n pixeles contiguos de $\mathbf{f}$.

$$g_i = \underbrace{(f_i + f_{i+1} + \cdots f_{i+n-1})}_{n \text{ pixeles}}/n$$

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3			

Average: (4+6+9) / 3 = 6.33

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7		

Average: (6+9+6) / 3 = 7

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7	6.3	

Average: (9+6+4) / 3 = 6.33

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7	6.3	5.3

En cada fila de F, sólo hay 4 tríos de pixels contiguos que se pueden promediar.

Por esta razón, G solo tiene 4 columnas.

Average: (6+4+6) / 3 = 6.33

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7	6.3	5.3
6.3	6.3	7.3	9
5.7	3.3	4.3	4.3
10	10	10	10

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

M = 6

G

6.3	7	6.3	5.3
6.3	6.3	7.3	9
5.7	3.3	4.3	4.3
10	10	10	10

N = 4

Pregunta: ¿de qué ancho son las imágenes? ¿por qué F tiene más columnas que G?

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7	6.3	5.3
6.3	6.3	7.3	9
5.7	3.3	4.3	4.3
10	10	10	10

Pregunta: ¿de qué ancho son las imágenes? ¿por qué F tiene más columnas que G?

Si F tiene M columnas y el filtro tiene n elementos ¿cuántas columnas tiene G?

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

M

G

6.3	7	6.3	5.3
6.3	6.3	7.3	9
5.7	3.3	4.3	4.3
10	10	10	10

N

h

1/3	1/3	1/3

n

$N = M-n+1$

Pregunta: ¿de qué ancho son las imágenes? ¿por qué F tiene más columnas que G?

Si F tiene M columnas y el filtro tiene n elementos ¿cuántas columnas tiene G?

Modelación de una línea degradada Movimiento Uniforme Horizontal

Para un movimiento de n pixeles, se podría pensar que un pixel en $\mathbf{g}$ es el promedio de n pixeles de $\mathbf{f}$.

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} * \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

$$h_i = 1/n$$

(modelo) ORIGINAL DEGRADADA

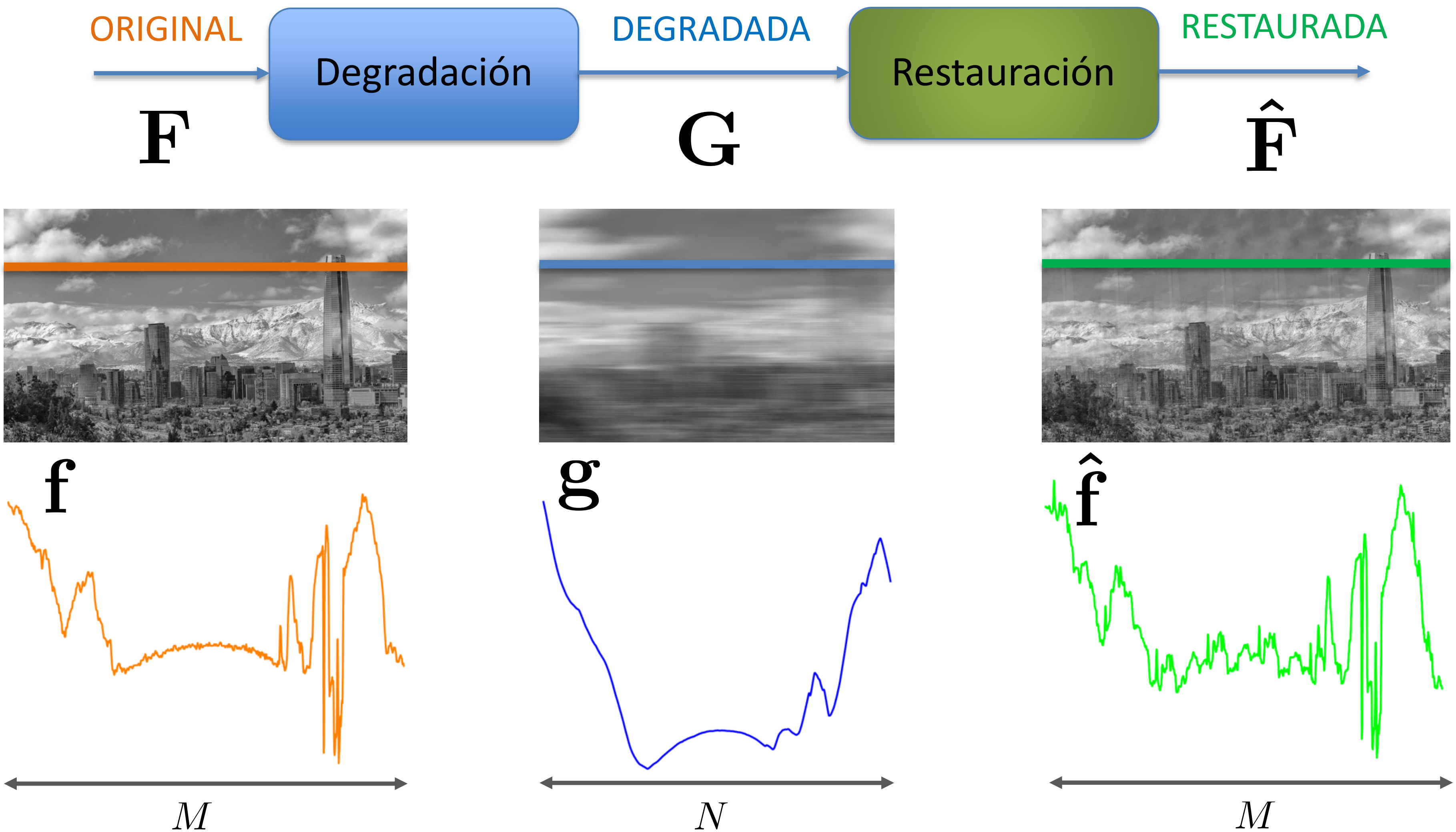
La degradación de un movimiento lineal uniforme de n pixeles equivale a una convolución fila por fila con una máscara h. En esta convolución se toman sólo los elementos válidos de salida, es decir, sólo aquellos que fueron modelados con el promedio de n pixeles.

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{g}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} * \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & \ldots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \ldots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & h_1 & \ldots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

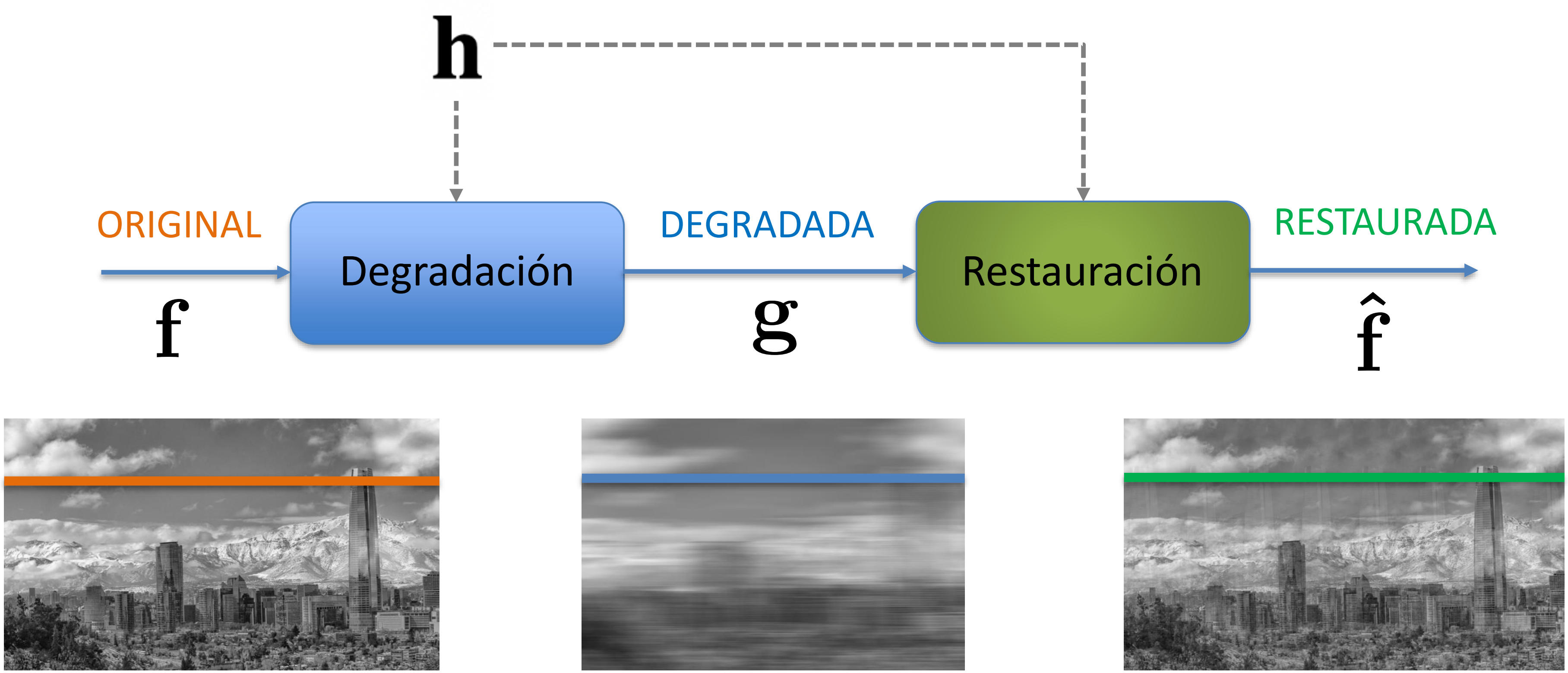
$$h_i = 1/n$$

(modelo) ORIGINAL DEGRADADA

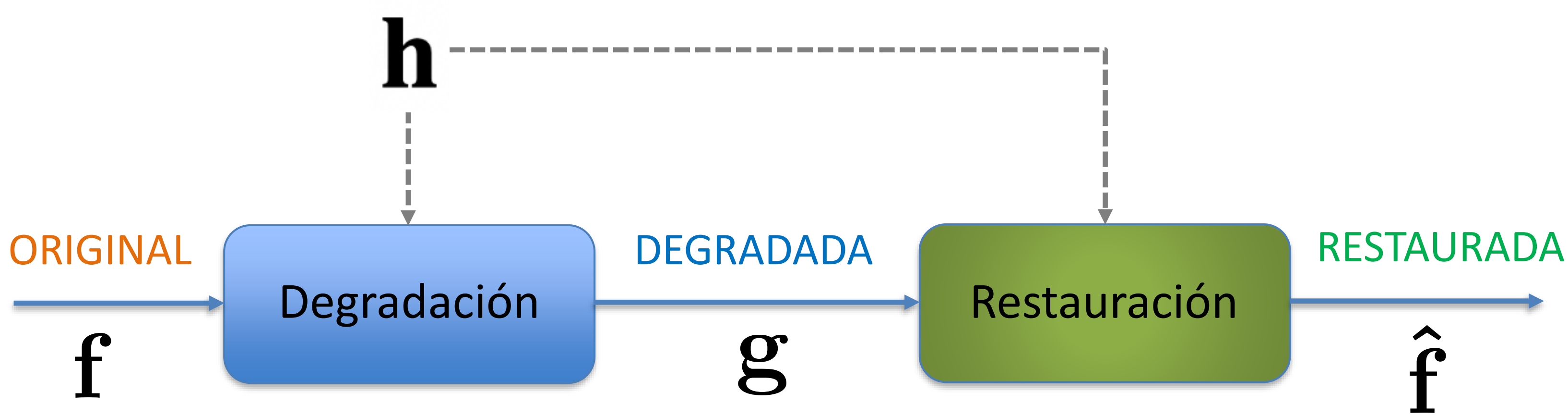


Para un movimiento de *n* pixeles: $M = N + n - 1$

PREGUNTA: Conociendo $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h}$, ¿cómo obtener $\hat{\mathbf{f}}$?



PREGUNTA: Conociendo $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h}$, ¿cómo obtener $\hat{\mathbf{f}}$?



$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} \quad ? \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_M \end{bmatrix}$$

CONOCIDO DESCONOCIDO CONOCIDO

PREGUNTA: Conociendo $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h}$, ¿cómo obtener $\hat{\mathbf{f}}$?

El problema consiste en resolver este sistema de N ecuaciones con M incógnitas

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

Pero $M > N$ ya que: $M = N + n - 1$

Hay más icógnitas que ecuaciones !!!

PREGUNTA: Conociendo $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h}$, ¿cómo obtener $\hat{\mathbf{f}}$?

Como hay N ecuaciones con M incógnitas con $M > N$, existen infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

La pregunta entonces sería ¿<u>cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración</u>?

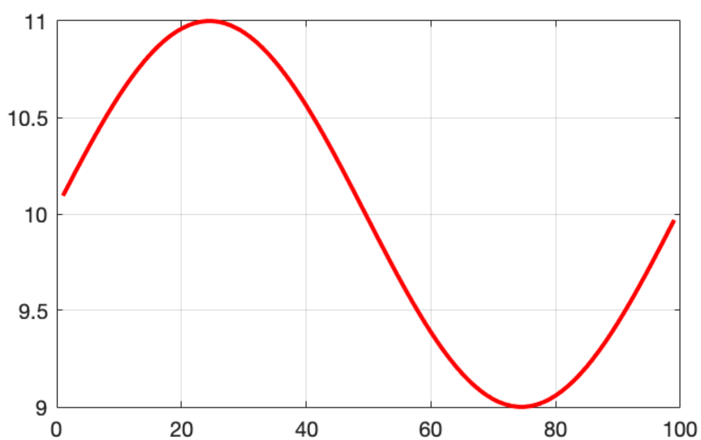
Un ejemplo muy simple

$$h = [0.5\ 0.5]$$

$$(n = 2)$$

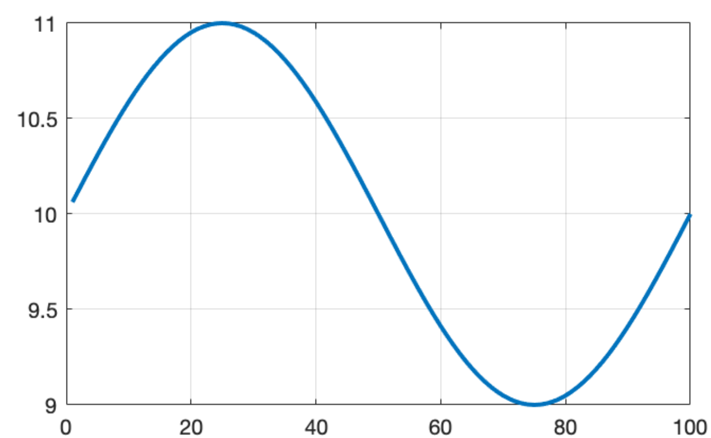
ORIGINAL → Degradación → DEGRADADA

$\mathbf{f}$



$$M = 100$$

$\mathbf{g}$

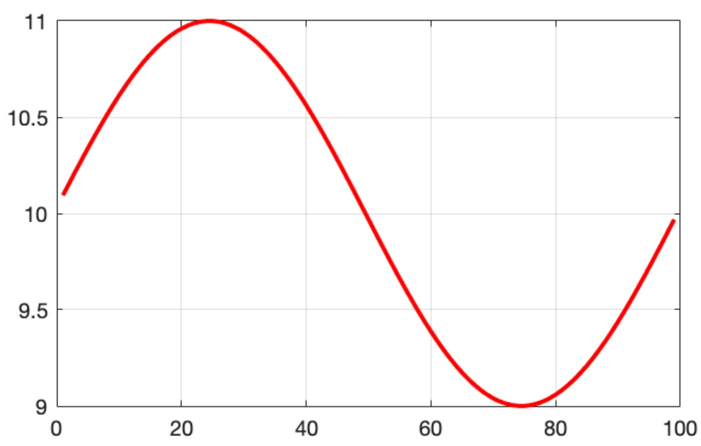


$$N = 99$$

Un ejemplo muy simple

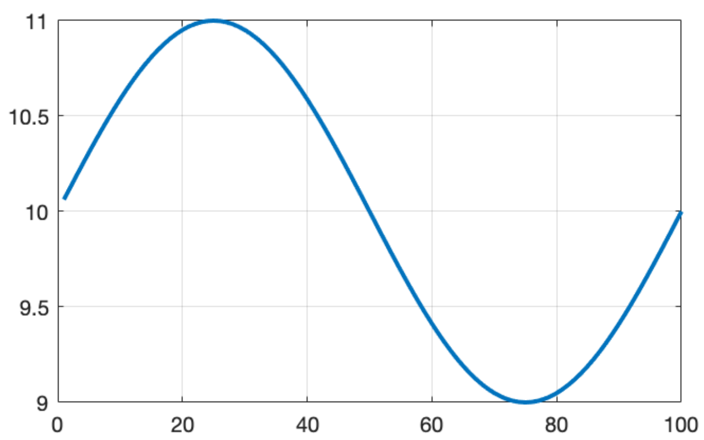
$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \\ f_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f}$



$M = 100$

$\mathbf{g}$



$N = 99$

Un ejemplo muy simple

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \\ f_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} \end{bmatrix}$$

Tenemos 100 ecuaciones con 99 incógnitas.

99x100

Vamos a asumir que f_{100} es conocido: $f_{100} = x$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos 99 ecuaciones con 99 incógnitas.

99x100

La solución es simple usando álgebra lineal

Un ejemplo muy simple

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \\ f_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} \end{bmatrix}$$

99x100

Vamos a asumir que f_{100} es conocido: $f_{100} = x$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} \end{bmatrix}$$

99x100

La solución es simple usando álgebra lineal

Un ejemplo muy simple

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} \end{bmatrix}$$

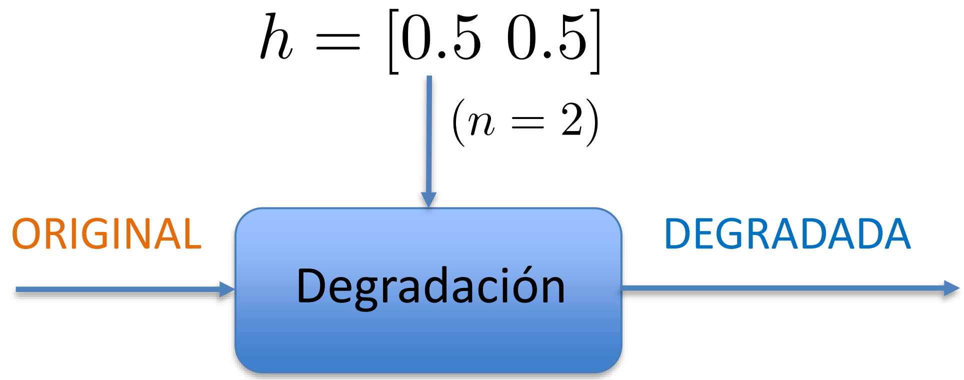
99x100

La solución es simple usando álgebra lineal

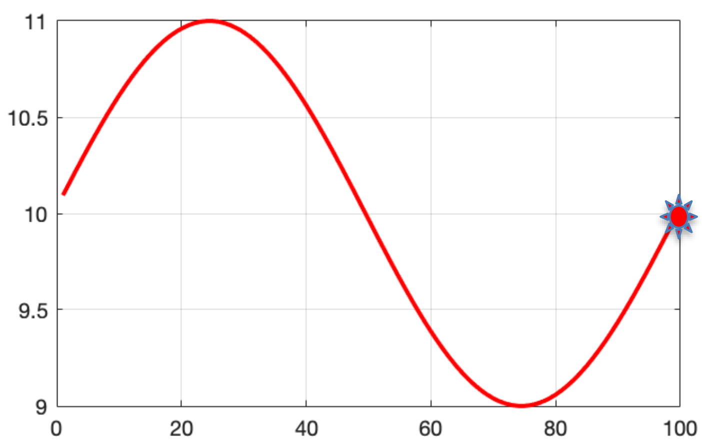
$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{99} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{99} - 0.5x \end{bmatrix}$$

99x99

Un ejemplo muy simple



$\mathbf{f}$



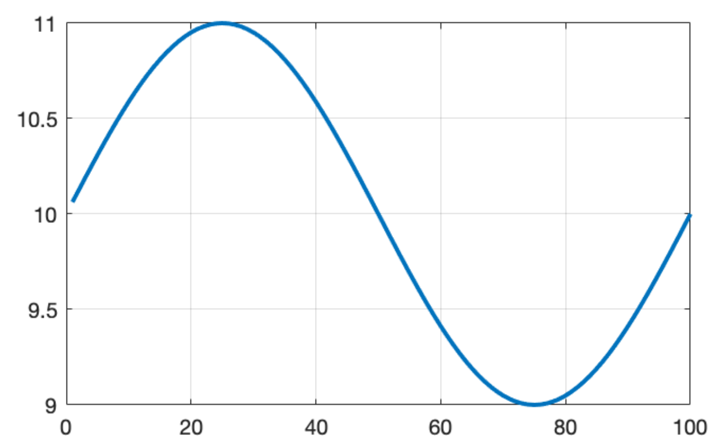
$$M = 100$$

Valor conocido
Ideal: 10

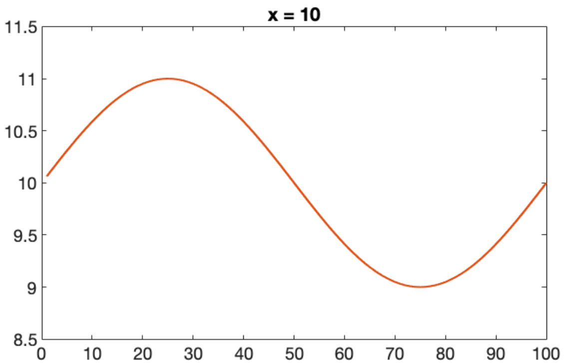
Qué pasa si

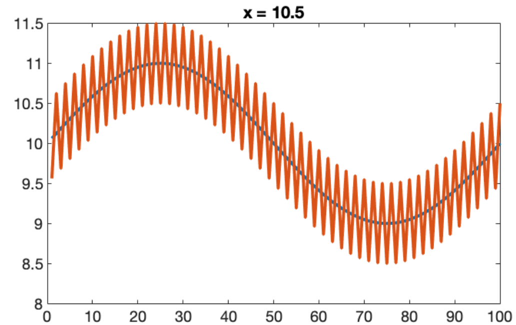
$x =$ 10,
10.1
10.5, etc.?

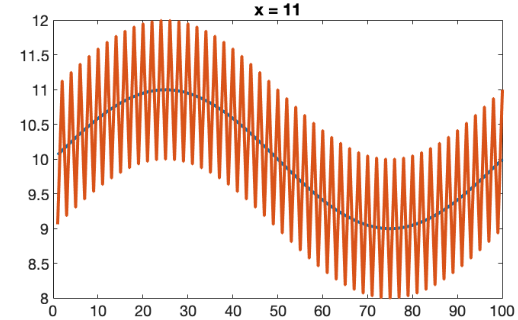
$\mathbf{g}$

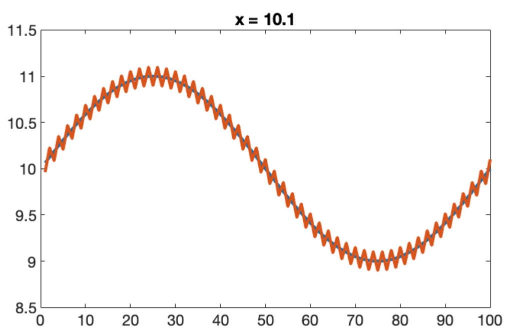


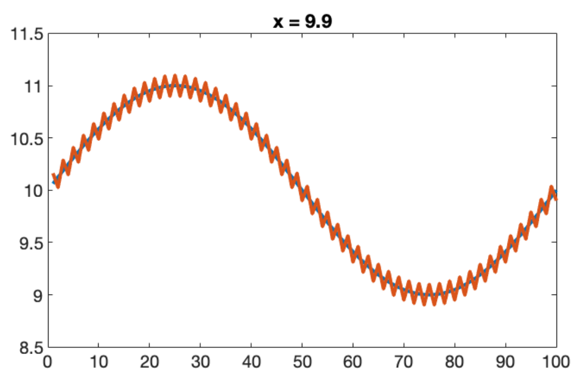
$$N = 99$$

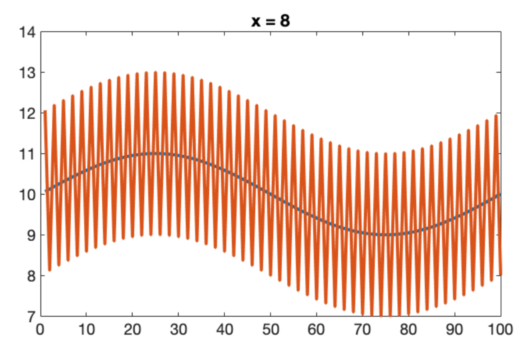

x = 10
11.5
11
10.5
10
9.5
9
8.5
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100


x = 10.5
11.5
11
10.5
10
9.5
9
8.5
8
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100


x = 11
12
11.5
11
10.5
10
9.5
9
8.5
8
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100


x = 10.1
11.5
11
10.5
10
9.5
9
8.5
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100


x = 9.9
11.5
11
10.5
10
9.5
9
8.5
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100


x = 8
14
13
12
11
10
9
8
7
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

Un ejemplo muy simple

Se observa que un pequeño error en la estimación de uno de los valores de $\mathbf{f}$ genera fuertes oscilaciones!

Como hay N ecuaciones con M incógnitas con $M > N$, existen infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} h_1 & \ldots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \ldots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & h_1 & \ldots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

La pregunta entonces sería ¿cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración?

Es necesario contar con un criterio adicional para eliminar el rizado.

Como hay N ecuaciones con M incógnitas con $M > N$, existen infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

La pregunta entonces sería ¿cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración?

Es necesario contar con un criterio adicional para eliminar el rizado.

Entonces la solución $\hat{\mathbf{f}}$ debe satisfacer:

1) $\mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$

Como hay N ecuaciones con M incógnitas con $M > N$,
existen infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

La pregunta entonces sería ¿cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración?

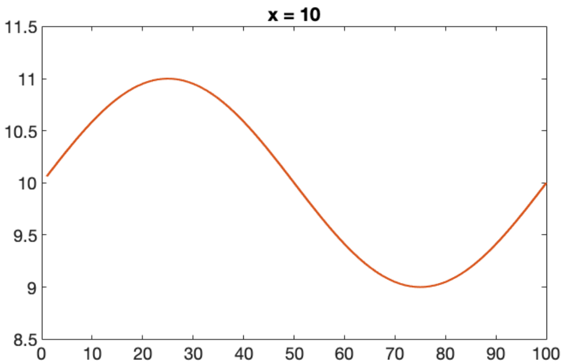
Es necesario contar con un criterio adicional para eliminar el rizado.

Entonces la solución $\hat{\mathbf{f}}$ debe satisfacer:

1) $\mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$

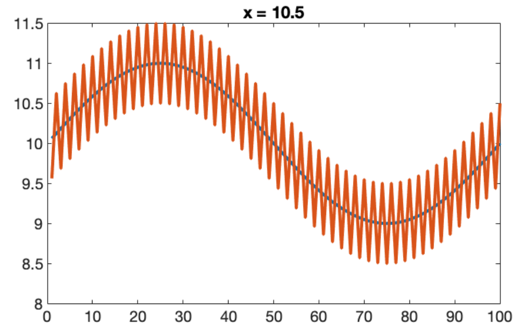
2) $\mathrm{rizado}(\hat{\mathbf{f}}) \to \min$

La norma $||\hat{\mathbf{f}}||$ es una buena métrica del rizado

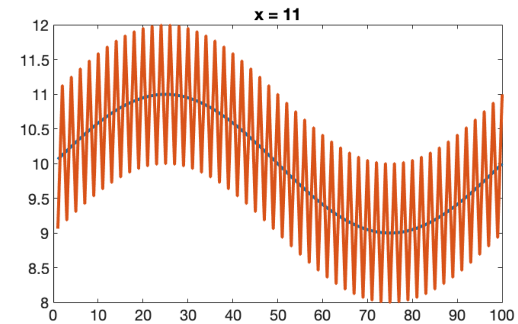


100.2497

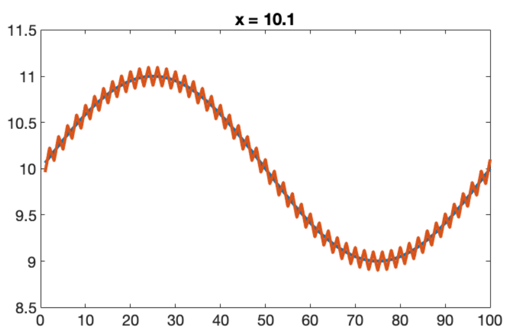
mínimo



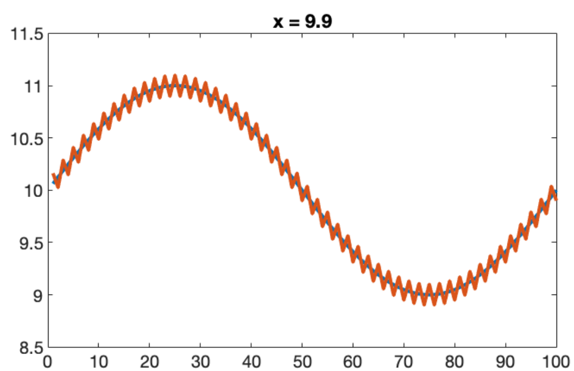
100.3743



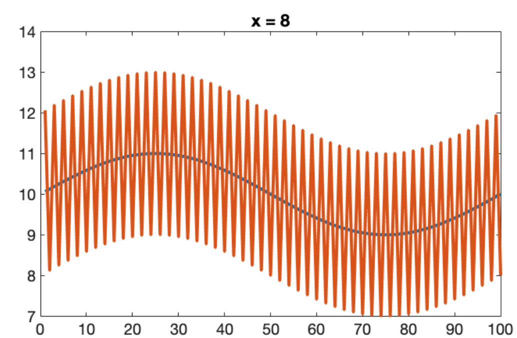
100.7472



100.2547



100.2547



102.2252

Como hay N ecuaciones con M incógnitas con $M > N$, existen infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

La pregunta entonces sería ¿cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración?

Es necesario contar con un criterio adicional para eliminar el rizado.

Entonces la solución $\hat{\mathbf{f}}$ debe satisfacer:

1) $\mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$

2) $||\hat{\mathbf{f}}|| \rightarrow \min$

Formulación del problema:

1) Se tiene una señal $\mathbf{g}$ de M elementos que ha sido producida por un proceso de degradación de la señal $\mathbf{f}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{Hf} = \mathbf{g} = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

2) Se debe encontrar la señal original a partir de $\mathbf{g}$ y de $\mathbf{H}$ usando un algoritmo de optimización planteado de la siguiente manera:

$||\hat{\mathbf{f}}|| \rightarrow \min$ sujeto a $\mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$

La estimación de $\mathbf{f}$ es $\hat{\mathbf{f}}$.

Solución del Problema: (1/2)

$||\hat{\mathbf{f}}|| \rightarrow \min$ sujeto a $\mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$

Usando multiplicadores de Lagrange: con $(\mathbf{W} = \mathbf{I})$

$$V(\mathbf{f}) = \lambda \parallel \mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g} \parallel^2 + \parallel \mathbf{f} \parallel^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} V(\mathbf{f}) = 2\lambda \mathbf{H}^{\mathsf{T}}(\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}) + 2\mathbf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{W}\mathbf{f} = \mathbf{0},$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \underbrace{\lambda \left[\lambda \mathbf{H}^{\mathsf{T}}\mathbf{H} + \mathbf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{W}\right]^{-1} \mathbf{H}^{\mathsf{T}}}_{\mathbf{A}} \mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{g}$$

no depende de **g**.

Solución del Problema: (2/2)

$$||\hat{\mathbf{f}}|| \rightarrow \min \qquad \text{sujeto a} \quad \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$$

:

Solución para una fila de la imagen

$$\boxed{\hat{\mathbf{f}} = \underbrace{\lambda \left[\lambda \mathbf{H}^{\mathsf{T}}\mathbf{H} + \mathbf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{W}\right]^{-1} \mathbf{H}^{\mathsf{T}}}_{\mathbf{A}} \mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{g}}$$

Para un movimiento horizontal de la imagen, las señales son vectores-fila, es necesario entonces calcular la transpuesta:

$$\hat{\mathbf{f}}^{\mathsf{T}} = [\mathbf{A}\mathbf{g}]^{\mathsf{T}} = \mathbf{g}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{G}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}}$$

Solución para toda la imagen