Procesamiento de Señales II
Ciencia de Datos II

Análisis y Visualización de Datos - Test de Hipótesis

Dr. José Ramón Iglesias
DSP-ASIC BUILDER GROUP
Director Semillero TRIAC
Ingenieria Electronica
Universidad Popular del Cesar

Prueba o Test de Hipótesis

Test de Hipótesis

En muchos problemas se requiere tomar una decisión entre aceptar o rechazar una proposición sobre algún parámetro o alguna afirmación de una población.

Esta proposición o afirmación recibe el nombre de **hipótesis estadística**, y el procedimiento de toma de decisión sobre la hipótesis se conoce como **prueba o test de hipótesis**.

Test de Hipótesis

Se quiere testear H_0 vs H_1

H_0: Hipótesis nula (se le da el beneficio de la duda)

H_1: Hipótesis alternativa

A partir de la muestra se construye o elige un estadístico (función de la muestra) para afirmar o rechazar H_0. Se supone que la evidencia empírica (la muestra) me dará las suficientes razones para **rechazar o no H_0**.

Test de Hipótesis

Se quiere testear H_0 vs H_1

H_0: Hipótesis nula (se le da el beneficio de la duda)

H_1: Hipótesis alternativa

Cuándo rechazar H_0?

necesitamos establecer una regla para tomar la decisión

Test de Hipótesis: H_0 vs H_1

H_0	Rechazo H_0	No rechazo H_0
V	Error tipo I	Decisión correcta
F	Decisión correcta	Error tipo II

Se busca una regla que controle principalmente (o primero) el Error tipo I. Cómo?

Test de Hipótesis: H_0 vs H_1

H_0	Rechazo H_0	No rechazo H_0
V	**P(Error tipo I)=α**	P(Decisión correcta)=1-α
F	P(Decisión correcta)=1-β	**P(Error tipo II)=β**

P(Error tipo I)=P(rechazar H_0| H_0 verdadera)=α nivel de significancia

Potencia=1-P(Error tipo II)=1-β = 1-P(No rechazar H_0| H_0 Falsa)

Test de Hipótesis: H_0 vs H_1

Rechazar o no rechazar, esa es la cuestión...

A partir de la muestra se construye o elige un **estadístico** (función de la muestra) para afirmar o rechazar H_0. Se supone que la evidencia empírica (la muestra) me dará las suficientes razones para **rechazar o no H_0**.
Para ciertos valores del **estadístico** la decisión será rechazar H_0. Estos valores se conocen como los valores críticos y determinan una región crítica o de rechazo y una zona de aceptación.

Test de Hipótesis: H_0 vs H_1

Atenti!! Receta!!

1. Formular la H_0 a contrastar
2. Establecer el nivel de significancia del test $\boldsymbol{\alpha}$
3. Cálculo/elección del estadístico de contraste
4. Regla de decisión
5. Que me dijeron los datos?
6. Conclusión

Test de Hipótesis: Formulación de las hipótesis

En la situación que tengo una m.a. de una distribución Normal, con media.μ.

Ejemplos de planteamientos:

$H_0 : \mu \geq 170$ vs. $H_1 : \mu < 170$ (hipótesis alternativa unilateral)

ó

$H_0 : \mu \leq 170$ vs. $H_1 : \mu > 170$ (hipótesis alternativa unilateral)

ó

$H_0 : \mu = 170$ vs. $H_1 : \mu \neq 170$ (hipótesis alternativa bilateral)

Test de Hipótesis: Ejemplo

En la situación que tengo una m.a. de una distribución Normal, con media.μ.

H_0 : μ =43 vs. H_1 : μ ≠ 43 (bilateral)

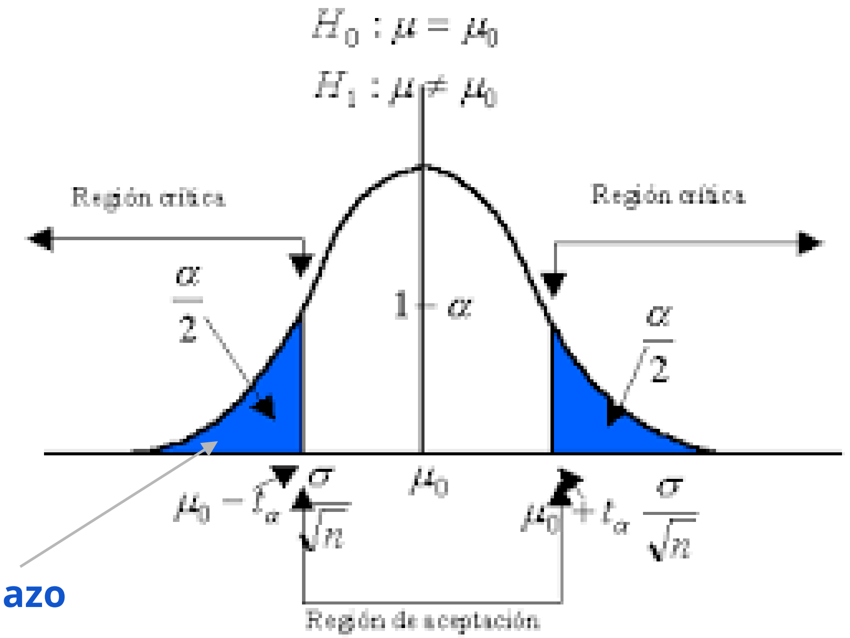
Se fija el nivel de significancia $\boldsymbol{\alpha}$

Se elige el estadístico $\overline{X}$

Bajo H_0 : $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

$$P\left(\boxed{\left|\frac{X-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}} \,\middle|\, H_0\right) = \alpha$$

Rechazo



Test de Hipótesis: p-valor

Se calcula para la realización de NUESTRA muestra, nuestros datos

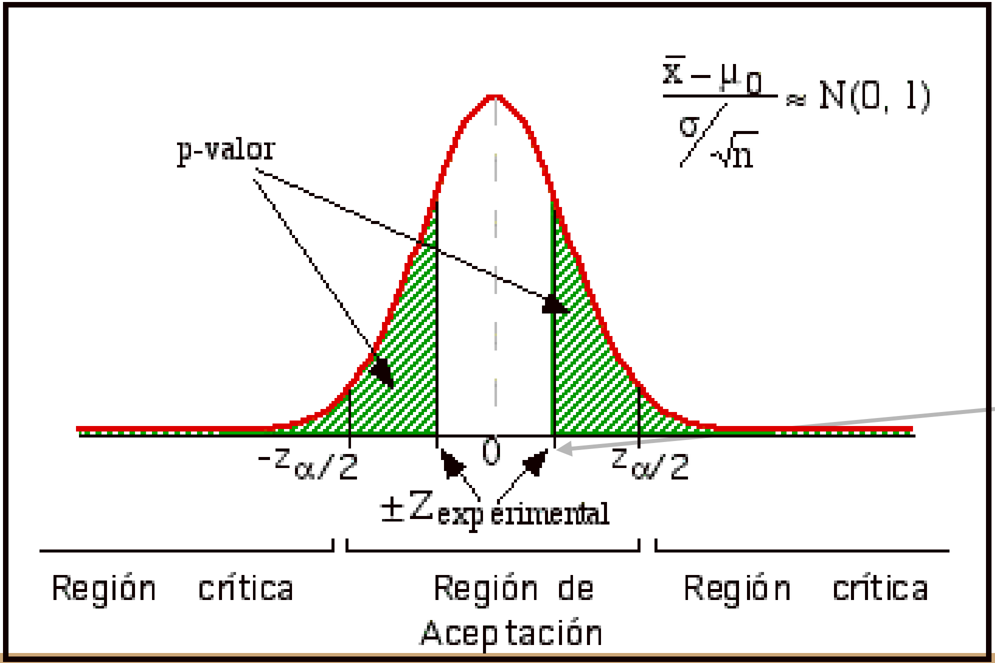
Es el nivel de significancia más pequeño que conduce al rechazo de la hipótesis nula H_0 : $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_0$ En el primer ejemplo:

$$P\left(\boxed{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|} \geq \boxed{\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|} \;\middle|\; H_0\right) = p - valor$$

estadístico T_{n-1} **realización**

Test de Hipótesis: p-valor

Se usan nuestros datos, NUESTRA muestra. El resultado experimental es la realización del estadístico para nuestros datos (del experimento o estudio) .



realización/ experimental

$$P\left(\left| \frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| \geq \boxed{\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}} \middle| H_0 \right) = p - valor$$

Test de Hipótesis

Hay test para hacer dulce! depende de lo que se plantee como H_0:

- Independencia de variables.
- Independencias de variable categóricas: Test Chi-Cuadrado
- Que los datos provienen de una distribución normal: Test K-S
- Homocedasticidad (varianzas iguales).
- Igualdad de medias (de dos o más distribuciones/ tratamientos)
- A las de verificación de supuestos en general se las conoce como Pruebas de Bondad de ajuste.
- etc.

Test de Hipótesis

Test Chi-Cuadrado para independencia de v.a. categóricas:

Prueba si la distribución de datos categóricos de muestra coincide con una distribución esperada (de datos independientes). Nos sirve para probar si “el género” es independiente del “signo” de las personas (en determinada población).

Al trabajar con datos categóricos, los valores de las observaciones en sí mismas no son de mucha utilidad para las pruebas estadísticas porque las categorías como "masculino", "femenino" y "otro" no tienen ningún significado matemático. Las pruebas que tratan con variables categóricas se basan en **conteos** de variables en lugar del valor real de las variables mismas.

Test Chi-Cuadrado p/ independencia de v.a. categóricas

Supongamos que tenemos los datos de 4 tratamientos médicos y con una descripción de cómo lo han recibido los pacientes. Los plasmamos en una **tabla de contingencia**

Trat_i \Res_ j	Peor	igual	mejor	
Tratamiento1	7	28	115	
Tratamiento2	15	20	85	
Tratamiento3	10	30	90	
Tratamiento4	5	40	115	
				560

Test Chi-Cuadrado p/ independencia de v.a. categóricas

En primer lugar vamos a plantear nuestras hipótesis

H_0=”las dos variables en estudio son independientes”

H_1=”las dos variables en estudio están relacionadas”

Como en los juicios, en estadística, se cumple **H_0** (las variables son independientes) hasta que demostremos lo contrario.

Test Chi-Cuadrado p/ independencia de v.a. categóricas

Entonces como datos disponibles tenemos las frecuencias observadas, las frecuencias marginales y el número ‘gran total’ de la muestra

i x j = 4*3	Peor	igual	mejor	
Tratamiento1	7	28	115	150
Tratamiento2	15	20	85	120
Tratamiento3	10	30	90	130
Tratamiento4	5	40	115	160
	37	118	405	560

Test Chi-Cuadrado p/ independencia de v.a. categóricas

¿cómo se contrasta la H_0?

$$fe_{ij} = \frac{\text{(total fila i-ésima)*(total columna j-ésima)}}{\text{gran total}}$$

Se calculan las frecuencias que cabría esperar si las 2 variables fueran independientes

Estadístico $\chi^2 = \sum \left[\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e} \right]$ con dist. Chi cuadrado bajo H_0.

depende de la suma de las diferencias al cuadrado de la frecuencias observadas y las esperadas

Test para igualdad de medias $\mu_1=\mu_2$

H_0: $\mu_1=\mu_2$ o bien H_0: $\mu_1-\mu_2=0$

Muestras apareadas

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una v.a. $X \sim N(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}_1^2)$

$Y_1, X_2, \ldots, Y_n$ una m.a. de una v.a. $Y \sim N(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\sigma}_2^2)$

$(X_1,Y_1), (X_2,Y_2) \ldots, (X_n,Y_n)$ una m.a. de una $N((\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_1), \boldsymbol{\sigma}_1^2, \boldsymbol{\sigma}_2^2, \boldsymbol{\rho})$

$Z_i=X_i-Y_i$ (ej. BRUTO y NETO, datos apareados, la misma cantidad)

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ una m.a. de una v.a. $N(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\sigma}_1^2+\boldsymbol{\sigma}_2^2-2\boldsymbol{\rho}^*(\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2)) = N(0, \boldsymbol{\sigma}^2)$ bajo H_0

Test para igualdad de medias $\mu_1=\mu_2$

H_0: $\mu_1=\mu_2$ o bien H_0: $\mu_1-\mu_2=0$ (dif de medias 0)

$X_1, X_2, \ldots, X_{n1}$ una m.a. de una v.a. $X \sim N(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}^2)$, una población por ej.

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n2}$ una m.a. de una v.a. $Y \sim N(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\sigma}^2)$, otro tamaño de muestra (igual var)

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{(n_1 + n_2)/n_1 n_2}} \sim t_{n1+n2-2}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

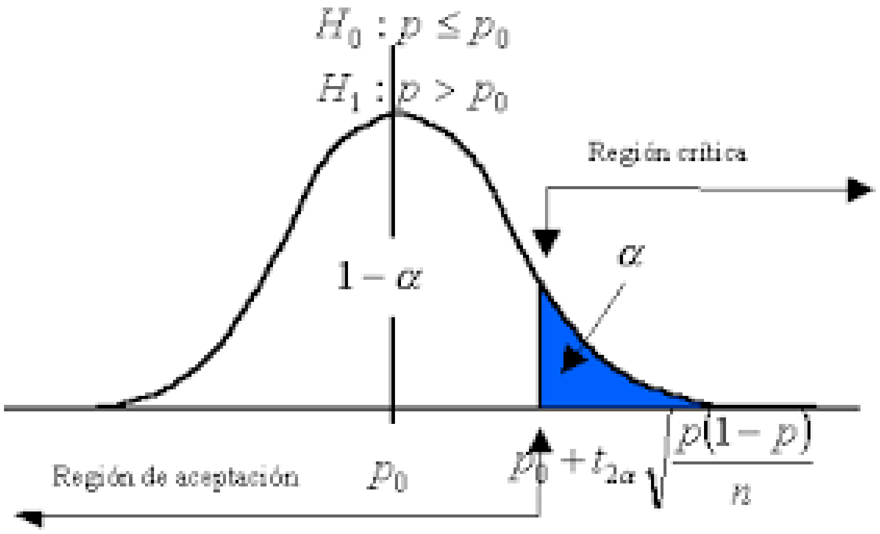
Varianzas distintas: Test de Welch (usa t de student con k… grados de libertad)

Test de Hipótesis

Volviendo a las recetas… Hay test para hacer dulce!

Hay que plantear bien los supuestos y la hipótesis nula, se elige el estadístico.

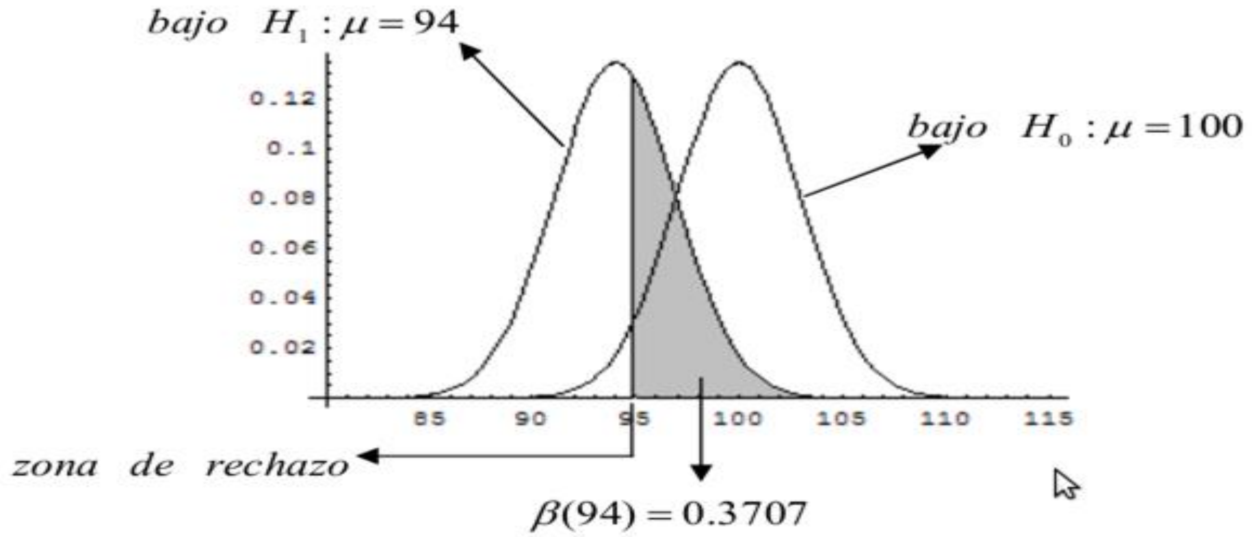
Luego se fija el nivel de significancia $\boldsymbol{\alpha}$ para controlar el Error tipo I, define la RR



Si hay dos o más test con el mismo nivel de
significancia se elige el más potente:
(1-$\boldsymbol{\beta}$) alto (menos prob de error tipo II)

Test de Hipótesis: P(Error tipo II)= $\boldsymbol{\beta}$

Gráficamente:



A no mentirse...

Las hipótesis deben ser previas a los resultados del estudio

Schwartz-Woloshin / Ventura