1 Grundlagen

Linearisierung um Arbeitspunkt:

$$x_a(t) = x_{a,AP} + \Delta x_a(t) \approx x_{a,AP} + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_{e,Ap}} \cdot \Delta x_e(t) \right)$$

$$f(x) = y_0 + k \cdot (x - x_0) = y_0 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \cdot (x - x_0)$$

Kräftegleichungen:

Federkraft: $F_F = k_F \cdot x$
Dampfkraft: $F_D = k_D \cdot v = k_D \cdot \dot{x}$
Trägheitskraft: $F_{Tr} = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$
Erdanziehungskraft: $F_G = m \cdot g$

Momentgleichungen:

Widerstandsmoment: $M_w = k_D \cdot \omega$
Trägheitsmoment: $M_{TR} = \mathrm{J} \cdot \dot{\omega}$

Spannungsgleichung:

$$U = L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \int i$$

Rotation in Flüssigkeit:

$$M = M_{\texttt{Träg}} + M_{\texttt{Brems}} = J \cdot \dot{\omega} + k_{\texttt{Flüssigkeit}} \cdot \omega$$

Für kleine α: $\sin(\alpha) = \alpha$
Anfangswertsatz: $x(t \to +0) = \lim_{s \to \infty} s \cdot X(s)$
Endwertsatz: $x(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot X(s)$

2 Systemtechnik

2.1 Modellbildung

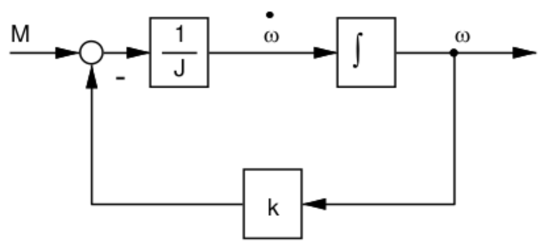
Hinweise zum aufstellen der Differentialgleichung eines Systems:

1. Bestimmung der Ein- und Ausgangsgrößen
2. Suche nach dem beschreibenden Gleichgewicht
3. In der Gleichung dürfen nur Konstanten, sowie die Ein- und Ausgangsgrößen in beliebiger Ableitung vorkommen
4. Andere Variablen müssen durch erlaubte Größen ersetzt werden
(Dazu können i.a. physikalische Gleichungen benutzt werden)

2.2 Signalflussplan/Blockschaltbild

Erzeugung des Signalflussplans aus der Zugehörigen DGL.

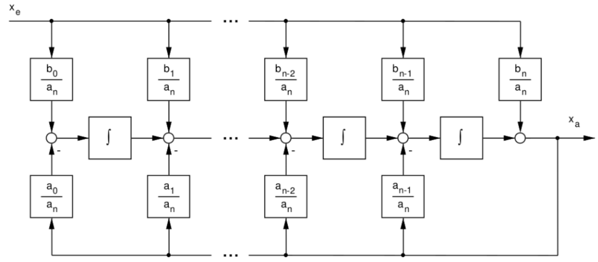
1. für technische Realisierung gilt: m < n;
2. DGL. nach höchster Ableitung der Ausgangsgröße auflösen
3. höchste Ableitung der Ausgangsgröße geht auf den Eingang des ersten Integrators
(Laplace-Trans ersetzt das Integrieren mit einer Division mit „s“)



Erzeugung des Signalflussplans (und Übertragungsfunktion) eines Systems mit der DGL.:

$$b_n \overset{(n)}{x}_e + \ldots + b_2 \ddot{x}_e + b_1 \dot{x}_e + b_0 x_e$$
$$(- - - - - - - - - - - - - - - - - \quad = F(s))$$
$$= a_n \overset{(n)}{x}_a + \ldots + a_2 \ddot{x}_a + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a$$

Signalflussplan kann allgemein gezeichnet werden: (nötig, falls eine Ableitung von x_e existiert)

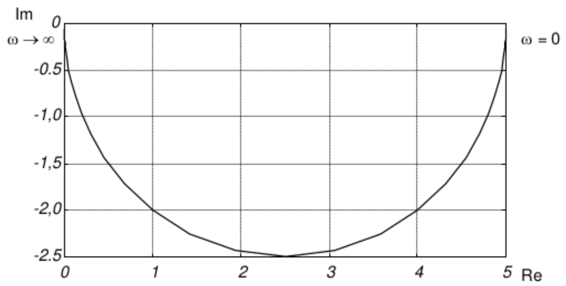


2.3 Zusammenhang DGL, Frequenzgang, Übertragungsfkt.

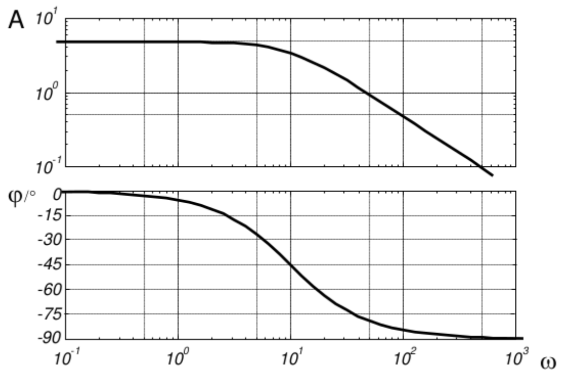
$$F_e = m\ddot{x} + k_D\dot{x} + k_F x$$
$$F(j\omega) = \frac{\Sigma x_e}{\Sigma x_a} \qquad j^2 = -1$$
$$F(j\omega) = \frac{1}{m(j\omega)^2 + k_D j\omega + k_F}$$
$$= \frac{1}{-m\omega^2 + h_D\omega + h_F}$$
$$\text{konj. komp. erweitert} = \frac{\left(k_F - m\omega^2\right) - k_D j\omega}{\left(k_F - m\omega^2\right)^2 - (-1)\left(k_D\omega\right)^2}$$
$$= \frac{\left(k_F - m\omega^2\right) - k_{Dj}\omega}{\left(k_F - m\omega^2\right)^2 + \left(k_D\omega\right)^2}$$
$$F(s) = \frac{1}{ms^2 + k_D s + h_F}$$

2.4 Ortskurven und Frequenzkennlinien

Ortskurvendarstellung:
(In Darstellung $F(j\omega) = a + jb$ eintragen)



Bodediagramm Darstellung:
(In Darstellung $F(j\omega) = A(rg)\measuredangle\varphi$ eintragen)



Beispiel PT1-Glied
Verstärkung wird multipliziert und Phasenverschiebung addiert.
Das heißt: Sowohl Phasengang und Amplitudengang werden graphisch addiert!

3 Zusammenwirken mehrerer Systeme

3.1 Signalflussplan Algebra

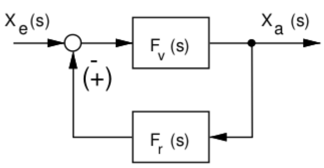
- Kettenstruktur:

$$F_{ges}(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

- Parallelstruktur:

$$F_{ges}(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

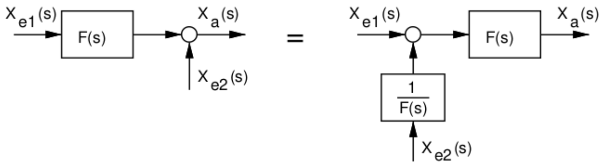
- Kreisstruktur:



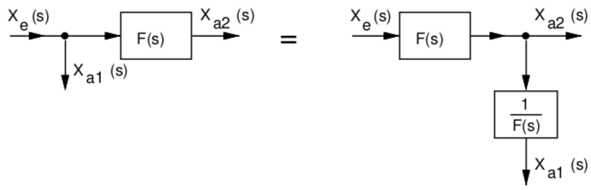
$$\Rightarrow F_{Kreis}(s) = \frac{F_v(s)}{1 + (-)F_v(s)F_r(s)}$$

- : Gegenkopplung
(+): Mitkopplung

- Verschieben einer Additionsstelle:



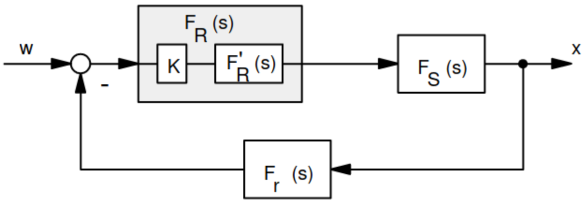
- Verschieben einer Verzweigung:



3.2 Regeldifferenz

Regler	$F_R(s)$	Regelstrecke $F_S(s)$	bleibende Regeldifferenz e (oder x_d): für $x_e = a \cdot \sigma(t)$ (Sprung) mit Rückführverstärkung K_r	bleibende Regeldifferenz e (oder x_d): für $x_e = a \cdot t$ (Rampe) mit Einheitsrückführung
P (D)	K_P	P-Verhalten (P, $PT1$, $PT2$, ...) $F_S(s) = K_S \frac{(1+\ldots s)\ldots}{\_(1+\ldots s)\ldots}$	$a\frac{1}{1+K_P \cdot K_S \cdot K_r}$	∞
I	$\frac{K_I}{s}$		0	$a\frac{1}{K_I \cdot K_S}$
PI (D)	$K_P + \frac{K_I}{s}$		0	$a\frac{1}{K_I \cdot K_S}$
I^2	$\frac{K_I}{s^2}$		0	0
P (D)	K_P	I-Verhalten (I, PI, $IT1$, ...) $F_S(s) = K_S \frac{(1+\ldots s)\ldots}{\underline{s}(1+\ldots s)\ldots}$	0	$a\frac{1}{K_P \cdot K_S}$
I	$\frac{K_I}{s}$		0	0
PI (D)	$K_P + \frac{K_I}{s}$		0	0

3.3 Wurzelortskurven (WOK)-Verfahren



$$\Rightarrow F_w(s) = \frac{F_R \cdot F_S}{1 + F_R \cdot F_S \cdot F_r}$$

$$\begin{aligned} F_o(s) &= F_R \cdot F_S \cdot F_r \\ &= K \cdot F_R'(s) \cdot F_S(s) \cdot F_r(s) \\ &= K \cdot Q \cdot \frac{\prod_{u=1}^{m} (s - s_{\mathrm{N}})}{\prod_{v=1}^{n} (s - s_{\mathrm{P}})} \end{aligned}$$

$$K_{krit} = \frac{1}{|Q|} \cdot \frac{\prod |d_P|}{\prod |d_N|}$$

K_{neu} bei Polstelle neu:

$$K_{neu} = \frac{\Delta s_{P1}}{Q}$$

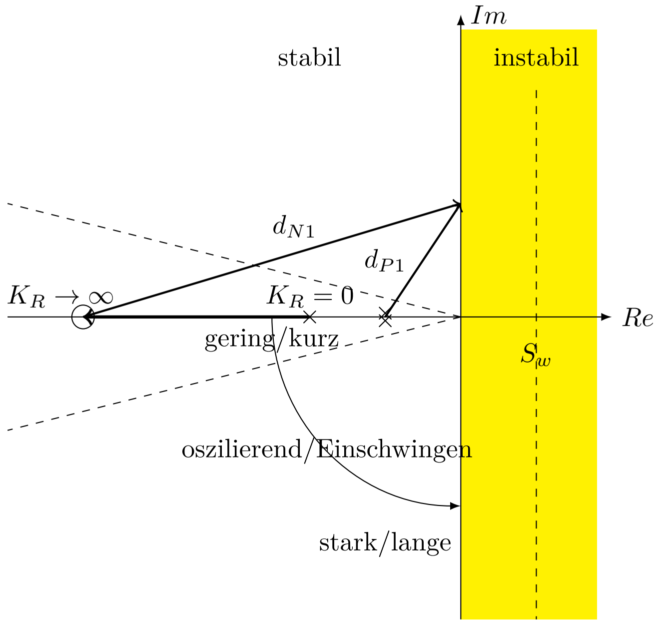
3.4 Konstruktion der WOK

$$ax^2 + bx + c \qquad z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

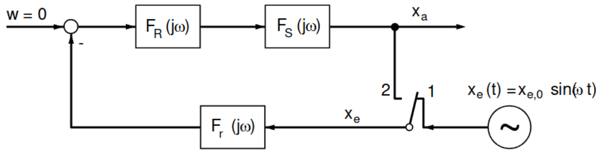
1. Alle n Äste beginnen in den n POLEN s_pov
2. m Äste der WOK enden für K $\to \pm\infty$
3. n -m Äste der WOK enden für K $\to \pm\infty$ im Unendlichen
4. Die n-m ins Unendliche strebende Äste der WOK haben Asymptoten,die
   a) im Wurzelschwerpunkt

   $$S_w = \frac{\sum_{v=1}^{n} s_P - \sum_{u=1}^{m} s_N}{n - m} = \frac{\text{Polst.} - \text{Nullst.}}{\text{Polst. Überschuss}}$$

   b) mit der reellen Achse die Winkel
   Polst. Überschuss 1 $\Rightarrow 180°$, 2 $\Rightarrow 90/270°$
   $\varphi_k = \frac{(2k-1)\cdot 180°}{n-m}$ für KQ > 0
   k = 1,2,3,. . . ,n-m
5. Die Punkte liegen auf der reellen Achse, oder symmetrisch zur reellen Achse
6. Ein Punkt s auf der reellen Achse ist dann ein Punkt der WOK, wenn sich bei KQ > 0 (KQ<0) rechts von ihm eine ungerade (gerade) Anzahl von Polen $s_P/\times$ und (+) Nullstellen $s_N/\circ$ befindet.
7. $\times \to \circ$ (Von Pol- nach Nullstellen)
   Achtung: WOK nicht anwendbar, wenn Übertragungsfunktionen nicht rationale (z.B. Regelkreis mit Totzeitverhalten!)



3.5 Nyquist Kriterium



Frequenzgangfunktion des offenen Regelkreises:

$$F_o(j\omega) = F_r(j\omega) \cdot F_R(j\omega) \cdot F_S(j\omega)$$

Ausgangssignal:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= -F_r(j\omega) \cdot F_R(j\omega) \cdot F_S(j\omega) \cdot x_{e0} sin(\omega t) \\ &= -F_0(j\omega) \cdot x_e(t) \end{aligned}$$

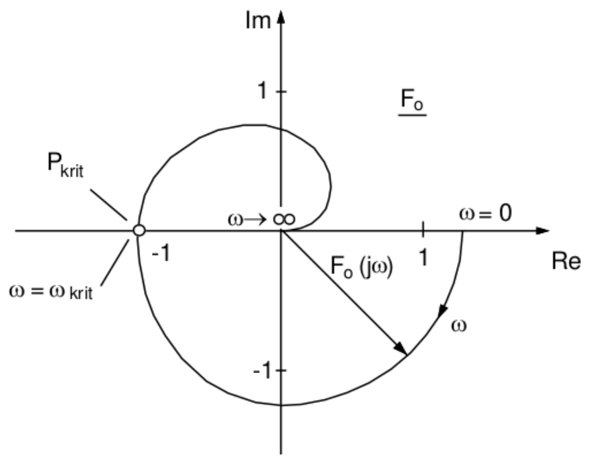
Regler und seine Parameter werden so gewählt, dass $\omega = \omega_{krit}$ gilt:

$-F_0(j\omega_{krit}) = 1$ oder $F_0(j\omega_{krit}) = -1$ `(Schwingbedingung)`

Die Schwingbedingung ist erfüllt, wenn die Ortskurve von $F_1(j\omega)$ durch den kritischen Punkt ($P_{krit} = -2 + j0$) der komplexen F_0-Ebene geht.

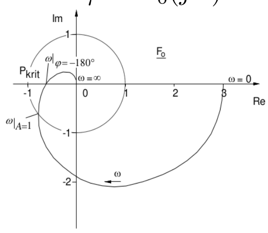
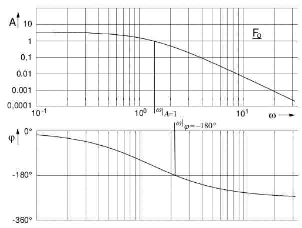
An diesem Punkt kann man ω_{krit} ablesen (damit kann der Regelkreis Dauerschwingungen ausführen).

Für größere ω ist das System instabil, für kleinere stabil.



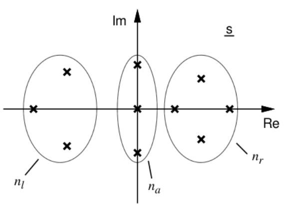
Falls F(s) des offenen Kreises keine Pole in der rechten Halbebene hat und nur max. 2 im Ursprung der s-Ebene, ist der Regelkreis stabil, wenn der kritische Punkt von ω immer links von s = -1 + 0j liegt.
(gilt immer wenn der offene Kreis stabil ist)

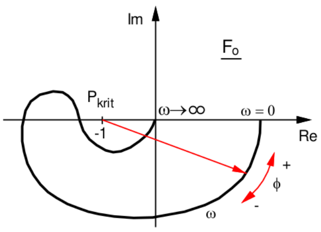
Zur Auswertung des Nyquist-Kriteriums im Bode Diagramm, spaltet man die Ortskurve nach Betrag A = $|F_0(jw)|$ und Phase $\varphi = F_0(jw)$

Stabilität: für $\omega|_{A=1} < \omega|_{\varphi=-180°}$

Falls die Bedingung nicht funktioniert, wird die allgemeine Formulierung verwendet:





Der geschlossene Regelkreis ist stabil, wenn der Fahrstrahl von P_{krit} = -1 +j0 zu $F_0(jw)$ für wachsendes ω von +0 bis +∞ eine Winkeländerung $\overset{\omega=+\infty}{\underset{\omega=+0}{}}\Delta\phi_{soll} =$ $n_r \cdot$ 180° $+ n_a \cdot$ 90° erfährt.
n_r: Anzahl der Pole rechts der imaginären Achse
n_a: Anzahl der Pole auf der imaginären Achse

3.5.1 Phasenrad/Phasenreserve:

Aus Bodediagramm ablesen: Bei Verstärkung von 1

Winkeln von -180° nach oben rechnen

- befriedigendes Verhalten bei Störungen gilt: $\varphi_R \geq 30\circ$
- gutes Verhalten (überschwingungsarm) gilt: $\varphi_R \approx 60\circ$
- gutes Verhalten (überschwingungsfrei) gilt: $\varphi_R \geq 80°$

3.6 Einstellregler Ziegler/Nichols

Reglertyp	K_P	T_N	T_V
P	$0{,}50 \cdot K_{P,krit}$	-	-
PI	$0{,}45 \cdot K_{P,krit}$	$0{,}85 \cdot T_{krit}$	-
PD	$0{,}80 \cdot K_{P,krit}$	-	$0{,}12 \cdot T_{krit}$
PID	$0{,}60 \cdot K_{P,krit}$	$0{,}50 \cdot T_{krit}$	$0{,}12 \cdot T_{krit}$

3.6.1 Betragsoptimum

bei einer dominierenden Zeitkonstante (T_d) in der Regelstrecke

$$F_{PI} = K_R \left(1 + \frac{1}{T_d \cdot s}\right) \qquad K_R = \frac{T_d}{2 \cdot K_{Strecke} \cdot T_{\sum}}$$

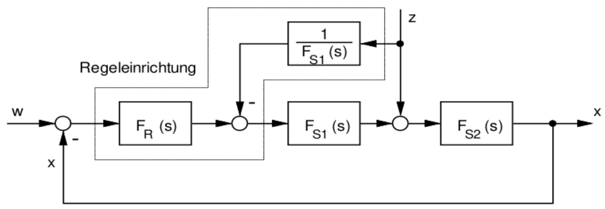
3.6.2 Symmetrisches Optimum

mehreren Zeitkonstanten (nur reelle Pole)

$$F_{PI} = K_R \left(1 + \frac{1}{4T_{\sum} \cdot s}\right) \qquad K_R = \frac{1}{2 \cdot K_{Strecke} \cdot T_{\sum}}$$

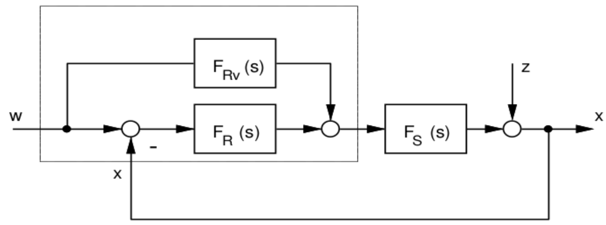
Störgrößenaufschaltung:

Falls Angriffsort einer Störgröße bekannt,kann man wie im Bild kompensieren. Vorteil: einfacher Regler Entwurf, deutlich schnellere Ausregelung.



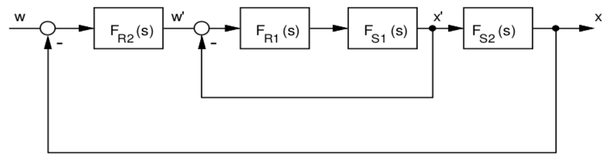
Vorsteuerung:

Geeignet, falls kein Kompromiss für gutes Stör und Folgeverhalten. Regler ist auf gutes Störverhalten ausgelegt. Mit F_{Rv} wird ein schnelles Folgen auf Führungssignale w(t) erreicht.



Kaskadenregelung:

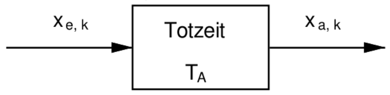
Ineinander geschachtelte Regelkreise (innere Regelkreise „schneller"). „Innere" Störungen können bereits innen ausgeregelt werden. Können von Innen nach Außen in Betrieb genommen werden.



4 Digitale Regler

4.1 z-Transformation

Wert der bei t = k $\cdot T_A$ ausgegeben wird, wird bei t = (k-1) $\cdot T_A$ eingelesen. (Verzögerung um einen Abtastschritt):



	Kontinuierlich	Zeitdiskret
Zeitbereich	$x_a(t) = x_e(t - T_A)$	$x_{a,k} = x_{e,k-1}$
Bildbereich	$X_a(s) = e^{-s \cdot TA} \cdot X_e(s)$ (Laplace-Transformation)	$X_a(z) = z^{-1} \cdot X_e(z)$ (z-Transformation)

Bei der z-Transformation entspricht $e^{-s \cdot TA}$ der Laplace-Transformation dem Ausdruck z^{-1}. Bzw. z $\hat{=}$ $e^{s \cdot TA}$

Transformation vom s-Bereich in den z-Bereich:

$$s \hat{=} e^{s \cdot TA}$$

Vorwärts-Differenzen-quotient

$$s \hat{=} \frac{z-1}{T_A}$$

$\Rightarrow$ Der digitale Regler kann folgend berechnet werden:

$$F(z) = F(z)|_{s=\frac{z-1}{T_A}}$$

4.2 Tustinsche Formel

$$s \hat{=} \frac{2}{T_A} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

4.3 Sinnvolle Abtastzeit

kleinste Polstelle $S_P \Rightarrow T_P = \frac{1}{S_P}$

$$T_{\text{sinnvoll}} = T_P \cdot \left(\frac{1}{10} \cdots \frac{1}{20}\right)$$

5 Systembeschreibung im Zustandsraum

5.1 Mehrgrößensystem MIMO

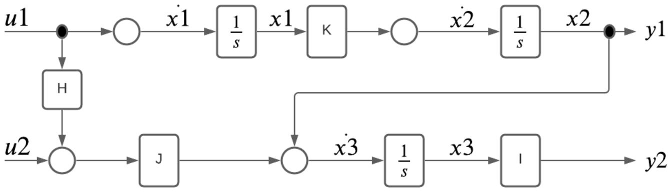


Abbildung 1: Signalflussplan

5.1.1 Systemgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\
\dot{x}_2 &= K \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\
\dot{x}_3 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + H \cdot J \cdot u_1 + J \cdot u_2 \\
\dot{y}_1 &= 0 \cdot x_1 + 1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\
\dot{y}_2 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + l \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \quad x(0) = x_0 \\
\vec{y}(t) &= C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t)
\end{aligned}$$

5.1.2 Zustandsraumdarstellung

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ H \cdot J & J \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Polstellen (Eigenwerte einer Matrix bestimmen):

$$\det(A - sE) = \det \begin{bmatrix} a-s & b \\ c & d-s \end{bmatrix} = (a-s)(d-s) - cb \stackrel{!}{=} 0$$

5.2 Programmtechnische Umsetzung

$$F_z(z) = \frac{2z+6}{3z+4} = \frac{2x_{e,k} + 6x_{e,k-1}}{3x_{a,k} + 4x_{a,k-1}}$$

$$3x_{a,k} + 4x_{a,k-1} = 2x_{e,k} + 6x_{e,k-1}$$

$$x_{a,k} = \frac{2}{3}x_{e,k} + \frac{6}{3}x_{e,k-1} - \frac{4}{3}x_{a,k-1}$$

```
while(1)
{
   waitinterrupt(T_A)   //Abtastzeit warten
   x_a2 = x_a1        // ggf. nicht noetig
   x_a1 = x_a
   x_e2 = x_e1        // ggf. nicht noetig
   x_e1 = x_e
   input(x_e)
   x_a = k*x_e + j*x_e1 - o*x_a1
   output(x_a)
}
```

Zeitbereich:	Laplace (Frequenz-, s-, Bild-) Bereich:
$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st}X(s)\,ds$	$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}x(t)\,dt$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L}[x(t)] \arrow[dr] & \\ x(t) \arrow[ur] & & X(s) \arrow[dl] \\ & \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

$t < 0$: $x(t) = 0$ $\qquad s = \sigma + j\omega$

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$ Impulsfunktion	1
$1, \sigma(t)$ Sprungfunktion	$\dfrac{1}{s}$
t^n Parabel	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$
$t^n \cdot e^{-at}$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$e^{-at} \cdot \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} = \dfrac{\omega}{s^2+2as+a^2+\omega^2}$ (kompl. Pole)
$e^{-at} \cdot \cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} = \dfrac{s+a}{s^2+2as+a^2+\omega^2}$ (kompl. Pole)

$x(t)$	$X(s)$
$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(s) + X_2(s)$
$K \cdot x(t)$	$K \cdot X(s)$
$\dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$	$s \cdot X(s) - x(-0)$ ($x(-0) = 0$, da $x(t) = 0$ für $t < 0$ und reale Systeme nicht sprungfähig sind)
$\displaystyle\int_0^t x(\tau)\,d\tau$	$\dfrac{1}{s}X(s)$
$x(t-T_t)$ (Totzeit)	$e^{-sT_t} \cdot X(s)$
$e^{-at} \cdot x(t)$	$X(s+a)$
$t \cdot x(t)$	$-\dfrac{dX(s)}{ds}$
$\displaystyle\int_0^t x_1(t-\tau)\cdot x_2(\tau)d\tau = x_1(t) * x_2(t)$ (Faltungsprodukt)	$X_1(s) \cdot X_2(s)$

Regler	$F_R(s)$	Regelstrecke $F_S(s)$	bleibende Regeldifferenz e (oder x_d)	
			für $x_e = a \cdot \sigma(t)$ (Sprung) mit Rückführverstärkung K_r	für $x_e = a \cdot t$ (Rampe) mit Einheitsrückführung
P (D)	K_P	P-Verhalten (*P, PT1, PT2, …*) $F_S(s) = K_S \dfrac{(1+\ldots s)\ldots}{(1+\ldots s)\ldots}$	$a \dfrac{1}{1+K_P \cdot K_S \cdot K_r}$	∞
I	$\dfrac{K_I}{s}$		0	$a \dfrac{1}{K_I \cdot K_S}$
PI (D)	$K_P + \dfrac{K_I}{s}$		0	$a \dfrac{1}{K_I \cdot K_S}$
I^2	$\dfrac{K_I}{s^2}$		0	0
P (D)	K_P	I-Verhalten (*I, PI, IT1, …*) $F_S(s) = K_S \dfrac{(1+\ldots s)\ldots}{\underline{s}(1+\ldots s)\ldots}$	0	$a \dfrac{1}{K_P \cdot K_S}$
I	$\dfrac{K_I}{s}$		0	0
PI (D)	$K_P + \dfrac{K_I}{s}$		0	0