

# 1 Grundlagen

Linearisierung um Arbeitspunkt:

$$x_a(t) = x_{a,AP} + \Delta x_a(t) \approx x_{a,AP} + \sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_{e,AP}} \cdot \Delta x_e(t) \right)$$

$$f(x) = y_0 + k \cdot (x - x_0) = y_0 + \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \cdot (x - x_0)$$

Kräftegleichungen:

$$\text{Federkraft: } F_F = k_F \cdot x$$

$$\text{Dampfkraft: } F_D = k_D \cdot v = k_D \cdot \dot{x}$$

$$\text{Trägheitskraft: } F_{Tr} = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$\text{Erdbziehungskraft: } F_G = m \cdot g$$

Momentengleichungen:

$$\text{Widerstandsmoment: } M_w = k_D \cdot \omega$$

$$\text{Trägheitsmoment: } M_{TR} = J \cdot \dot{\omega}$$

Spannungsgleichung:

$$U = L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \int i$$

Rotation in Flüssigkeit:

$$M = M_{Träg} + M_{Brems} = J \cdot \dot{\omega} + k_{Flüssigkeit} \cdot \omega$$

Für kleine  $\alpha$ :  $\sin(\alpha) = \alpha$

Anfangswertsatz:  $x(t \rightarrow +0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$

Endwertsatz:  $x(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$

## 2 Systemtechnik

### 2.1 Modellbildung

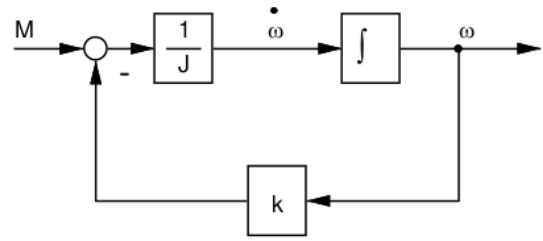
Hinweise zum aufstellen der Differentialgleichung eines Systems:

1. Bestimmung der Ein- und Ausgangsgrößen
2. Suche nach dem beschreibenden Gleichgewicht
3. In der Gleichung dürfen nur Konstanten, sowie die Ein- und Ausgangsgrößen in beliebiger Ableitung vorkommen
4. Andere Variablen müssen durch erlaubte Größen ersetzt werden  
(Dazu können i.a. physikalische Gleichungen benutzt werden)

### 2.2 Signalflussplan/Blockschaltbild

Erzeugung des Signalflussplans aus der Zugehörigen DGL.

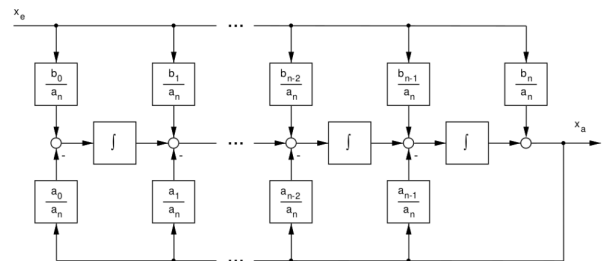
1. für technische Realisierung gilt:  $m < n$ ;
2. DGL. nach höchster Ableitung der Ausgangsgröße auflösen
3. höchste Ableitung der Ausgangsgröße geht auf den Eingang des ersten Integrators  
(Laplace-Trans ersetzt das Integrieren mit einer Division mit „s“)



Erzeugung des Signalflussplans (und Übertragungsfunktion) eines Systems mit der DGL.:

$$\begin{aligned} & b_n \overset{(n)}{x}_e + \dots + b_2 \ddot{x}_e + b_1 \dot{x}_e + b_0 x_e \\ & \left( \text{-----} \right) = F(s) \\ & = a_n \overset{(n)}{x}_a + \dots + a_2 \ddot{x}_a + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a \end{aligned}$$

Signalflussplan kann allgemein gezeichnet werden: (nötig, falls eine Ableitung von  $x_e$  existiert)



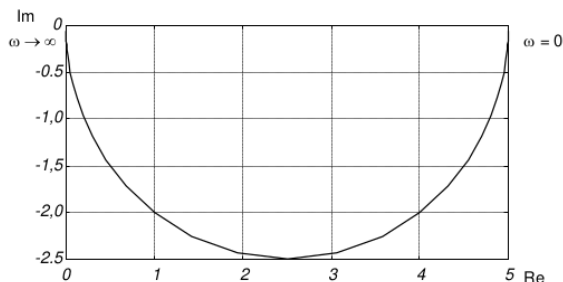
### 2.3 Zusammenhang DGL, Frequenzgang, Übertragungsfkt.

$$\begin{aligned} F_e &= m\ddot{x} + k_D\dot{x} + k_Fx \\ F(j\omega) &= \frac{\Sigma x_e}{\Sigma x_a} \quad j^2 = -1 \\ F(j\omega) &= \frac{1}{m(j\omega)^2 + k_Dj\omega + k_F} \\ &= \frac{1}{-m\omega^2 + h_D\omega + h_F} \\ \text{konj. komp. erweitert} &= \frac{(k_F - m\omega^2) - k_Dj\omega}{(k_F - m\omega^2)^2 - (-1)(k_D\omega)^2} \\ &= \frac{(k_F - m\omega^2) - k_Dj\omega}{(k_F - m\omega^2)^2 + (k_D\omega)^2} \\ F(s) &= \frac{1}{ms^2 + k_Ds + h_F} \end{aligned}$$

## 2.4 Ortskurven und Frequenzkennlinien

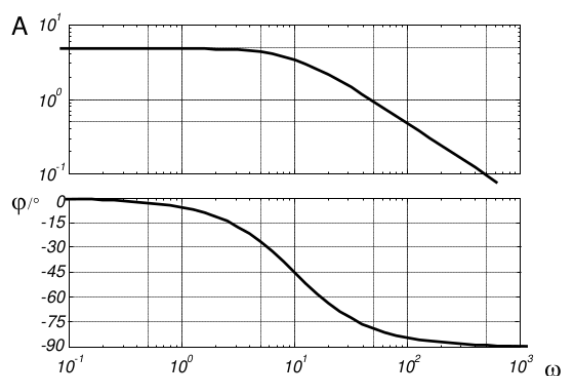
Ortskurvendarstellung:

(In Darstellung  $F(j\omega) = a + jb$  eintragen)



Bodediagramm Darstellung:

(In Darstellung  $F(j\omega) = A(rg)\angle\varphi$  eintragen)



Beispiel PT1-Glied

Verstärkung wird multipliziert und Phasenverschiebung addiert.

Das heißt: Sowohl Phasengang und Amplitudengang werden graphisch addiert!

## 3 Zusammenwirken mehrerer Systeme

### 3.1 Signalflussplan Algebra

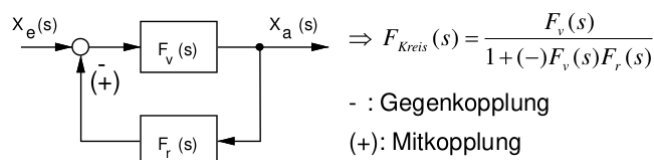
- Kettenstruktur:

$$F_{ges}(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

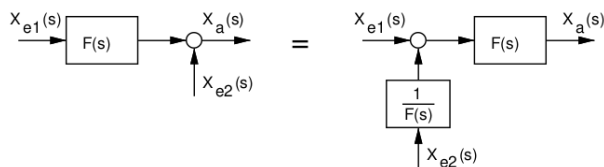
- Parallelstruktur:

$$F_{ges}(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

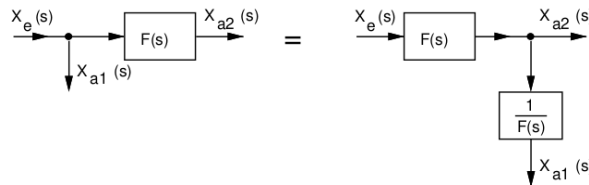
- Kreisstruktur:



- Verschieben einer Additionsstelle:



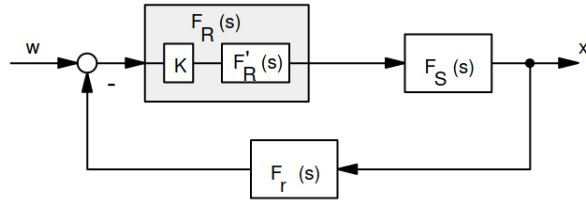
- Verschieben einer Verzweigung:



### 3.2 Regeldifferenz

| Regler         | $F_R(s)$              | Regelstrecke $F_S(s)$   | bleibende Regeldifferenz $e$ (oder $x_d$ )                              |  |
|----------------|-----------------------|---|---|--|
|                |                       |   | für $x_e = a \cdot \sigma(t)$ (Sprung)<br>mit Rückführverstärkung $K_r$ | für $x_e = a \cdot t$ (Rampe)<br>mit Einheitsrückführung |
| P (D)          | $K_P$                 | P-Verhalten<br>(P, PT1, PT2, ...)                               | $a \frac{1}{1 + K_P \cdot K_S \cdot K_r}$                               | $\infty$   |
| I              | $\frac{K_I}{s}$       |   | 0   | $a \frac{1}{K_I \cdot K_S}$                              |
| PI (D)         | $K_P + \frac{K_I}{s}$ |   | 0   | $a \frac{1}{K_I \cdot K_S}$                              |
| I <sup>2</sup> | $\frac{K_I}{s^2}$     | I-Verhalten<br>(I, PI, ITI, ...)                                | 0   | 0  |
| P (D)          | $K_P$                 |   | 0   | $a \frac{1}{K_P \cdot K_S}$                              |
| I              | $\frac{K_I}{s}$       |   | 0   | 0  |
| PI (D)         | $K_P + \frac{K_I}{s}$ | $F_S(s) = K_S \frac{(1 + \dots s) \dots}{s(1 + \dots s) \dots}$ | 0   | 0  |

### 3.3 Wurzelortskurven (WOK)-Verfahren



$$\Rightarrow F_w(s) = \frac{F_R \cdot F_S}{1 + F_R \cdot F_S \cdot F_r}$$

$$F_o(s) = F_R \cdot F_S \cdot F_r$$

$$= K \cdot F'_R(s) \cdot F_S(s) \cdot F_r(s)$$

$$= K \cdot Q \cdot \frac{\prod_{u=1}^m (s - s_N)}{\prod_{v=1}^n (s - s_P)}$$

$$K_{krit} = \frac{1}{|Q|} \cdot \frac{\prod |d_P|}{\prod |d_N|}$$

$K_{neu}$  bei Polstelle neu:

$$K_{neu} = \frac{\Delta s_{P1}}{Q}$$

### 3.4 Konstruktion der WOK

$$ax^2 + bx + c \quad z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. Alle n Äste beginnen in den n POLEN  $s_{POV}$
2. m Äste der WOK enden für  $K \rightarrow \pm\infty$
3. n - m Äste der WOK enden für  $K \rightarrow \pm\infty$  im Unendlichen
4. Die n-m ins Unendliche strebende Äste der WOK haben Asymptoten, die
  - a) im Wurzelschwerpunkt

$$S_w = \frac{\sum_{v=1}^n s_P - \sum_{u=1}^m s_N}{n - m} = \frac{\text{Polst.} - \text{Nullst.}}{\text{Polst. Überschuss}}$$

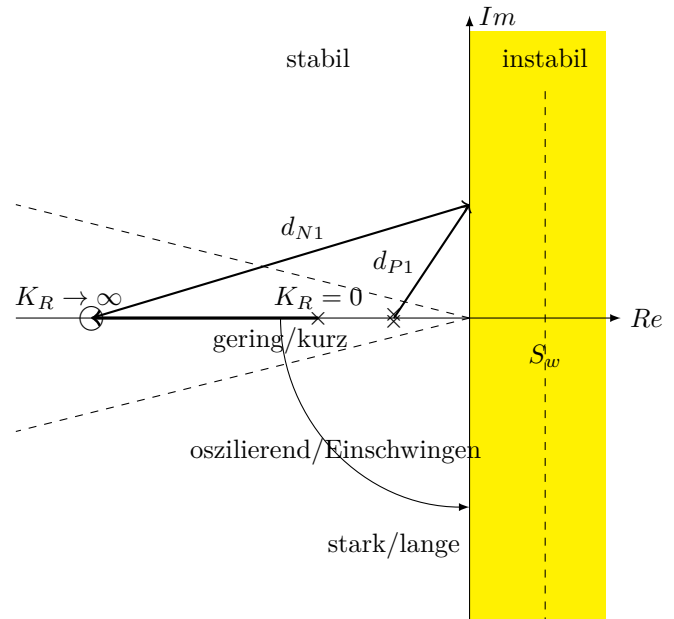
b) mit der reellen Achse die Winkel  
Polst. Überschuss 1  $\Rightarrow 180^\circ$ , 2  $\Rightarrow 90/270^\circ$

$$\varphi_k = \frac{(2k-1) \cdot 180^\circ}{n-m} \text{ für } KQ > 0$$

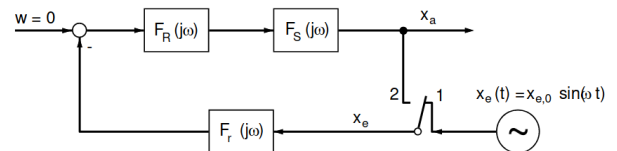
$$k = 1, 2, 3, \dots, n-m$$

5. Die Punkte liegen auf der reellen Achse, oder symmetrisch zur reellen Achse
6. Ein Punkt s auf der reellen Achse ist dann ein Punkt der WOK, wenn sich bei  $KQ > 0$  ( $KQ < 0$ ) rechts von ihm eine ungerade (gerade) Anzahl von Polen  $s_P/\times$  und (+) Nullstellen  $s_N/\circ$  befindet.
7.  $\times \rightarrow \circ$  (Von Pol- nach Nullstellen)

Achtung: WOK nicht anwendbar, wenn Übertragungsfunktionen nicht rationale (z.B. Regelkreis mit Totzeitverhalten!)



### 3.5 Nyquist Kriterium



Frequenzgangfunktion des offenen Regelkreises:

$$F_o(j\omega) = F_r(j\omega) \cdot F_R(j\omega) \cdot F_S(j\omega)$$

Ausgangssignal:

$$x_a(t) = -F_r(j\omega) \cdot F_R(j\omega) \cdot F_S(j\omega) \cdot x_{e0} \sin(\omega t)$$

$$= -F_0(j\omega) \cdot x_e(t)$$

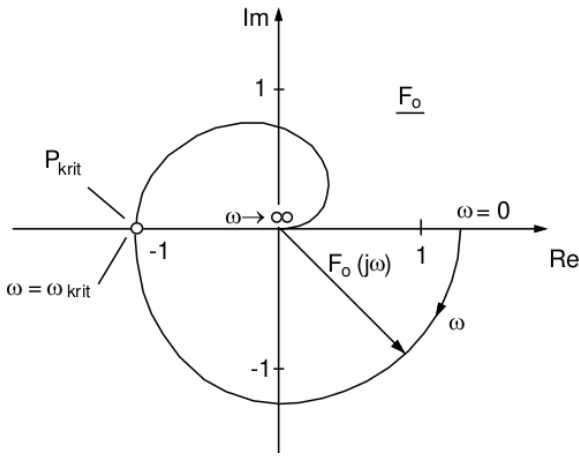
Regler und seine Parameter werden so gewählt, dass  $\omega = \omega_{krit}$  gilt:

$$-F_0(j\omega_{krit}) = 1 \text{ oder } F_0(j\omega_{krit}) = -1 \text{ (Schwingbedingung)}$$

Die Schwingbedingung ist erfüllt, wenn die Ortskurve von  $F_1(j\omega)$  durch den kritischen Punkt ( $P_{krit} = -2 + j0$ ) der komplexen  $F_0$ -Ebene geht.

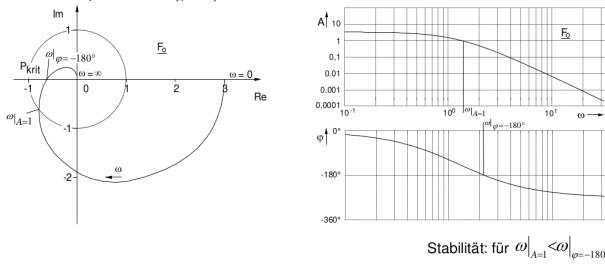
An diesem Punkt kann man  $\omega_{krit}$  ablesen (damit kann der Regelkreis Dauerschwingungen ausführen).

Für größere  $\omega$  ist das System instabil, für kleinere stabil.

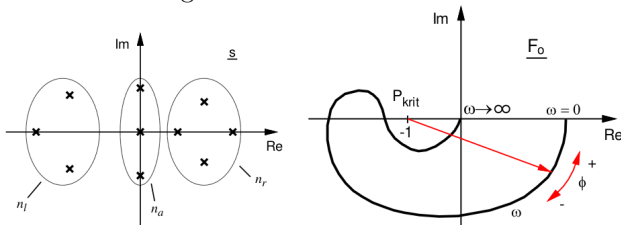


Falls  $F(s)$  des offenen Kreises keine Pole in der rechten Halbebene hat und nur max. 2 im Ursprung der  $s$ -Ebene, ist der Regelkreis stabil, wenn der kritische Punkt von  $\omega$  immer links von  $s = -1 + 0j$  liegt.  
(gilt immer wenn der offene Kreis stabil ist)

Zur Auswertung des Nyquist-Kriteriums im Bode Diagramm, spaltet man die Ortskurve nach Betrag  $A = |F_0(j\omega)|$  und Phase  $\varphi = \angle F_0(j\omega)$



Falls die Bedingung nicht funktioniert, wird die allgemeine Formulierung verwendet:



Der geschlossene Regelkreis ist stabil, wenn der Fahrstrahl von  $P_{krit} = -1 + j0$  zu  $F_0(j\omega)$  für wachsendes  $\omega$  von  $+0$  bis  $+\infty$  eine Winkeländerung  $\Delta\phi_{soll} = n_r \cdot 180^\circ + n_a \cdot 90^\circ$  erfährt.  
 $n_r$ : Anzahl der Pole rechts der imaginären Achse  
 $n_a$ : Anzahl der Pole auf der imaginären Achse

### 3.5.1 Phasenrad/Phasenreserve:

Aus Bodediagramm ablesen: Bei Verstärkung von 1 Winkeln von  $-180^\circ$  nach oben rechnen

- befriedigendes Verhalten bei Störungen gilt:  $\varphi_R \geq 30^\circ$
- gutes Verhalten (überschwingungsarm) gilt:  $\varphi_R \approx 60^\circ$
- gutes Verhalten (überschwingungsfrei) gilt:  $\varphi_R \geq 80^\circ$

Neu Regelerverstärkung  $K'$  bei  $\varphi'_R$ :

$$K' = \frac{1}{A(\varphi'_R)}$$

## 3.6 Einstellregler Ziegler/Nichols

| Reglertyp | $K_P$                   | $T_N$                 | $T_V$                 |
|-----------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|
| P         | $0,50 \cdot K_{P,krit}$ | -                     | -                     |
| PI        | $0,45 \cdot K_{P,krit}$ | $0,85 \cdot T_{krit}$ | -                     |
| PD        | $0,80 \cdot K_{P,krit}$ | -                     | $0,12 \cdot T_{krit}$ |
| PID       | $0,60 \cdot K_{P,krit}$ | $0,50 \cdot T_{krit}$ | $0,12 \cdot T_{krit}$ |

### 3.6.1 Betragsoptimum

bei einer dominierenden Zeitkonstante ( $T_d$ ) in der Regelstrecke

$$F_{PI} = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_d \cdot s} \right) \quad K_R = \frac{T_d}{2 \cdot K_{Strecke} \cdot T_\Sigma}$$

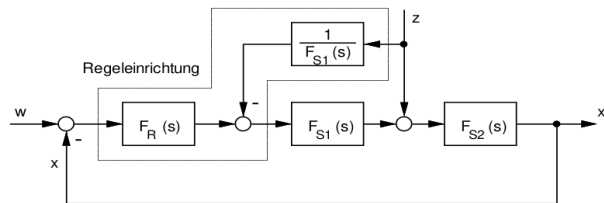
### 3.6.2 Symmetrisches Optimum

mehreren Zeitkonstanten (nur reelle Pole)

$$F_{PI} = K_R \left( 1 + \frac{1}{4T_\Sigma \cdot s} \right) \quad K_R = \frac{1}{2 \cdot K_{Strecke} \cdot T_\Sigma}$$

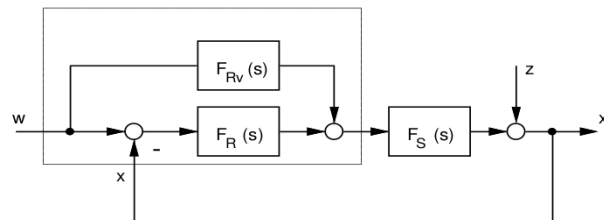
### Störgrößenaufschaltung:

Falls Angriffsort einer Störgröße bekannt, kann man wie im Bild kompensieren. Vorteil: einfacher Regler Entwurf, deutlich schnellere Ausregelung.



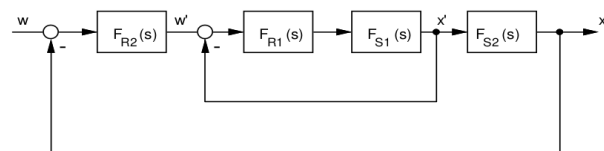
### Vorsteuerung:

Geeignet, falls kein Kompromiss für gutes Stör- und Folgeverhalten. Regler ist auf gutes Störverhalten ausgelegt. Mit  $F_{Rv}$  wird ein schnelles Folgen auf Führungssignale  $w(t)$  erreicht.



### Kaskadenregelung:

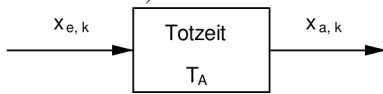
Ineinander geschachtelte Regelkreise (innere Regelkreise „schneller“). „Innere“ Störungen können bereits innen ausgeglichen werden. Können von Innen nach Außen in Betrieb genommen werden.



## 4 Digitale Regler

### 4.1 z-Transformation

Wert der bei  $t = k \cdot T_A$  ausgegeben wird, wird bei  $t = (k-1) \cdot T_A$  eingelesen. (Verzögerung um einen Abtastschritt):



|             | Kontinuierlich   | Zeitdiskret  |
|-------------|--|--|
| Zeitbereich | $x_a(t) = x_e(t - T_A)$  | $x_a, k = x_e, k-1$                                  |
| Bildbereich | $X_a(s) = e^{-s \cdot T_A} \cdot X_e(s)$<br>(Laplace-Transformation) | $X_a(z) = z^{-1} \cdot X_e(z)$<br>(z-Transformation) |

Bei der z-Transformation entspricht  $e^{-s \cdot T_A}$  der Laplace-Transformation dem Ausdruck  $z^{-1}$ . Bzw.  $z \hat{=} e^{s \cdot T_A}$

Transformation vom s-Bereich in den z-Bereich:

$$s \hat{=} e^{s \cdot T_A}$$

Vorwärts-Differenzen-quotient

$$s \hat{=} \frac{z - 1}{T_A}$$

$\Rightarrow$  Der digitale Regler kann folgend berechnet werden:

$$F(z) = F(z) \Big|_{s=\frac{z-1}{T_A}}$$

### 4.2 Tustinsche Formel

$$s \hat{=} \frac{2}{T_A} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}$$

### 4.3 Sinnvolle Abtastzeit

kleinste Polstelle  $S_P \Rightarrow T_P = \frac{1}{S_P}$

$$T_{\text{sinnvoll}} = T_P \cdot \left( \frac{1}{10} \cdots \frac{1}{20} \right)$$

## 5 Systembeschreibung im Zustandsraum

### 5.1 Mehrgrößensystem MIMO

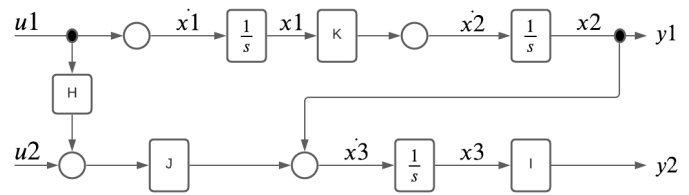


Abbildung 1: Signalfussplan

#### 5.1.1 Systemgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{x}_2 &= K \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{x}_3 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + H \cdot J \cdot u_1 + J \cdot u_2 \\ \dot{y}_1 &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{y}_2 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + l \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \quad x(0) = x_0 \\ \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t)\end{aligned}$$

#### 5.1.2 Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ H \cdot J & J \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Polstellen (Eigenwerte einer Matrix bestimmen):

$$\det(A - sE) = \det \begin{bmatrix} a - s & b \\ c & d - s \end{bmatrix} = (a-s)(d-s) - cb \stackrel{!}{=} 0$$

### 5.2 Programmtechnische Umsetzung

$$F_z(z) = \frac{2z + 6}{3z + 4} = \frac{2x_{e,k} + 6x_{e,k-1}}{3x_{a,k} + 4x_{a,k-1}}$$

$$3x_{a,k} + 4x_{a,k-1} = 2x_{e,k} + 6x_{e,k-1}$$

$$x_{a,k} = \frac{2}{3}x_{e,k} + \frac{6}{3}x_{e,k-1} - \frac{4}{3}x_{a,k-1}$$

```
1 while(1)
2 {
3     waitinterrupt(T_A)    // Abtastzeit warten
4     x_a2 = x_a1           // ggf. nicht noetig
5     x_a1 = x_a
6     x_e2 = x_e1           // ggf. nicht noetig
7     x_e1 = x_e
8     input(x_e)
9     x_a = k*x_e + j*x_e1 - o*x_a1
10    output(x_a)
11 }
```

|   |   |
|---|---|
| <b>Zeitbereich:</b><br>$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} X(s) ds$   | <b>Laplace (Frequenz-, s-, Bild-) Bereich:</b><br>$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$                    |
| <p style="text-align: center;"> <math>x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}[x(t)] \xrightarrow{\quad} X(s)</math><br/> <math>X(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \xrightarrow{\quad} x(t)</math><br/> <math>t &lt; 0: x(t) = 0</math>      <math>s = \sigma + j\omega</math> </p> |   |
| <b><math>x(t)</math></b>  | <b><math>X(s)</math></b>  |
| $\delta(t)$ Impulsfunktion  | 1   |
| $1, \sigma(t)$ Sprungfunktion   | $\frac{1}{s}$   |
| $t^n$ Parabel   | $\frac{n!}{s^{n+1}}$  |
| $\sin \omega t$   | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$   |
| $\cos \omega t$   | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$  |
| $e^{-at}$   | $\frac{1}{s+a}$   |
| $1-e^{-at}$   | $\frac{a}{s(s+a)}$  |
| $t^n \cdot e^{-at}$   | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$  |
| $e^{-at} \cdot \sin \omega t$   | $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + 2as + a^2 + \omega^2}$ (kompl. Pole)                                     |
| $e^{-at} \cdot \cos \omega t$   | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} = \frac{s+a}{s^2 + 2as + a^2 + \omega^2}$ (kompl. Pole)   |
| <b><math>x(t)</math></b>  | <b><math>X(s)</math></b>  |
| $x_1(t) + x_2(t)$   | $X_1(s) + X_2(s)$   |
| $K \cdot x(t)$  | $K \cdot X(s)$  |
| $\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$   | $s \cdot X(s) - x(-0)$<br>$(x(-0) = 0, \text{ da } x(t) = 0 \text{ für } t < 0 \text{ und reale Systeme nicht sprunghähig sind})$ |
| $\int_0^t x(\tau) d\tau$  | $\frac{1}{s} X(s)$  |
| $x(t-T_t)$ (Totzeit)  | $e^{-sT_t} \cdot X(s)$  |
| $e^{-at} \cdot x(t)$  | $X(s+a)$  |
| $t \cdot x(t)$  | $-\frac{dX(s)}{ds}$   |
| $\int_0^t x_1(t-\tau) \cdot x_2(\tau) d\tau = x_1(t) * x_2(t)$<br>(Faltungsprodukt)   | $X_1(s) \cdot X_2(s)$   |

| Regler         | $F_R(s)$              | Regelstrecke $F_S(s)$  | bleibende Regeldifferenz $e$ (oder $x_d$ )                              |  |
|----------------|-----------------------|--|---|--|
|                |                       |  | für $x_e = a \cdot \sigma(t)$ (Sprung)<br>mit Rückführverstärkung $K_r$ | für $x_e = a \cdot t$ (Rampe)<br>mit Einheitsrückführung |
| P (D)          | $K_P$                 | <b>P-Verhalten</b><br>$(P, PT1, PT2, \dots)$<br>$F_S(s) = K_S \frac{(1 + \dots s) \dots}{(1 + \dots s) \dots}$ | $a \frac{1}{1 + K_P \cdot K_S \cdot K_r}$                               | $\infty$   |
| I              | $\frac{K_I}{s}$       |  | 0   | $a \frac{1}{K_I \cdot K_S}$                              |
| PI (D)         | $K_P + \frac{K_I}{s}$ |  | 0   | $a \frac{1}{K_I \cdot K_S}$                              |
| I <sup>2</sup> | $\frac{K_I}{s^2}$     |  | 0   | 0  |
| P (D)          | $K_P$                 | <b>I-Verhalten</b><br>$(I, PI, IT1, \dots)$<br>$F_S(s) = K_S \frac{(1 + \dots s) \dots}{s(1 + \dots s) \dots}$ | 0   | $a \frac{1}{K_P \cdot K_S}$                              |
| I              | $\frac{K_I}{s}$       |  | 0   | 0  |
| PI (D)         | $K_P + \frac{K_I}{s}$ |  | 0   | 0  |