

1 Grundlagen

Linearisierung um Arbeitspunkt:

$$x_a(t) = x_{a,AP} + \Delta x_a(t) \approx x_{a,AP} + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_{e,AP}} \cdot \Delta x_e(t) \right)$$

$$f(x) = y_0 + k \cdot (x - x_0) = y_0 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \cdot (x - x_0)$$

Kräftegleichungen:

$$\text{Federkraft: } F_F = k_F \cdot x$$

$$\text{Dampfkraft: } F_D = k_D \cdot v = k_D \cdot \dot{x}$$

$$\text{Trägheitskraft: } F_{Tr} = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$\text{Erdbziehungskraft: } F_G = m \cdot g$$

Moment Gleichungen:

$$\text{Widerstandsmoment: } M_w = k_D \cdot \omega$$

$$\text{Trägheitsmoment: } M_{TR} = J \cdot \dot{\omega}$$

Spannungsgleichung:

$$U = L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \int i$$

Für kleine Winkel α gilt: $\sin(\alpha) = \alpha$

Rotation in Flüssigkeit:

$$M = M_{Träg} + M_{Brems} = J \cdot \dot{\omega} + k_{Flüssigkeit} \cdot \omega$$

Partialbruchzerlegung (siehe Papula s.157ff)

Anfangswertsatz: $x(t \rightarrow +0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$

Endwertsatz: $x(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$

2 Systemtechnik

2.1 Modellbildung

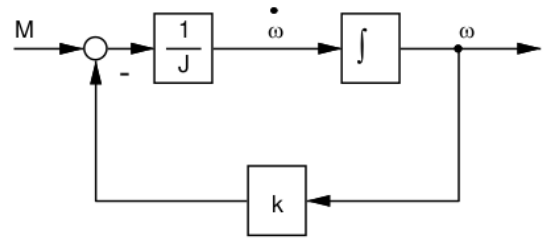
Hinweise zum aufstellen der Differentialgleichung eines Systems:

1. Bestimmung der Ein- und Ausgangsgrößen
2. Suche nach dem beschreibenden Gleichgewicht
3. In der Gleichung dürfen nur Konstanten, sowie die Ein- und Ausgangsgrößen in beliebiger Ableitung vorkommen
4. Andere Variablen müssen durch erlaubte Größen ersetzt werden
(Dazu können i.a. physikalische Gleichungen benutzt werden)

2.2 Signalflussplan/Blockschaltbild

Erzeugung des Signalflussplans aus der Zugehörigen DGL.

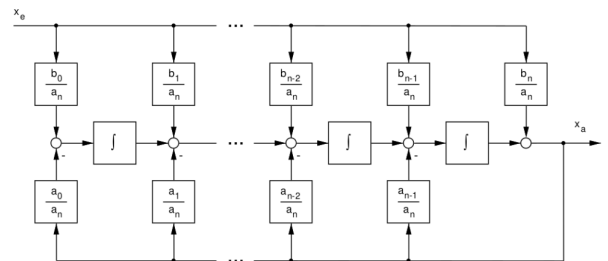
1. für technische Realisierung gilt: $m < n$;
2. DGL. nach höchster Ableitung der Ausgangsgröße auflösen
3. höchste Ableitung der Ausgangsgröße geht auf den Eingang des ersten Integrators
(Laplace-Trans ersetzt das Integrieren mit einer Division mit „s“)



Erzeugung des Signalflussplans (und Übertragungsfunktion) eines Systems mit der DGL.:

$$\begin{aligned} & b_n^{(n)} x_e + \dots + b_2 \ddot{x}_e + b_1 \dot{x}_e + b_0 x_e \\ & \left(\text{-----} \right) = F(s) \\ & = a_n^{(n)} x_a + \dots + a_2 \ddot{x}_a + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a \end{aligned}$$

Signalflussplan kann allgemein gezeichnet werden: (nötig, falls eine Ableitung von x_e existiert)



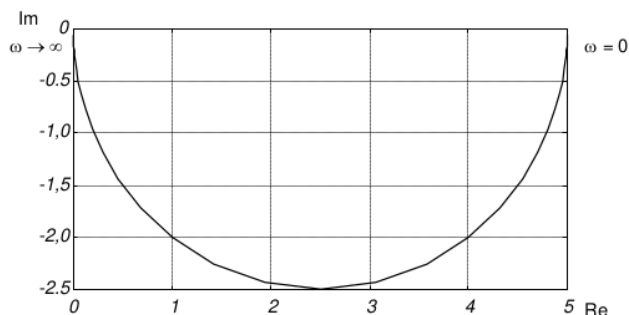
2.3 Zusammenhang DGL, Frequenzgang, Übertragungsfkt.

$$\begin{aligned} F_e &= m\ddot{x} + k_D\dot{x} + k_Fx \\ F(j\omega) &= \frac{\Sigma x_e}{\Sigma x_a} \quad j^2 = -1 \\ F(j\omega) &= \frac{1}{m(j\omega)^2 + k_Dj\omega + k_F} \\ &= \frac{1}{-m\omega^2 + h_D\omega + h_F} \\ \text{konj. komp. erweitert} &= \frac{(k_F - m\omega^2) - k_Dj\omega}{(k_F - m\omega^2)^2 - (-1)(k_D\omega)^2} \\ &= \frac{(k_F - m\omega^2) - k_Dj\omega}{(k_F - m\omega^2)^2 + (k_D\omega)^2} \\ F(s) &= \frac{1}{ms^2 + k_Ds + h_F} \end{aligned}$$

2.4 Ortskurven und Frequenzkennlinien

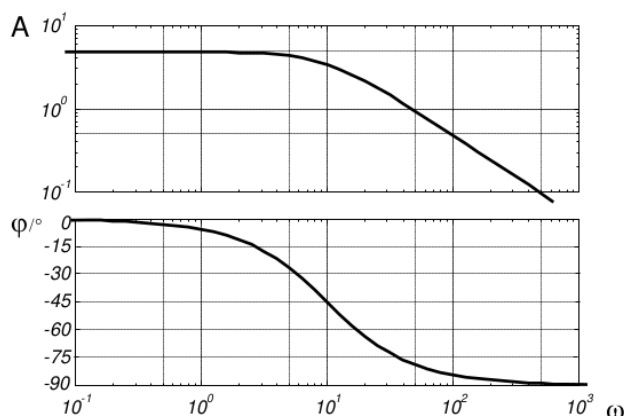
Ortskurvendarstellung:

(In Darstellung $F(j\omega) = a + jb$ eintragen)



Bodediagramm Darstellung:

(In Darstellung $F(j\omega) = \text{Arg} \angle \varphi$ eintragen)



Beispiel PT1-Glied

Verstärkung wird multipliziert und Phasenverschiebung addiert.

Das heißt: Sowohl Phasengang und Amplitudengang werden graphisch addiert!

2.5 $F(s)$ in Pol- und Nullstellenform

$$F(s) = Q \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^m (s - s_{N\mu})}{\prod_{v=1}^n (s - s_{PV})} \quad \text{mit } Q = \frac{b_m}{a_n}$$

stabil, wenn alle Pole s_{PV} in der linken s-Halbebene liegen.

Instabile Pole NICHT durch Reihenschaltung mit Nullstelle kompensieren!

Bedeutung Polstelle:

Je weiter links \Rightarrow schnellerer Einschwingvorgang.

\Rightarrow Pole weiter links können vernachlässigt werden.

Bedeutung Nullstelle:

bewirken differenzierendes Verhalten (Beschleunigung des Systems) \Rightarrow NS weiter links können vernachlässigt werden.

2.6 Signalflussplan Algebra

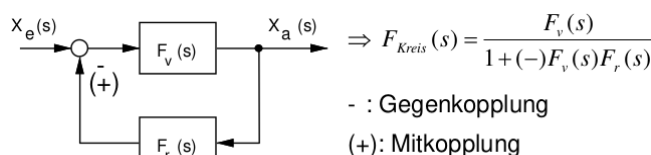
- Kettenstruktur:

$$F_{ges}(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

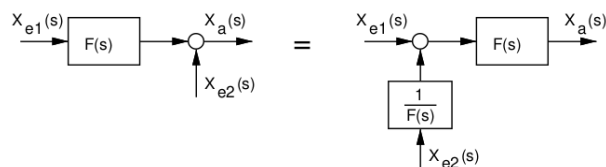
- Parallelstruktur:

$$F_{ges}(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

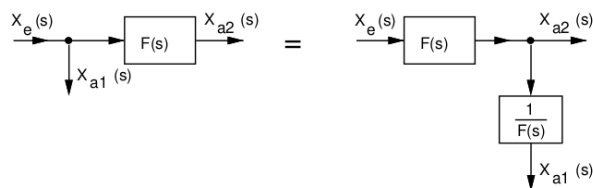
- Kreisstruktur:



- Verschieben einer Additionsstelle:



- Verschieben einer Verzweigung:



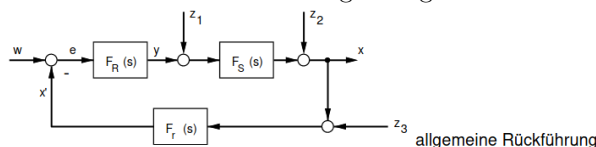
3 Zusammenwirken mehrerer Systeme

3.1 Regelkreis

Anforderungen:

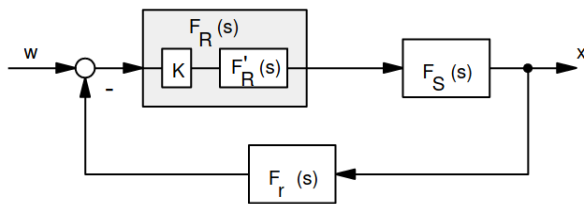
- Stabilität: Regelkreis muss stabiles Verhalten zeigen (gilt auch für instabile Systeme)
- Gutes Führungsverhalten: Die Differenz zw. Sollwert $w(t)$ und Istwert $x(t)$ muss schnell klein werden.
- Gutes Störverhalten: Einfluss von Störgrößen soll vermindert werden.

Grundstruktur des einschleifigen Regelkreises:



Regler	$F_R(s)$	Regelstrecke $F_S(s)$	bleibende Regeldifferenz e (oder x_d)	
			für $x_e = a \cdot \sigma(t)$ (Sprung) mit Rückführverstärkung K_r	für $x_e = a \cdot t$ (Rampe) mit Einheitsrückführung
P (D)	K_p	P-Verhalten (P, PT1, PT2, ...)	$a \cdot \frac{1}{1 + K_p \cdot K_S \cdot K_r}$	∞
I	$\frac{K_I}{s}$		0	$a \cdot \frac{1}{K_I \cdot K_S}$
PI (D)	$K_p + \frac{K_I}{s}$		0	$a \cdot \frac{1}{K_I \cdot K_S}$
I ²	$\frac{K_I}{s^2}$	I-Verhalten (I, PI, IT1, ...)	0	0
P (D)	K_p		0	$a \cdot \frac{1}{K_p \cdot K_S}$
I	$\frac{K_I}{s}$		0	0
PI (D)	$K_p + \frac{K_I}{s}$	$F_S(s) = K_S \frac{(1 + \dots s) \dots}{(1 + \dots s) \dots}$	0	0

3.2 Wurzelortskurven (WOK)-Verfahren



$$\Rightarrow F_w(s) = \frac{F_R \cdot F_S}{1 + F_R \cdot F_S \cdot F_r}$$

$$F_o(s) = F_R \cdot F_S \cdot F_r$$

$$= K \cdot F'_R(s) \cdot F_S(s) \cdot F_r(s)$$

$$= K \cdot Q \cdot \frac{\prod_{u=1}^m (s - s_N)}{\prod_{v=1}^n (s - s_P)}$$

$$K_{krit} = \frac{1}{|Q|} \cdot \frac{\prod |s_P|}{\prod |s_N|}$$

K_{neu} bei Polstelle neu:

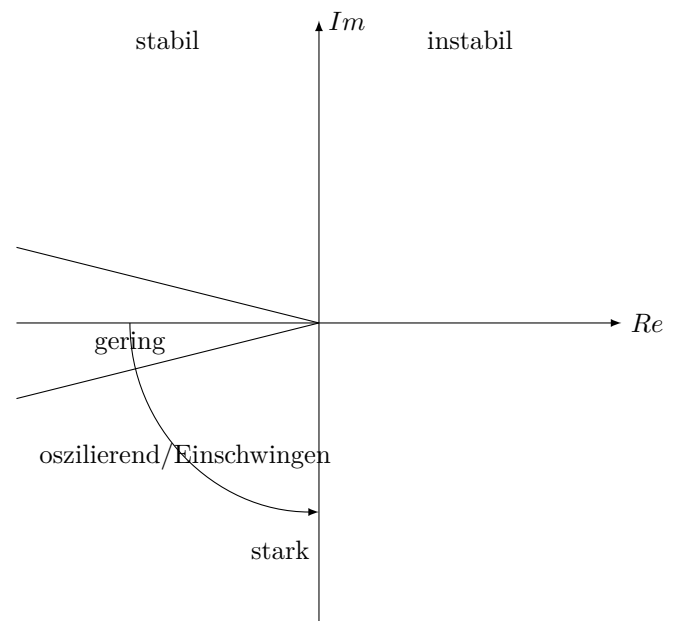
$$K_{neu} = \frac{\Delta s_{P1}}{Q}$$

3.3 Konstruktion der WOK

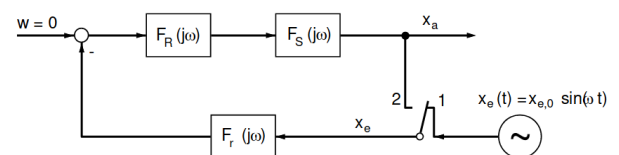
$$ax^2 + bx + c \quad z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. Alle n Äste beginnen in den n POLEN s_{Pov}
 2. m Äste der WOK enden für $K \rightarrow \pm\infty$
 3. n - m Äste der WOK enden für $K \rightarrow \pm\infty$ im Unendlichen
 4. Die n-m ins Unendliche strebende Äste der WOK haben Asymptoten, die
 - a) im Wurzelschwerpunkt
$$s_w = \frac{\sum_{v=1}^n s_P - \sum_{u=1}^m s_N}{n - m} = \frac{\text{Polst.} - \text{Nullst.}}{\text{Polst. Überschuss}}$$
 - b) mit der reellen Achse die Winkel
$$\varphi_k = \frac{(2k-1) \cdot 180^\circ}{n-m} \text{ für } KQ > 0$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n-m$$
 5. Die Punkte liegen auf der reellen Achse, oder symmetrisch zur reellen Achse
 6. Ein Punkt s auf der reellen Achse ist dann ein Punkt der WOK, wenn sich bei $KQ > 0$ ($KQ < 0$) rechts von ihm eine ungerade (gerade) Anzahl von Polen s_P/\times und (+) Nullstellen s_N/\circ befindet.
 7. $\times \rightarrow \circ$ (Von Pol- nach Nullstellen)
- Achtung: WOK nicht anwendbar, wenn Übertragungsfunktionen nicht rationale (z.B. Regelkreis mit Totzeitverhalten!)



3.4 Nyquist Kriterium



Frequenzgangfunktion des offenen Regelkreises:

$$F_o(j\omega) = F_r(j\omega) \cdot F_R(j\omega) \cdot F_S(j\omega)$$

Ausgangssignal:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= -F_r(j\omega) \cdot F_R(j\omega) \cdot F_S(j\omega) \cdot x_{e0} \sin(\omega t) \\ &= -F_0(j\omega) \cdot x_e(t) \end{aligned}$$

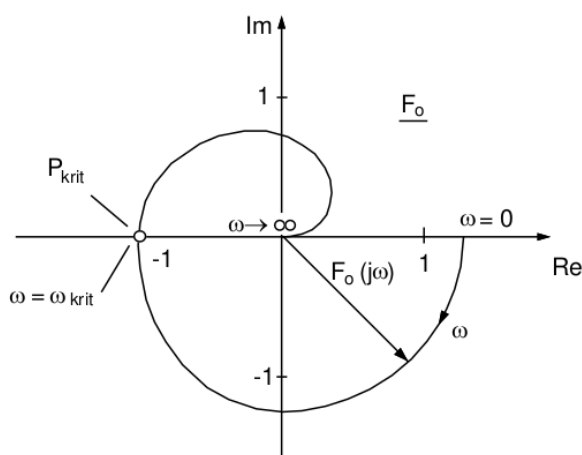
Regler und seine Parameter werden so gewählt, dass $\omega = \omega_{krit}$ gilt:

$$-F_0(j\omega_{krit}) = 1 \text{ oder } F_0(j\omega_{krit}) = -1 \quad (\text{Schwingbedingung})$$

Die Schwingbedingung ist erfüllt, wenn die Ortskurve von $F_1(j\omega)$ durch den kritischen Punkt ($P_{krit} = -2 + j0$) der komplexen F_0 -Ebene geht.

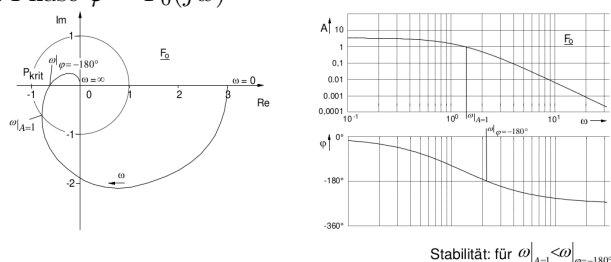
An diesem Punkt kann man ω_{krit} ablesen (damit kann der Regelkreis Dauerschwingungen ausführen).

Für größere ω ist das System instabil, für kleinere stabil.

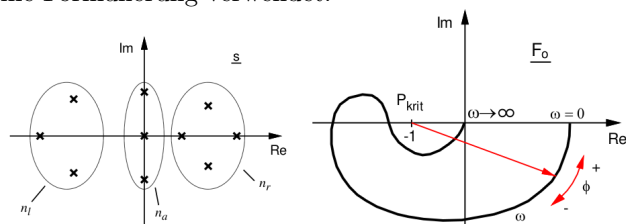


Falls $F(s)$ des offenen Kreises keine Pole in der rechten Halbebene hat und nur max. 2 im Ursprung der s -Ebene, ist der Regelkreis stabil, wenn der kritische Punkt von ω immer links von $s = -1 + j0$ liegt. (gilt immer wenn der offene Kreis stabil ist)

Zur Auswertung des Nyquist-Kriteriums im Bode Diagramm, spaltet man die Ortskurve nach Betrag $A = |F_0(j\omega)|$ und Phase $\varphi = \angle F_0(j\omega)$



Falls die Bedingung nicht funktioniert, wird die allgemeine Formulierung verwendet:



Der geschlossene Regelkreis ist stabil, wenn der Fahrstrahl von $P_{krit} = -1 + j0$ zu $F_0(j\omega)$ für wachsendes ω von $+0$ bis $+\infty$ eine Winkeländerung $\Delta\phi_{soll} = n_r \cdot 180^\circ + n_a \cdot 90^\circ$ erfährt.

n_r : Anzahl der Pole rechts der imaginären Achse

n_a : Anzahl der Pole auf der imaginären Achse

3.4.1 Phasenrad/Phasenreserve:

Aus Bodediagramm ablesen: Bei Verstärkung von 1

Winkeln von -180° nach oben rechnen

- befriedigendes Verhalten bei Störungen gilt: $\varphi_R \geq 30^\circ$
- gutes Verhalten (überschwingungsarm) gilt: $\varphi_R \approx 60^\circ$
- gutes Verhalten (überschwingungsfrei) gilt: $\varphi_R \geq 80^\circ$

3.5 Einstellregler Ziegler/Nichols

Reglertyp	K_P	T_N	T_V
P	$0,50 \cdot K_{P,krit}$	-	-
PI	$0,45 \cdot K_{P,krit}$	$0,85 \cdot T_{krit}$	-
PD	$0,80 \cdot K_{P,krit}$	-	$0,12 \cdot T_{krit}$
PID	$0,60 \cdot K_{P,krit}$	$0,50 \cdot T_{krit}$	$0,12 \cdot T_{krit}$

3.5.1 Betragsoptimum

bei einer dominierenden Zeitkonstante (T_d) in der Regelstrecke

$$F_{PI} = K_R \left(1 + \frac{1}{T_d \cdot s} \right) \quad K_R = \frac{T_d}{2 \cdot K_{Strecke} \cdot T_\Sigma}$$

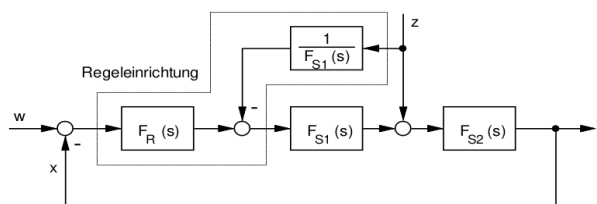
3.5.2 Symmetrisches Optimum

mehreren Zeitkonstanten (nur reelle Pole)

$$F_{PI} = K_R \left(1 + \frac{1}{4T_\Sigma \cdot s} \right) \quad K_R = \frac{1}{2 \cdot K_{Strecke} \cdot T_\Sigma}$$

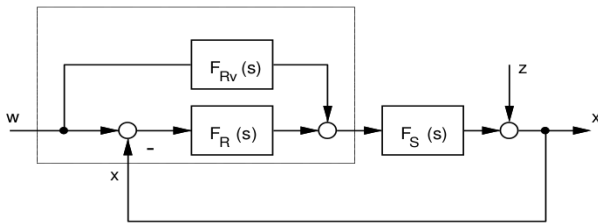
Störgrößenaufschaltung:

Falls Angriffsort einer Störgröße bekannt, kann man wie im Bild kompensieren. Vorteil: einfacher Regler Entwurf, deutlich schnellere Ausregelung.

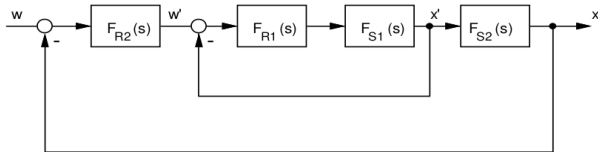


Vorsteuerung:

Geeignet, falls kein Kompromiss für gutes Stör- und Folgeverhalten. Regler ist auf gutes Störverhalten ausgelegt. Mit F_{Rv} wird ein schnelles Folgen auf Führungssignale $w(t)$ erreicht.

**Kaskadenregelung:**

Ineinander geschachtelte Regelkreise (innere Regelkreise „schneller“). „Innere“ Störungen können bereits innen ausgegelt werden. Können von Innen nach Außen in Betrieb genommen werden.



4 Digitale Regler

4.1 Allgemeines

4.1.1 z-Transformation

Wert der bei $t = k \cdot T_A$ ausgegeben wird, wird bei $t = (k-1) \cdot T_A$ eingelesen. (Verzögerung um einen Abtastschritt):



	Kontinuierlich	Zeitdiskret
Zeitbereich	$x_a(t) = x_e(t - T_A)$	$x_{a,k} = x_{e,k-1}$
Bildbereich	$X_a(s) = e^{-s \cdot T_A} \cdot X_e(s)$ (Laplace-Transformation)	$X_a(z) = z^{-1} \cdot X_e(z)$ (z-Transformation)

Bei der z-Transformation entspricht $e^{-s \cdot T_A}$ der Laplace-Transformation dem Ausdruck z^{-1} . Bzw. $z \triangleq e^{s \cdot T_A}$

Transformation vom s-Bereich in den z-Bereich:

$$s \triangleq e^{s \cdot T_A}$$

Vorwärts-Differenzen-quotient

$$s \triangleq \frac{z - 1}{T_A}$$

\Rightarrow Der digitale Regler kann folgend berechnet werden:

$$F(z) = F(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T_A}}$$

Tustinsche Formel

$$s \triangleq \frac{2}{T_A} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}$$

Sinnvolle Abtastzeit kleinste Polstelle

$$S_P \Rightarrow T_P = \frac{1}{S_P}$$

$$T_{\text{sinnvoll}} = T_P \cdot \left(\frac{1}{10} \cdots \frac{1}{20} \right)$$

5 Systembeschreibung im Zustandsraum

5.1 Allgemein (Mehrgrößensystem MIMO)

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \quad x(0) = x_0 \\ \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t)\end{aligned}$$

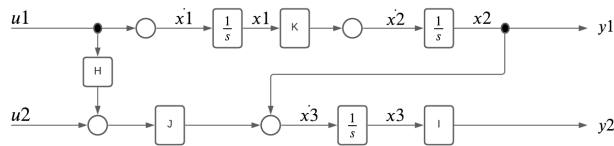


Abbildung 1: Signalflussplan

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{x}_2 &= K \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{x}_3 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + H \cdot J \cdot u_1 + J \cdot u_2 \\ \dot{y}_1 &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{y}_2 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + l \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ H \cdot J & J \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Polstellen (Eigenwerte einer Matrix bestimmen):

$$\det(A - sE) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ab - cd \stackrel{!}{=} 0 \quad sE = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

5.2 Programmtechnische Umsetzung

$$F_z(z) = \frac{2z + 6}{3z + 4} = \frac{2x_{in} + 6x_{in}}{3x_{out} + 4x_{out}}$$

```

1 while(1)
2 {
3     waitinterrupt(T_A); //Abtastzeit warten
4     xout2 = xout1;
5     xout1 = xout;
6     xin2 = xin1;
7     xin1 = xin;
8     input(xin);
9     xout = k*xout2 - j*xin1 + o*xout1;
10    output(xout);
11 }

```

Zeitbereich: $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} X(s) ds$	Laplace (Frequenz-, s-, Bild-) Bereich: $X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$
<p style="text-align: center;"> $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}[x(t)] \xrightarrow{\quad} X(s)$ $X(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \xrightarrow{\quad} x(t)$ $t < 0: x(t) = 0$ $s = \sigma + j\omega$ </p>	
$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$ Impulsfunktion	1
$1, \sigma(t)$ Sprungfunktion	$\frac{1}{s}$
t^n Parabel	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s + a)}$
$t^n \cdot e^{-at}$	$\frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$
$e^{-at} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + 2as + a^2 + \omega^2}$ (kompl. Pole)
$e^{-at} \cdot \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2} = \frac{s + a}{s^2 + 2as + a^2 + \omega^2}$ (kompl. Pole)
$x(t)$	$X(s)$
$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(s) + X_2(s)$
$K \cdot x(t)$	$K \cdot X(s)$
$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$	$s \cdot X(s) - x(-0)$ $(x(-0) = 0, \text{ da } x(t) = 0 \text{ f\"ur } t < 0 \text{ und reale Systeme nicht sprungf\"ahig sind})$
$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$
$x(t - T_t)$ (Totzeit)	$e^{-sT_t} \cdot X(s)$
$e^{-at} \cdot x(t)$	$X(s + a)$
$t \cdot x(t)$	$-\frac{dX(s)}{ds}$
$\int_0^t x_1(t - \tau) \cdot x_2(\tau) d\tau = x_1(t) * x_2(t)$ (Faltungsprodukt)	$X_1(s) \cdot X_2(s)$

Regler	$F_R(s)$	Regelstrecke $F_S(s)$	bleibende Regeldifferenz e (oder x_d)	
			für $x_e = a \cdot \sigma(t)$ (Sprung) mit Rückführverstärkung K_r	für $x_e = a \cdot t$ (Rampe) mit Einheitsrückführung
P (D)	K_P	P-Verhalten $(P, PT1, PT2, \dots)$ $F_S(s) = K_S \frac{(1 + \dots s) \dots}{(1 + \dots s) \dots}$	$a \frac{1}{1 + K_P \cdot K_S \cdot K_r}$	∞
I	$\frac{K_I}{s}$		0	$a \frac{1}{K_I \cdot K_S}$
PI (D)	$K_P + \frac{K_I}{s}$		0	$a \frac{1}{K_I \cdot K_S}$
I ²	$\frac{K_I}{s^2}$		0	0
P (D)	K_P	I-Verhalten $(I, PI, IT1, \dots)$ $F_S(s) = K_S \frac{(1 + \dots s) \dots}{s(1 + \dots s) \dots}$	0	$a \frac{1}{K_P \cdot K_S}$
I	$\frac{K_I}{s}$		0	0
PI (D)	$K_P + \frac{K_I}{s}$		0	0