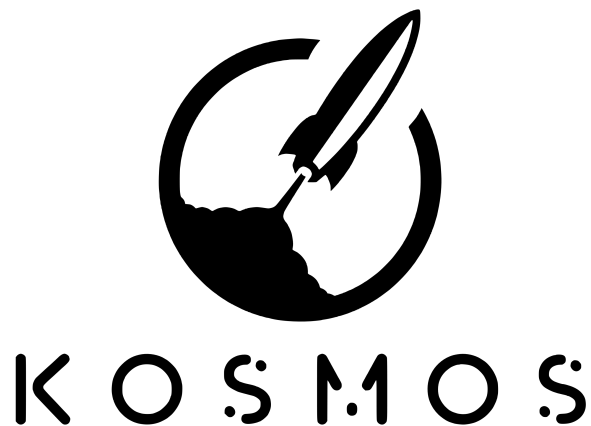


Kosmos Rocketry

NozzleCalc: Aplicação do Método de Design de Tuberias Rao



José Roberto dos Santos Carmo
Setor de Propulsão

Documento desenvolvido com a finalidade de apresentar a metodologia de design de tubeiras bell de G. V. Rao, as alterações, as adaptações realizadas e a aplicação da metodologia com o NozzleCalc.py, código em python desenvolvido pelo setor de propulsão para gerar o design otimizado de uma tubeira bell.

Contents

1	Nomenclaturas	3
2	Introdução	4
3	O método	5
3.1	Parâmetros Iniciais	5
3.2	Parâmetros Analíticos	5
3.3	Parâmetros da geometria Bell	6
3.3.1	Motivação do NozzleCalc	6
3.3.2	Definição da spline por ponto de controle	7
3.3.3	Definição geral do perfil da tubeira pelo método atual	8
3.4	Cálculos Paramétricos	9
3.4.1	Ângulos θ_n e θ_e	9
3.4.2	Coordenadas dos pontos N, E e Q	10
4	Conclusão	11
5	Referências	12

1 Nomenclaturas

ϵ = Coeficiente da Razão de Expansão

R_t = Raio da garganta da tubeira

R_e = Raio de exaustão da tubeira

A_t = Área da garganta da tubeira

A_e = Área de exaustão da tubeira

k = Coeficiente de calor específico do propelente (C_p/C_v)

P_c = Pressão Média da Câmara de Combustão

P_e = Pressão de Exaustão Requerida

θ = Ângulo da linha da secção divergente da tubeira cônica base

ϕ = Ângulo de convergência da tubeira bell

len = Porcentagem de comprimento da tubeira Bell em relação à cônica base

L_{bell} = Comprimento da Tubeira Bell

θ_e = Ângulo inicial dos parâmetros da spline

θ_n = Ângulo final dos parâmetros da spline

2 Introdução

As tubeiras De Laval, ou tubeiras Bell, são bocais de exaustão projetados para acelerar gases a velocidades supersônicas, maximizando o empuxo e, consequentemente, aprimorando o desempenho do motor. Com uma geometria otimizada e não linear, a tubeira Bell oferece eficiência superior em comparação à tubeira cônica convencional, embora sua concepção, modelagem e fabricação sejam mais complexas. Essas complexidades se justificam pelos ganhos significativos em desempenho, especialmente em regimes de alta eficiência termodinâmica e otimização de expansão de gases.

A aplicação da teoria de tubeiras Bell, comumente utilizada no setor de propulsão, impõe desafios devido ao grau de precisão requerido nos cálculos de dimensionamento e ajuste de parâmetros variáveis, que devem ser frequentemente ajustados conforme as condições de operação e alterações de projeto. O processo de cálculo para projetar uma tubeira Bell envolve uma extensa análise de condições de escoamento e termodinâmicas, exigindo refinamento contínuo e aproximações computacionais precisas. Dessa forma, o desenvolvimento de um método computacional automatizado não apenas simplifica essa tarefa, mas também oferece uma abordagem padronizada para obtenção de um design otimizado e de alto desempenho.

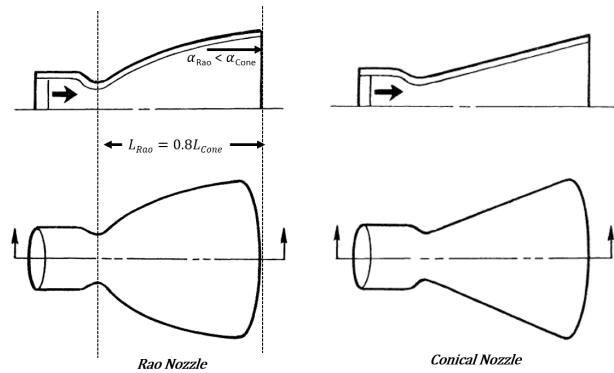


Fig. 1 Comparação entre uma tubeira Rao e uma tubeira cônica

A tubeira Bell é projetada para garantir que o fluxo de gases de exaustão seja direcionado de forma mais paralela ao *case* do motor, minimizando as perdas associadas à expansão fora do eixo e maximizando o empuxo útil. Esse alinhamento paralelo do fluxo é crucial para evitar a dispersão lateral dos gases, o que reduziria a eficiência e potencialmente causaria instabilidade no empuxo. A geometria da tubeira Bell, com seu contorno suave e curva controlada, permite um direcionamento mais preciso dos gases à medida que aceleram e se expandem, mantendo o fluxo quase perfeitamente paralelo ao longo da borda de saída. Essa característica é particularmente vantajosa em aplicações onde se busca o máximo aproveitamento do perfil de expansão e controle de impulso.

3 O método

3.1 Parâmetros Iniciais

De forma simplificada, o método de Rao consiste, basicamente, em calcular uma tubeira cônica, que será utilizada como base para estabelecer os parâmetros de cálculo e, posteriormente, gerar uma tubeira do tipo Bell. O primeiro passo é definir os parâmetros a serem utilizados nesse processo.

Inicialmente, as informações disponíveis para o cálculo incluem t_r , k , P_c , P_e , θ , len . Esses parâmetros podem ser obtidos a partir das primeiras iterações de configuração do motor, via softwares de simulação balística (t_r , P_c), PEPs (k , P_e) e análises de requisitos de projeto (θ , len).

Cabe destacar que o valor de certos parâmetros, como len , geralmente assume valores de 0.6, 0.8 ou 0.9. No entanto, foi verificado empiricamente que, ao utilizar o valor 0.8, os resultados tendem a convergir para uma curva mais apropriada, sendo essa a escolha mais comum em projetos de motores de foguetes de sondagem experimentais. Portanto, recomenda-se fortemente o valor 0.8 para este parâmetro, uma vez que proporciona um excelente desempenho da tubeira e uma redução considerável de massa devido ao menor comprimento da peça.

3.2 Parâmetros Analíticos

Uma vez definidos todos os parâmetros iniciais, é possível utilizá-los para determinar novos parâmetros necessários para os cálculos que definirão o design da tubeira. Inicialmente, possui-se o raio da garganta da tubeira; o próximo passo é definir o raio de exaustão.

Como a primeira tubeira a ser gerada será do tipo cônica, os valores iniciais serão calculados com base neste design. Para determinar o raio de exaustão, primeiramente calcula-se ϵ , o coeficiente de razão de expansão da tubeira. Esse coeficiente descreve essencialmente a razão entre a área de exaustão e a área da garganta da tubeira. Com esses valores, além do coeficiente de expansão, também será possível determinar o comprimento da tubeira cônica.

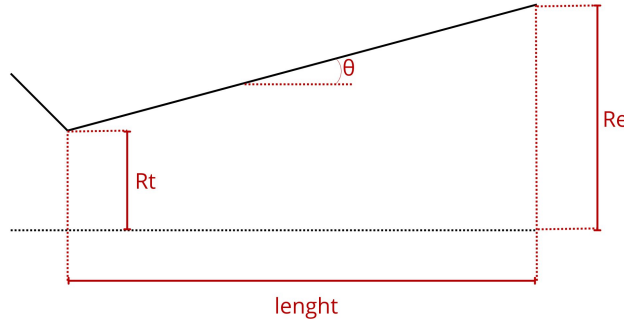


Fig. 2 Parâmetros da tubeira cônica

Caso o raio de exaustão já fosse conhecido, o ϵ poderia ser calculado simplesmente por A_e/A_t .

A razão de expansão pode ser calculada pela seguinte equação:

$$\epsilon = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \left(\frac{P_e}{P_c} \right)^{\frac{1}{k}} \cdot \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_c} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (1)$$

Vale um ressaltar de que, tanto na teoria original proposta por Gadicharla V.R. Rao, quanto em outras abordagens

da proposta de design de tubeiras, a razão de expansão geralmente é apresentada em relação ao número de Mach (M) da saída dos gases, pela seguinte equação:

$$\epsilon = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \cdot M^{\frac{(k+1)}{(k-1)}}}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right]}} \quad (2)$$

E o número de Mach pode ser obtido da seguinte relação com as temperaturas:

$$M = \sqrt{\frac{2}{k-1} \cdot \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right)} \quad (3)$$

Entretanto, em testes do setor, a obtenção do número de Mach não apresentou resultados que fossem válidos, acreditamos que o motivo por conta de tal situação se deve pela relação entre temperaturas, que também torna-se difícil de estimar com os softwares que temos disponíveis no momento. Assim, foi necessário buscar alternativas de cálculo para a razão de expansão, e, desta forma, chegamos até a abordagem via relação de pressão, em conformidade com a equação 1.

Com a razão de expansão da tubeira cônica calculada, podemos utilizar a seguinte relação para encontrar L_{bell} , partindo do mesmo valor de ϵ e calculando uma tubeira com uma porcentagem len do comprimento da tubeira cônica:

$$L_{bell} = \frac{len \cdot (\sqrt{\epsilon} - 1) \cdot R_t}{\tan(\theta)} \quad (4)$$

Para finalmente encontrar o raio de exaustão, precisaremos utilizar a seguinte relação:

$$\epsilon = \frac{A_e}{A_t} \quad (5)$$

Da qual obtém-se:

$$A_e = \epsilon \cdot A_t \quad (6)$$

Aplicando a equação das áreas dos círculos (área da garganta e exaustão), temos:

$$\pi \cdot R_e^2 = \epsilon \cdot \pi \cdot R_t^2 \quad (7)$$

Finalmente, o raio de exaustão pode ser isolado da equação 7:

$$R_e = \sqrt{\epsilon \cdot R_t^2} \quad (8)$$

3.3 Parâmetros da geometria Bell

3.3.1 Motivação do NozzleCalc

A partir deste ponto, todos os parâmetros básicos da tubeira *bell* já foram definidos, e o foco agora será na definição dos parâmetros da *spline*, que funcionará como uma curva com ponto de controle nas ferramentas CAD e será modelada por uma curva quadrática de Bézier. O desafio na aplicação desse método e a motivação para o

desenvolvimento do *NozzleCalc* estão justamente na definição desses parâmetros.

Na época, Rao desenvolveu sua metodologia de forma empírica, testando individualmente diversas geometrias de tuberias e gerando uma tabela com os ângulos de entrada e saída da parábola em função dos valores da razão de expansão. Encontrar um meio analítico para definir esses valores, a partir de uma tabela criada na década de 1950, representa um verdadeiro desafio. Assim, o algoritmo do *NozzleCalc* utiliza aproximações via interpolação para determinar os valores com base nos parâmetros analíticos obtidos anteriormente.

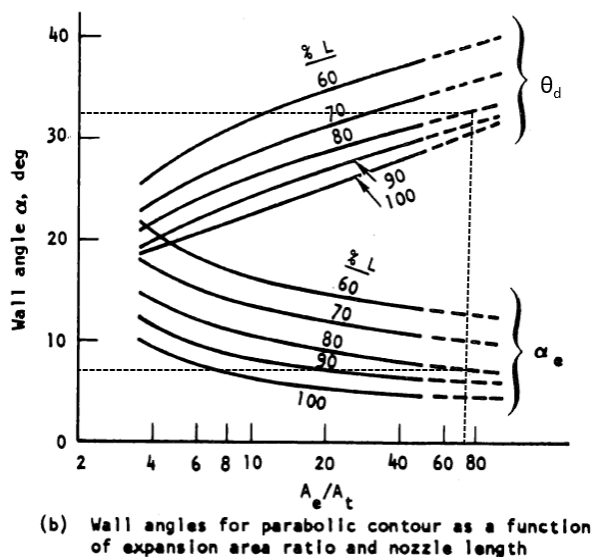


Fig. 3 Tabela original de Rao

3.3.2 Definição da spline por ponto de controle

A *spline* com ponto de controle para a tubeira bell é definida por 3 pontos principais: N, Q e E. Uma *spline* com ponto de controle é uma curva suave que conecta dois pontos principais, como os pontos N e E na imagem abaixo, sendo moldada por um ponto intermediário, conhecido como ponto de controle Q. Neste caso, a *spline* começa em N e termina em E, sendo sua trajetória curva influenciada pelo ponto Q, que puxa a curva em sua direção, criando uma forma suave e contínua entre os pontos de extremidade.

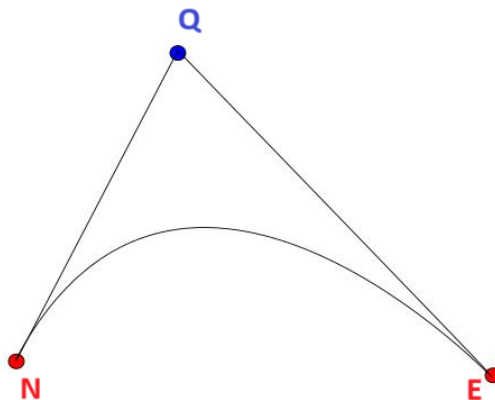


Fig. 4 Spline com ponto de controle

Na época, Rao não desenvolveu o contorno (também conhecido como *spline* ou parábola) por meio de pontos de controle, como é feito atualmente. A metodologia usada então era baseada em métodos de desenho paramétrico para curvas parabólicas.

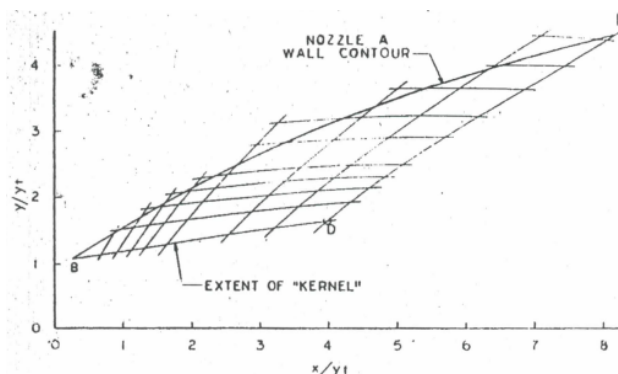


Fig. 5 Construção do contorno pelo método de Rao

3.3.3 Definição geral do perfil da tubeira pelo método atual

Antes de iniciarmos as discussões sobre como o perfil é calculado em si, mais alguns detalhes em relação à construção geral precisam ser apresentados e definidos.

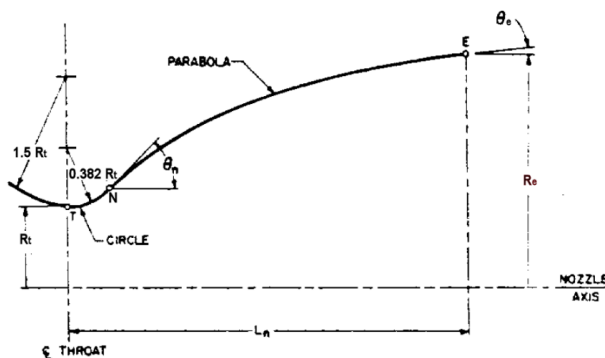


Fig. 6 Representação geral de uma tubeira Bell

O primeiro parâmetro para o design de uma tubeira Bell por este método é o raio R_t . É o primeiro valor que precisa ser definido e, em questões de coordenadas, ele deve estar definido como a **coordenada 0 no eixo x**, e sua **coordenada no eixo y deve ter o mesmo valor de R_t** . Definiremos este ponto de coordenadas $(x, y) = (0, R_t)$ como **ponto T**.

Uma das seções mais importantes de qualquer tubeira é a garganta. Ela precisa ser desenhada de forma que seja capaz de convergir, concentrar e divergir os gases de combustão sem gerar descolamentos de fluxo, que são extremamente prejudiciais ao desempenho do motor e podem ocasionar falhas catastróficas na tubeira. A primeira seção da garganta é o raio de convergência; o seu centro de origem está $1.5 \cdot R_t$ acima do ponto T. O raio deve ser rotacionado no sentido horário com um comprimento de arco $R_t \cdot \phi$.

A segunda seção da garganta a ser desenhada é o raio de divergência. O seu centro de origem está posicionado $0.382 \cdot R_t$ acima do ponto T. O raio deve ser rotacionado no sentido anti-horário até alcançar um arco de comprimento $R_t \cdot \theta_n$. O ângulo θ_e será definido na seção 3.4.1. Note que o fim do raio de divergência coincide com o ponto N.

A próxima secção é a parábola, que é uma spline com ponto de controle Q e extremidades N e E. Observe que, ao traçar uma linha 1 partindo do ponto N inclinada θ_e com o eixo x e traçar uma linha 2 partindo do ponto E inclinada $180^\circ + \theta_e$, ambas as linhas se interceptarão exatamente no ponto Q.

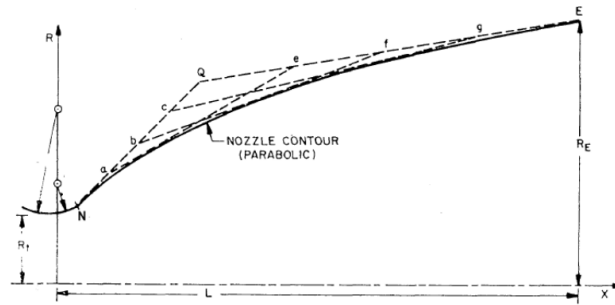


Fig. 7 Intercepção das linhas de N e E

3.4 Cálculos Paramétricos

3.4.1 Ângulos θ_n e θ_e

Para o início dos cálculos paramétricos, os primeiros valores a serem encontrados são θ_n e θ_e . Eles são obtidos através da tabela de Rao, apresentada na figura 3, e a obtenção exata destes valores de forma analítica é extremamente complexa. Assim, esses valores são calculados por meio de interpolações, como descrito na seção 3.3.1.

A imagem abaixo é uma reinterpretação da tabela de Rao e descreve de forma mais visual como os ângulos θ_n e θ_e se relacionam com a razão de expansão da tubeira. Os valores para ângulos acima de $\epsilon = 50$ são extrapolados.

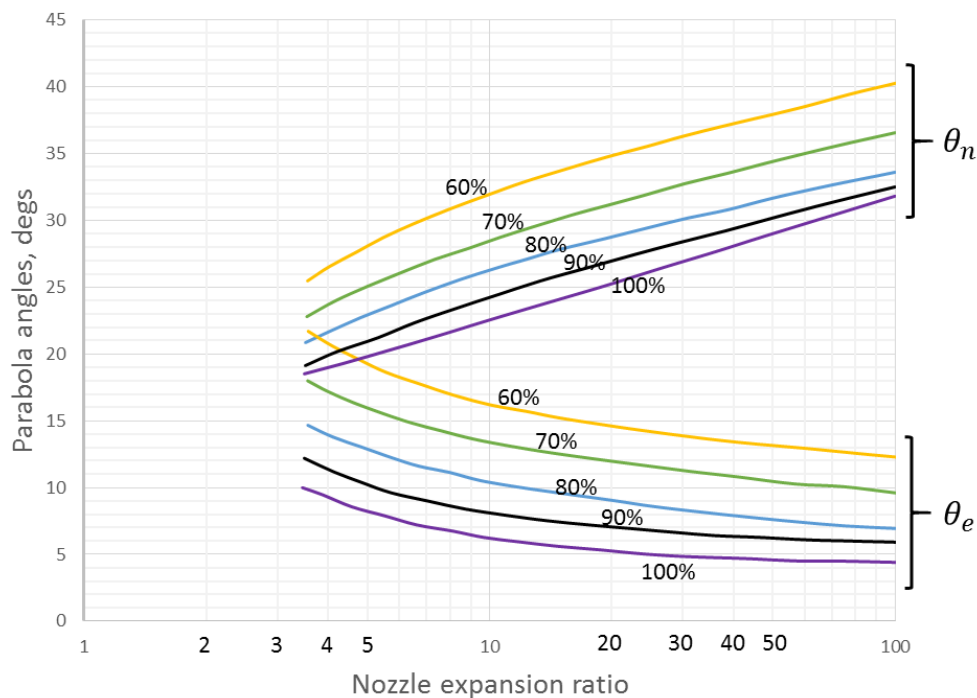


Fig. 8 Ângulos da parábola x Razão de expansão

No *NozzleCalc*, a tabela representada nas figuras 3 e 8 foi transformada em uma matriz 7x8 com os valores mais notáveis das relações entre os ângulos e a razão de expansão. O motivo para tal transformação é a possibilidade de aplicação de um método de interpolação em Python, obtendo assim os valores intermediários de θ_n , θ_e e ϵ .

```
def find_wall_angles(eps, tr, percent): # Determinando os valores para thetaN e thetaE
#Dados empíricos - ângulo da "parede"
aratio      = [ 4, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 100]
theta_n_60  = [20.5, 20.5, 16.0, 14.5, 14.0, 13.5, 13.0, 11.2]
theta_n_80  = [21.5, 23.0, 26.3, 28.8, 30.0, 31.0, 31.5, 33.5]
theta_n_90  = [20.0, 21.0, 24.0, 27.0, 28.5, 29.5, 30.2, 32.0]
theta_e_60  = [26.5, 28.0, 32.0, 35.0, 36.2, 37.1, 35.0, 40.0]
theta_e_80  = [14.0, 13.0, 11.0, 9.0, 8.5, 8.0, 7.5, 7.0]
theta_e_90  = [11.5, 10.5, 8.0, 7.0, 6.5, 6.0, 6.0, 6.0]
```

Fig. 9 Matriz baseada na tabela de Rao

No *NozzleCalc*, a partir de dados previamente calculados e da matriz apresentada na figura 9, os valores de θ_n e θ_e são obtidos por meio do trabalho de cinco funções: **findwallangles**, **interpolate**, **findnearest**, **tanThetas** e **trigTethaR**. Tais funções foram adaptadas de uma aplicação em Python similar de outro código obtido na internet que possui finalidade parecida.

O funcionamento, lógica e matemática das funções citadas acima não serão descritas neste documento.

Uma vez que os ângulos θ_n e θ_e foram obtidos, a obtenção do ponto Q pela interceptação das linhas descritas na seção 3.3.3 poderá ser feita desde que tenhamos os pontos N e E.

3.4.2 Coordenadas dos pontos N, E e Q

Como mencionado na seção 3.3.3, o ponto N pode ser encontrado com o uso de um arco de circunferência de comprimento $R_t \cdot \theta_n$, com um centro de origem posicionado $0.382 \cdot R_t$ acima do ponto T. Esta aplicação gera um ponto de coordenadas (N_x, N_y), o que faremos agora é obter equações para encontrar as coodenadas x e y dos pontos N, E e Q de forma analítica.

Pela trigonometria, as coordenadas de N podem ser obtidas das seguintes relações:

$$N_x = 1.5 \cdot R_t \cdot \cos(\theta_n) \quad (9)$$

$$N_y = 1.5 \cdot R_t \cdot \sin(\theta_n) + 1.5 \cdot R_t + R_t \quad (10)$$

O ponto E, por sua vez, é de fácil obtenção. Observe a figura 6 e note que, com a garganta da tubeira centrada nas coordenadas (x,y) = (0,0), a posição em x de E está exatamente no ponto extremo do comprimento da tubeira, calculado na equação 4, e sua posição em y é o raio de exaustão, calculado na equação 8. Assim, s coordenadas de E podem ser obtidas das seguintes relações:

$$E_x = L_{\text{bell}} \quad (11)$$

$$E_y = R_e \quad (12)$$

Já o ponto Q é descrito como a intersecção das linhas \overrightarrow{NQ} e \overrightarrow{QE} .

Tais linhas são descritas pelas seguintes relações:

$$\overrightarrow{NQ} = m_1 \cdot N_x + C_1 \quad (13)$$

$$\overrightarrow{QE} = m_2 \cdot N_x + C_2 \quad (14)$$

Onde:

$$m_1 = \tan(\theta_n) \quad (15)$$

$$m_2 = \tan(\theta_e) \quad (16)$$

E também:

$$C_1 = N_y - m_1 \cdot N_x \quad (17)$$

$$C_2 = E_y - m_2 \cdot E_x \quad (18)$$

E finalmente, o ponto Q pode ser descrito pelas suas coordenadas (Q_x, Q_y):

$$Q_x = \frac{C_2 - C_1}{m_1 - m_2} \quad (19)$$

$$Q_y = \frac{m_1 \cdot C_2 - m_2 \cdot C_1}{m_1 - m_2} \quad (20)$$

Estes cálculos analíticos são realizados pela função **calculaPontos** do *NozzleCalc*.

Uma vez que todos os pontos foram definidos, o responsável pelo projeto de design da tubeira pode escolher entre definir o ponto Q pelo método de intersecção de linhas no CAD (mais recomendado, por tornar o CAD mais parametrizado) ou pelos pontos coordenados x e y de Q.

4 Conclusão

De modo geral, este documento apresenta a teoria fundamental para o desenvolvimento do método atualmente utilizado pelo setor de propulsão da Kosmos Rocketry na geração de perfis de tubeiras Bell. Embora o método não seja exatamente o desenvolvido por Rao, ele incorpora diversas adaptações e combina conhecimentos teóricos de várias fontes, resultando em uma abordagem prática e aplicável pela equipe. O objetivo deste documento é expor e explicar os principais passos necessários para calcular os parâmetros que permitem projetar uma tubeira com essa geometria interna específica.

5 Referências

- 1) **"The Thrust Optimised Parabolic nozzle"**, Rick Newlands, Abril de 2017
- 2) **"Liquid Rocket Engine Nozzles"**, NASA SP-8120, July 1976
- 3) **"Exhaust Nozzle Contour for Optimum Thrust,"** G.V.R. Rao, Jet Propulsion 28, 377
- 4) NAKKA, Richard. **"Theory of Nozzles"**. Disponível em: http://www.nakka-rocketry.net/th_nozz.html. Acesso em: dez. 2023.
- 5) SREENATH, K. R.; MUBARAK, A. K. **"Design and analysis of contour bell nozzle and comparison with dual bell nozzle"**. P. G. Scholar, Associate Professor, Govt. Engineering College Thrissur, Kerala.