TEMA 2: CARDINACIDAD

1. Conjuntos equipotenciales cardinales

¿Cuántos elementos tiene un conjunto infinito?
¿Cuántos elementos tiene un conjunto finito? 1, 2, 3...

- Comparar conjuntos en función de su número de elementos
  - Formar parejas ⟶ Aplicación inyectiva

$$A \xrightarrow{f} B$$

A y B tienen el mismo número de elementos si existe una aplicación biyectiva $f: A \to B \Rightarrow$ A y B equipotentes

- Ejemplos

① $A = \{$Estudiantes fila central$\}$ A y B no son equipotentes
$B = \{$Estudiantes fila izq$\}$ Si existe $f: B \to A$ inyectiva

② $A = \mathbb{N}$, $B = \{$Múltiplos de 5$\}$
¿Cuál tiene más elementos?
A, $B \subseteq A$

$f: A \to B$
$f(n) = 5n \Rightarrow$ A y B son equipotentes

¿Por qué el número de filas lo denotamos con 13?
Emparejamos el conjunto con: $\{1,2,3,4,\ldots,13\}$

• <u>Cardinal de un conjuntos.</u>

Si A es conjunto, su cardinal se calcula:

① Buscamos un conjunto canónico C equipotente a A.

② Si $|C| = \mathcal{X}$ entonces $|A| = \mathcal{X}$

↳ Símbolo que se usa para el cardinal de C.

Resumen:

① $|A| = |B| \Leftrightarrow$ A y B son equipotenciales

② $|A| \leq |B| \Leftrightarrow$ si existe $f: A \longrightarrow B$ inyectiva

③ $|A| < |B|$ si $|A| \leq |B|$ pero $|A| \neq |B|$

- <u>Ejemplo:</u>

① El cardinal de $\mathbb{N}$ se denota por $\aleph_0$ ($|\mathbb{N}| = \aleph_0$)

Diremos que A tiene $\aleph_0$ elementos (o a cardinal es $\aleph_0$) si A es equipotencial con $\mathbb{N}$

Cardinal de A $\rightarrow |A| = \aleph_0$

- Ejemplo -

$A = \mathbb{N}$, B = Múltiplos de 7

$f: B \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x$

$0 \longrightarrow 0$
$7 \longrightarrow 7$
$14 \longrightarrow 14$

f es inyectiva $\Rightarrow |B| \leq \aleph_0$

$g: B \longrightarrow \mathbb{N}$; $g(x) = \frac{x}{7}$ biyectiva

$|B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

8.

$A = \{10, 20, 30, 40 \dots\}$

$f: A \longrightarrow \mathbb{Z}^+$

$f(x) = \frac{x}{10}$

$h: \mathbb{Z}^- \longrightarrow \mathbb{Z}^+$

$h(x) = -x$

$B = \{6, 7, 8, 9, \dots\}$

$g: B \longrightarrow \mathbb{Z}^+$

$g(x) = x - 5$

$C = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

$I(x) = x^{-1}$

$2 \quad |[a,b]| = |[c,d]|$

$f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$

$S_i : [a,b] = [0,1]$

$f : [c,d] = [0,1]$

$f(t) = t \cdot d + (1-t) \cdot c$

$0 \leq t \leq 1$

$\left.\begin{array}{l} f(0) = c \\ f(1) = d \end{array}\right\}$ biyectiva

① $[a,b] \xrightarrow{f} [0, b-a]$

$f(x) = x - a \Rightarrow \begin{cases} f(a) = 0 \\ f(b) = b-a \end{cases}$

② $g : [0,1] \longrightarrow [0,c]$

$g(x) = c \cdot x \begin{cases} c \cdot 0 = 0 \\ c \cdot 1 = c \end{cases}$

$$|[a,b]| \overset{①}{=} |[0,b-a]| \overset{②}{=} |[0,1]| \overset{②}{=} |[0,d-c]| \overset{①}{=}$$

$$\overset{①}{=} |[c,d]| \Rightarrow |[a,b]| = |[c,d]|$$

② $[0,1]$ y $(0,1) = B$

$f:[0,1] \longrightarrow (0,1)$

$B \subseteq A \Rightarrow |B| \leq |A|$ $\quad f: B \longrightarrow A \quad f(x)=x$

$$|[0,1]| = |A| = \left|\left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\right]\right| \leq \underbrace{|(0,1)|}_{\shortparallel \atop |B|}$$

$\Rightarrow |A| = |B|$

$[1/3, 1/2] \subseteq (0,1)$

3 $(0,1)$ y $\mathbb{R}$

$|(0,1)| \leq \mathbb{R}$

$A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$

$$f(x) = \frac{1/2 - x}{x(1-x)}$$

$$|(0,1)| = |\mathbb{R}|$$

- Dos conjuntos son equipotenciales (A y B)

$f: A \longrightarrow B$ biyectiva

- Si A y B son equivalentes, $|A| = |B|$
- Relación de orden $|A| \leq |B|$

$f: A \longrightarrow B$ inyectiva

- Teorema de Cantor. $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$

2 Conjuntos numerables

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$

Un conjunto es numerable infinito (A)
Si es equipotente a $\mathbb{N}$ (si $|A| = \aleph_0$)

- Ejemplos: a) $|\underbrace{\{\text{Numeros pares}\}}_{A}| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$

$$\underbrace{f: \mathbb{N} \to A,\ f(n) = 2n}_{\text{inyectiva}} \Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |A|$$

Como $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow |A| \leq |\mathbb{N}|$
infinito $\Rightarrow |A| = \aleph_0$

b) $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$

- Preguntas: ¿$|\mathbb{Q}|$? ¿$|\mathbb{R}|$?

¿Existe un infinito mas grande que $\aleph_0$?

¿Existe un conjunto infinito no equipotente a $\mathbb{N}$?

· Enumeraciones

Si A es infinito numerable, existe

$f: \mathbb{N} \longrightarrow A$ biyectiva

$$\left.\begin{array}{l} 0 \longrightarrow f(0) = a_0 \\ 1 \longrightarrow f(1) = a_1 \\ 2 \longrightarrow f(2) = a_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \end{array}\right\} \text{Enumeración}$$

- Ejemplo

$A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \} \subseteq \mathbb{R}$

$B = \{ n\sqrt{2} \mid n \in \mathbb{N}^* \} \subseteq \mathbb{R}$

$|A| = \aleph_0, \; a_n = \frac{1}{n} \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{1}{2} \\ a_3 = 1/3 \end{cases}$

$|B| = \aleph_0 = b_n = n\sqrt{2} \begin{cases} b_1 = \sqrt{2} \\ b_2 = 2\sqrt{2} \\ b_3 = 3\sqrt{2} \end{cases}$

$|A| \cup |B| =$

$A \cup B = c_n$

$c_1 = a_1$

$c_2 = b_1$

$c_3 = a_2$

$c_4 = b_2$

$c_5 = a_3$

$c_n = \begin{cases} b_{n/2} & n \text{ par} \\ a_{\frac{n+1}{2}} & n \text{ impar} \end{cases}$

- Propiedades

(1) Si $|A| = |B| = \aleph_0$

$|A| \cup |B| = \aleph_0 \rightarrow \left| \bigcup_{n=1}^{m} A_i \right| = \aleph_0$

(2) Si $|A_n| = \aleph_0$, $\left| \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right| = \aleph_0$

- Ejemplo

$A_1 = \{ \frac{m}{1} \mid m \in \mathbb{Z} \} \Rightarrow |A_1| = \aleph_0$

$A_2 = \{ \frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{Z} \} \Rightarrow |A_2| = \aleph_0$

$A_3 = \{ \frac{m}{3} \mid m \in \mathbb{Z} \} \Rightarrow |A_3| = \aleph_0$

$\left| \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right| = \aleph_0$

$\Downarrow$

$|\mathbb{Q}|$

- Ejercicio: a) $|\mathbb{N}[x]|$

$\mathbb{N}[x]$ = Polinomios con coeficientes naturales

b) $\mathbb{N}_1[x]$ = Polinomios de grado 1 con coeficientes en $\mathbb{N}$

$A_1 = \{ mx+1 \mid m \in \mathbb{N} \}$

$A_2 = \{ mx+2 \mid m \in \mathbb{N} \}$

$A_3 = \{ mx+3 \mid m \in \mathbb{N} \}$

$A = \{ mx+n \mid m, n \in \mathbb{N} \}$

¿Qué pasa con $\mathbb{R}$? $\longrightarrow$ Cantor

¿Qué ocurre con $[0,1]$? $x \in [0,1]$

$x = 0'a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$

$x_1 = 0' a_{11} a_{12} a_{13} a_{14}$

$x_2 = 0' a_{21} a_{22} a_{23} a_{24}$

$x_3 = 0' a_{31} a_{32} a_{33} a_{34}$

$x_4 = 0' a_{41} a_{42} a_{43} a_{44}$

$b_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{11} = 0 \\ 0 & \text{si } a_{11} \neq 0 \end{cases}$

$b_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{22} \\ 0 & \text{si } a \end{cases}$

$b_n \neq a_{nn}$

$y = 0' b_1 b_2 b_3 b_4$

$y \neq x_1$ — Teorema $= [0,1]$ no es numerable

$y \neq x_2$ — ¿$\mathbb{R}$?

$y \neq x_3$

$\mathbb{R} = [0,1] \cup [1,2] \cup \ldots$

$\cup [-1,0] \cup [-2,-1] \cup \ldots$

$[0,1] \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow |[0,1]| \leq |\mathbb{R}|$

$2^{\aleph_0}$

$|\mathbb{R}| \neq \aleph_1$

① $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es no numerable

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es equipotente al conjunto formado por todas las palabras infinitas formadas por 0 y 1

$A \subseteq \mathbb{N} \longrightarrow$ Palabra infinita

Conjunto de números naturales $\longleftarrow$

$|\mathbb{R}|$ es no numerable

$\mathbb{Q}$ es numerable

¿Irracionales? $\mathbb{I}$

$$\underset{\substack{\Downarrow \\ \text{No numerable}}}{\mathbb{R}} = \underset{\substack{\Downarrow \\ \aleph_0}}{\mathbb{Q}} \cup \underset{\Downarrow}{\mathbb{I}}$$