TEMA 4: Matrices y sistemas de ecuaciones

1 Matrices

$K = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{Z}_n, \ n \text{ primo} \end{cases}$

1.1 Reducción de una matriz escalonada

- Matriz escalonada por filas

Pivotes $\begin{pmatrix} * & * & * & - & \\ 0 & * & * & - & - \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ - & - & - & - & \end{pmatrix}$

- Pivote de una fila: El primer elemento no nulo
- Escalonada: El pivote de una fila está más a la derecha que el de la fila anterior
  - Las filas nulas están al final

$\boxed{\text{Escalonada reducida}}$

- Los pivotes son 1
- Encima de cada pivote hay ceros

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & - \\ 0 & 1 & * & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & - & \end{pmatrix}$

Transformaciones elementales por filas

(1) Permutar 2 filas

(2) Multiplicar una fila por $\alpha \neq 0$

(3) Sumar a una fila otra multiplicada por $k \neq 0$

• Rango de una matriz

El numero de filas no nulas de la forma normal de Hermite (o de cualquier matriz escalonada equivalente)

1.2 Operaciones con matrices

$(M_n(k), +, \cdot)$ es un anillo con unidad

$\Downarrow$

Matrices cuadradas de n filas y n columnas

a) $(M_n(k), +, \cdot)$ grupo conmutativo
b) El $\cdot$ es asociativo
c) Distributiva

Anillo

¿Qué matrices tienen inversa para el producto?

Matrices regulares

a) ¿Forma normal de Hermite?
Es la identidad

b) $Rg(A) = n$

c) $|A| \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1.4 Determinantes (en $\mathbb{R}$)

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3$
$- 0 - 0 - 1 = 2$

2 Sistemas de ecuaciones lineales

a) Matrices asociadas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

b) Matriz términos independientes

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

c) Matriz de incógnitas

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

• Expresión matricial

$$A \cdot X = b$$

• Si A $\boxed{\text{tiene inversa}}$ → A cuadrada

$$A^{-1}(AX) = A^{-1} b$$

d) Matriz ampliada

$$A^* = (A \mid b)$$

- Teorema

Transformaciones elementales por filas de la matriz ampliada producen

Sistemas equivalentes ⟹ Mismas soluciones

- Ejemplo - sistemas escalonados

En $\mathbb{Z}_7$ un sistema con la matriz A^* escalonada

$$A^* = \begin{array}{cccc} x & y & z & ind \\ \end{array}$$
$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2x + 3y + 4z = 5$$
$$y + 6z = 2$$
$$3z = 1$$

$$3z = 1$$

$$\underline{5} \cdot 3 \cdot z = \underline{5} \cdot \underline{1}$$

$$\boxed{z = 5}$$

inverso

$$z = 5$$
$$y + 2 = 2 \qquad \boxed{y = 0}$$

$$2x + 0 + 6 = 5$$
$$2x = -1$$
$$4 \cdot 2 \cdot x = 4 \cdot (-1)$$
$$\boxed{x = 3}$$

S. C. D

- Ejemplo - En $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{cases} x+3y+5z=1 \\ 2x+y+3z=6 \\ 5x+5y+4z=6 \end{cases} \xrightarrow[E_3+2E_1]{E_2+5E_1} \begin{cases} x+3y+5z=1 \\ 2y=4 \\ 4y=1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_3-2E_2} \begin{cases} x+3y+5z=1 \\ 2y=4 \\ 0=0 \end{cases}$$

$x+5z=2 \Rightarrow x=2+2z$

$2y=4 \Rightarrow y=2$

$\forall z$

$z=0, x=2, y=2$

$z=1, x=4, y=2$

- Soluciones

$x=2+2\lambda$

$y=2$ $\qquad \lambda \in \mathbb{Z}_7$

$z=\lambda$

Compatible indeterminado

S.C.I

- Ejemplo

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 1 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ 5x + 5y + 4z = \end{cases} \xrightarrow[E_3+2E_1]{E_2+5E_1} \begin{cases} x+3y+5z = 1 \\ 2y = 4 \\ 4y = 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_3-2E_2} \begin{cases} x+3y+5z = 1 \\ 2y = 4 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Mismo proceso

Incompatible (S.I)

Rango A	Rango A^*	Sistema
2	3	I
3	3	CD
2	2	CI

Teorema Rouché-Frobenius

- Rango A < Rango A^* ⇒ Incompatible
- Rango A = Rango A^* ⇒ Compatible
  - k = nº incognitas ⇒ Determinado
  - k < nº incognitas ⇒ Indeterminado

$$\begin{cases} ax + (b-1)y + 2z = 1 \\ ax + (2b-3)y + 3z = 1 \\ ax + (b-1)y + (b+2)z = 2b-3 \end{cases} \xrightarrow[E_3 - E_1]{E_2 - E_1}$$

$$\begin{cases} ax + (b-1)y + 2z = 1 \\ (b-2)y + z = 0 \\ (b-2)y + bz = 2b-4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b-1 & 2 \\ 0 & b-2 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a & b-1 & 2 & 1 \\ 0 & b-2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 2b-4 \end{pmatrix}$$

Rg A

$b = 2 \Rightarrow 2$ $\quad b = 0 \Rightarrow 2$

$b \neq 0$ y $b \neq 2$ y $a \neq 0 \Rightarrow 3 \longrightarrow 3$

$a = 0 \Rightarrow 2 \longrightarrow 2$

Rg A^*

$b = 0 \Rightarrow 3$

$b = 2 \Rightarrow 2$