TEMA 5: ESPACIOS VECTORIALES

1. Introducción

¿Que estructura algebraica (operaciones) tienen los siguientes conjuntos?

① El cjto de vectores del plano

a) Suma $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$

b) Producto escalar

c) $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

$(k,(a,b)) \longmapsto k(a,b) = (ka, kb)$

② Las matrices 3x2 sobre $\mathbb{R}$

a) Suma

b) Producto, NO

c) $\mathbb{R} \times M_{3x2}(\mathbb{R})$

$\rightarrow M_{3x2}(\mathbb{R})$

③ El cjto de polinomios de grado menor o igual que 2 sobre $\mathbb{R}$

a) Suma

b) Producto, no es interna

c) $p(x) \cdot q(x)$ grado ≤ 2

↳ Grado 0

Num real

2. BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

2.1 COMBINACION LINEAL DE VECTORES

Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores de un espacio vectorial otro vector v es combinación lineal de ellos si

$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ para algunos escalares

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

- Ejemplos - (1) En $\mathbb{R}^3$ encontrar un vector v que sea combinación lineal de $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (3,2,3)$, $v_3 = (2,4,0)$

$$2\cdot(1,1,2) - 1(3,2,3) + 1(2,4,0) = (2,2,4) + (-3,-2,-3) + (2,4,0) = (1,4,1) = v$$

(2) ¿Es $(1,2,3)$ combinación lineal de v_1, v_2, v_3? ¿Existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3, 2\lambda_1 + 3\lambda_2) = (1,2,3)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 3 \end{cases} \xrightarrow[E_3 - 2E_1]{E_2 - E_1} \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ 3\lambda_2 - 4\lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_3 - 3E_2} \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ -10\lambda_3 = -2 \end{cases} \quad \text{SCD}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{5} \qquad \lambda_2 = \frac{-3}{5} \qquad \lambda_1 = \frac{-12}{5}$$

- Ejemplo: ¿Es algún de los vectores del siguiente conjunto combinación lineal del resto?

$V = \mathbb{R}_2[x]$ (polinomios de grado ≤ 2)

$\{x^2+x+1, 2x+1, x^2+1\}$

$\quad v_1 \qquad v_2 \qquad v_3$

Combinación lineal de los 3 que sale 0

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \Rightarrow 1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_3 = 0$$

con escalares no nulos

• Criterio: Un vector es combinación lineal del resto si existe una combinación lineal

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

con no todos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nulos

$$\lambda_1 (x^2+x+1) + \lambda_2 (2x+1) + \lambda_3 (x^2+1) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \text{linealmente independientes}$$

Dependencia lineal y matrices

Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq K^n$, formamos una matriz A con ellos y

$$rg(A) = \text{número de vectores L.I}$$

-Ejemplo.-

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$F_2' = F_2 - 3F_1$

combinaciones lineales de los vectores iniciales

$$\xrightarrow{F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow Rg = 3$$

Son L.I

2.2 SISTEMAS GENERADORES

-Ejemplos.-

a) En $\mathbb{R}^2$

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

Todo vector es combinación lineal de $(1,0)$ y $(0,1)$

b) $M_{3x2}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = a\overset{A_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + b\overset{A_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + c\overset{A_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$+ d\underset{A_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + e\underset{A_5}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} + f\underset{A_6}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ sistema generador

¿Más de un sistema generador?

$$(a,b) = -a(-1,0) - b(0,-1)$$

$\{(-1,0),(0,-1)\}$ sistema generador

c) $\mathbb{R}_2[x]$

$ax^2 + bx + c$

$\{x^2, x, 1\}$ sistema generador

c) $\{(1,1),(2,1)\}$ como sistema generador

$(a,b) = x(1,1) + y(2,1) = (2b-a)(1,1) + (a-b)(2,1)$

$(a,b) = x+2y, x+y$

$x+2y = a$

$x+y = b$

$y = a-b$

$x = 2b-a$

2,3 BASE Y DIMENSION

Si V es un espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

El conjunto puede ser;

a) Linealmente independiente

b) sistema generador

B es una base si cumple ambas propiedades

Propiedades fundamentales

1. Todo vector es combinación lineal de B que es única (por ser L.I)

2. Todo espacio vectorial tiene una base y todas las bases tienen el mismo nº de elementos

$\Rightarrow$ Dimensión del espacio

- Ejemplo:-

a) En $\mathbb{R}^2$, $\{\overbrace{(1,0),(0,1)}^{\text{Dim } \mathbb{R}^2 = 2}\}$ es SG

$$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0)$$

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \Rightarrow L.I$$

b) Sistema generador que no sea Base

$\{(1,0),(0,1),(2,3)\}$

$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) + 0(2,3) \Rightarrow SG$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{NO ES LI}$$

$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$

c) Conjunto L.I que no sea base

$B = \{1,0\}$

Si $\dim V = n$

a) Mas de n vectores son L.D

b) Menos de n vectores son S.G

c) Si tenemos n vectores, entonces forman base si cumple una de las dos propiedades $\begin{cases} SG \text{ ó} \\ LI \end{cases}$

K^n tiene dimension n

$K_n\{x\}$ dimension $n+1$

$M_{m\times n}$ tiene dimension $m \cdot n$

- Ejemplo -

Es $\{(1,0,0,-1),(2,1,1,-2),(0,1,1,0),(1,-1,-1,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^4$ $\Rightarrow$ dimension 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4+F_2]{F_3-F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Rango $= 2$ $\Rightarrow$ No son LI

No son Base

F_1 y F_2 son LI

2.4 COORDENADAS

V un espacio vectorial $\Rightarrow \dim V = n$

$B = \{v_1, v_2, \_\_\_, v_n\}$ base $\begin{cases} C.I \\ S.G \end{cases}$

$v \in V$ un elemento

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \_\_ + a_n v_n \text{, (única)}$$

$a_1, a_2, \_, a_n \in \mathbb{R}$

$$V \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}^n$$

$v \longmapsto (a_1, a_2, -, a_n) \Rightarrow$ Coordenadas de V en la base B

- Ejemplo: $V = \mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$B = \{x^2, x, 1\}$

$p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$

$$p(x) = ax^2 + bx + c \longmapsto (a, b, c)$$

$$\mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

El polinomio $7x^2-2x+\sqrt{3}$ queda determinado por $(7,-2,\sqrt{3})$

Las coordenadas de $7x^2-2x+\sqrt{3}$ en B' son $(7,-2,\sqrt{3})$

<u>Conclusión:</u> Trabajar con $v \in V$ es equivalente a trabajar con sus coordenadas en $\mathbb{R}^n$

- <u>Ejemplos</u> a) $(3,5) \in \mathbb{R}^2$

¿Coordenadas?

Respecto a $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$

$(3,5) = a(1,0) + (0,1)$

Coordenadas $= (3,5)_{B_1}$

Respecto a $B_2 = \{(1,1),(2,3)\}$

$(3,5) = a(1,1) + b(2,3) \Rightarrow \begin{cases} 3 = a + 2b \\ 5 = a + 3b \end{cases}$

$a=-1 \quad b=2$ Coordenadas $= (-1,2)_{B_2}$

e) Coordenadas $(0,1,2)$ respecto a
$B\{(1,1,2),(2,1,0),(1,1,1)\}$ en $\mathbb{R}^3$

$(0,1,2) = a(1,1,2) + b(2,1,0) + c(1,1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} a+2b+c=0 \\ a+b+c=1 \\ 2a+c=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=0 \\ b=-1 \\ c=2 \end{array}$$

Coordenadas $= (0,-1,2)_B$

④ Extraer un subconjunto de vectores L.I de

$\{\underbrace{2x^3+x^2+3x+1}_{p_1}, \underbrace{x^3+2x^2+x+3}_{p_2}, \underbrace{3x^3+4}_{p_3}\}$ 3 elementos

$\mathbb{R}_3[x] \Rightarrow \dim \mathbb{R}_3[x] = 4$

↳ cojo una base de $\mathbb{R}_3[x]$

$B = \{(x^3, x^2, x, 1)\}$ ← pasamos polinomios a coordenadas

$\mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$

$p_1 \longmapsto (2,1,3,1)$

$p_2 \longmapsto (1,2,1,3)$

$p_3 \longmapsto (3,0,0,4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -6 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow R_g = 3$$

Los 3 vectores son LI

Los 3 polinomios son LI

- <u>Cambios de base</u>

- Ejemplo - Las coordenadas de $p(x)$ en $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ son $(3,0,2,1)_B$ ¿Cuales son las coordenadas de $p(x)$ en $B' = \{x^3+2x^2+x+4, x^2+3x+1, x+4, 1\}$

- Sacamos $p(x) = 3x^3+2x+1$

$$3x^3+2x+1 = a(x^3+2x^2+x+4)+b(x^2+3x+1)+c(x+4)+d$$

$$ax^3+2ax^2+ax+4c+bx^2+3bx+b+cx+4c+d$$

$3 = a$

$0 = 2a + b \qquad b = -6$

$2 = a + 3b + c \qquad c = 17$

$1 = 4a + b + 4c + d \qquad d = -73$

$$(3, -6, 17, -73)_{B'}$$

¡Muy largo!

Matriz cambio de base de B a B $M(B, B')$

- obteniendo las coordenadas de los vectores de B en B'

$x^3 = a(x^3 + 2x^2 + x + 4) + b(x^2 + 3x + 1) + c(x+4) + d$

$(1, -2, 6, -26)$

$x^2 = a(x^3 + 2x^2 + x + 4) + b(x^2 + 3x + 1) + c(x+4) + d$

$(0, 1, -3, 11)$

$x = a(x^3 + 2x^2 + x + 4) + b(x^2 + 3x + 1) + c(x+4) + d$

$(0, 0, 1, -4)$

$1 = a(x^3 + 2x^2 + x + 4) + b(x^2 + 3x + 1) + c(x+4) + d$

$(0, 0, 0, 1)$

$$M(B,B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 1 & 0 \\ -26 & 11 & -9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 17 \\ -73 \end{pmatrix}$$

Propiedades

A = cambio de B a B'

(1)

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left] & B' \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] \end{tikzcd}$$

(2)

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left, "A"] \arrow[rr, bend right, "A' \cdot A"'] & B' \arrow[r, bend left, "A'"] & B'' \end{tikzcd}$$

3. SUBESPACIOS VECTORIALES

Si V es un espacio vectorial y $W \subseteq V$ es un subconjunto, ¿Cuando es W un espacio vectorial?

- Suma
- Producto por escalares
- Propiedades

(Tendremos las operaciones en W cuando sea cerrado por las de V)

- Cerrado por operaciones Si $w_1, w_2 \in W$
  - $w_1 + w_2 \in W$
  - $\alpha \cdot w_1 \in W$

  Subespacio vectorial

+ •

- Ejemplos

a) $W = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ⇑ Dimension 2

a) Cerrado para la suma

$(x,x) + (y,y) = (x+y, x+y)$

b) Cerrado producto

$$k(x,x) = (kx, kx) \in W$$

b) $W = \{ax^2 + bx + 7 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$

a) Cerrado por suma $\Rightarrow$ NO

$$(ax^2 + bx + 7) + (a'x^2 + b'x + 7) =$$

$$(a+a')x^2 + (b+b')x + 14 \notin W$$

$W = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ espacio vectorial

Tiene que estar en W

dim W? 1

- Sistema generador $\{(1,1)\}$

$$(x,x) = x(1,1)$$

- Linealmente independiente Si

Base $= \{(1,1)\}$

• Subespacio generado por un conjunto de vectores

Si tenemos $\overset{B}{\overset{\shortparallel}{\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}}}$ de V se pueden dar 2 situaciones

a) Es un sistema generador

$\Rightarrow$ Todas las combinaciones lineales de B dan todo el espacio V

b) No es un sistema generador

¿Qué ocurre con todas las combinaciones lineales de B? Es un subespacio de V

↳ generado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

- Ejemplo - Base de $\mathbb{R}^3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

b) $A' = \{(1,0,0), (0,1,0)\} \Rightarrow$ No sistema generador

$\{$ Todas las combinaciones lineales de $A'\}$

$\Downarrow$

$\{(1,1,0), (2,1,0), (a,b,0)\}$

-Ejemplo- Base y dimensión de $\mathbb{R}_2[x]$

subespacio generado por

$\{x^2+2x, -x^2+x, x^2+x\}$

-Sistema generador

$\{x^2+2x, -x^2+x, x^2+x\}$

$<[\,]>_4$

ECUACIONES DE UN SUBESPACIO

Ejemplo = W de $\mathbb{R}_2[x]$ con base $\{x^2+2x, -x^2+x\}$

$\lambda(x^2+2x)+\mu(-x^2+x) = ax^2+bx+c \in W$

$$\begin{cases} a = \lambda - \mu \\ b = 2\lambda + \mu \\ c = 0 \end{cases}$$

Otras formas de expresar un subespacio

En W están los polinomios ax^2+bx+c tal que

$$\begin{cases} a = \lambda - \mu \\ b = 2\lambda + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ c = 0 \end{cases}$$

$\dim W = 2$

Ec cartesianas $3-2=1$ $\#$

$$\boxed{c=0}$$

Ecuaciones paramétricas

Un elemento de W

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & -1 \\ b & 4 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow -x^2+4x \in W$$

- Ejemplo Ecuaciones del subespacio generado por $\{(1,2,3,4),(3,1,2,3),(4,3,5,7)\}$ $\mathbb{R}^4$

Buscar base

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-4F_1]{F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_3-F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Base $\{(1,2,3,4),(0,-5,-7,-9)\}$

Ecuaciones paramétricas

$$(x,y,z,t) = \lambda(1,2,3,4,5) + \mu(0,-5,-7,-9)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 5\mu \\ z = 3\lambda - 7\mu \\ t = 4\lambda - 9\mu \end{array}\right\} , \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

(X) vectores (x,y,z,t) que cumple $\Leftrightarrow$ ∂

$$\begin{array}{l} E_2-2E_1 \\ E_3-3E_1 \\ E_4-4E_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -2x+y=-5\mu \\ -3x+z=-7\mu \\ -4x+t=-9\mu \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} -7E_1+5E_2 \\ -9E_1+5E_3 \end{array} \left| \begin{array}{l} -x-7y+5z=0 \\ -2x-9y+5t=0 \end{array} \right.$$

$\Uparrow$

Ecuaciones cartesianas

2 Dimensión = Nº de parámetros

Nº Ecuaciones cart $= \dim \mathbb{R}^4 - \dim W$
$= 4 - 2 = 2$

2.3 SUMA E INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES

Sea V espacio vectorial y U_1, U_2 subespacios de V

a) ¿$U_1 \cap U_2$ es subespacio? Sí

b) ¿$U_1 \cup U_2$ es subespacio?

a) ¿$U_1 \cap U_2$?

$$x, y \in U_1 \cap U_2 \left\{ \begin{array}{l} x+y \in U_1 \\ x+y \in U_2 \end{array} \right\} x+y \in U_1 \cap U_2$$

¿Cómo "calculo" $U_1 \cap U_2$ a partir de U_1 y U_2?

$\boxed{\text{Ecuaciones de } U_1 \cap U_2}$ → Cartesianas

→ Base o sistema generador de $U_1 \cap U_2$

- Ejemplo $V=\mathbb{R}^3$

$U_1 \equiv x+2y+z=0$

$U_2 \equiv L\{(1,1,2),(1,1,1)\}$

- Ecuaciones cartesianas de U_2

a) Parámetros

a,1) Base de U_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_g=2$$

L.I

$\text{Dim}(U_2)=2$

Ec cartesianas $3-2=1$

$B=\{(1,1,2),(0,0,-1)\}$

a,2) Ecuaciones paramétricas

$(x,y,z)=\lambda(1,1,2)+\mu(0,0,-1)$

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=2\lambda-\mu \end{cases} \Rightarrow -x+y=0 \iff x=y$$

a, 3) Cartesianas

$U_2 \equiv -x+y=0$

$U_1 \equiv x+2y+z=0$

$$U_1 \cap U_2 \equiv \begin{cases} -x+y=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

$$E_2+E_1 \Rightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ 3y+z=0 \end{cases}$$ Ec cartesianas

$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$

$-$ Base $= \{(1,1,-3)\}$

$$\begin{cases} x=y \\ z=-3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=-3\lambda \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\{(-1,1,0),(0,3,1)\}$

b) ¿$U_1 \cup U_2$?, NO es subespacio

- Ejemplo $\mathbb{R}^3 = V$

$U_1 = \{(x,y,z) \mid x=0, y=0\}$

$U_2 = \{(x,y,z) \mid x=0, z=0\}$

¿$U_1 \cup U_2$ es subespacio

$(0,1,0) + (0,0,1) = (0,1,1) \notin U_1 \cup U_2$

c) La suma de 2 subespacios

$U_1 + U_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in U_1, v_2 \in U_2\}$

Si es un subespacio

$U_1 + U_2 = \{(x,y,z) \mid x=0\}$

¿Cómo calculamos la suma?

Ecuaciones

$U_1 + U_2$

Sistema generador

$U_1 + U_2$

La unión de los sistemas generadores de U_1 y U_2

$U_1 \equiv x - y + 2z = 0 \qquad \mathbb{R}^3$

$$U_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda + r \\ y = \mu + r \\ z = \lambda + \mu + 2r \end{cases} \qquad \dim U_2 = 2$$

Sistema generador de $U_1 \to \dim U_1 = 2$

$$\begin{cases} x = y - 2z = \lambda - 2z \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1, \mu = 0 \Rightarrow (1,1,0) \\ \lambda = 0, \mu = 1 \Rightarrow (-2,0,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \lambda + r \\ y = \mu + r \\ z = \lambda + \mu + 2r \end{cases} \xrightarrow{\substack{E_2 - E_1 \\ E_3 - 2E_1}} \begin{cases} -x + y = \mu - \lambda \\ -2x + z = -\lambda + \mu \end{cases} \xrightarrow{E_2 - E_1}$$

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$z = x + y$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \qquad \begin{matrix} \lambda = 1 \quad \mu = 0 \quad (1,0,1) \\ \lambda = 0 \quad \mu = 1 \quad (0,1,1) \end{matrix}$$

$$U_1 + U_2 = \mathcal{L}\{(1,1,0),(-2,0,1),(1,0,1),(0,1,1)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2F_4 + F_2]{2F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\dim U_1 + U_2 = 3 \Rightarrow U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$$

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

$$\underset{3}{\shortparallel} \qquad \underset{2}{\shortparallel} \qquad \underset{2}{\shortparallel} \qquad \underset{1}{\shortparallel}$$