TEMA 3: RETÍCULOS Y ÁLGEBRAS DE BOOLE

1. RETÍCULOS

- Condición
- Conjunto
- Dos elementos a y b

  Orden (relación) → Prioridad / Orden / Jerarquía

- Relación en un conjunto

  La Relación binaria

Son una relación de orden, tiene que cumplir

i) Reflexión $x \leq x$

ii) Antisimétrica $x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$ → No se da

iii) Transitiva $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

- Ejemplo: $A = \{a, b, c, d\}$ con la relación $\rightarrow \trianglelefteq$

$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,c), (a,b), (a,d), (b,d)\}$$

$a \trianglelefteq a \quad b \trianglelefteq b \quad c \trianglelefteq c \quad d \trianglelefteq d$

- Reflexiva ✓
- Transitiva ✓
- Antisimétrica ✓

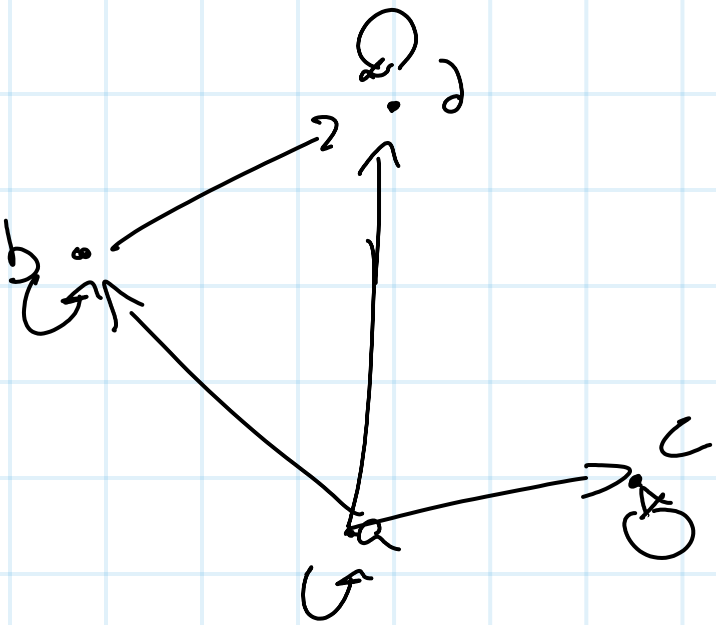
c d → No están relacionados, no se pueden comparar

⇓

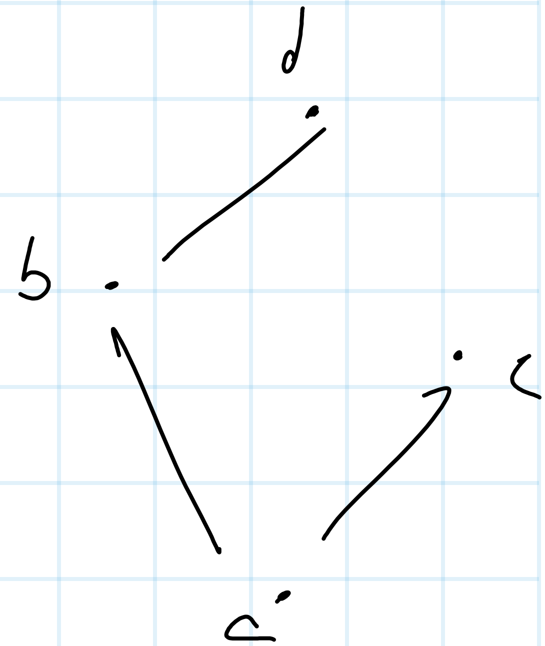
Orden parcial

Diagramas de Hasse

$\dot{x} \longrightarrow \dot{y}$ $\qquad x \leq y$



$\Rightarrow$



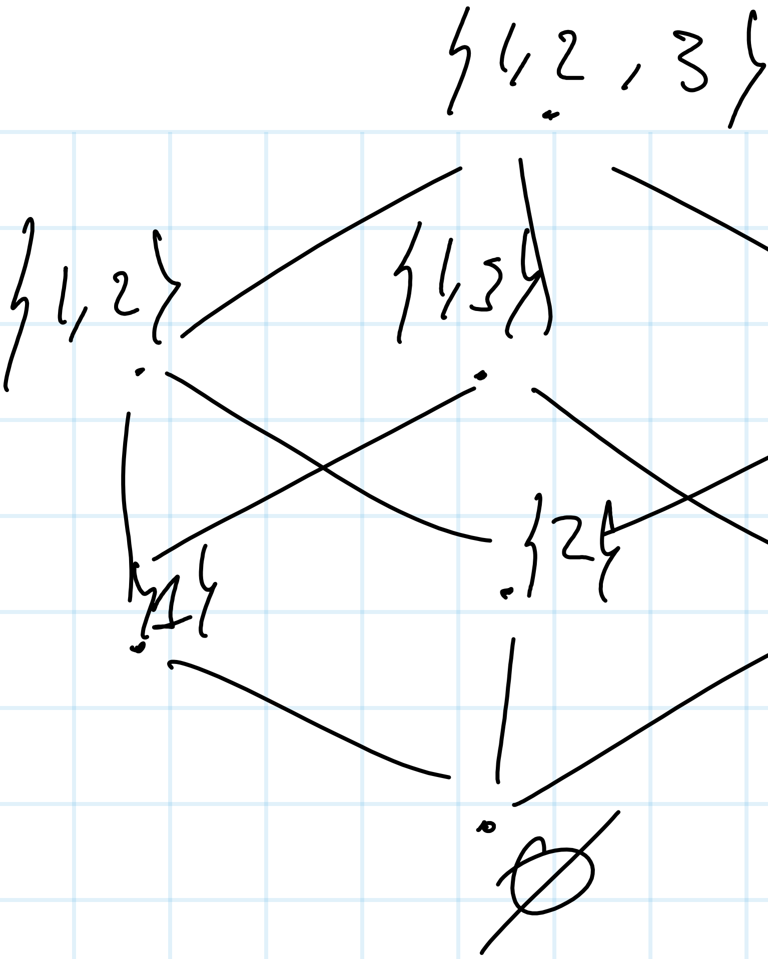
Ejemplos

Orden

con la inclusión

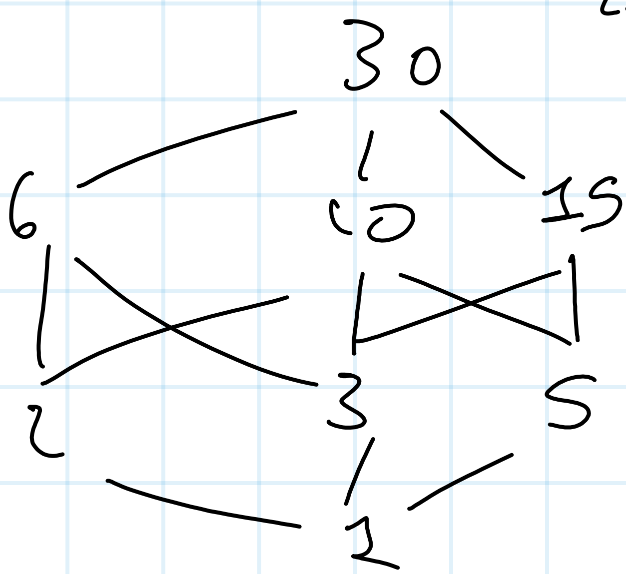
a) Subconjuntos de un conjunto infinito

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\emptyset\}$$



b) D_{30} = Divisores de 30 con relación de divisibilidad

$D_{30} = \{1, 2, 3, 4, 5, \underset{2\cdot 3}{6}, \underset{2\cdot 5}{10}, \underset{3\cdot 5}{15}, \underset{3\cdot 2\cdot 5}{30}$



c) $\mathbb{B}_n = \mathbb{Z}_2^n = \{x_1, x_2 \dots x_n \mid x_i = 0,1\}$

$x_1 x_2 \dots x_n \leq y_1 \dots y_n$

$\iff \quad x_i \leq y_i$

$\mathbb{B}_2 = \{00, 01, 10, 11\}$

$$\begin{tikzcd}
 & 11 & \\
01 \arrow[ur, dash] & & 10 \arrow[ul, dash] \\
 & 00 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

1) Un retículo es

$(L, \leq)$ tal que para todos $a, b \in L$
existe $\underbrace{\sup\{a,b\}}_{\text{supremo}}$, $\underbrace{\inf\{a,b\}}_{\text{ínfimo}}$

2) $(L, \vee, \wedge)$ que cumplen asociativas, conmutativas, idempotencia y de absorción

$\Downarrow$

$$\boxed{x \leq y \iff x \vee y = y \iff x \wedge y = x}$$

1.5 Subretículos y homomorfismos

$(L, \leq)$ retículo
$K \subseteq L$

¿K es un retículo?

↳ • ¿Relación de orden en K?

- Ejemplo = B_3 $\{000, 100, \dots\} \to (B_3, \leq)$

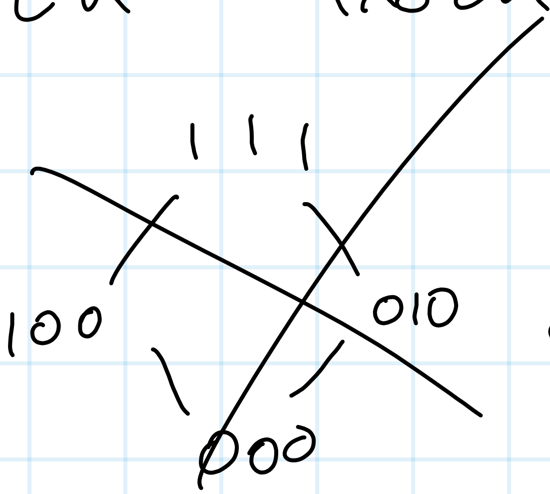
$K = \{000, 100, 010, 111\}$

¿Orden en K? Sí

Un subconjunto puede ser retículo y no subretículo

$\sup\{100, 010\} = 110 \notin K$
← En B_3

$a \vee b \in K$ $\quad$ $a \wedge b \in K$



$\sup\{100, 010\} = 111$

B) Homomorfismo $(L_1, \le), (L_2, \sqsubseteq)$

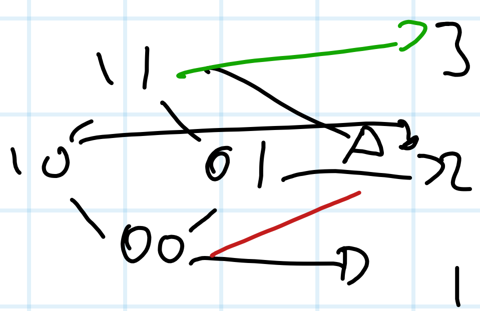
Una aplicación $f: L_1 \longrightarrow L_2$

a) $f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b)$ $\quad (L_1, \le) \longrightarrow \vee_1, \wedge_1$

b) $f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b)$ $\quad (L_2, \sqsubseteq) \longrightarrow \vee_2, \wedge_2$

c) Si $x \le y \Rightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$

- Ejemplo - Homomorfismo de $\mathbb{B}_2$ en $L = \{1, 2, 3\}$



$x \le y = f(x) \le f(y)$ cumple c

$f_1(10 \vee 01) = 2$ 3 no cumple a

$f_1(10) \vee f(01) = 2$ 2

$f(01 \wedge 10) = 1$ 2 no cumple b

$f(01) \wedge f(10) = 2$ 2

2.2 Retículos finitos

- Ejemplo - $(D_{180}, |)$

¿20 como supremo de 2 elementos?

$20 = 10 \vee 4 = 2 \vee 5 \vee 4 = 4 \vee 5$

v - irreducible

Descomposición irredundante

Átomos ⟹ viene de 1 solo

Irreducibles:

a) Átomos: 2, 3, 5
b) No átomos: 4, 9

¿10 como ínfimo de 2 elementos?

$10 = 20 \wedge 30 = 20 \wedge 90 \wedge 60 = 20 \wedge 90$

⟹ irreducible

2.3 Retículos complementados $(L, \leq)$

I = máximo O = mínimo

Tomamos un elemento x, ¿Existe y tal que $x \vee y = I$, $x \wedge y = O$

Ej = $x = 20$

$180 = 3^2\, 2^2\, 5^2$

$20 \vee y = 180$

$y = 9, 18, 45, 36, 90, 180$

$20 \wedge y = 1$

$y = 9, 3, 1$

9 complemento de 20

2.4 RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

$(L, \leq, \vee, \wedge)$ retículo

¿$\vee$ y $\wedge$ son distributivas?

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

• Anillo: $(A, +, \bullet)$

- Distributiva de $\bullet$ respecto a $+$

$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$

Si se cumplen las 2 Retículo distributivo

- Ejemplos =

① $\wp(\{1, 2, 3, 4, \dots, n\})$ = Subconjuntos de $\{1, 2, \dots, 4\}$

$\vee = \cup \qquad \wedge = \cap$

Se cumplen las distributivas

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

② $B^n \longrightarrow B^3$

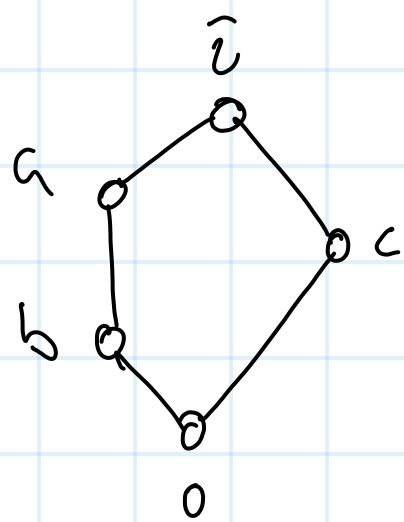
$x_1 x_2 x_3 \vee (y_1 y_2 y_3 \wedge z_1 z_2 z_3)$

③ $\wp_n$ es Distributivo

4 Pentágono

$a \wedge (b \vee c) = a \wedge \hat{1} = a$

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee 0 = b$

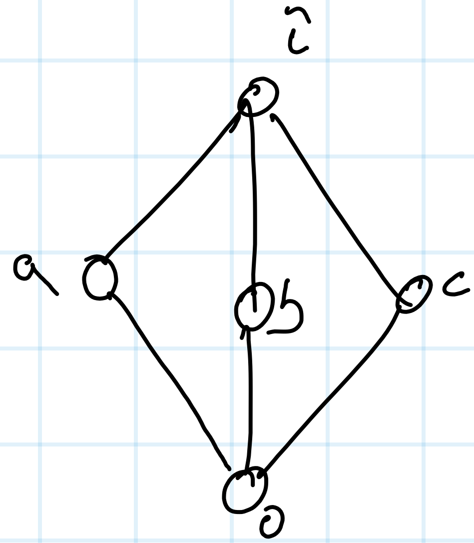


5 Diamante

$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$

$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = \hat{1} \wedge \hat{1}$

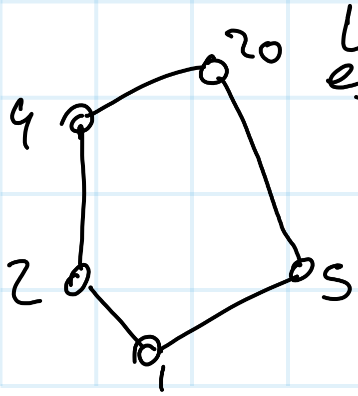
$= \hat{1}$



- **Teorema** = L es distributivo sí y solo si no tiene un subretículo isomorfo al pentágono o diamante

- **Ejemplo** = D_{180}

$L = \{1, 2, 4, 5, 20\}$



L no es subretículo

$2 \vee 5 = 10$

$\Downarrow$

no está en L

- **Ejemplo** = pentágono

Complemento de c $\begin{cases} c \vee b = \hat{1} \\ c \wedge b = 0 \end{cases}$

a

b

$c \vee a = \hat{1}$

$c \wedge a = 0$

- Propiedad de retículos distribuidos

Todo elemento tiene, como mucho, un complemento

3. Álgebra de boole $(B, \vee, \wedge, I, 0, \bar{\cdot})$

Un retículo acotado complementado y distributivo

a) operaciones $\vee$ $\wedge$
- Asociativas
- Distributivas
- Conmutativas
- Idempotentes
- Absorción

b) Máximo I y mínimo 0

$a \vee I = I$ $a \vee 0 = a$

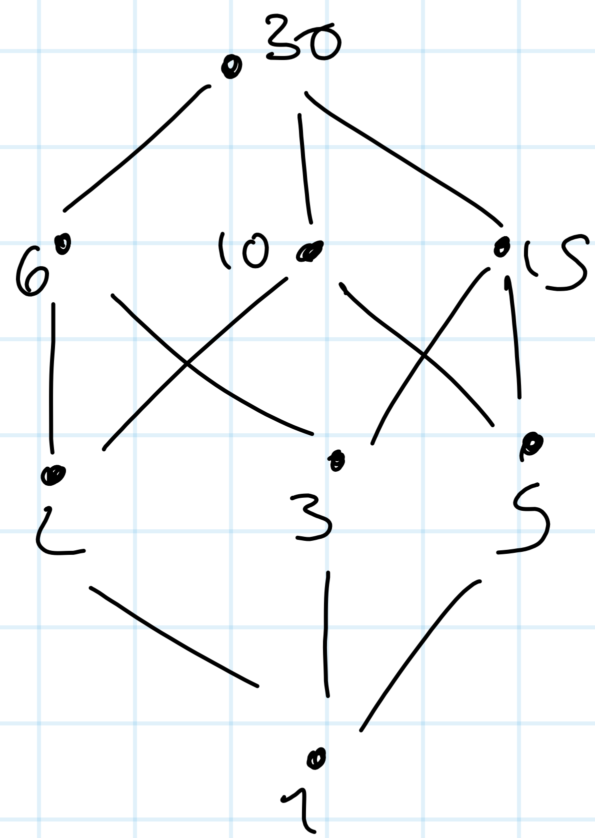
$a \wedge I = a$ $a \wedge 0 = 0$

c) Todo elemento tiene exactamente un complemento (complementario)

$a \longrightarrow \bar{a}$

3,2 Teorema de estructura

- Ejemplo = a) D_{30} álgebra de Boole porque $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ Producto de primos distintos,



- Átomos = 2, 3, 5
  V- irreducibles, 2, 3, 5

b) D_{180}
- Átomos = 2, 3, 5
  V- irreducibles = 2, 3, 5, 4, 9

Estructura

① Todo v-irreducible es átomo

② Todo elemento es supremo de átomos

$x = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los átomos menores que x. Esta descomposición es única (forma normal disyuntiva)

⇒ Si A tiene n átomos

⇒ A tiene 2^n elementos

$\mathbb{B}^3$ y $\mathcal{D}_{30}$ son isomorfos

4. Funciones booleanas

4.1 Funciones booleanas

$\mathbb{B}^n \longrightarrow$ Funciones $\underbrace{f: \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B} = \{0,1\}}_{\text{Función booleana de } n \text{ variables}}$

$\widetilde{\mathcal{F}}_n$ //

- Ejemplo: $\widetilde{\mathcal{F}}_2 = \{ f : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{B} \}$

Problema: Entender $\widetilde{\mathcal{F}}_n$

1. ¿Es $\widetilde{\mathcal{F}}_n$ un álgebra de boole?
   - Dos operaciones: $\wedge$ e $\vee$
   - Orden ¿Cuando $f \leq g$? $f_4 \leq f_7$ $f_1 \not\leq f_{14}$

     $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in \mathbb{B}^2$

$f_4(00) \leq f_7(00)$

$f_4(01) \leq f_7(01)$

$f_4(10) \leq f_7(10)$

$f_4(11) \leq f_7(11)$

- Supremo; $f_2 \overset{+}{\vee} f_8 = f_{10}$

  $CS\{f_2, f_8\} = \{f_{15}, f_{14}, f_{11}, f_{10}\}$

- Infimo; $f_{10} \hat{\cdot} f_4 = f_0$

  $CI\{f_{10}, f_4\} = \{f_0\}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ (Supremo)

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ (Infimo)

<u>Maximo</u> $= f_{15}$

$\hookrightarrow f(x) = 1, \forall x \in B^n$

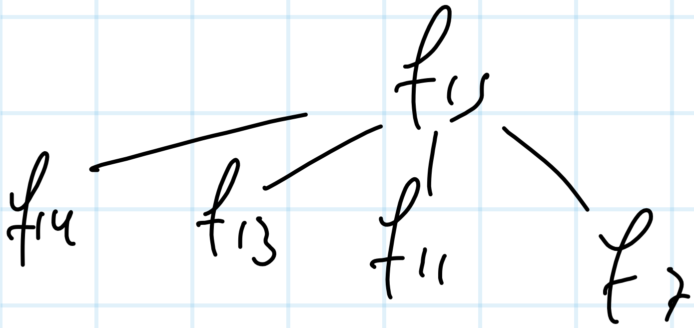
Minimo $= f_0$

$\hookrightarrow f(x) = 0, \forall x \in B^n$

Complemento de $f_{12} = f_3$

$$\left.\begin{aligned} f_{12} + f_3 &= f_{15} \\ f_{12} \cdot f_3 &= f_0 \end{aligned}\right\} \overline{f_{12}} = f_3$$

- Ejemplo -

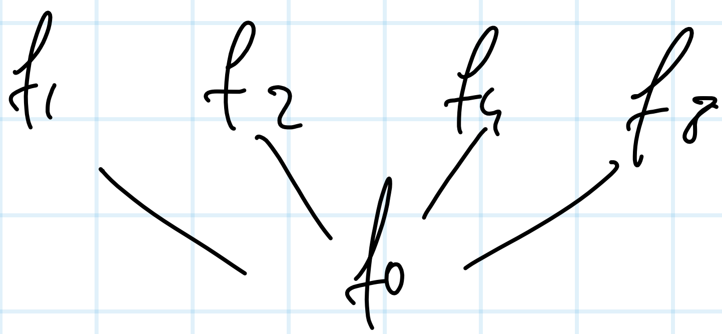


Coatomos de F_n: $f: B^n \to B$ tal que existe $y_0 \in B^n$ que verifica

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y_0 \\ 0 & \text{si } x = y_0 \end{cases}$$

Atomos $= 2^n$

elementos 2^{2^n}



Ejemplo $f_{13} = f_1 + f_4 + f_8$

FND

$f_8 = f_{11} \cdot f_{13} \cdot f_{14}$

FNC

4.2 Expresiones booleanas

¿Puedo expresar una función booleana mediante su fórmula?

$f_{10}(x,y)=y$

$f_{14}(x,y)=x+y$

$f_{14}(00)=0$
$f_{14}(01)=1$
$f_{14}(10)=1$
$f_{14}(11)=1$

- Están formadas por
  - Variables
  - Símbolos de álgebra de Boole
    $1, 0, +, \cdot, \overline{}$

$f_3(x,y)=x$

- Expresiones equivalentes

$f(x,y)=xy \qquad g(x,y)=yx$

$f=g$

$f'(x,y)=\overline{x+y} \equiv g(x,y)=\overline{x}\cdot\overline{y}$

$xyzt+x\overline{y}zt=xzt(\underbrace{y+\overline{y}}_{1})=xzt$

$f_1(x,y) = \overline{x} \cdot \overline{y} \rightarrow$ mintermos

$f_{13} = f_1 + f_4 + f_8 = \overline{x}\,\overline{y} + x\overline{y} + xy$

$f_9 = f_{11} \cdot f_{13} = (\overline{x}+y) \cdot (x+\overline{y}) \rightarrow$ FNC

$f_{11}(x,y) = \overline{x}+y$

00 -> 1
01 -> 1
10 -> 0
11 -> 1

$\rightarrow$ maxitermino

$f_{13}(x,y) = x+\overline{y}$

00 -> 1
01 -> 0
10 -> 1
11 -> 1