1. Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual. Halla un vector unitario ortogonal al subespacio $\mathcal{W}$ generado por el sistema de vectores

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cancel{\vec{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad \vec{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}$ unitario ortogonal al subespacio W

$\vec{v}(x,y,z,t)$ $\quad |\vec{v}|=1=\sqrt{x^2+y^2+z^2+t^2}=1=x^2+y^2+z^2+t^2$

$\vec{v}\perp\vec{w}_1 \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}_1=0$; $x+2y+z=0 \Rightarrow x=-3y$

$\vec{v}\perp\vec{w}_2 \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}_2=0$; $-y+z=0 \Rightarrow y=z$

$\vec{v}\perp\vec{w}_3 \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}_3=0$; $x+y+2z-t=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3y+y+2z-t=0$; $t=0$

$(-3y)^2+y^2+y^2+0=1$

$11y^2=1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{1}{11}}$

$x=\frac{-3\sqrt{11}}{11}$ $\quad t=0$

$y=\frac{\sqrt{11}}{11}$ $\quad z=\frac{\sqrt{11}}{11}$

2. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual consideramos el subespacio vectorial $\mathcal{U}$ generado por el sistema de vectores

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\-2\\3\\-2\end{pmatrix}$$

a) Halla una base del complemento ortogonal de $\mathcal{U}$ y sus ecuaciones cartesianas.

b) Dado el vector $\vec{v} = (2,0,1,0)^t$, halla vectores $\vec{v}_1 \in \mathcal{U}$ y $\vec{v}_2 \in \mathcal{U}^\perp$ tales que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

a) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&0&1&0\\3&-2&3&-2\end{pmatrix} \xRightarrow[F_4-3F_1]{F_2-F_1,\ F_3-F_1} \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-3&0&-3\\0&-1&0&-1\\0&-5&0&-5\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&-1\\0&-3&0&-3\\0&-5&0&-5\end{pmatrix} \xRightarrow[F_4+5F_2]{F_3+3F_2} \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ -y-t=0 \end{array}\right\}$ $\dim U^\perp = 2$

$t=\mu$ $\quad y=-\mu$ $\quad (x,y,z,t)=(-\lambda,-\mu,\lambda,\mu)$

$z=\lambda$ $\quad x=-\lambda$

$B_{U^\perp}=\{(-1,0,1,0),\ (0,-1,0,1)\}$

b) $\vec{v}\,(2,0,1,0)^t$

$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$

$\vec{v_1} \in U \quad \vec{v_2} \in U^\perp$

$B_U = \{(1,1,1,1), (0,-1,0,-1)\}$

$B_{\mathbb{R}^4} = \{(1,1,1,1), (0,-1,0,-1), (-1,0,1,0), (0,-1,0,1)\}$

$(2,0,1,0) = \lambda_1(1,1,1,1) + \lambda_2(0,-1,0,-1) + \lambda_3$
$(-1,0,1,0) + \lambda_4(0,-1,0,1)$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 3/2$

$\lambda_3 = -1/2$

$\lambda_4 = 0$

$\lambda_2 = 3/2$

$$(2,0,1,0) = \overbrace{3/2\,(1,1,1,1) + 3/2\,(0,-1,0,-1)}^{\vec{v}_1} + \underbrace{-1/2\,(-1,0,1,0) + 0\cdot(0,-1,0,1)}_{\vec{v}_2}$$

$$\vec{v}_1 = (3/2,\ 0,\ 3/2,\ 0)$$

$$\vec{v}_2 = (1/2,\ 0,\ -1/2,\ 0)$$

3. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual se consideran los subespacios

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{rl} x_1 - x_2 & = 0 \\ 2x_2 - x_3 & = 0 \end{array} \right\}, \quad \mathcal{U}_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| x_1 + ax_2 + bx_3 = 0 \right\}$$

a) Calcula los valores de a y b para que $\mathcal{U}_1$ sea ortogonal a $\mathcal{U}_2$.

b) Halla una base $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{U}_1$ y otra base $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{U}_2$ tales que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{U}_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ 2x_2 = x_3 \end{array}$$

$x_1 = \lambda$

$x_2 = \lambda$

$x_3 = 2\lambda$

$B_{u_1} = \{(1,1,2)\}$

$\mathcal{U}_2$

$x_1 + ax_2 + bx_3 = 0$

$x_1 = -ax_2 - bx_3 = -a\lambda - bt$

$x_3 = t$

$x_2 = \lambda$

$B_{\vec{u}_2} \{(-a,1,0),(-b,0,1)\}$

$(1,1,2) \cdot (-a,1,0) = 0$

$-a + 1 = 0; \; a = 1$

$(1,1,2) \cdot (-b,0,1) = 0 \Rightarrow -b + 2 = 0 \quad b = 2$

$B_{u_1}\{(1,1,2)\}$ $B_{u_2}\{(-1,1,0),(-2,0,1)\}$

$B_{u_1} \cup B_{u_2} = \{(1,1,2),(-1,1,0),(-2,0,1)\}$

x ortogonal

$\vec{w_1} = \vec{v_1} = (1,1,2)$

$$\vec{w_2} = \vec{v_2} - \frac{\langle \vec{v_2}, \vec{w_1} \rangle}{\langle \vec{w_1}, \vec{w_1} \rangle} \cdot \vec{w}_1 = (-1,1,0)$$

$\langle \vec{v_2}, \vec{w_1} \rangle = 0$

$$\vec{w_3} = \vec{v_3} - \frac{\langle \vec{v_3}, \vec{w_1} \rangle}{\langle \vec{w_1}, \vec{w_1} \rangle} \cdot \vec{w_1} - \frac{\langle \vec{v_3}, \vec{w_2} \rangle}{\langle \vec{w_2}, \vec{w_2} \rangle} \cdot \vec{w}_2 =$$

$\langle \vec{v_3}, \vec{w_1} \rangle = -2+0+2 = 0$

$\langle \vec{v_3}, \vec{w_2} \rangle = 2$

$\langle \vec{w_2}, \vec{w_2} \rangle = 2$

$= (-2,0,1) - \frac{2}{2}(-1,1,0)$

$= (-1,-1,1)$

$B_{U_1} \cup B_{U_2} = \{(1,1,2), (-1,1,0), (-1,-1,1)\}$

Ortonormal

$\langle \vec{w_1}, \vec{w_1} \rangle = 6$

$\langle \vec{w_2}, \vec{w_2} \rangle = 2$

$\langle \vec{w_3}, \vec{w_3} \rangle = 3$

$$f_1 = \frac{\vec{w_1}}{\|\vec{w_1}\|} = \left(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}\right)$$

$$f_2 = \frac{\vec{w_2}}{\|\vec{w_2}\|} = \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right)$$

$$f_3 = \frac{\vec{w_3}}{\|\vec{w_3}\|} = \left(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)$$

4. En el espacio $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual, halla una base ortonormal para el subespacio $\mathcal{U}$ generado por el sistema de vectores

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\{(1,2,-1,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\}$$

$$\vec{w_1} = \vec{v_1}$$

$$\vec{w_2} = \vec{v_2} - \frac{\langle \vec{v_2}, \vec{w_1} \rangle}{\langle \vec{w_1}, \vec{w_1} \rangle} \cdot (\vec{w_1}) = (0,1,1,0) - \frac{1}{6}(1,2,-1,0) =$$

$$\langle \vec{v_2}, \vec{w_1} \rangle = 2 - 1 = 1$$

$$\langle \vec{w_1}, \vec{w_1} \rangle = 6$$

$$= (0,1,1,0) - (1/6, 2/3, -1/6, 0)$$

$$= (-1/6, 1/3, 7/6, 0)$$

5. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la forma $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 + 2x_3y_1 + 6x_2y_2 + 2x_1y_3 + 4x_3y_3$$

a) Estudia si es un producto escalar. Determina, si es posible, una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t A \vec{y}$.

b) En caso afirmativo, halla una base ortonormal respecto de este producto escalar a partir de la base canónica.

Producto escalar $\begin{cases} \text{bilineal} \\ \text{simetrica} \\ \text{definida positiva} \end{cases}$

$\varphi(e_1, e_1)$

$B_c \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

6. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_1[t]$ con el producto escalar $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$:

a) Calcula el ángulo que forman $p(t) = t + 3$ y $q(t) = 2t + 4$

b) Determina los valores de α tales que $p(t) = t + \alpha$ y $q(t) = t - \alpha$ son ortogonales.

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)\, q(t)\, \partial t$$

$$\cos\alpha = \frac{\langle p, q\rangle}{\|p\| \cdot \|q\|}$$

$$p(t) = t+3$$
$$q(t) = 2t+4$$

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p\rangle}$$

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 (t+3)(2t+4)\, \partial t$$

$$\int_0^1 2t^2 + 10t + 12\ \partial t = \left[\frac{2t^3}{3} + 5t^2 + 12t\right]_0^1$$

$$\frac{2}{3} + 5 + 12 = \frac{53}{3}$$

$$\langle p, p\rangle = \int_0^1 (t+3)(t+3) \int_0^1 t^2 + 6t + 9 \left[\frac{t^3}{3} + 3t^2 + 9t\right]_0^1$$

$\sqrt{37}/3$

$\left\| \vec{q} \right\| = \sqrt{\frac{76}{3}}$