1. $G = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\quad *$

$$G \times G \longrightarrow$$

$$(x, y) \longrightarrow x * y = x + y + xy$$

a) $(G, *)$ es Grupo abeliano

Si es asociativa y conmutativa

$$(x * y) * z = x * (y * z) \Rightarrow x + (y * z) + x(y * z)$$

$$x + y + z + yz + xy + xz + xyz$$

$$\Downarrow$$

$$(x * y) + z + (x * y) z$$

$$x + y + xy + z + xz + yz + xyz$$

Si es asociativo

Elemento neutro

$x * e = x$ $\qquad e * x = x$

$x + e + xe = x$ $\qquad e + x + ex = x$

$\boxed{e = 0}$ $\qquad e = 0$

Tiene inverso

$$x * x' = e = 0$$

$$x + x' + xx' = 0$$

$$x' + xx' = -x$$

$$x'(1 + x) = -x$$

b) $2 * x * 3 = 35$

$(2 + x + 2x) * 3 = 35$

$2 + x + 2x + 3 + 6 + x3 + 2x3 = 35$

$12x + 11 = 35$

$12x = 24$

$\boxed{x = 2}$

2. En el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ se define la operación binaria

$$x * y = \frac{x \cdot y}{2}$$

Estudia si $(\mathbb{R} - \{0\}, *)$ es un grupo.

$(x * y) * z = x * (y * z)$

$\frac{(x * y) \cdot z}{2} = \frac{x \cdot \left(\frac{y \cdot z}{2}\right)}{2}$

$\frac{x \cdot y \cdot z}{4} = \frac{x \cdot y \cdot z}{4}$

Es conmutativo

Elem neutro

$x * e = x$

$\frac{x \cdot e}{2} = x$

$\boxed{e = 2}$

$x * x' = e$

$\frac{x \cdot x'}{2} = 2 \; ; \; \frac{x}{2} \cdot x' = 2 \; \frac{4}{x}$

3. En el conjunto $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ se considera una operación binaria $*$ dada por

$*$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	f	c	d
b	b	e	a	d	f	c
c	c	d	f	e	a	x
d	d	f	g	b	e	g
f	f	c	d	a	b	e

Completa la tabla anterior para que $(G, *)$ sea un grupo. ¿Es abeliano?

es asociativo tiene elem neutro — NO

no es conmutativo

4. Sea S_3 el conjunto de las permutaciones de 3 elementos.

$a)$ Demuestra que $(S_3, \circ)$ es un $\boxed{\text{grupo de orden 6}}$ no conmutativo. es decir tiene

$b)$ Halla un subgrupo de S_3 que sea conmutativo.

No es simétrico = no es conmutativo

	123	132	231	213	312	321
123	123	132	231	213	312	321
132	132	123	321	312	213	231
231	231	213	312	321	123	132
213	213	231	132	123	321	312
312	312	321	123	132	231	213
321	321	312	213	231	132	123

$[3,2,1] \circ [1,3,2] = [3,1,2]$

$[1,3,2] \circ [3,2,1] = [2,3,1]$

b) $\langle [2,1,3] \rangle = \{[2,1,3], [1,2,3]\}$

5. Sea $(S_5, \circ)$ el grupo de las permutaciones de 5 elementos y sean $\sigma, \rho \in S_5$

$$\sigma = [3, 5, 2, 1, 4] \qquad \rho = [3, 1, 4, 2, 5]$$

Halla $(\sigma \circ \rho)^{-1}$ y $(\rho \circ \sigma)^{-1}$.

$S_5 = \{[3,5,2,1,4], [3,1,4,2,5]\}$

1 2 3 4 5

$(\sigma \circ \rho)^{-1} = [2,3,1,5,4]^{-1} = [3,1,2,5,4]$

1 2 3 4 5

$(\rho \circ \sigma)^{-1} = [4,5,1,3,2]^{-1} = [3,5,4,1,2]$

6. Hemos visto que el subconjunto de $\mathbb{Z}$ formado por los números pares constituyen un subgrupo de $\mathbb{Z}$, estudia si el subconjunto de los número impares también es un subgrupo.

Los impares no contienen al 0 que es el elemento neutro $\Rightarrow$ no es subgrupo

7. Demuestra las siguientes propiedades

a) Si $(G, *)$ es un grupo tal que $x^2 = e$ para todo $x \in G$, entonces es abeliano.

b) Si $(G, *)$ es un grupo tal que $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$ para todo $x, y \in G$, entonces es abeliano.

a) $x^2 = e \quad x \in G$

$x \cdot x^{-1} = e$

$x = x^{-1}$ para todo $x \in G$

b) $x * y = (x^{-1})^{-1} * (y^{-1})^{-1} = (x^{-1} * y^{-1})^{-1} =$

$= ((y * x)^{-1})^{-1} = y * x$

8. Se considera el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ en el que se consideran las operaciones de suma y producto habituales

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Estudia si $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \cdot)$ es anillo unitario.

$F(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Estudia si $(F(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \cdot)$ anillo unitario

elemento neutro $^{+} = 0$

unidad es $\cdot = 1$

Asociativa

$((f+g)+h)(x) = f(x) + (g+h)(x)$

$(f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x)$

$f(x) + g(x) + h(x) =$ '' '' ''

Elemento neutro +

$(f+e)(x) = f(x) + e(x) = f(x)$

$e(x) = 0$

Inverso

$(f + f')(x) = 0$

$f(x) + f'(x) = 0$

$f'(x) = -f(x)$

Conmutatividad

Es abeliano para +

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Para ·

Asociatividad

$((f\cdot g)\cdot h)(x) = (f\cdot(g\cdot h))(x)$

$(f\cdot g)(x)\cdot h(x) = f(x)\cdot(g\cdot h)(x)$

$f(x)\cdot g(x)\cdot h(x) = f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$

iguales

Unidad

$f(x)\cdot u(x) = f(x)$

$u = 1$

Conmutativa

$(f\cdot(g+h))(x) = f(x)\cdot(g+h)(x) = f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot h(x)$

$((f\cdot g)+(f\cdot h))(x) = (f\cdot g)x + (f\cdot h)(x) = f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot h(x)$

9. Estudia qué estructura algebraica tiene el conjunto

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{x + y\sqrt{2}\,;\; x, y \in \mathbb{Z}\right\}$$

con la suma y el producto habituales.

Como es de $\mathbb{R}$, basta ver si $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$ es subgrupo, subanillo o subcuerpo de $\mathbb{R}$

* $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$ es subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$

$$(x_1 + y_1\sqrt{2}) - (x_2 - y_2\sqrt{2}) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

* El producto es una operación interna en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$:

$$(x_1 + y_1\sqrt{2}) \cdot (x_2 + y_2\sqrt{2}) = x_1 x_2 + x_1 y_2\sqrt{2} + x_2 y_1\sqrt{2} + x_2 y_2\sqrt{2}$$

$\in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

El inverso no está necesariamente en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

Por ej. $2 - \sqrt{2}$ No tiene inverso

$$\frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2}{4-2} - \frac{1}{4-2}\sqrt{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Otros sí como $1 + \sqrt{2}$

* Por lo tanto $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es anillo conmutativo y unitario pero no es cuerpo

10. En el conjunto

$$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \; ; \; x, y \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

se consideran la suma y el producto de matrices habituales (definidos a partir de la suma y el producto en $\mathbb{Z}_3$). Estudia si $(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3), +, \cdot)$ es un anillo.

Es un cuerpo. Dado que no esta contenido en un cuerpo conocido, tenemos que comprobar todas las propiedades.

En general, sabemos que las matrices con la suma forman un grupo conmutativo. Tambien sabemos que el producto es asociativo, tiene elemento unidad y distribuye con la suma. Por lo tanto, solo tenemos que ver que el producto es interno en el subconjunto, que es conmutativo y que existe el inverso dentro del subconjunto:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -x_1y_2 - x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & " & \end{pmatrix}$$

es conmutativo

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. En el anillo unitario $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15}, \cdot_{15})$ se considera el subconjunto

$$S = \{0, 3, 6, 9, 12\}$$

Estudia si es un anillo unitario. ¿Es un subanillo de $\mathbb{Z}_{15}$?

* Dado que $S \subset \mathbb{Z}_{15}$, empezamos comprobando si es cerrado para las operaciones, lo que probaría que tiene la misma estructura de $\mathbb{Z}_{15}$. Los elementos de S son:

$$S = \{ n \in \mathbb{Z}_{15} \mid n \equiv 0 \pmod 3 \}$$

$$n, m \in S \Rightarrow n - m = 3k - 3q = 3(k-q) \equiv 0 \pmod 3$$

$$\Rightarrow n - m \in S \qquad -m \text{ opuesto de } m$$

Por lo tanto, $(S, +_{15})$ es subgrupo de $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$

$$n, m \in S \Rightarrow n \cdot m = 3k \cdot 3q = 3(3kq) \equiv 0 \pmod 3$$

$$\Rightarrow n \cdot m \in S$$

Por lo tanto, S es cerrado para el producto y en consecuencia es subanillo de $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15}, \cdot_{15})$
Pero $1 \notin S$, por lo que no es subanillo unitario.

* $6 \cdot 3 = 18 \equiv 3 \pmod{15}$
$6 \cdot 6 = 36 \equiv 6 \pmod{15}$
$6 \cdot 9 = 54 \equiv 9 \pmod{15}$
$6 \cdot 12 = 72 \equiv 12 \pmod{15}$

Por lo tanto, 6 es un elemento unidad para el producto en S, y en consecuencia $(S, +_{15}, \cdot_{15})$ es un anillo unitario.

12. Halla los valores de a en el anillo $\mathbb{Z}_8$ que hacen que la ecuación $ax = a$ tenga solución única.

La ecuación $ax=a$ en $\mathbb{Z}_8$ se corresponde con la congruencia

$$ax \equiv a \pmod 8$$

Por el teorema de Bramagupta (Mat. Discreta), tiene solución si

$$\operatorname{mcd}(a,8) \mid a$$

y es única si $\operatorname{mcd}(a,8)=1$

La primera condición se verifica para todo a y la segunda se verifica para $a \in \{1,3,5,7\}$