1. Estudia cada uno de los sistemas siguientes y halla todas las soluciones (si existen) usando el método de eliminación de Gauss y usando el método de reducción de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 3x - 4y + 6z &= 7 \\ 5x + 2y - 4z &= 5 \\ x + 3y - 5z &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 5z = 3 \\ 3x - 4y + 6z = 7 \\ 5x + 2y - 4z = 5 \end{cases} \xrightarrow{\substack{F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 5F_1}}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 5z = 8 \\ -13y + 21z = -2 \\ -13y + 21z = -10 \end{cases} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{cases} x + 3y - 5z = 8 \\ -13y + 21z = -2 \\ 0 + 0 + 0 = 6 \end{cases}$$

S Incompatible no SOL

5. Halla los valores de a y b tales que el siguiente sistema homogéneo tenga soluciones no triviales.

$$\begin{cases} x - ay + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - y - bz = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -b \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4x3} \qquad |A^*| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + a + 1 = a + 1 = 0$$

$$a = -1$$

Si $a \neq -1$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\boxed{SCD}$

Si $a = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -b \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -b-2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 + 2F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -b-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -b+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-b + 1 = 0$

$b = 1$

$a = -1$ $b = 1$ SCI → soluciones no triviales

$a = -1$ $b \neq 1$ SCD

6. Determina, si existe, la inversa de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$|A| = -3 + 2 - (-1+2) = -2 \neq 0$

$\exists A^{-1}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t$

7. Estudia si es posible encontrar valores para los parámetros α y β tales que tenga solución la ecuación matricial $AX = 2X + B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 1 \\ 3 & 5 & \alpha \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$AX = 2X + B$

$AX - 2X = B$

$(A - 2I)X = B$

$X = (A - 2I)^{-1} B$

8. Estudia la compatibilidad del siguiente sistema en $\mathbb{Z}_3$, en función del parámetro β, y resuélvelo cuando sea posible

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 1 \\ x & + & \beta y & & & = & \beta \\ & & & & \beta z & = & 2\beta+1 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta & 2\beta+1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta+2 & 0 & \beta+2 \\ 0 & 0 & \beta & 2\beta+1 \end{array}\right)$$

$\beta+2=0$

$\beta=1$

Si $\beta=1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ SCI ∞

SI $\beta=0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ SI

Si $\beta=2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ SCD

$2z=1 \Rightarrow z=2$

$y=1$

$x+y=1$ $\quad x=0$