Consideremos la aplicación lineal $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2y+2z \\ 2y-2z \end{pmatrix}$$

Determinar una base de $\operatorname{Ker}\varphi$ y responder: cuál es el cociente resultado de dividir la tercera componente del vector de la base entre la segunda componente.

Matriz asociada a φ en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$-x=0 \Rightarrow x=0$

$z-y=0 \Rightarrow z=y$

$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right.$

Consideremos la aplicación lineal de la pregunta anterior, $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2y+2z \\ 2y-2z \end{pmatrix}$$

Determinar una base de $\operatorname{Im} \varphi$ y responder: tomar el vector de la base con más coeficientes no nulos. ¿Cuál es el cociente resultado de dividir la tercera componente de dicho vector entre su segunda componente?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad -1$$

Consideremos la aplicación lineal de la pregunta anterior, $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2y+2z \\ 2y-2z \end{pmatrix}$$

Consideremos la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinar la matriz asociada a φ en esta base B y responder: ¿Cuánto vale la suma de sus componentes $(3,1)$ y $(2,2)$?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A * P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(P \mid AP) \sim (I \mid A')$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xRightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$F_2 \cdot -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= E7$

$F_1 - F_2 - F_3$

$$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & +1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{matrix} \qquad -5$$

Consideremos la aplicación lineal de la pregunta anterior, $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2y+2z \\ 2y-2z \end{pmatrix}$$

Estudiar si es diagonalizable y responder: ¿Cuánto vale la suma de todos sus autovalores?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda)(-2-\lambda) - 4(-1-\lambda)$$

$$(-1-\lambda)\left[(-2-\lambda)(-2-\lambda)-4\right]$$

$$(-1-\lambda)\quad(+2\lambda+2\lambda+\lambda^2)$$

$$-2\lambda-2\lambda-\lambda^2-2\lambda^2-2\lambda^2-\lambda^3$$

$$\lambda^3+5\lambda^2+4\lambda=0$$

calculadora

$$\lambda = -4 \qquad -1 \qquad 0$$

-5

Consideremos la aplicación lineal de la pregunta anterior, $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2y + 2z \\ 2y - 2z \end{pmatrix}$$

Construir una base formada por autovectores de la siguiente forma: si tenemos los autovalores y autovectores ya calculados del problema anterior, la base será $B' = \{v_0, v_1, v_2\}$, donde v_0 es el autovector para el autovalor más pequeño, v_1 el autovector para el siguiente en orden, etc.

Las fracciones se ponen como números decimales en esta pregunta: por ejemplo, 1/2 = 0,5 y 1/3 = 0,33333.

a. 0,5

b. 1

c. 1

$$A_{\lambda-4} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$3x = 0$

$2y + 2z = 0$

$y = -z$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\lambda_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$-y + z = 0$

$y = z$

$x = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\lambda_{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$