1. **[Hasta 2.5 ptos.]** En el espacio vectorial $\mathbb{Z}_{11}^4$ se considera el subespacio vectorial U cuyas ecuaciones cartesianas son

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+2z+t=0 \end{cases},$$

y el subespacio W generado por el conjunto de vectores $\{(1,1,1,1),(1,0,1,0)\}$. ¿Pertenece el vector $(2,10,2,1)$ a $U+W$?

$$U = \left\{ \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ y+2z+t=0 \end{array} \right\|$$

$z=\mu$

$t=\lambda$

$y=-2\mu-\lambda$

$x=2\mu+\lambda-\mu-\lambda=\mu$

$B_U=\{(1,-2,1,0),(0,-1,0,1)\}$

W Comprobamos que $\{(1,1,1,1),(1,0,1,0)\}$ sea base

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ Sí es

$$U+W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_{U+W}=\{(1,1,1,1),(0,-1,0,-1),(0,0,0,2)\}$

$$(2,10,2,1)=\lambda_1(1,1,1,1)+\lambda_2(0,-1,0,-1)+\lambda_3(0,0,0,2)$$

$2=\lambda_1$

$10=\lambda_1-\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_2=-8$

$2=\lambda_1$

$1=\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3 \Leftrightarrow 2\lambda_3=-9$

$\lambda_3=-9/2$

Sí pertenece a $U+W$

$\mathrm{Dim}\,(U+W)=3$

3. **[Hasta 2.5 ptos.]** ¿Para qué valores de α y β la siguiente matriz con entradas reales es diagonalizable?

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & B & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A - I\lambda|$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & B & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\alpha-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$\alpha = 1$ $\qquad\qquad$ $\alpha = 3$

$\boxed{\begin{matrix}\lambda = 1 \\ \lambda = \alpha \\ \lambda = 3\end{matrix}}$ Mult 1, Mult 1, Mult 1 $\qquad$ $\lambda = 1$ Mult 2, $\lambda = 3$ Mult 1 $\qquad$ $\lambda = 1$ Mult 1, $\lambda = 3$ Mult 2

Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 3$, todos tienen multiplicidad 1, por lo tanto es diagonalizable para cualquier B

Si $\alpha = 1$

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $B \neq 0$ Dim 1 $\quad ma \neq mg$ No

Si $B = 0$ dim 2 $\quad ma = mg$ Si

$\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & \beta & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & \beta & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\beta \neq 0$ dim 1 Sí

Si $\beta = 0$ dim 1 Sí

Si $\alpha = 3$

Si $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $\beta \neq 0$ Dim 1 ma = mg Sí

Si $\beta = 0$ dim 2 ma = mg Sí

Si $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\beta \neq 0$ Dim 1 No

$\beta = 0$ Dim 2 Sí

4. **[Hasta 2.5 ptos.]** En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual se considera el subespacio vectorial V que tiene las siguientes ecuaciones cartesianas:

$$\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ 2x+y-z+3t=0 \end{cases}$$

Calcular una base del subespacio ortogonal $V^\perp$ de V.

$$\left.\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ 2x+y-z+3t=0 \end{cases}\right\} \quad - \quad \begin{matrix} 2x+2y-2\lambda+2\mu=0 \\ 2x+y-\lambda+3\mu=0 \end{matrix}$$

$z=\lambda$

$t=\mu$

$y-\lambda-\mu=0$

$y=\lambda+\mu$

$x=-\lambda-\mu \quad +\lambda-\mu=-2\mu$

Base de V

$\langle(0,1,1,0),(-2,1,0,1)\rangle$

$V^\perp=\langle(0,1,1,0),(-2,1,0,1)\rangle^\perp$

$(x,y,z,t)(0,1,1,0)=0 \Leftrightarrow y+z=0$

$(x,y,z,t)(-2,1,0,1)=-2x+y+t=0$

$\begin{cases} y+z=0 \\ -2x+y+t=0 \end{cases} \Rightarrow y=-z$

$-2x-z+t=0$

$x=-\frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{2}$

$z=\lambda$

$t=\mu$

$V^\perp=\langle(-1/2,-1,1,0),(1/2,0,0,1)\rangle$

1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - a - a + \cancel{\lambda a} + 2a - \cancel{\lambda a} =$$

$$=(1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

$\lambda=1$ Mult 2

$\lambda=2$ Mult 1

$\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_3+F_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a=0$ Dim 2 Sí

Si $a\neq 0$ Dim 1 NO

$\lambda=2$

$$\begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a & a \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$a=0$ Dim 1 Sí

$a\neq 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Dim 1 Sí

b) $a=0$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$(1,0,-1)\ (0,1,0)$

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x+z=0$$

$\lambda = 2$

$(0,1,-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=-z \end{matrix}$$