TEMA 6: Aplicaciones lineales

Homomorfismos de espacios vectoriales

= Aplicaciones lineales

→ Aplicaciones (o funciones) que preservan las operaciones de espacios vectoriales

Compatible suma: $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$

$$V \xrightarrow{f} W$$

$$v_1 \longmapsto f(v_1)$$

$$v_2 \longmapsto f(v_2)$$

$$f(v_1)+f(v_2)$$

$$v_1+v_2 \longmapsto f(v_1+v_2)$$

$\parallel \to$ f es compatible con la suma

Compatible producto: $f(kv)=kf(v)$

$$V \xrightarrow{f} W$$

$$v \longmapsto f(v) \Rightarrow kf(v)$$

$$kv \longmapsto f(kv)$$

$\parallel \to$ f es compatible con el producto

- **Ejemplos** $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x, 2x+y, y)$

$f(2,1,-1) = (2,5,1)$

CS

$f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) =$

$f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2, 2(x_1+x_2)+y_1+y_2, y_1+y_2)$

$\parallel$

$f(x_1+y_1+z_1) + f(x_2, y_2, z_2) = (x_1, 2x_1+y_1, y_1) + (x_2, 2x_2+y_2, y_2)$

$\parallel$

$(x_1+x_2, 2x_1+2x_2+y_1+y_2, y_1+y_2)$

CP

$f(kv) = kf(v)$

$f(k(x,y,z)) = f(kx, ky, kz) = (kx, 2kx+ky, ky)$

$\parallel$

$kf(v) = k(x, 2x+y, y) = (kx, 2kx+ky, ky)$

② $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) \to x^2$

$f(k(x,y)) = (kx)^2$ no es lineal

$\neq$

$k\, f(x,y) = kx^2$

1.2 Aplicaciones lineales, bases y matrices

- Problema: De $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se sabe es lineal que $f(1,0) = (3,-1)$ y $f(0,1) = (-2,3)$

¿Cuanto vale $f(4,2)$? es una base

$(4,2) = 4(1,0) + 2(0,1)$

$f(4,2) = 4(3,-1) + 2(-2,3) = (8,2)$

misma relacion (lineal)

f conserva combinac lineales

Ejemplo Si $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ verifica

$f(1,1,1) = (1,-1)$

$f(0,1,1) = (2,0)$

$f(0,0,1) = (0,1)$

Cuanto vale $f(1,2,3)$

$f(1,2,3) = (1,-1)+(2,0)+(0,1) = (3,0)$

$f(-5,8,17)$? $(-5,8,17) = a(1,1,1)+b(0,1,1)+c(0,0,1)$

$a = -5 \quad b = 13 \quad c = 9$

$f(-5,8,17) = -5(1,-1)+13(2,0)+9(0,1) = (21,14)$

6 $\varphi: \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$

$\varphi(1) = 1 + t^2$

$\varphi(t) = t + t^2$

$\varphi(t^2) = 1 + t + 2t^2$

$f(x, y) = x(3, -1) + y(-2, 3)$

$(3x - 2y, -x + 3y)$

Matriz de una aplicacion lineal

$$V_1 \xrightarrow{f} V_2$$

$$\begin{array}{ccc} \cup\!\!\mid & & \cup\!\!\mid \\ B_1 & & B_2 \end{array}$$

Bases

$M(f, B_1, B_2) =$

= Imágenes de B_1 por columnas

- Ejemplo $f: (\mathbb{Z}_5)^2 \longrightarrow (\mathbb{Z}_5)^3$

$f(x,y) = (3x, 2x+3y, 4x)$

$B_1 = \{(2,1), (3,2)\}$

$B_2 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$f(2,1) = (1,2,3)_{B2}$

$f(3,2) = (4,2,2)_{B2}$

2 NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Si $f: V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ \operatorname{Ker} f & & \operatorname{Im} f \end{array}$$

1. Núcleo de f: $\operatorname{Ker}(f)$, $N_V(f)$

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

2. Imagen de f: Recorrido de la función

$$\operatorname{Im} f = \{w \in W \mid w = f(v)\}$$

- Ejemplo = $f: (\mathbb{Z}_7)^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}_7)^3$

$$f(x,y,z) = (3x+4y+2z,\ 5x+y+3z,\ 4y+6z)$$

1. $(1,5,4) \in \operatorname{Ker} f$? No

$$f(1,5,4) = (3,1,2) \neq (0,0,0)$$

② $(1,5,4) \in \mathrm{Im} f$?

$(1,5,4) = (3x+4y+2z, 5x+y+3z, 4y+6z)$

$$\begin{cases} 1 = 3x+4y+2z \\ 5 = 5x+y+3z \\ 4 = 4y+6z \end{cases}$$

→ SI ∉ NO

→ SC Sí

- Cálculo del nucleo $(0,0,0)$

$$\begin{cases} 0 = 3x+4y+2z \\ 0 = 5x+y+8z \\ 0 = 4y+6z \end{cases} \xrightarrow{5E_1} \begin{cases} 0 = x+6y+3z = 0 \\ 0 = 5x+y+8z \\ 0 = 4y+6z \end{cases} \xrightarrow{2E_1+E_2}$$

$$\begin{cases} 0 = x+6y+3z \\ 0 = 6y+2z \\ 0 = 4y+6z \end{cases} \xrightarrow{6E_2} \begin{cases} 0 = x+6y+3z \\ 0 = y+5z \\ 0 = 4y+6z \end{cases} \xrightarrow{3E_2+E_3}$$

$$\begin{cases} 0 = x+6y+3z \\ 0 = y+5z \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

incog ecuaciones

$\dim(\ker f) = 3 - 2 = 1$

$\text{Base} = \{(6,2,1)\}$

Calculo imagen (a,b,c) tal que el sistema

$$\begin{cases} a = 3x+4y+2z \\ b = 5x+y+3z \\ c = 4y+6z \end{cases}$$

es compatible

- Truco: Un sistema generador de Im f es la imagen un sistema generador de V

- Ejemplo $f: \underbrace{(\mathbb{Z}_7)^3}_{V} \longrightarrow \underbrace{(\mathbb{Z}_7)^3}_{W} \supseteq \operatorname{Im} f$

Sist generador V: $(1,0,0)\ (0,1,0)\ (0,0,1)$

Sistema generador Im f $\{(3,5,0),(4,1,4),(2,3,6)\}$

Buscamos vectores LI

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3+F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3+F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{(3,5,0),(0,6,4)\}$

$\operatorname{Dim}(\operatorname{Im} f) = 2$

$$(\mathbb{Z}_7)^3 \xrightarrow{f} (\mathbb{Z}_7)^3$$

$$\cup \qquad\qquad \cup$$

$\dim(\ker f) = 1$ $\quad$ $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$

$$V \xrightarrow{f} W$$

$$\cup \qquad\qquad \cup$$

$\ker f$ $\quad$ $\operatorname{Im} f$

$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$

Ejemplo $f: V \longrightarrow W$

a) ¿Es f inyectiva? Monomorfismo

No, el nucleo tiene vectores no nulos

b) ¿Es f sobreyectiva? Epimorfismo

Si todo vector de W es imagen de alguno de V

c) ¿Es f biyectiva? Isomorfismo

- Ejemplo $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$f(x,y,z) = (x,y,z,0)$

¿Es f sobreyectiva?

Los vectores de la imagen tiene la ult coordenada nula

$(1,2,3,4) \Rightarrow$ NO es imagen nadie

$\mathrm{Im} f$

$\dim \mathrm{Im} f = 3$

$t=0$

9) $z: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $B = \{v_1, v_2\}$

$B' = \{w_1, w_2\}$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "M(z{,}B{,}B)"] \arrow[d, "M(B{,}B')"'] & B \arrow[d, "M(B{,}B')"] \\
B' \arrow[u, "M(B'{,}B)"] & B' \arrow[l, "M(z{,}B'{,}B')"]
\end{tikzcd}$$

$M(z, B, B) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$w_1 = 1v_1 + 1v_2 \qquad w_1 (1, 1)_B$

$w_2 = 1v_2 - 1v_1 \qquad w(-1, 1)_B$

$\Big\} \; M(B', B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$M(B, B') = M(B', B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1/2 F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$M(z, B', B') = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$f: (\mathbb{Z}_{11})^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}_{11})^3 \quad f(x,y,z) = (4x+7y+8z,\ 4y+4z,\ 9x+10z)$

$B = \{(8,5,7), (1,7,8), (1,1,1)\}$

$M(f, B, B) = M(f, B)$

$f(8,5,7) = (2, 4, 10)$

$f(1,7,8) = (7, 5, 1)$

$f(1,1,1) = (8, 8, 8)$

② Coordenadas en B

$(2,4,10) = a(B_1) + b(B_2) + c(B_3)$