TEMA 2: CONJUNTOS, FUNCIONES, RECUENTO Y RECURRENCIA

RECUENTO

1 Variaciones

EJEMPLOS: n=4 ; k=2

1.1 Con repetición

```
4^2;
```

16

1.2 Sin repetición

```
load(functs)$
permutation(4,2);
```

12

2 Combinaciones

EJEMPLOS: n=4 ; k=2

2.1 Con repetición

Estructura: binomial(n+k-1,k)

```
binomial(4+2−1,2);
```

10

2.2 Sin repetición

```
binomial(4,2);
```

6

3 Permutaciones

EJEMPLOS: n=4

3.1 Con repetición

(número de veces que aparece cada letra: c-->1 ; a-->2; s-->1)

```
multinomial_coeff(2,1,1);
```

12

```
permutations([c,a,s,a]);
```

{[a,a,c,s],[a,a,s,c],[a,c,a,s],[a,c,s,a],[a,s,a,c],[a,s,c,a],[c,a,a,s],[c,a,s,a],[c,s,a,a],[s,a,a,c],[s,a,c,a],[s,c,a,a]}

3.2 Sin repetición

```
4!;
```

24

```
permutations({c,a,s,a});
```

{[a,c,s],[a,s,c],[c,a,s],[c,s,a],[s,a,c],[s,c,a]}

4 Números de Stirling

EJEMPLO: n=3; k=2 --> Si las cajas fuesen iguales

4.1 Opción 1

```
stirling2(3,2);
```

3

4.2 Opción 2 (calculando las particiones de un conjunto formadas por dos conjuntos)

```
partes32:set_partitions({1,2,3},2);
```

$$\left\{\{\{1\},\{2,3\}\},\{\{1,2\},\{3\}\},\{\{1,3\},\{2\}\}\right\}$$

```
cardinality(partes32);
```

3

EJEMPLO: n=3; k=2 --> Si las cajas fuesen distintas (se está calculando el número de funciones sobreyectivas de 3 elementos de A en 2 elementos de B)

```
factorial(2)·stirling2(3,2);
```

6

5 Funciones generatrices

5.1 Ejemplo 1

f(x):=x1+x2+x3=5

OPCIÓN 1 (0<=xi<=10):

```
gen1:sum(x^n,n,0,10)^3,expand;
```

$$x^{30}+3x^{29}+6x^{28}+10x^{27}+15x^{26}+21x^{25}+28x^{24}+36x^{23}+45x^{22}+55x^{21}+66x^{20}+75x^{19}+82x^{18}+87x^{17}+90x^{16}+91x^{15}+90x^{14}+87x^{13}+82x^{12}+75x^{11}+66x^{10}+55x^{9}+45x^{8}+36x^{7}+28x^{6}+21x^{5}+15x^{4}+10x^{3}+6x^{2}+3x+1$$

```
coeff(gen1,x,5);
```

$$21$$

OPCIÓN 2 (0>=xi)

```
gen2:sum(x^n,n,0,inf)^3;
```

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (x^n)\right)^3$$

```
tay2:taylor(gen2,x,0,10);
```

$$1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+28x^6+36x^7+45x^8+55x^9+66x^{10}+\ldots$$

```
coeff(tay2,x,5);
```

$$21$$

5.2 Ejemplo 2

f(x): x1+x2+x3+x4=24 ; x2,x3 -->nºpares ; x4>=6 ;
2<=x3<10

```
gen3:sum(x^(2·n),n,0,inf)^2·sum(x^n,n,6,inf)·sum(x^n,n,2,9)$
```

```
tay3:taylor(gen3,x,0,30);
```

$$x^8+2x^9+5x^{10}+8x^{11}+14x^{12}+20x^{13}+30x^{14}+40x^{15}+54x^{16}+68x^{17}+86x^{18}+104x^{19}+126x^{20}+148x^{21}+174x^{22}+200x^{23}+230x^{24}+260x^{25}+294x^{26}+328x^{27}+366x^{28}+404x^{29}+446x^{30}+\ldots$$

```
coeff(tay3,x,24);
```

$$230$$

RECURRENCIA

EJEMPLO:

a_(n+4) − 5a_(n+3) + 6a_(n+2) + 4a_(n+1) − 8a_(n) = 0
a_0 =0 ; a_1 =−9 ; a_2 =−1 ; a_3 =21

1 Opción 1

```
eccar1:x^4−5·x^3+6·x^2+4·x−8$
```

NOTA: eccar=ecuación característica

```
solve(eccar1,x);
```

$$[x=-1, x=2]$$

Como el polinomio es de grado 4 y hemos obtenido 2 soluciones, significa que están repetidas. Por tanto calculamos su multiplicidad:

```
multiplicities;
```

$$[1, 3]$$

Significa que el (-1) tiene multiplicidad 1 y el 2 multiplicidad 3, es decir: eccar1 = (x+1)(x-2)(x-2)(x-2) = (x+1)^1 * (x-2)^3

```
sol:(A·n^2+B·n+C)·2^n+D·(−1)^n$
ec1:ev(sol,n=0)=0$
ec2:ev(sol,n=1)=−9$
ec3:ev(sol,n=2)=−1$
ec4:ev(sol,n=3)=21$
solve([ec1,ec2,ec3,ec4],[A,B,C,D]);
```

$$[[A=1, B=-1, C=-3, D=3]]$$

```
e:first(%);
```

$$[A=1, B=-1, C=-3, D=3]$$

```
ev(sol,e),simplify;
```

$$(n^2-n-3)\,2^n+3\,(-1)^n$$

2 Opción 2 -->función predeterminada de wxMaxima

a_(n+4) − 5a_(n+3) + 6a_(n+2) + 4a_(n+1) − 8a_(n) = 0
a_0 =0 ; a_1 =−9 ; a_2 =−1 ; a_3 =21

```
load(solve_rec)$
```

ESTRUCTURA: solve_rec(función entera, "a[n]",condiciones)

```
solve_rec(a[n+4]−5·a[n+3]+6·a[n+2]+4·a[n+1]−8·a[n]=0,a[n],a[0]=0,a[1]=−9, a[2]=
```

$$a_n=(n^2-n-3)\,2^n+3\,(-1)^n$$

EXTRAS

1 Ejercicio1

Hallar cuantos números enteros no superiores a 100 son primos:

1-Enumerar los 100 primeros números:

```
num100:setify(makelist(i,i,1,100));
```

{1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 ,9 ,10 ,11 ,12 ,13 ,14 ,15 ,16 ,17 ,18 ,19 ,20 ,21 ,22 ,23 ,24 ,25 ,26 ,27 ,28 ,29 ,30 ,31 ,32 ,33 ,34 ,35 ,36 ,37 ,38 ,39 ,40 ,41 , 42 ,43 ,44 ,45 ,46 ,47 ,48 ,49 ,50 ,51 ,52 ,53 ,54 ,55 ,56 ,57 ,58 ,59 ,60 ,61 , 62 ,63 ,64 ,65 ,66 ,67 ,68 ,69 ,70 ,71 ,72 ,73 ,74 ,75 ,76 ,77 ,78 ,79 ,80 ,81 , 82 ,83 ,84 ,85 ,86 ,87 ,88 ,89 ,90 ,91 ,92 ,93 ,94 ,95 ,96 ,97 ,98 ,99 ,100 }

2-Enumerar los primos entre esos 100 números:

```
primos:subset(num100,primep);
```

{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67, 71,73,79,83,89,97}

3-Contar cuántos primos hay:

```
cardinality(primos);
```

25

2 Ejercicio 2

Número de enteros positivos menores que 600 que son coprimos con 600:

1-Enumerar los 100 primeros números:

```
num600:setify(makelist(i,i,1,600))$
```

2-Definir la función para hallar los coprimos:

```
cop600(x):=is(gcd(x,600)=1);
```

cop600(x):= is(gcd(x,600)=1)

3-Enumerar los coprimos entre los 600 números:

```
coprimos:subset(num600,cop600)$
```

4-Contar cuántos coprimos hay:

```
cardinality(coprimos);
```

160