TEMA 7: DIAGONALIZACIÓN

Endomorfismo, es decir, aplicaciones lineales $f: V \longrightarrow V$

Podemos tomar solo una base B

$$M(f, B, B) = M(f, B)$$

- Ejemplo: $f: (\mathbb{Z}_{11})^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}_{11})^3$

a) $M(f, B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \{(8,5,7), (1,7,8), (1,1,1)\}$

b) $M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ $\quad B_c = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

¿Por qué $M(f,B)$ es diagonal?

$$f(8,5,7) = (24,15,21) = 3\cdot(8,5,7)$$

$$f(1,7,8) = (7,49,56) = 7\cdot(1,7,8)$$

$$f(1,1,1) = (8,8,8) = 8\cdot(1,1,1)$$

$$(24,15,21) = a(8,5,7) + b(1,7,8) + c(1,1,1) \Rightarrow \begin{matrix} a=3 \\ b=0 \\ c=0 \end{matrix}$$

$$\underbrace{M(f,B)}_{\text{Es diagonal}} = Q^{-1}\cdot \underbrace{M(f,B_c)}_{\text{Matriz de partida}}\cdot Q$$

¿Cuando $f: V \longrightarrow V$ será diagonizable?

Cuando exista una Base de V formada por vectores propios

- Necesitamos calcular valores y vectores propios

Valores y vectores propios

$f: V \longrightarrow V \Longleftrightarrow A = M(f, B_c)$, B_c = Base canonica

$f(v) = A \cdot v$ (expresión matricial de ap lineal)

$Av = \lambda \cdot v \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0$

- Consideramos el sistema

$$(A - \lambda I) \cdot X = 0 \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$rg(A - \lambda I) < n$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\underbrace{|A - \lambda I|}_{\text{Polinomio característico}} = 0}_{\text{Ecuación característica}}$$

- Ejemplo: Diagonalizar $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{Z}_5$

e) valores propios

$$\det\left[\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \quad \det\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & -\lambda & 4 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(4-\lambda)^2 + 2 + 2 - \left(-\lambda + 3 - 2\lambda + 3 - 2\lambda\right)$$

$$= -\lambda(4-\lambda)^2 + 3 = -\lambda(1+\lambda^2-3\lambda)+3$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & -1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad \lambda = 3$$

$$-\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda = \pm 2$$

$\lambda = 2$

$\lambda = 3$ (Multiplicidad)

Vectores propios

$\lambda=2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \begin{matrix} F_3 + F_1 \\ \Rightarrow \\ F_2 - F_1 \end{matrix} \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ \cancel{4y + 4z = 0} \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow \\ F_3 - 2F_2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Subespacio formado por todos los vectores propios asociados a $2 \longrightarrow V_2$

$\dim V_2 = 1 \begin{cases} 2x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $x = 3\lambda$

Base de V_2 $\{(3, 4, 1)\}$

$\lambda = 3$ Subespacio V_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow[F_2 - 2F_1]{F_3 + 2F_1} \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

$$\dim V_3 = 2 \qquad \begin{cases} x = 4\lambda + 3\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Base V_3 $\{(4,1,0),(3,0,1)\}$

dimension de V_{λ_i} = multiplicidad λ_i

$B = \{(3,4,1),(4,1,0),(3,0,1)\}$

es linealmente independiente

Como $\dim(\mathbb{Z}_5)^3 = 3$

B es una base

A es diagonalizable

Matriz diagonal equivalente a A

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz de paso

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Base por columnas

Aplicaciones

1) POTENCIAS

D = Diagonal

D^n = elevar a n los elementos de la diagonal

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2) Teorema de Cayley-Hamilton

Toda matriz verifica la ecuación característica

- Ejemplo $= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = A$

Polinomio característico

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-4-\lambda)+6 = \lambda^2+3\lambda+2 = p(\lambda)$$

Ecuación característica

$\lambda^2+3\lambda+2=0$

Teorema C - H

$A^2+3A+2I=0$

① Calcular inversa $\quad A \cdot A^{-1} = I$

$$A^2+3A=-2I$$

$$A(A+3I)=-2I$$

$$A\cdot\underbrace{\left[-\frac{1}{2}(A+3I)\right]}_{A^{-1}} = I$$

$$-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2&1\\-\frac{3}{2}&1/2\end{pmatrix}$$

¿Cuando A tiene inversa?

- Cuando la ec. característica tiene term. indepe
- Los valores propios son $\neq 0$

② Calcular potencias

Relación lineal

$$A^2=-3A+2I$$

$$A^3=A^2\cdot A=(-3A+2I)\cdot A=-3A^2+2A=$$

$$-3(-3A+2I)+2A=9A-6I+2A=11A-6I$$

Ejercicio (Relección, 8C)

Diagonalizar $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ en función de a y b

Valores propios

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & b \\ 3 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda)(a-\lambda)$$

$\lambda = 5$

$\lambda = -1$

$\lambda = a$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 5$ todos multiplicidad 1 y las dimensiones de los subespacios propios son 1

$\dim V_\lambda \leq$ multiplicidad de λ

Es diagonalizable

Caso $a = -1$

$$\begin{cases} \lambda = 5 & \text{Multiplicidad } 1 \Rightarrow \dim V_5 = 1 \\ \lambda = -1 & \text{''} \quad 2 \quad \dim V_{-1} < 2 \end{cases}$$

Calcular V_{-1}

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = 0 \\ bz = 0 \\ \cancel{3x = 0} \end{cases}$$

$$\dim V_{-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } b \neq 0 \\ 2 & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

si $b = 0$ Diagonizable
$a = -1$

Caso $a = 5$

$$\begin{cases} \lambda = 5 & \text{Mult } 2 \\ \lambda = -1 & \text{Mult } 1 \quad \dim V_1 = 1 \end{cases}$$

Calcular V_5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -6y + bz = 0 \\ x = 0 \end{matrix}$$

$\dim V_5 = 1$

No es diagonizable si $a = 5$

Diagonalizable

- $a \neq -1$, $a \neq 5$
- $a = -1$, $b = 0$