TEMA 8: ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

1 Definiciones

¿Cómo medimos en un espacio vectorial?

- Ejemplo ¿Como medimos en $\mathbb{R}^2$?

- Longitud, norma o módulo

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

- Angulo entre 2 vectores u y v

$$\langle u,v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$$

producto escalar

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Producto escalar

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1+x_2y_2$$

$$\Rightarrow \|(x,y)\| = \sqrt{\langle (x,y),(x,y)\rangle}$$

para medir necesito un producto escalar

-Ejemplo- $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

$B=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}=\{v_1,v_2,v_3\}$

$\langle v_1,v_1\rangle=1 \quad \langle v_1,v_2\rangle=1 \quad \langle v_1,v_3\rangle=1$

$\langle v_2,v_1\rangle=1 \quad \langle v_2,v_2\rangle=2 \quad \langle v_2,v_3\rangle=2$

$\langle v_3,v_1\rangle=1 \quad \langle v_3,v_2\rangle=2 \quad \langle v_3,v_3\rangle=3$

Matriz producto escalar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Simetría

b) Siempre positiva (Definida positiva)

c) Linealidad

$\langle v, w+w'\rangle = \langle v,w\rangle + \langle v,w'\rangle$

Producto escalar en V

Una funcion $\langle -,- \rangle$ $V \times V \to \mathbb{R}$

que cumple

(1) Simetrica

(2) Definida positiva

(3) Linealidad

Podemos medir:

(1) Longitudes, norma

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$$

(2) Angulos entre v, w

$$\cos \theta = \frac{\langle v,w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

¿Como medimos la "longitud" de un polinomio?

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Ejemplo

1. Norma ("longitud") de $p(x) = x+1$

$$\|p\| = \sqrt{\int_0^1 (x+1)^2\,dx} = \sqrt{\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

2. Distancia de $p(x)$ y $q(x) = x-3$

$$d(p(x), q(x)) = \|p(x) - q(x)\| = \|4\| = \sqrt{\int_0^1 4^2\,dx} = 4$$

2 BASES ORTOGONALES Y ORTONORMALES

Si $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \Rightarrow$ la matriz del producto escalar es diagonal

$\Rightarrow B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base ortogonal

Ortogonal = perpendicular = Ángulo 90°

Si $\langle v_i, v_i \rangle = 1 \Rightarrow$ la matriz es I

$\Rightarrow$ Base ortonormal

Ejemplo = $\{\mathbb{R}^3, \langle , \rangle =$ Producto usual

$B = \{\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e_3}\}$

$\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ $\quad \langle e_1, e_2 \rangle = 0$ $\quad \langle e_1, e_3 \rangle = 0$

$\langle e_2, e_1 \rangle = 0$ $\quad \langle e_2, e_2 \rangle = 1$ $\quad \langle e_2, e_3 \rangle = 0$

$\langle e_3, e_1 \rangle = 0$ $\quad \langle e_3, e_2 \rangle = 0$ $\quad \langle e_3, e_3 \rangle = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ejemplo (Método de Gram-Schmidt)

Construir una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ con $\langle , \rangle$ usual a partir de $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$

construimos $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortogonal

$e_1 = (1,1,0)$

$$e_2 = (0,1,1) - \frac{\langle (0,1,1),(1,1,0)\rangle}{\langle (1,1,0),(1,1,0)\rangle} \cdot (1,1,0) =$$

$$= (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (0,1,1) - (1/2, 1/2, 0)$$

$$= (-1/2, 1/2, 1)$$

$$e_3 = (1,0,1) - \frac{\langle (1,0,1),(1,1,0)\rangle}{\langle (1,1,0),(1,1,0)\rangle}(1,1,0) - \frac{\langle (1,0,1),(-1/2,1/2,1)\rangle}{\langle (-1/2,1/2,1),(-1/2,1/2,1)\rangle}$$

$$\cdot (-1/2, 1/2, 1) = (1,0,1) - (1/2, 1/2, 0) - \frac{1/2}{3/4}(-1/2, 1/2, 1)$$

$$= \left(\frac{4}{6}, \frac{-4}{6}, \frac{2}{3}\right) = (2/3, -2/3, 2/3)$$

Base ortogonal $\{(1,1,0),(-1/2,1/2,1),(2/3,-2/3,2/3)\}$

Base ortonormal $\{f_1, f_2, f_3$

$\|(1,1,0)\| = \sqrt{2} \Rightarrow f_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$\|(-1/2, 1/2, 1)\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad f_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$

$\|\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\| = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad f_3\left(1/\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Complemento y Proyección ortogonal

$(V, \langle , \rangle) \longrightarrow E.V$ euclídeo

$U \subseteq V$ subespacio de V

¿Vectores ortogonales a todos los de U?

= Vectores ortogonales a una base de U

- Ejemplo $\begin{cases} \mathbb{R}^4, \langle , \rangle = \text{usual} \\ U = \{(1,1,1,1), (1,-2,1,-2), (1,0,1,0), (3,-2,3,-2)\} \end{cases}$

Determinar todos los vectores ortogonales a U

- Base de U

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - 3F_1]{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - 5F_3]{F_2 - 3F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B\{(1,1,1,1), (1,0,1,0)\} \quad \dim U = 2$$

Vectores (x,y,z,t) ortogonales a B

$\langle (x,y,z,t),(1,1,1,1)\rangle = 0$

$\langle (x,y,z,t),(1,0,1,0)\rangle = 0$

$\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x+z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Ecuaciones cartesianas

ortogonal de $U = U^{\perp} \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+z=0 \end{cases}$

$\dim U^{\perp} = 2$ $\quad 4-2=2$

$U \cap U^{\perp} = 0$

$U + U^{\perp} = \mathbb{R}^4$

$\dim(U+U^{\perp}) = \dim U + \dim U^{\perp} - \dim(U \cap U^{\perp}) = 4$