

Clase 4:

Probabilidades de un evento

Definiciones

- A continuación vamos a considerar sólo aquellos experimentos para los que el EM contiene un número **finito de elementos**. La **probabilidad de la ocurrencia** de un evento que resulta de tal experimento estadístico se evalúa por medio de un conjunto de números reales denominados **pesos o probabilidades** que van de 0 a 1.
- Para todo punto en el EM asignamos una probabilidad tal que la suma de todas las probabilidades es 1.
- Si tenemos razón para creer que es bastante probable que ocurra cierto punto muestral, cuando se lleva a cabo el experimento, la probabilidad que se le asigne debe ser **cercana a 1**.
- Por otro lado, una probabilidad **cercana a 0** se asigna a un punto muestral que no es probable que ocurra.
- En muchos experimentos, como lanzar una moneda o un dado, todos los puntos muestrales tiene la **misma probabilidad de ocurrencia** y se les asignan probabilidades iguales.

...Definiciones

- Para puntos fuera del EM, es decir, para eventos simples que no es probable que ocurran, asignamos una probabilidad de 0.
- Para encontrar la **probabilidad de un evento A**, sumamos todas las probabilidades que se asignan a los puntos muestrales en A. Esta suma se denomina probabilidad de A y se denota con $P(A)$.
- La probabilidad de un evento A es la suma de los pesos de todos los puntos muestrales en A. Por lo tanto:

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\emptyset) = 0 \quad \text{y} \quad P(\Omega) = 1$$

- **Ejemplo 1:** Se lanza una moneda dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos una cara?

El EM para este experimento es $\{CC, CS, SC, SS\}$. Si la moneda está balanceada, cada uno de estos resultados tendrá la misma probabilidad de ocurrencia. Si A es el evento de que ocurra al menos una cara, entonces $A = \{CC, CS, SC\}$ y $P(A) = 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4$.

...Definiciones

- **Ejemplo 2:** Se carga un dado de forma que sea dos veces más probable que salga un número par que uno impar. Si E es el evento de que ocurra un número menor que 4 en un solo lanzamiento del dado, calcular $P(E)$.

Sabemos que el EM es $\{1,2,3,4,5,6\}$. Asignamos una probabilidad de w a cada número impar y una probabilidad de $2w$ a cada número par. Como la suma de las probabilidades debe ser 1, tenemos $9w=1$ o $w=1/9$. Por lo tanto $E=\{1,2,3\}$ y $P(E)=1/9+2/9+1/9=4/9$.

- Si un experimento puede tener como resultado cualquiera de N diferentes resultados igualmente probables, y si exactamente n de estos resultados corresponden al evento A , entonces la probabilidad del evento A es:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

...Definiciones

- **Ejemplo 3:** Un surtido de dulces contiene seis mentas, cuatro chicles y tres chocolates. Si una persona hace una selección aleatoria de uno de estos dulces, calcular la probabilidad de sacar a) una menta y b) un chicle o un chocolate.

Si M , T y C representan los eventos de que la persona seleccione, respectivamente, una menta, un chicle y un chocolate. El número total de dulces es 13, los cuales tiene la misma probabilidad de ser seleccionados.

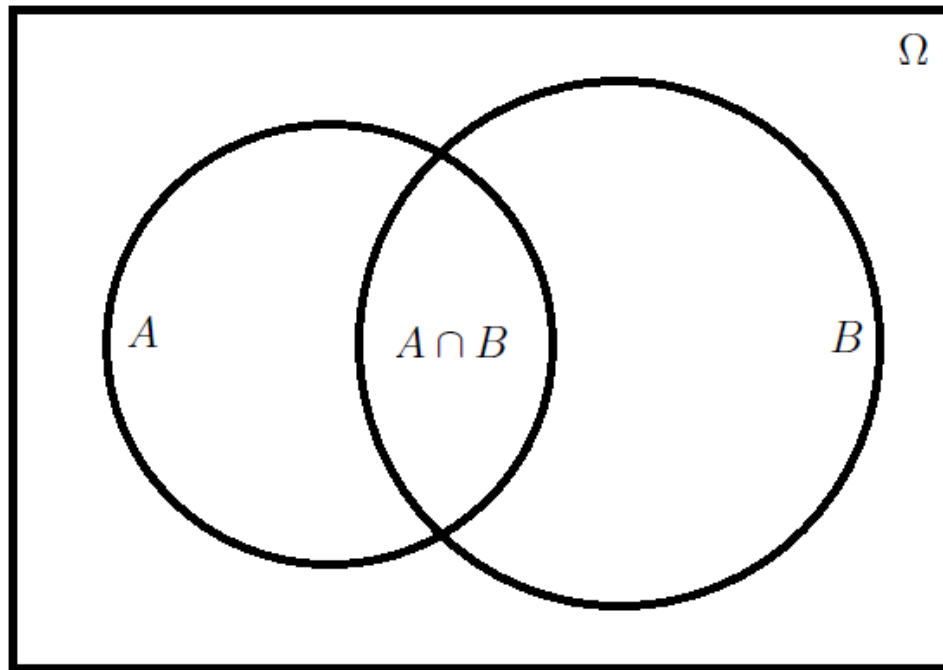
a) Como seis de los 13 dulces son mentas, $P(M)=6/13$.

b) Como siete de los 13 dulces son chicles o chocolates, $P(T \cup C)=7/13$

Reglas Aditivas

- A menudo es más fácil calcular la probabilidad de algún evento a partir del conocimiento de las probabilidades de otros eventos. A continuación estudiaremos varias leyes importantes que con frecuencia simplifican el cálculo de probabilidades.
- Si A y B son eventos *cualesquiera*, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



...Reglas Aditivas

- Si A y B son **mutuamente excluyentes**, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son **mutuamente excluyentes**, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

- Si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ es **una partición** de un EM, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(\Omega) = 1$$

- Para tres eventos A, B y C ,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

...Definiciones

- **Ejemplo 4:** La probabilidad de que Paula apruebe Estadística es $\frac{2}{3}$ y la probabilidad de que apruebe Ecuaciones Diferenciales es $\frac{4}{9}$. Si la probabilidad de aprobar ambos cursos es $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la probabilidad de que Paula apruebe al menos uno de estos cursos?
Si E es el evento aprobar Estadística y D el evento aprobar Ecuaciones Diferenciales, entonces

$$P(E \cup D) = P(E) + P(D) - P(E \cap D) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{31}{36}$$

- **Ejemplo 5:** ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de siete u once cuando se lanza un par de dados?

Sea A el evento de que ocurre siete y B el evento de que salga once. Como todos los puntos muestrales son igualmente probables, $P(A)=\frac{1}{6}$ y $P(B)=\frac{1}{18}$. Los eventos A y B son **mutuamente excluyentes**, pues un total de 7 y 11 no pueden ocurrir en el mismo lanzamiento.

...Definiciones

- Por lo tanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$
- **Ejemplo 6:** Si las probabilidades de que una persona que compra un automóvil nuevo elija el color verde, blanco, rojo o azul son, respectivamente, 0.09, 0.15, 0.21 y 0.23. ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador dado adquiera un automóvil nuevo que tenga uno de esos colores?

Sean V, B, R y A los eventos de que un comprador seleccione, respectivamente, un automóvil verde, blanco, rojo o azul. Como estos eventos son **mutuamente excluyentes**,

$$\begin{aligned} P(V \cup B \cup R \cup A) &= P(V) + P(B) + P(R) + P(A) \\ &= 0.09 + 0.15 + 0.21 + 0.23 \\ &= 0.68 \end{aligned}$$

...Definiciones

- A veces es más difícil calcular la probabilidad de que **ocurra un evento** que calcular la probabilidad de que el **evento no ocurra**. Si este es el caso para algún evento A, simplemente calculamos primero $P(A')$ y después, usamos lo siguiente, para calcular $P(A)$ por sustracción.
- Si A y A' son eventos **complementarios**, entonces $P(A) + P(A') = 1$
- **Ejemplo 7:** Si las probabilidades de que un mecánico automotriz de servicio a tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o más autos en un día de trabajo son 0.12, 0.19, 0.28, 0.24, 0.10 y 0.07, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que de servicio al menos a cinco autos el día siguiente de trabajo?

Sea S el evento de que **al menos** cinco autos reciban servicio. Luego $P(S)=1-P(S')$ donde S' es el evento de que **menos** de cinco autos reciban servicio.

Como $P(S')=0.12+0.19=0.31$, entonces $P(S)=1-0.31=0.69$.

Probabilidad Condicional

- La probabilidad de que un evento B ocurra cuando se sabe que ya ocurrió algún evento A se llama **probabilidad condicional** y se denota $P(B|A)$. Este símbolo por lo general se lee la probabilidad de que ocurra B dado que ocurrió A o simplemente la probabilidad de B dado A.
- La **probabilidad condicional** de B, dado A, que se denota $P(B|A)$, se define como
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$
- Ejemplo 8:** Supongamos que nuestro EM es una muestra de adultos de Copiapó que cumplen con los requisitos para obtener un grado en la Facultad de Ingeniería. Debemos clasificarlos de acuerdo con su género y situación laboral.

	Empleado	Desempleado	Total
Hombre	460	40	500
Mujer	140	260	400
Total	600	300	900

...Probabilidad Condicional

- Uno de estos individuos se seleccionará al azar para que realice un viaje a través del país para promover las ventajas de establecer industrias nuevas en Copiapó. Nos interesan los siguientes eventos:
- **H: se elige un hombre, E: el seleccionado tiene empleo.**
- Al utilizar el EM reducido E, tenemos

$$P(H|E) = \frac{460}{600} = \frac{23}{30}$$

- Para verificar este resultado, notar que

$$P(E) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad P(E \cap H) = \frac{460}{900} = \frac{23}{45}$$

de aquí

$$P(H|E) = \frac{23/45}{2/3} = \frac{23}{30}$$

...Probabilidad Condicional

- **Ejemplo 9:** La probabilidad de que un vuelo programado normalmente salga a tiempo es $P(D)=0.83$, la probabilidad de que llegue a tiempo es $P(A)=0.82$ y la probabilidad de que salga y llegue a tiempo $P(D \text{ y } A)=0.78$. Calcular la probabilidad de que un avión a) llegue a tiempo, dado que salió a tiempo y b) salga a tiempo, dado que llegó a tiempo.

a) La probabilidad de que un avión llegue a tiempo, dado que salió a tiempo es

$$P(A|D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.94$$

b) La probabilidad de que un avión saliera a tiempo, dado que llegó a tiempo es

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$$

...Probabilidad Condicional

- **Ejemplo 10:** Sea el experimento de lanzar un dado, a) calcular la probabilidad de obtener un 2 y b) supongamos que sabemos que el resultado es par, ¿cuál es ahora la probabilidad de obtener un dos?
- **Ejemplo 11:** Sea el experimento de lanzar una moneda dos veces, a) ¿cuál es la probabilidad de que salga cara en el segundo lanzamiento? y b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara en el segundo lanzamiento dado que salió cara en el primer lanzamiento?
- **Comparar los resultados en los dos ejemplos anteriores.**
- En el **Ejemplo 11**, la información no cambió la probabilidad buscada, es decir saber que salió cara en el primer lanzamiento no cambió la probabilidad de que salga cara en el segundo lanzamiento. Esto es así porque los lanzamientos de la moneda son **eventos independientes**.

Eventos Independientes

- En el **Ejemplo 9**, $P(D|A)$ difiere de $P(D)$. Esto sugiere que la ocurrencia de A influye en D y esto realmente se espera en este caso. Sin embargo, consideremos la situación donde tenemos los eventos A y B tal que $P(A|B)=P(A)$.
- En otras palabras, la ocurrencia de B no tiene impacto en las probabilidades de ocurrencia de A. Aquí la ocurrencia de A es **independiente** de la ocurrencia de B.
- Dos eventos A y B son **independientes** si y sólo si

$$P(B|A) = P(B) \quad \text{y} \quad P(A|B) = P(A)$$

De otra forma, A y B son **dependientes**.

Reglas Multiplicativas

- Si en un experimento pueden ocurrir los eventos A y B, entonces

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

- **Ejemplo 12:** Supongamos que tenemos una caja de fusibles que contiene 20 unidades, de las cuales cinco están defectuosas. Si se seleccionan dos fusibles al azar y se separan de la caja uno después del otro **sin reemplazar** el primero, ¿cuál es la probabilidad de que ambos fusibles estén defectuosos?

Sean A el evento de que el primer fusible esté defectuoso y B el evento de que el segundo esté defectuoso, entonces interpretamos A y B como el evento de que ocurra A y entonces B ocurre después de que ocurre A. La probabilidad de separar primero un fusible defectuoso es $1/4$, entonces la probabilidad de separar un segundo fusible de los 4 restantes es $4/19$.

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{4}{19}\right) = \frac{1}{19}$$

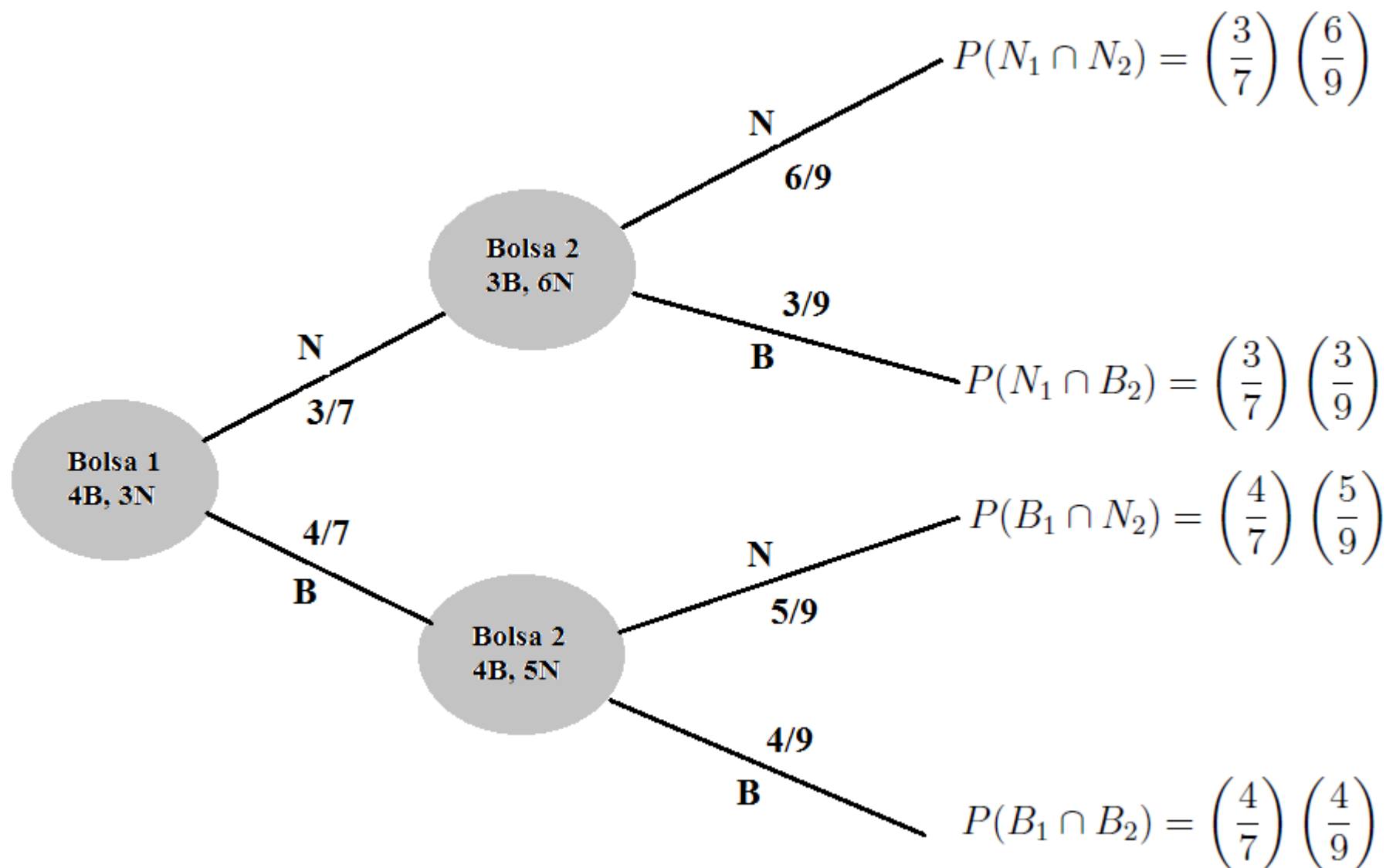
... Reglas Multiplicativas

- **Ejemplo 13:** Una bolsa contiene cuatro bolas blancas y tres negras, y una segunda bolsa contiene tres blancas y cinco negras. Se saca una bola de la primera bolsa y se coloca sin verla en la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que ahora se saque una bola negra de la segunda bolsa?

Sean N_1 , N_2 y B_1 respectivamente, la extracción de una bola negra de la bolsa 1, una negra de la bolsa 2 y una blanca de la bolsa 1. Nos interesa la unión de los eventos **mutuamente excluyentes** (N_1 y N_2) o (B_1 y N_2).

$$\begin{aligned} P((N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap N_2)) &= P(N_1 \cap N_2) + P(B_1 \cap N_2) \\ &= P(N_1)P(N_2|N_1) + P(B_1)P(N_2|B_1) \\ &= \left(\frac{3}{7}\right) \left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{4}{7}\right) \left(\frac{5}{9}\right) = \frac{38}{63} \end{aligned}$$

... Reglas Multiplicativas



... Reglas Multiplicativas

- Dos eventos A y B son *independientes* si sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- **Ejemplo 14:** Un pequeño poblado tiene un carro de bomberos y una ambulancia para emergencias. La probabilidad de que el carro de bomberos esté disponible cuando se necesite es 0.98 y la probabilidad de que la ambulancia esté disponible cuando se requiera es 0.92. En el caso que resulte un herido de un edificio en llamas, calcular la probabilidad de que la ambulancia y el carro de bomberos estén disponibles.

Sean A y B los respectivos eventos de que estén disponibles el carro de bomberos y la ambulancia. Entonces

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.98)(0.92) = 0.9016$$

...Definiciones

- **Ejemplo 15:** Se carga una moneda de modo que la cara tenga una posibilidad de ocurrir dos veces mayor que el sello. Si se lanza tres veces la moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos sellos y una cara?

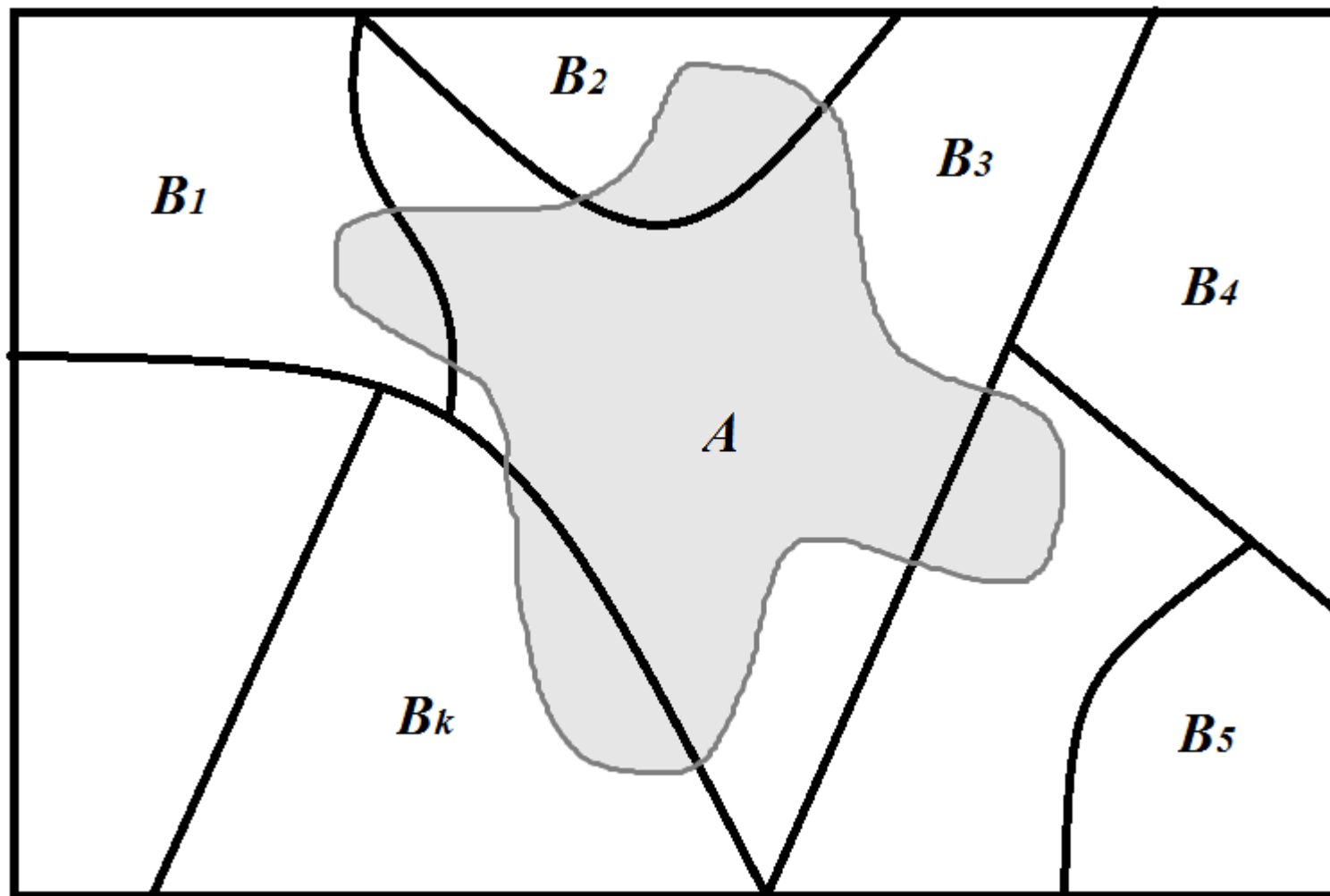
Si asignamos probabilidades de w y $2w$ para obtener un sello y una cara, respectivamente, tenemos $w=1/3$. Por lo tanto $P(S)=1/3$ y $P(C)=2/3$. Sea A el evento de obtener dos sellos y una cara en los tres lanzamientos de la moneda, es decir: $A=\{SSC,SCS,CSS\}$ y como los resultados en cada uno de los lanzamientos **son independientes**,

$$P(SSC) = P(S \cap S \cap C) = P(S)P(S)P(C) = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{27}\right)$$

en forma similar $P(SCS)=P(CSS)=2/27$.

Por lo tanto $P(A)=2/27+2/27+2/27=2/9$.

Regla de Bayes



Partición de un espacio muestral

...Regla de Bayes

- Si los eventos B_1, B_2, \dots, B_k constituyen una **partición del EM** tal que $P(B_i) \neq 0$ para $i=1,2,\dots,k$, entonces para cualquier evento A del EM se tiene

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)$$

- Este resultado se denomina **teorema de probabilidad total** o **regla de eliminación**.
- **Ejemplo 16:** En cierta planta de montaje, tres máquinas, M1, M2 y M3, montan 30%, 45% y 25% de los productos, respectivamente. Se sabe de la experiencia pasada que 2%, 3% y 2% de los productos ensamblados por cada máquina, respectivamente, tiene defectos. Ahora, supongamos que se selecciona de forma aleatoria un producto terminado, ¿cuál es la probabilidad de que este producto esté defectuoso?

...Regla de Bayes

- Sean los siguientes eventos:

D: el producto está defectuoso

M1: el producto está ensamblado por la máquina 1.

M2: el producto está ensamblado por la máquina 2.

M3: el producto está ensamblado por la máquina 3.

Al aplicar el teorema de la probabilidad total, podemos escribir

$$P(D) = P(M_1)P(D|M_1) + P(M_2)P(D|M_2) + P(M_3)P(D|M_3)$$

$$P(M_1)P(D|M_1) = (0.3)(0.02) = 0.006$$

$$P(M_2)P(D|M_2) = (0.45)(0.03) = 0.0135$$

$$P(M_3)P(D|M_3) = (0.25)(0.02) = 0.005$$

y de aquí $P(D)=0.006+0.0135+0.005=0.0245$.

Ahora, supongamos que se seleccionó un producto de forma aleatoria y es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que fuera hecho por la máquina M3?

...Regla de Bayes

- Regla de Bayes

Si los eventos B_1, B_2, \dots, B_k constituyen una partición del EM donde $P(B_i) \neq 0$ para $i=1,2,\dots,k$, entonces para cualquier evento A en el EM tal que $P(A) \neq 0$

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)}, \quad , r = 1, 2, \dots, k$$

- Del **Ejemplo 16**, si se elige un producto de forma aleatoria y es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que esté ensamblado por la máquina M3?

De la Regla de Bayes,

$$P(M_3|D) = \frac{P(M_3)P(D|M_3)}{P(M_1)P(D|M_1) + P(M_2)P(D|M_2) + P(M_3)P(D|M_3)}$$

...Regla de Bayes

$$P(M_3|D) = \frac{0.005}{0.006 + 0.0135 + 0.005} = \frac{0.005}{0.0245} = \frac{10}{49}$$

- En vista que se seleccionó un artículo defectuoso, este resultado sugiere que probablemente no fue ensamblado con la máquina 3.