ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

24 de Enero de 2023

Estudiante:______________________________ **D.N.I.:**______________ **Grupo:**_____

Ejercicio 1. *Dada la ecuación diofántica:*

$$72x - 250y + 135z = 19$$

a) ¿Tiene alguna solución en la que x vale 5? En caso afirmativo, da tres.

b) ¿Tiene alguna solución en la que z vale 5? En caso afirmativo, da tres.

c) ¿Para qué valores de y tiene solución?

Solución:

a) Sustituimos x por 5, y nos queda entonces la ecuación:

$$72 \cdot 5 - 250y + 135z = 19 \Longrightarrow -250y + 135z = 19 - 72 \cdot 5 \Longrightarrow -250y + 135z = -341.$$

Puesto que $\operatorname{mcd}(-250, 135) = 5$ y -341 no es múltiplo de 5 tenemos que la ecuación no tiene solución. Por consiguiente, no hay ninguna solución en la que x valga 5.

b) Procedemos igual que en el apartado anterior. Sustituimos z por 5.

$$72x - 250y + 135 \cdot 5 = 19 \Longrightarrow 72x - 250y = 19 - 135 \cdot 5 \Longrightarrow 72x - 250y = -656.$$

Ahora tenemos que $\operatorname{mcd}(72, 250) = 2$, y como -656 es múltiplo de 2, la ecuación tiene solución.

La resolvemos:

$72x \equiv -656 \text{ mód } 250 \Longrightarrow 72x \equiv 94 \text{ mód } 250$

Puesto que $\operatorname{mcd}(72, 250) = 2$ dividimos todo por 2.

$36x \equiv 47 \text{ mód } 125$.

Ahora calculamos 36^{-1} mód 125.

	125		0	
	36		1	
$125 = 36 \cdot 3 + 17$	17	3	-3	$0 - 3 \cdot 1 = -3$
$36 = 17 \cdot 2 + 2$	2	2	7	$1 - 2 \cdot (-3) = 7$
$17 = 2 \cdot 8 + 1$	1	8	-59	$-3 - 8 \cdot 7 = -59$

Por lo que $36^{-1} \text{ mód } 125 = -59 \text{ mód } 125 = 66$. Multiplicamos entonces por 66.

$36 \cdot 66x \equiv 47 \cdot 66 \text{ mód } 125 \implies x \equiv 3102 \text{ mód } 125 \implies x \equiv 102 \text{ mód } 125$.

Como nos piden tres soluciones, tomamos $x = 102$, $x = 102 - 125 = -23$ y $x = 102 + 125 = 227$. Y para cada uno de esos valores de x:

$$72 \cdot 102 - 250y = -656 \Longrightarrow 7344 + 656 = 250y \Longrightarrow y = \tfrac{7344+656}{250} = \tfrac{8000}{250} = 32.$$
$$72 \cdot (-23) - 250y = -656 \Longrightarrow -1656 + 656 = 250y \Longrightarrow y = \tfrac{-1656+656}{250} = \tfrac{-1000}{250} = -4.$$
$$72 \cdot 227 - 250y = -656 \Longrightarrow 16344 + 656 = 250y \Longrightarrow y = \tfrac{16344+656}{250} = \tfrac{17000}{250} = 68.$$

Así que las tres soluciones que nos piden en las que $z = 5$ son:

$x = 102$	$x = -23$	$x = 227$
$y = 32$	$y = -4$	$y = 68$
$z = 5$	$z = 5$	$z = 5$

c) Para ver para qué valores de y existe solución, llevamos $-250y$ al miembro de la derecha, y tenemos:

$$72x + 135z = 19 + 250y.$$

Puesto que $\mathrm{mcd}(72, 135) = 9$, tenemos que la ecuación tiene solución si, y sólo si, $19+250y$ es múltiplo de 9.

Esto lo escribimos como $19 + 250y \equiv 0$ mód 9.

$$19+250y \equiv 0 \text{ mód } 9 \Longrightarrow 250y \equiv -19 \text{ mód } 9 \Longrightarrow 7y \equiv 8 \text{ mód } 9 \Longrightarrow 7\cdot 4y \equiv 8\cdot 4 \text{ mód } 9 \Longrightarrow y \equiv 5 \text{ mód } 9.$$

Por consiguiente, los valores de y para los que la ecuación tiene solución son todos aquellos números que son congruentes con 5 módulo 9 (por ejemplo $y = 5$, $y = -4$, $y = 14$, $y = 23$, $y = 32$, etc.)

Ejercicio 2. *Este año lo has comenzado como jefe del equipo de informática de una prestigiosa empresa. Desafortunadamente, hoy en tu primer día de trabajo, habéis sufrido un ciberataque donde os han cifrado los discos duros y os piden un rescate para recuperar la información. En el proceso de cifrado, tu equipo de informáticos ha descubierto lo siguiente sobre el código de descifrado:*

a) Es un código numérico de 4 cifras.

b) Al dividir el código entre 5 da de resto 3.

c) Al multiplicar el código por 5 y dividirlo por 33 da de resto 17.

d) Las dos últimas cifras del código en base 8 son 47.

¿Qué código le das a tu equipo para que pueda recuperar los datos?

Solución:
Llamamos x al código. La primera condición nos dice que $1000 \leq x \leq 9999$.
La segunda nos dice que $x \equiv 3 \mod 5$.
La tercera, que $5x \equiv 17 \mod 33$.
Y la cuarta, que $x \equiv 39 \mod 64$. Esto es así pues $47)_8 = 4 \cdot 8 + 7 = 39$ y $100)_8 = 8^2 = 64$.
Resolvemos entonces el sistema de congruencias:

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} x & \equiv & 3 & \text{mód } 5 \\ 5x & \equiv & 17 & \text{mód } 33 \\ x & \equiv & 39 & \text{mód } 64 \end{array} \right.$$

- Comenzamos por la última congruencia, que tiene como solución $x = 39 + 64k_1 : \ k_1 \in \mathbb{Z}$.
- Sustituimos en la segunda: $5(39 + 64k_1) \equiv 17 \mod 33$.
- Operamos y reducimos módulo 33: $195 + 320k_1 \equiv 17 \mod 33$; $23k_1 \equiv -178 \mod 33$; $23k_1 \equiv 20 \mod 33$.
- Calculamos $23^{-1} \mod 33$:

	33		0	
	23		1	
$33 = 23 \cdot 1 + 10$	10	1	-1	$0 - 1 \cdot 1 = -1$
$23 = 10 \cdot 2 + 3$	3	2	3	$1 - 2 \cdot (-1) = 3$
$10 = 3 \cdot 3 + 1$	1	3	-10	$-1 - 3 \cdot 3 = -10$

Luego $23^{-1} \mod 33 = -10 \mod 33 = 23$.

- Multiplicamos por $23^{-1} = 23$ y reducimos: $k_1 \equiv 20 \cdot 23 \mod 33$; $k_1 \equiv 460 \mod 33$; $k_1 \equiv 31 \mod 33 \Longrightarrow k_1 = 31 + 33k_2$.
- Sustituimos en x: $x = 39 + 64k_1 = 39 + 64(31 + 33k_2) = 39 + 1984 + 2112k_2 = 2023 + 2112k_2$.
- Sustituimos en la primera congruencia: $2023 + 2112k_2 \equiv 3 \mod 5$.
- Operamos y reducimos módulo 5: $2112k_2 \equiv -2020 \mod 5$; $2k_2 \equiv 0 \mod 5$.
- Multiplicamos por $3 = 2^{-1}$: $k_2 \equiv 0 \mod 5 \Longrightarrow k_2 = 5k$.
- Sustituimos en x: $x = 2023 + 2112 \cdot (5k) = 2023 + 10560k$.
- Ahora, puesto que x tiene cuatro cifras, lo que significa que $1000 \leq x \leq 9999$, tenemos que $1000 \leq 2023 + 10560k \leq 9999$, lo que implica que $k = 0$.

Tenemos entonces que el código es 2023.

Vamos a resolver el sistema de congruencias

$$\left\{\begin{array}{rcll} x & \equiv & 3 & \text{mód } 5 \\ 5x & \equiv & 17 & \text{mód } 33 \\ x & \equiv & 39 & \text{mód } 64 \end{array}\right.$$

pero comenzando por la primera.

- Comenzamos por la primera congruencia, que tiene como solución $x = 3 + 5k_1 : \ k_1 \in \mathbb{Z}$.
- Sustituimos en la segunda: $5(3 + 5k_1) \equiv 17$ mód 33.
- Operamos y reducimos módulo 33: $15 + 25k_1 \equiv 17$ mód 33; $25k_1 \equiv 2$ mód 33.
- Calculamos 25^{-1} mód 33:

	33		0		
	25		1		
$33 = 25 \cdot 1 + 8$	8	1	-1	$0 - 1 \cdot 1 = -1$	Luego 25^{-1} mód $33 = 4$.
$25 = 8 \cdot 3 + 1$	1	3	4	$1 - 3 \cdot (-1) = 4$	

- Multiplicamos por $25^{-1} = 4$: $k_1 \equiv 2 \cdot 4$ mód 33; $k_1 \equiv 8$ mód $33 \Longrightarrow k_1 = 8 + 33k_2$.
- Sustituimos en x: $x = 3 + 5k_1 = 3 + 5(8 + 33k_2) = 43 + 165k_2$.
- Sustituimos en la tercera congruencia: $43 + 165k_2 \equiv 39$ mód 64.
- Operamos y reducimos módulo 64: $165k_2 \equiv -4$ mód 64; $37k_2 \equiv 60$ mód 64.
- Calculamos 37^{-1} mód 64:

	64		0		
	37		1		
$64 = 37 \cdot 1 + 27$	27	1	-1	$0 - 1 \cdot 1 = -1$	
$37 = 27 \cdot 1 + 10$	10	1	2	$1 - 1 \cdot (-1) = 2$	Luego 37^{-1} mód $64 = -19$ mód $64 = 45$.
$27 = 10 \cdot 2 + 7$	7	2	-5	$-1 - 2 \cdot 2 = -5$	
$10 = 7 \cdot 1 + 3$	3	1	7	$2 - 1 \cdot (-7) = 7$	
$7 = \cdot 2 + 1$	1	2	-19	$-5 - 2 \cdot 7 = -19$	

- Multiplicamos por $37^{-1} = 45$ y reducimos: $k_2 \equiv 45 \cdot 60$ mód $64 \Longrightarrow k2 \equiv 2700$ mód $64 \Longrightarrow k_2 \equiv 12$ mód $64 \Longrightarrow k_2 = 12 + 64k$.
- Sustituimos en x: $x = 43 + 165k_2 = 43 + 165(12 + 64k) = 43 + 1980 + 10560k = 2023 + 10560k$.

Y obtenemos la misma solución, como era de esperar.

Ejercicio 3. *Sean $p(x) = x^7 + x^4 + x^3 + x + 1$ y $q(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2$ dos polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}_3$.*

a) Calcula mcd$(p(x), q(x))$.

b) Factoriza $p(x)$ como producto de irreducibles.

Solución:

a) Para calcular el máximo común divisor utilizamos el algoritmo de Euclides.

Dividimos $p(x)$ entre $q(x)$.

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & & 1 & 1 & & & & & \\
2 & & & 2 & 2 & & & & \\
2 & & & & 2 & 2 & & & \\
2 & & & & & 2 & 2 & & \\
0 & & & & & & 0 & 0 & \\
1 & & & & & & & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
c_1(x) = x + 1 \\
r_1(x) = 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2
\end{array}$$

Dividimos $q(x)$ entre $r_1(x)$.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
\cline{1-1}
2 & & 2 & 2 & 1 & & & \\
2 & & & 2 & 2 & 1 & & \\
2 & & & & 2 & 2 & 1 & \\
2 & & & & & 2 & 2 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
c_2(x) = 2 \cdot (x^2 + x + 2) = 2x^2 + 2x + 1 \\
r_2(x) = 0
\end{array}$$

Puesto que ya hemos llegado a un resto igual a cero, tenemos que el resto anterior $(2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$ es un máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$. Y puesto que el máximo común divisor de dos polinomios es mónico, multiplicamos por $2^{-1} = 2$ y tenemos que:

$$\text{mcd}(p(x), q(x)) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

b) Vamos ahora a factorizar $p(x)$. Puesto que sabemos que $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ es un divisor de $p(x)$, hacemos la división:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
2 & & 2 & 1 & 0 & 2 & & & \\
2 & & & 2 & 1 & 0 & 2 & & \\
2 & & & & 2 & 1 & 0 & 2 & \\
2 & & & & & 2 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
c(x) = x^3 + 2x^2 + 1 \\
r(x) = 0
\end{array}$$

Así que tenemos $p(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 1)$. Factorizamos estos dos polinomios:

- Factorización de $q_1(x) = x^3 + 2x^2 + 1$.

  Comprobamos si tiene o no raíces:

  $q_1(0) = 1 \neq 0$.
  $q_1(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 1 = 4 = 1 \neq 0$.
  $q_1(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 1 = 17 = 2 \neq 0$.

  Puesto que es de grado 3 y no tiene raíces podemos concluir que es irreducible.

- Factorización de $q_2(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

  Comprobamos en primer lugar si tiene o no raíces:

  $q_2(0) = 1 \neq 0$.
  $q_2(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1^1 + 1 = 5 = 2 \neq 0$.
  $q_2(2) = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 = 31 = 1 \neq 0$.

Puesto que no tiene raíces vemos si tiene divisores de grado 2. Los polinomios mónicos irreducibles de grado 2 son x^2+1, x^2+x+2 y x^2+2x+2. Realizamos las divisiones por estos tres polinomios:

Entre x^2+1

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & \\ 2 & & & 2 & 2 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

$r(x) = 1$

Entre x^2+x+2

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & & 2 & 0 & 1 & \\ 1 & & & 1 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$r(x) = 2x$

Entre x^2+2x+2

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 & \\ 1 & & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

$r(x) = x+2$

Puesto que ningún resto es cero, concluimos que $q_2(x)$ es irreducible.

Por consiguiente, la factorización de $p(x)$ es $p(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 1)$.

Ejercicio 4. *Un grupo de 12 amigos (6 hombres y 6 mujeres) quieren jugar entre ellos un torneo de futbolín. Para iniciar el torneo deben crear seis parejas que competirán entre ellas.*

a) ¿De cuántas formas se pueden crear las seis parejas?

b) Supongamos que cada pareja debe estar formada por un hombre y una mujer. ¿De cuántas formas pueden crearse entonces las seis parejas?

Solución:

a) Puesto que todas las personas van a formar parte de alguna de las parejas, vamos a ir construyendo las parejas en varias etapas:

- Elegimos una de las doce personas, y le buscamos pareja. Esto se puede hacer de 11 formas diferentes.
- Elegimos una persona de las diez que quedan. Le buscamos pareja a ésta. Esto lo podemos hacer de 9 formas diferentes.
- Elegimos una perosna de las ocho restantes, y le buscamos pareja. Esto lo podemos hacer de 7 formas distintas.
- Elegimos una persona de las seis restantes. Hay cinco posibilidades distintas de buscarle pareja.
- Elegimos una persona de las cuatro restantes, y le buscamos pareja. Lo podemos hacer de 3 maneras distintas.
- Las dos personas que quedan forma la última pareja.

Por el principio del producto, el número total de formas distintas en que se pueden formar las seis parejas es $11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 10395$.

b) Ahora las parejas tienen que estar formadas por un hombre y una mujer. Vamos a denominar M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 y M_6 a estas mujeres.

- Le buscamos pareja a M_1. Se puede hacer de seis formas.
- Le buscamos pareja a M_2. Lo podemos hacer de cinco formas.
- Le buscamos pareja a M_3. Lo podemos hacer de cuatro formas.
- Le buscamos pareja a M_4. Esto lo podemos hacer de tres formas distintas.
- Le buscamos pareja a M_5. Lo podemos hacer de dos formas.
- Por último, la pareja para M_6 está determinada por las elecciones anteriores.

Por el principio del producto, las seis parejas se pueden formar de $6! = 720$ formas distintas.

El primer apartado se puede razonar también como sigue:

- Formamos una pareja. Esto lo podemos hacer de $\binom{12}{2} = 66$ formas distintas.
- Formamos una segunda pareja. Lo podemos hacer de $\binom{10}{2} = 45$ formas distintas.
- Formamos una tercera pareja. Lo podemos hacer de $\binom{8}{2} = 28$ formas distintas.
- Formamos una cuarta pareja. Se puede hacer de $\binom{6}{2} = 15$ formas distintas.
- La quinta pareja se puede formar de $\binom{4}{2} = 6$ formas distintas.
- Para la última pareja únicamente tenemos $\binom{2}{2} = 1$ posibilidad.

Podemos formas las parejas entonces de $66 \cdot 45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 7484400$ formas.

Sin embargo, cada 6! formas que hemos contado son en realidad las mismas parejas pero elegidas en orden distinto. Por consiguiente, las parejas se pueden formar de $\frac{7484400}{6!} = \frac{7484400}{720} = 10395$ formas distintas.

Ejercicio 5. *Sean* $B_1 = \{(1,1),\ (2,1)\}$ *y* $B_2 = \{(-1,5),\ (0,3)\}$ *dos subconjuntos de* $\mathbb{R}^2$.

a) Comprueba que son bases de $\mathbb{R}^2$.

b) Sea $\mathbf{u}$ *el vector cuyas coordenadas en* B_2 *son* $(2,3)$. *Di cuál es el vector* $\mathbf{u}$ *y sus coordenadas en* B_1.

c) Calcula todos los vectores que tienen las mismas coordenadas en B_1 *y en* B_2.

Solución:

a) Puesto que $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ y $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 2$ tenemos que cada uno de los conjuntos forman una base de $\mathbb{R}^2$.

b) Puesto que $\mathbf{u}$ tiene coordenadas $(2,3)$ en B_2 significa que $\mathbf{u} = 2\cdot(-1,5) + 3\cdot(0,3) = (-2,19)$.

Calculamos ahora las coordendas de $\mathbf{u}$ en B_1. Para eso, escribimos $(-2,19) = a\cdot(1,1) + b\cdot(2,1)$, lo que nos da el sistema:

$$\begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & -2 \\ a & + & b & = & 19 \end{array}$$

Que tiene como solución $a = 40$, $b = -21$. Esas son las coordenadas de $\mathbf{u}$ en B_1.

Para este último cálculo podemos calcular la matriz del cambio de base de B_2 a B_1:

$$M_{B_2\to B_1} = M_{B_c\to B_1}\cdot M_{B_2\to B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Y ahora:

$$(\mathbf{u})_{B_1} = M_{B_2\to B_1}\cdot(\mathbf{u})_{B_2} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -21 \end{pmatrix}$$

c) Sea $\mathbf{v}$ un vector que tiene coordenadas (a,b) en la base B_1 y las mismas coordenadas en la base B_2. Entonces:

$$\mathbf{v} = a\cdot(1,1) + b\cdot(2,1) = a\cdot(-1,5) + b\cdot(0,3) \Longrightarrow a\cdot((1,1)-(-1,5)) + b\cdot((2,1)-(0,3)) = (0,0)$$

Esto da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcr} 2a & + & 2b & = & 0 \\ -4a & - & 2b & = & 0 \end{array}$$

cuya única solución es $a = 0$, $b = 0$.

Por consiguiente, sólo hay un vector que tenga las mismas coordenadas en B_1 y en B_2, y este es el vector $(0,0)$.

También podríamos haber resuelto este punto como sigue:

Si $\mathbf{v}$ es un vector cuyas coordenadas en B_1 y en B_2 son (a,b), entonces:

$$\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y la única solución de este sistema de ecuaciones es $a = b = 0$.

Ejercicio 6. *Sea* $f:(\mathbb{Z}_3)^3\to(\mathbb{Z}_3)^3$ *la aplicación lineal cuya matriz asociada en las bases* $B=\{(0,0,1),\ (2,0,1),\ (2,1,1)\}$ *y* $B'=\{(1,2,2),\ (2,2,1),\ (1,1,1)\}$ *es* $\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$.

Calcula $f(1,2,1)$.

Solución:
Vamos a interpretar los datos que nos dan:
En primer lugar, llamemos $\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3}$ a los tres vectores de B y $\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2},\ \mathbf{v_3}$ a los tres vectores de B'. Lo que nos están diciendo es que:

$$f(\mathbf{u_1})=2\cdot\mathbf{v_1}+1\cdot\mathbf{v_2}+0\cdot\mathbf{v_3}.$$
$$f(\mathbf{u_2})=0\cdot\mathbf{v_1}+1\cdot\mathbf{v_2}+2\cdot\mathbf{v_3}.$$
$$f(\mathbf{u_3})=1\cdot\mathbf{v_1}+2\cdot\mathbf{v_2}+2\cdot\mathbf{v_3}.$$

Es decir:

$$f(0,0,1)=2\cdot(1,2,2)+1\cdot(2,2,1)+0\cdot(1,1,1)=(2,1,1)+(2,2,1)=(1,0,2).$$
$$f(2,0,1)=0\cdot(1,2,2)+1\cdot(2,2,1)+2\cdot(1,1,1)=(2,2,1)+(2,2,2)=(1,1,0).$$
$$f(2,1,1)=1\cdot(1,2,2)+2\cdot(2,2,1)+2\cdot(1,1,1)=(1,2,2)+(1,1,2)+(2,2,2)=(1,2,0).$$

Ahora escribimos $(1,2,1)$ como combinación lineal de los vectores de B: $(1,2,1)=a\cdot\mathbf{u_1}+b\cdot\mathbf{u_2}+c\cdot\mathbf{u_3}$. Esto da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 2b & + & 2c & = & 1\\ & & & & c & = & 2\\ a & + & b & + & c & = & 1\end{array}$$

que tiene como solución $a=2$, $b=0$, $c=2$.

Así que $f(1,2,1)=2\cdot f(\mathbf{u_1})+2\cdot f(\mathbf{u_3})=2\cdot(1,0,2)+2\cdot(1,2,0)=(1,1,1)$.

También puede resolverse como sigue:

Tenemos que:

$M_{B\to B_c}=\begin{pmatrix}0&2&2\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, luego $M_{B_c\to B}=\begin{pmatrix}0&2&2\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

y $M_{B_c,B_c}(f)=M_{B'\to B_c}\cdot M_{B,B'}(f)\cdot M_{B_c\to B}$

Multiplicamos estas matrices:

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&2\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

Y se tiene que $\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ nos da una expresión para $f(x,y,z)$.

$$f(x,y,z)=(z,2x+y,2x+2z).$$

Por consiguiente, $f(1,2,1)=(1,2\cdot1+2,2\cdot1+2\cdot1)=(1,1,1)$.

Ejercicio 7. *Encuentra todos los valores $a \in \mathbb{R}$ para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & a \\ a & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es diagonalizable. Para aquellos valores de a en que la matriz A sea diagonalizable, calcula una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$.*

Solución:

En primer lugar calculamos los valores propios con sus multiplicidades algebraicas. Para eso, calculamos el polinomio característico:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 4-\lambda & a \\ a & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & a \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot (4-\lambda)^2.$$

Vemos que A tiene dos valorer propios: $\lambda_1 = 2$, cuya multiplicidad algebraica es 1 y $\lambda_2 = 4$ cuya multiplicidad algebraica es 2. Tenemos entonces:

Valor propio	Multiplicidad algebraica	Multiplicidad geométrica
$\lambda_1 = 2$	$\alpha_2 = 1$	$d_2 = 1$
$\lambda_2 = 4$	$\alpha_4 = 2$	$d_4 = 1$ ó 2

La matriz A es entonces diagonalizable si $d_4 = 2$. Puesto que $d_4 = 3 - \mathrm{rg}(A - 4 \cdot Id)$, estudiamos esta matriz.

$$A - 4 \cdot Id = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a = 0$ la matriz $A - 4 \cdot Id$ tiene sólo una columna distinta de cero, luego $\mathrm{rg}(A - 4 \cdot Id) = 1$, mientras que si $a \neq 0$ encontramos una submatriz 2×2 (la formada por las filas primera y segunda, y columnas primera y tercera) cuyo determinante es $-2a \neq 0$, por lo que $\mathrm{rg}(A - 4 \cdot Id) = 2$. En resumen, tenemos:

- Si $a = 0$, $d_4 = 3 - \mathrm{rg}(A - 4 \cdot Id) = 3 - 1 = 2$, por lo que A es diaogonalizable.
- Si $a \neq 0$, $d_4 = 3 - \mathrm{rg}(A - 4 \cdot Id) = 3 - 2 = 1$, por lo que A no es diagonalizable.

En conclusión, A es diagonalizable si, y sólo si, $a = 0$. Vamos en este caso a calcular los vectores propios.

- Para el valor propio 2, y puesto que $A - 2 \cdot Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, el subespacio V_2 tiene ecuaciones:

$$V_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & & & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

  Y una base de V_2 es $B_{V_2} = \{(2, -3, 0)\}$.

- Para el valor propio 4, y puesto que $A - 4 \cdot Id = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, el subespacio V_4 tiene ecuación $V_4 \equiv x = 0$. Una base es $B_{V_4} = \{(0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$.

Con estas bases formamos la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (sus columnas son los vectores propios que hemos encontrado). Se tiene que:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Y esta última es la matriz D que nos piden.