

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

**Avaliação dos Estimadores EKF, CEKF e
MHE para Aplicações em Linha em
Processos**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Giovani Tonel

**Porto Alegre
2008**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

Avaliação dos Estimadores EKF, CEKF e MHE para Aplicações em Linha em Processos

Giovani Tonel

Dissertação de Mestrado apresentada como
requisito parcial para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Área de concentração: Pesquisa e
Desenvolvimento de Processos

Linha: Modelagem, Simulação e Controle de
Processos

Orientadores:

Prof. Dr. Argimiro Resende Secchi

Prof. Dr. Jorge Otávio Trierweiler

Porto Alegre

2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação *Avaliação dos Estimadores EKF, CEKF e MHE para Aplicações em Linha em Processos*, elaborado por Giovani Tonel, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia.

Comissão Examinadora:



Dr. Eng. Luís Gustavo Soares Longhi - REFAP



Prof. Dr. Rafael de Pelegrini Soares - DEQUI/UFRGS



Prof. Dr. Walter Fetter Lages – DELET/UFRGS

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha família, minhas irmãs Adriane Tonel Dognini e Tatiana Tonel e em especial aos meus pais Selito Tonel e Teresinha Lando Tonel, pelo empenho de esforços ilimitados, sejam eles de caráter financeiro ou afetivo, para que eu pudesse de forma satisfatória realizar os meus estudos desde a Graduação até este curso de Mestrado.

A minha namorada, Danielle Paula Martins, por estar sempre ao meu lado me apoiando e dividindo angústias e alegrias durante quase todo o período do curso do Mestrado.

Aos meus orientadores Argimiro Resende Secchi e Jorge Otávio Trierweiler, por dedicarem seus já limitados tempos na orientação deste trabalho. Ao Jorge ainda pela parceria nas corridas semanais, em fins de tarde no Parque da Redenção e nos finais de semana na Orla do Guaíba.

Ao Mestrando Rodolfo Rodrigues e o Mestre Silvio Roberto Taffarel pelo companheirismo e amizade desde o curso de graduação na Universidade Federal de Santa Maria.

Ao Mestrando Sebastian Julio de Souza pelo coleguismo e amizade durante o curso de Mestrado.

Por último gostaria de agradecer ao órgão financiador CAPES, pelo fomento desta pesquisa.

Resumo

Devido aos constantes avanços computacionais, bem como o desenvolvimento de eficientes métodos para a solução de problemas de otimização não-lineares, tem-se tornado interessante a realização de otimização em tempo real e como consequência o uso de estimadores on-line em processos químicos não lineares. Neste sentido, a atualização automática de modelos de processos torna-se interessante permitindo a realização de estimativas em tempo real de variáveis infreqüentemente medidas e/ou imensuráveis e de variáveis estados e parâmetros desconhecidos que são variantes no tempo. Usualmente, a atualização automática de modelos é feita baseado em algumas variáveis secundárias que são medidas on-line, como temperatura, pressão, composição e vazão.

Nos estimadores baseados no filtro de Kalman, como o EKF e CEKF, os esforços computacionais são relativamente pequenos, variando de um simples cálculo algébrico de um ganho, por exemplo, o EKF, até a resolução de problema de otimização quadrático, como exemplo o CEKF. Estes pequenos esforços computacionais permitem rápidos resultados com relativa acuracidade, mas estes estimadores baseados no filtro de Kalman podem falhar quando o sistema tem acentuada não-linearidade, por exemplo. De outra maneira, a formulação MHE é capaz de tratar uma vasta gama de sistemas não-lineares, como aqueles que têm inversão do sinal de ganho de acordo com o ponto de operação. No entanto, na formulação MHE tem-se a necessidade de se resolver um problema NLP não convexo com muitas equações de desigualdade e graus de liberdade, e como consequência o tempo de processamento torna-se maior que o tempo de amostragem, fazendo impraticável a execução de ações de controle sobre o sistema em tempo real. Assim, é necessário a implementação de eficientes técnicas para resolver de maneira rápida os problemas de otimização dinâmica envolvidos na formulação MHE. Neste trabalho as estratégias seqüencial e simultânea são exploradas, almejando-se a aceleração da solução dos estágios de integração e otimização dinâmica do estimador MHE, permitindo uma ampla avaliação entre o estimador MHE e os estimadores baseados no filtro de Kalman.

Os estimadores foram aplicados para sete estudos de caso, como a planta de quatro tanques cilíndricos, o modelo do reator isotérmico com a reação de van de Vusse e o modelo de um CSTR exotérmico instável. A partir dos resultados, as vantagens e desvantagens da formulação via horizonte móvel são discutidas de modo a justificar o elevado esforço empregado na avaliação e projeto deste, comparado com os estimadores EKF e CEKF, quando o sistema tem acentuada não linearidade, incertezas no modelo e distúrbios e/ou ruídos nas medições.

Abstract

Due to the constant computational advances, as well as the development of efficient methods for solving nonlinear optimization problems, it has become interesting to carry out dynamic optimizations in real time and the consequent use of on-line estimators on nonlinear chemical processes. In this framework, the automatic updating of process models becomes attractive to allow the accomplishment of real-time estimates of unmeasured or infrequent-measured variables, states variables and unknown or time-variant model parameters. Usually, the process model updating is made based on some auxiliary variables that are measured on-line, such as temperature, pressure, composition, and flow rate.

In the traditional Kalman filter-based estimators, such as EKF and CEKF, the computational efforts are relatively small, ranging from a simple algebraic calculation of a gain, as in the EKF case, to the resolution of a quadratic optimization problem, like in the CEKF case. These small computational efforts allow faster results with relative accuracy, but these Kalman filter-based estimators may fail when the system has meaningful nonlinearities. On the other hand, the MHE formulation is able to treat a large range of nonlinear systems, as those that have the gain sign inversion according to the operating point. However, it has the necessity to solve possible non-convex NLP problem with many inequality equations and degrees of freedom, and as consequence, the processing time may become larger than the sampling time, making impracticable the execution of the control actions over the system in real time. Thus, it is necessary to implement efficient techniques to solve in a fast way the integration and dynamic optimization problems embedded in the MHE formulation. In this work, sequential and simultaneous strategies are explored to solve the estimators, aiming to speed up the solution of the integration and dynamic optimization stages, allowing a comprehensive evaluation between MHE and Kalman filter-based estimators.

The estimators were applied to seven case studies, like the quadruple tank system, van de Vusse isothermal CSTR model and a more non-linear and unstable exothermal CSTR model. From the results, the advantages and drawbacks of the

moving horizon formulation are brought up to justify the high effort spent in the design and evaluation phases, compared to the EKF and CEKF estimators, when the system has relatively high nonlinearities, model uncertainties and measurement disturbances.

Sumário

Sumário	XII
Lista de Símbolos	XVII
Introdução	1
1.1 Introdução e Motivação a Estimação de Estados	1
1.2 Estrutura da Dissertação	4
1.3 Comentários acerca da notação adotada	4
1.4 Referências	5
Revisão sobre Estimação de Estados	7
2.1 Modelos de Sistemas Estocásticos	8
2.2 Revisão dos Métodos de Estimação de Estados	9
2.3 Formulação Genérica do Estimador de Horizonte Móvel (GMHE)	10
2.3.1 Motivação Determinística para o GMHE	12
2.3.2 Motivação Probabilística para o GMHE	13
2.3.3 Observações sobre o GMHE	17
2.4 Estimação de Estado Linear	18
2.4.1 Estimador Batelada	19
2.4.2 Filtro de Kalman	22
2.4.3 Estimação via Horizonte Móvel	23
2.4.4 Observador de Luenberger	29
2.4.5 Similaridade entre os Métodos de Estimação Linear	30
2.5 Estimação Não-Linear	31
2.5.1 Filtro de Kalman Estendido - EKF	31
2.5.2 Estimação Batelada Não-Linear	33
2.5.3 Horizonte Móvel Não-Linear	34
2.5.4 Filtro de Kalman Estendido com restrição - CEKF	38
2.5.5 Revisão Bibliográfica-Cronológico a cerca da estimação MHE	40
2.5.6 Outros Métodos de Estimação de Estado Não-Lineares	41
2.6 Estimação de Estados Não-Linear com Restrições	42
2.7 Referências	43
Considerações Gerais sobre os Estimadores, EKF, CEKF e MHE	47
3.1 Diferentes Esquemas de Atualização do MHE	47
3.1.1 Atualização a partir da Estimação Filtrada $x_{k-N-1 k-N-1}^*$	48
3.1.2 Atualização a partir da Estimação Suavizada $x_{k-N-1 k-1}^*$	50
3.1.3 Inicialização do MHE via Estimador Batelada	51
3.1.4 Integração dinâmica envolvida na formulação MHE	52
3.2 Solução de Problemas de Integração e Otimização Dinâmica - Estratégias de Otimização para o Estimador de Horizonte Móvel	53
3.2.1 Discretização e aproximação via colocação ortogonal em elementos finitos	56
3.2.2 Integradores tradicionais de sistemas DAE's e ODE's	60
3.2.3 Comparativo entre as estratégias sequencial e simultânea	60

3.5 Referências.....	61
Comparação entre os estimadores EKF, CEKF e MHE	63
4.1 Estudo de Caso 1: sistema instável de um estado.	63
4.2 Estudo de Caso 2: sistema de segunda ordem.....	65
4.3 Estudo de Caso 3: sistema de segunda ordem oscilatório.....	67
4.4 Estudo de Caso 4: sistema não linear com restrição de desigualdade.	68
4.5 Estudo de Caso 5: modelo 4 tanques cilíndricos.....	71
4.6 Estudo de Caso 6: modelo reação de van de Vusse – reator CSTR isotérmico....	86
4.7 Estudo de Caso 7: reações irreversíveis de primeira ordem – reator CSTR exotérmico.....	93
4.8 Referências.....	99
Conclusões.....	101
Comentários adicionais	105
A.1 Atualização da matriz de covariância P_{k-N} via solução dinâmica da equação de Ricatti	105
A.2 Índice de desempenho para o comparativo entre os estimadores EKF, CEKF e MHE	105
Definições.....	107
Implementação dos estimadores EKF, CEKF e MHE.....	111
Descrição das Rotinas Implementadas em Matlab®	113
Lista de Figuras	XIII
Lista de Tabelas	XVV

Lista de Figuras

Figura 2.1: Estimação de estado e controle <i>feedback</i> de estado.	7
Figura 2.2: Resumo das técnicas de estimação.	10
Figura 2.3: Esquema do estimador de horizonte móvel genérico e a sua função custo.	12
Figura 2.4: Diferentes critérios de estimação probabilística.	15
Figura 2.5: Estrutura básica de otimização baseada na estimação de estados.	18
Figura 2.6: Princípio da estimação de estado em batelada.	20
Figura 2.7: Exemplo da janela do filtro móvel.	25
Figura 2.8: Estrutura geral de um estimador linear.	30
Figura 3.1: Representação dos diferentes esquemas de atualização do MHE.	48
Figura 3.2: Efeito oscilante devido a atualização a cada $N+1$ passos.	49
Figura 3.3: Esquema detalhado do efeito oscilatório na estimação filtrada.	49
Figura 3.4: Exemplo do efeito oscilante, $A = 1.1$, $C = 1$, $Q - 1 = Q - N - 1 = 1$, $R - 1 = 1/100$ com atualização a cada $N + 1$ passos (MUSKE e RAWLINGS, 1995).	50
Figura 3.5: Esquema detalhado da atualização via estados suavizados, sem efeito oscilante.	51
Figura 3.6: Exemplo sem o efeito oscilante para a atualização suavizada $A = 1.1$, $C = 1$, $Q - 1 = Q - N - 1 = 1$, $R - 1 = 1/100$	51
Figura 3.7: Esquema de integração dinâmica envolvido na formulação MHE.	53
Figura 3.8: Perfis de estado e controle com pontos de descontinuidade e não-diferenciação discretizados em elementos finitos.	57
Figura 4.1: Comparação entre o MHE ($N=5$), EKF e CEKF para o sistema instável de um estado.	64
Figura 4.6: Representação esquemática da planta de 4 tanques cilíndricos.	73
Figura 4.7: Resultados da simulação para os três estimadores (estados filtrados), caso (1), para o modelo 4 tanques cilíndricos.	74
Figura 4.8: Resultados da simulação para os três estimadores, (estados estimados ou níveis superiores), caso (1), para o modelo 4 tanques cilíndricos.	75
Figura 4.9: Resultados da simulação para os três estimadores (níveis inferiores), caso (2), para o modelo 4 tanques cilíndricos.	77
Figura 4.10: Resultados da simulação para os três estimadores (níveis superiores), caso (2), para o modelo 4 tanques cilíndricos.	78
Figura 4.11: Resultados da simulação para os três estimadores (níveis inferiores), caso (3), para o modelo 4 tanques cilíndricos.	79
Figura 4.12: Resultados da simulação para os três estimadores (níveis superiores), caso (3), para o modelo 4 tanques cilíndricos.	80
Figura 4.13: Resultados da simulação para os três estimadores, níveis inferiores, caso (3) com restrição de desigualdade, para o modelo 4 tanques cilíndricos.	82
Figura 4.14: Resultados da simulação para os três estimadores, níveis superiores, caso (3) com restrição de desigualdade, para o modelo 4 tanques cilíndricos.	83
Figura 4.15: Resultados da simulação do MHE ($N=1, 2$ e 3), níveis inferiores, caso (3) com restrição de desigualdade, para o modelo 4 tanques cilíndricos.	84

Figura 4.16: Resultados da simulação do MHE ($N= 1,2$ e 3), níveis superiores, caso (3) com restrição de desigualdade, para o modelo 4 tanques cilíndricos.....	85
Figura 4.17: Esquema do reator isotérmico modelado para reação de van de Vusse.....	87
Figura 4.18: Perfil da variável de estado C_A real e medido para a reação de van de Vusse, simulações 1 e 2.	88
Figura 4.18: Comparação dos valores de C_A e C_B real, C_A filtrado e C_B estimado para os três estimadores (EKF, CEKF e MHE) para a reação de van de Vusse, simulação 1.	89
Figura 4.20: Comparação dos valores de C_A e C_B real, C_A filtrado e C_B estimado para os três estimadores (EKF, CEKF e MHE) para a reação de van de Vusse, simulação 2.	92
Figura 4.21: Perfil de pontos estacionários para o estado x_3 em função de q_c para o modelo de reações de primeira ordem irreversíveis (RAMMINGER e SECCHI, 2007).	95
Figura 4.22: Comparação dos estados filtrados x_1 e x_2 para os três estimadores (EKF, CEKF e MHE) para o reator CSTR exotérmico.	96
Figura 4.23: Comparação dos estados estimados x_3 e x_4 para os três estimadores (EKF, CEKF e MHE) para o reator CSTR exotérmico.	96
Figura 4.24: Comparação dos estados filtrados x_1 e x_2 para os três estimadores (EKF, CEKF e MHE) para o reator CSTR exotérmico, simulação sem ruídos de medição.	97
Figura 4.25: Comparação dos estados estimados x_3 e x_4 para os três estimadores (EKF, CEKF e MHE) para o reator CSTR exotérmico, simulação sem ruídos de medição.	98
Figura B.1: Suavização, Filtragem e Predição (KARL e BJORN, 1984).....	128
Figura C.1: Interface de trabalho no Simulink® para rodar as rotinas implementadas em Matlab®.	130

Lista de Tabelas

Tabela 3.1: Comparativo do tempo computacional entre as estratégias sequencial (via <i>ode45</i> e <i>DASSLC</i>) e simultânea (via colocação ortogonal) na formulação MHE.....	61
Tabela 4.1: Parâmetros dos estimadores para a simulação com o sistema instável de 1 estado.	64
Tabela 4.3: Parâmetros dos estimadores para a simulação com o sistema de segunda ordem.	66
Tabela 4.4: Parâmetros dos estimadores para a simulação com o sistema de segunda ordem oscilatório.....	67
Tabela 4.5: Parâmetros dos estimadores para a simulação com o sistema de segunda ordem oscilatório.....	69
Tabela 4.6: Soma do erro quadrático para cada um dos estados para o sistema não linear com restrição de desigualdade.	70
Tabela 4.7: Soma do erro quadrático para cada um dos estados ($N=0,1,2,3,5$ e 10), sistema não linear com restrição de desigualdade.....	70
Tabela 4.8: Valores dos parâmetros para o modelo dinâmico com 4 tanques cilíndricos.....	72
Tabela 4.9: Condições iniciais para as variáveis de estado e controladas e degrau nas variáveis manipuladas para o modelo 4 tanques cilíndricos.	74
Tabela 4.10: Parâmetros para os estimadores na simulação com o modelo 4 tanques cilíndricos.....	75
Tabela 4.11: Soma do erro quadrático para cada um dos estados para o modelo 4 tanques cilíndricos, caso (1).....	76
Tabela 4.12: Soma do erro quadrático para cada um dos estados para o modelo 4 tanques cilíndricos, caso (2).....	78
Tabela 4.13: Soma do erro quadrático para cada um dos estados para o modelo 4 tanques cilíndricos, caso (3).....	80
Tabela 4.14: Soma do erro quadrático para cada um dos estados, caso (3) com restrição de desigualdade, para o modelo 4 tanques cilíndricos.	83
Tabela 4.15: Soma do erro quadrático para cada um dos estados ($N=1,2$ e 3), caso (3) com restrição de desigualdade, para o modelo 4 tanques cilíndricos.....	85
Tabela 4.16: Valores dos parâmetros para o modelo reação de van de Vusse, simulação 1 e 2.....	87
Tabela 4.17: Pontos de operação para a reação de van de Vusse.	87
Tabela 4.18: Parâmetros para os estimadores na simulação com o modelo reação de van de Vusse, simulação 1.	88
Tabela 4.19: Soma do erro quadrático para cada um dos estados, simulação 1.	90
Tabela 4.20: Soma do erro quadrático para cada um dos estados (4 primeiras estimações, $t=20s$), simulação 1.....	90
Tabela 4.21: Parâmetros para os estimadores na simulação com o modelo reação de van de Vusse, simulação 2.	91
Tabela 4.22: Soma do erro quadrático para cada um dos estados, simulação 2.	91
Tabela 4.23: Soma do erro quadrático para cada um dos estados (12 primeiras estimações, $t=60s$), simulação 2.....	91

Tabela 4.24: Valores dos parâmetros usados na simulação (TORRES e TLACUAHUAC, 1999) <i>apud</i> (RAMMINGER e SECCHI, 2007).	94
Tabela 4.25: Parâmetros para os estimadores na simulação com o reator CSTR exotérmico.....	95
Tabela 4.26: Soma do erro quadrático para cada um dos estados para o reator CSTR exotérmico.....	97
Tabela 4.27: Soma do erro quadrático para cada um dos estados para o reator CSTR exotérmico, simulação sem ruídos de medição.....	98
Tabela D.1: Descrição das principais rotinas que compõe os três estimadores implementados em Matlab®.	113
Tabela D.2: Rotinas comuns para os três estimadores implementados em Matlab®....	114
Tabela D.3: Rotinas do Matlab® internas que foram usadas.	115

Notação

Lista de Símbolos

Símbolos Maiúsculos

A, B	Matrizes de transição dos estados x e distribuição das entradas para sistemas lineares u respectivamente.
\underline{A}	Matriz das derivadas do polinômio de Legendre para a discretização via colocação ortogonal.
C, D	Matrizes de saída para sistemas lineares.
F	Função integração dinâmica não linear de f , $F(x_k, u_k) = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x(t), u(t)) dt .$
\mathcal{F}	Jacobiana de f , ex.: $\mathcal{F}_k = \frac{\partial f(x_k, u_k)}{\partial x} _{x_k = \hat{x}_{k k}}$.
G	$\in \mathbb{R}^{n \times r}$. Matriz de distribuição dos distúrbios-estado.
\mathcal{G}	Jacobiana de g , ex.: $\mathcal{G}_k = \frac{\partial g(x_k)}{\partial x} _{x_k = \hat{x}_{k k}}$.
H	Matriz de coeficientes para os limites inferior e superior dos estados, ex. $h_{x,min} \leq H_x \hat{x} \leq h_{x,max}$.
\mathcal{H}	Matriz dos coeficientes do problema de otimização quadrático, $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} [\hat{P}_{k k-1}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & [R] \end{bmatrix}.$
I	Matriz identidade.
K	Ordem do polinômio de Legendre na discretização via colocação ortogonal.

L	Matriz do filtro linear, ex. filtro de Kalman.
N	Horizonte de estimação, tempo-discreto.
$N(a, b)$	Distribuição normal ou Gaussiana com média a e desvio padrão b .
NA	Amplitude ou covariância do distúrbio/ruído (do inglês <i>Noise Amplitude</i>).
NE	Número de elementos na discretização via colocação ortogonal.
P	Matriz de covariância, solução da equação de Ricatti.
R, Q	Matrizes de peso para os filtros de Kalman (ex. EKF e CEKF) e MHE.
Res	Resíduo da discretização via colocação ortogonal.
\mathcal{R}, \mathcal{Q}	Matrizes de peso para o GMHE.
T	Número total de estimações feitas e/ou consideradas na simulação.
T_s	Período de amostragem.
T_{sim}	Tempo de simulação.
Z_{k-N}	Função custo marginal do MHE.
U^L, U^U	Limites inferior e superior respectivamente para as variáveis de controle na discretização via colocação ortogonal.
X^L, X^U	Limites inferior e superior respectivamente para as variáveis estados na discretização via colocação ortogonal.
ΔT	Intervalo de amostragem ($\Delta T = T_s$).

Símbolos Minúsculos

ceq	Vetor de equações de igualdade para o modelo DAE.
c	Vetor de equações de desigualdade para o modelo DAE.
d	Coeficiente linear, forma canônica do problema de programação quadrático (QP).
$diag$	Valores da diagonal de uma matriz, ex. $diag(A) = [1 \ 1]$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
e_k	Erro de reconstrução. É definido como a diferença entre o estado atual e o estado estimado, ex.: $e_k = x_k - \hat{x}_{k k}$.
f	Função de transição do estado.
\tilde{f}^{-1}	Pseudo inversa de f .
g	Função que relaciona os estados com as medições (saídas).

\tilde{g}^{-1}	Pseudo inversa de g .
l	Pontos de colocação nos limites de cada elemento na discretização via colocação ortogonal.
m	Número de variáveis manipuladas do sistema (entradas).
n	Número de estados do sistema.
p	Número de saídas do sistema, e densidade probabilística.
r	Número de pólos (ou modos) instáveis.
t	Variável de tempo contínua.
$h_{x,min}, h_{x,max}$	Limite inferior e superior para os estados, ex. $h_{x,min} \leq H_x \hat{x} \leq h_{x,max}$.
$h_{\xi,min}, h_{\xi,max}$	O mesmo vale para ξ como definido acima para x .
$h_{\varphi,min}, h_{\varphi,max}$	O mesmo vale para φ como definido acima para x .
u	$\in \mathbb{R}^m$. Variável manipulada (entrada).
φ	$\in \mathbb{R}^p$. Variável de distúrbio nas medidas (saída).
ξ	$\in \mathbb{R}^r$. Variável de distúrbio nos estados (entrada).
x	$\in \mathbb{R}^n$. Variável de espaço estado.
x^e	Equilíbrio ou estado estacionário, $x^e = f(x^e)$.
x_0	Valor inicial.
\underline{x}_n	Vetor dos valores calculado nos pontos de colocação (para cada elemento n) para a discretização via colocação ortogonal.
y	$\in \mathbb{R}^p$. Variável medida (saída).
z	Ruído branco integrado, pontos de colocação na discretização via colocação ortogonal, nível dos tanques cilíndricos.

Símbolos Gregos

α	Fator de esquecimento do custo marginal aproximado.
λ	Fator exponencial usado na definição da estabilidade exponencial, multiplicador de Lagrange, auto-valores.
Φ	Restrição nos distúrbios das medições (saídas), função custo DAE.
$\hat{\Xi}$	Restrição nos distúrbios dos estados.
\hat{X}	Restrição nos estados estimados.
Ψ	Função custo do estimador Batelada, MHE e CEKF.

Θ	Vetor de variáveis distúrbios para o problema de otimização quadrático na formulação CEKF, ex.: $\Theta_k = [\hat{\xi}_{k-1 k}, \hat{\phi}_{k k}]$.
ϕ, ψ	Funções ortogonais para x e u respectivamente na discretização via colocação ortogonal.
Ω	Penalidade para a estimação de estado não-linear para a função custo não-linear do GMHE.

Outros Símbolos

(\cdot)	Denota as variáveis e símbolos tempo-contínuos.
$(\cdot)^c$	Denota as variáveis com ruído colorido.
$(\cdot)^e$	Valores de equilíbrio.
$(\cdot)^*$	Denota variáveis ou uma sequência com valor ótimo.
$(\cdot)'$	Denota variáveis aumentadas ou regiões modificadas.
$(\cdot)^T$	Transposto de uma matriz ou vetor.
(\cdot)	Valor estimado da variável.
$(\cdot)_k$	Variável tempo-discreto no tempo k .
$(\cdot)_{j k}$	Variável tempo-discreto no tempo j dada a informação até o tempo k .
$(\cdot)(t)$	Variável tempo-contínuo no tempo t .
$(\cdot)_k$	Valor da variável tempo-contínuo durante o intervalo $[t_0 + k\Delta T, t_0 + (k + 1)\Delta T]$.
$\ x\ $	Norma Euclidiana $\sqrt{x^T x}$, ou norma l_2 de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$.
$\ x\ _P$	Norma Euclidiana ponderada $\sqrt{x^T P x}$ de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ com respeito à matriz positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
\mathbb{C}^j	Denota o número de vezes j que a função é continuamente diferenciável.
\mathbb{R}^n	Espaço Euclidiano de dimensão n .
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Matriz real de tamanho $n \times m$.
\mathbb{R}^+	Denota os valores reais não-negativos.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução e Motivação a Estimação de Estados

As mudanças sofridas pelo mundo em que vivemos se tornam cada vez mais agudas ao longo do tempo. A evolução na qualidade e funcionalidade dos produtos a um preço competitivo, antes objetivo secundário das empresas, hoje é a “razão de vida das mesmas”. A estagnação evolutiva dos produtos de uma empresa pode fazer com que a mesma perca uma fatia considerável do mercado para suas concorrentes.

Por estes fatores, estratégias de monitoramento, otimização e controle de processos deixam de ter uma importância preponderantemente acadêmica e passam a ser cada vez mais necessárias industrialmente. Essa necessidade, associada ao considerável crescimento computacional, vem impulsionando definitivamente o projeto otimizado de produtos.

Neste sentido a estimação torna-se atrativa, permitindo o acompanhamento em tempo real de variáveis imensuráveis, esparsamente medidas, variáveis de estado e parâmetros de processo desconhecidos ou variantes no tempo.

Diversos autores (por exemplo Rao e Rawlings (2002)) consideram a descrição de sistemas dinâmicos através de variáveis de estado. Esta é uma construção natural quando da modelagem de processos químicos e biológicos, porque ela compacta de forma resumida a informação passada necessária para o entendimento do comportamento futuro do processo. Por exemplo, temperatura, pressão, e concentrações podem compor o estado de um sistema de monofásico quimicamente reativo. No entanto, raramente um estado está diretamente disponível através de medições de processo, e tipicamente necessita ser inferido através de medições secundárias de processo ou via um subconjunto de outras variáveis mensuráveis (medidas de saída do processo). Por exemplo, o peso molecular médio de muitos polímeros é inferido através de medições de viscosidade. Também, a concentração de um sistema simples

e quimicamente reativo, pode ser inferida pela temperatura do reator, sua variável de estado mais fácil de ser medida.

Assim, estimações dos estados atuais baseados nas medidas de saída do processo devem ser usadas (FINDEISEN, 1997). A estimação de estados tem como propósito usar de uma forma “ótima” a informação disponível através do modelo do processo e das medições para obter estimativas de estados imensuráveis do sistema dinâmico. Esta informação pode ser usada para o monitoramento e o controle do processo (JALEEL VALAPPIL, 2000).

A estimação de parâmetros e estados é uma parte integral de muitas estratégias de modelagem, monitoramento e controle de processos (TONEL *et al.*, 2007).

O sucesso de muitos métodos de detecção de falha e de controladores baseados em modelo depende diretamente da acuracidade do modelo do processo e das estimativas dos estados chaves (ROBERTSON *et al.*, 1996).

Um método de estimação padrão para sistemas lineares é o filtro de Kalman (1960). A contribuição da aproximação de Kalman veio do fato que este proporciona uma solução recursiva e probabilística “ótima” para sistemas dinâmicos. O filtro de Kalman difere do método de Wiener (1949), porque ele pode ser aplicado para sistema dinâmicos, sendo assim o seu emprego é possível para uma larga classe de problemas, sejam eles tempo-discretos ou tempo-contínuos. Em adição, dados os limites computacionais existentes por volta de 1960, a estrutura recursiva para o filtro de Kalman forneceu um método de solução tratável.

Uma desvantagem dessa aproximação é que a mudança direta para um problema de estimação de estados não-linear não é possível. Kushner (1964), observa que a exata solução no sentido probabilístico é dimensionalmente infinita e conseqüentemente algumas aproximações devem ser feitas. Dois exemplos de métodos de aproximação são: o filtro de Kalman Estendido (EKF) e os filtros linearizados estatisticamente. Estes métodos baseiam-se na linearização em torno do último estado estimado. No entanto, estes métodos podem fornecer desvios significativos entre o estado real e o estado estimado para sistemas altamente não-lineares.

Para sistemas lineares pode ser mostrado que o filtro de Kalman é equivalente ao estimador via mínimos quadrados em batelada (do inglês *Batch Least-Squares Estimator – BLSE*). O método BLSE estima os estados pela minimização do erro quadrático entre o modelo do sistema e as medidas de saída do mesmo. Este método torna-se computacionalmente inviável com o passar do tempo. Todas as medidas de saída disponíveis do sistema são usadas para a estimação, isto conduz para um crescimento contínuo do problema de otimização. Este crescimento computacional faz o método tornar-se inútil para problemas cuja aplicação se faz em tempo real (*real-time*). Normalmente faz-se uso desta técnica para a estimação de estados e parâmetros em modo *off-line*, desde que uma expansão para sistemas não-lineares seja possível e que os resultados da estimação sejam satisfatoriamente precisos.

Há inúmeros fatores que justificam a reconsideração do método dos mínimos quadrados para aplicações em tempo real. Em primeiro lugar, os limites computacionais que se travavam em 1960, para os quais se demandou uma formulação recursiva pura, tem hoje quase que desaparecido devido o avanço contínuo das tecnologias computacionais e dos métodos de otimização numérica. O método de Programação Quadrática Sequencial (SQP), por exemplo, tem reduzido consideravelmente o tempo necessário para resolver problemas de programação não-linear. Adicionalmente, o uso de otimização baseada em algoritmos permitiu a inclusão de informações sobre o sistema na forma de restrições de igualdade e desigualdade. Limites nos ruídos e/ou distúrbios de medição e nos estados do sistema são exemplos destas restrições¹. Tal informação não pode ser incorporada nos métodos de estimação recursiva e poderia ser conseqüentemente perdida. Adicionalmente o uso de técnicas de estimação via mínimos quadrados (LSE), permite o uso explícito de modelos de sistemas não-lineares, em contraste com os métodos de aproximação como EKF. Não existe a necessidade de fornecer informação adicional sobre derivadas, desde que nenhuma aproximação linear seja necessária.

O desenvolvimento de softwares eficientes de otimização e os avanços no poder computacional na última década, também permitiram um acréscimo de pesquisa na área de estimadores de estados para sistemas não-lineares baseados em otimização.

Motivado pelas técnicas de controle baseadas em otimização como Controle Preditivo (MPC), que usam um horizonte de predição fixo para calcular a próxima ação de controle, inúmeros métodos de estimação de estados com horizonte móvel (MHE) têm sido propostos na literatura. Estes métodos superam parcialmente os problemas associados com o crescimento do problema de otimização que ocorre na estimação batelada (BLSE) a cada nova medição, fazendo sua aplicação impraticável para processos em tempo real. Muske e Rawlings (1995) reformularam o problema como um Estimador de Horizonte Móvel recursivo para sistemas lineares e não-lineares.

Por tratar com problemas não-lineares, restrições nos estados e nos distúrbios, a formulação MHE é reportada na literatura como vantajosa frente aos filtros de Kalman. Mas na formulação MHE é necessário resolver um problema NLP, possivelmente não-convexo, com muitas equações de desigualdade e graus de liberdade, e como conseqüência, o tempo de processamento pode se tornar maior que o tempo de amostragem, fazendo impraticável a execução de ações de controle sobre o sistema em tempo real. Assim, implementação de técnicas eficientes para resolver os problemas de otimização dinâmica e de integração associados à formulação MHE são necessárias.

Este trabalho faz uma avaliação entre os clássicos estimadores baseados no filtro de Kalman (EKF e CEKF) e o estimador de horizonte móvel (MHE), discutindo suas respectivas desvantagens e vantagens na estimação de estados, como uma ferramenta de monitoramento visando o posterior controle e/ou otimização.

¹ Isto é de especial importância nos casos em que se há medidas não-confiáveis ou deficientes, o que por conseqüência poderiam deturpar os resultados.

1.2 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação apresenta-se dividida em cinco capítulos, conforme descritos a seguir:

O capítulo 1 traz uma introdução e motivação à estimação de estados via horizonte móvel (MHE) e os filtros de Kalman (EKF e CEKF), tema esse que será abordado na dissertação.

No capítulo 2 é feita uma revisão da estimação de estados, bem como a dedução das três técnicas de estimação estudadas, com ênfase na formulação via horizonte móvel, tanto para o caso linear como para o caso não-linear.

O capítulo 3 apresenta algumas considerações que serão exploradas nas formulações do EKF, CEKF e, principalmente, do MHE.

No capítulo 4 é feita uma comparação sistemática entre as três formulações de estimadores para uma gama variada de problemas com peculiares características e/ou desafios à estimação.

Nas conclusões são resumidos os principais resultados obtidos, bem como sugestões de trabalhos futuros na área.

No final de cada capítulo são adicionadas as respectivas referências bibliográficas utilizadas.

1.3 Comentários acerca da notação adotada

Este trabalho está focado em métodos de estimação de estados para sistemas tempo-discretos. Dado que modelos de sistemas puramente discretos não podem ser derivados para a maioria dos sistemas reais, modelos tempo-contínuos também são considerados. Assim, as variáveis tempo-contínuas são diferenciadas das tempo-discretas pela barra ($\bar{\cdot}$), onde (\cdot) é uma variável qualquer. O índice tempo para variáveis tempo-discretas é um subscrito, enquanto que para as variáveis tempo-contínuas a notação padrão $(\cdot)(t)$ é usada. Por exemplo $\bar{x}(t)$ representa o estado de um sistema tempo-contínuo no tempo t , x_k denota o estado de um sistema discreto e/ou discretizado no instante de tempo k .

Em geral o estado estimado e o estado real não coincidem. Assim, símbolos e/ou variáveis com o acento circunflexo ($\hat{\cdot}$) denota estados estimados. Dado que as técnicas de estimação usam informações passadas, faz-se necessário o uso do índice duplo $(\cdot)_{j|k}$, que representa a correspondente variável no tempo j contendo informações até o tempo k . Por exemplo $\hat{x}_{k-N|k}$ denota o estado estimado para o tempo $k - N$ no tempo k (usando informações até o tempo k). Variáveis ótimas são marcadas pelo asterisco sobrescrito $(\cdot)^*$.

A seguir são apresentados os modelos de sistema que são assumidos nesta dissertação.

Sistemas Não Lineares Tempo-Contínuos:

Sistemas tempo-contínuos podem ser dados pelas seguintes equações

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), u(t), t) + G(\bar{x}(t), u(t), t)\bar{\xi}(t), \quad \text{com } \bar{x}_0 = \bar{x}(0) \text{ dado} \quad (1.1)$$

$$\bar{y}(t) = g(\bar{x}(t), u(t), t) + \bar{\varphi}(t). \quad (1.2)$$

Mas como freqüentemente a saída é somente medida em instantes de tempo de amostragem discretos, então a equação de medição pode ser escrita por,

$$\bar{y}_k = g(\bar{x}_k, u_k, k) + \bar{\varphi}_k. \quad (1.3)$$

Onde x são os estados, u são as variáveis manipuladas, y são as medições, ξ são os distúrbios nos estados, φ são os distúrbios medidos. Ainda $k \in \mathbb{N}$, significa que é um tempo inteiro.

Sistemas Não Lineares Tempo-Discretos:

Sistemas tempo-discretos podem ser dados pelas seguintes equações

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k) + G(x_k, u_k)\xi_k, \quad \text{com } x_0 \text{ dado} \quad (1.4)$$

$$y_k = g(x_k, u_k, k) + \varphi_k. \quad (1.5)$$

Se f e g são lineares em x e u o sistema é chamado de linear. No caso de medições discretas, os sistemas tempo-discretos lineares podem ser escritos por:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + G\xi_k, \quad \text{com } x_0 \text{ dado} \quad (1.6)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + \varphi_k. \quad (1.7)$$

1.4 Referências

FINDEISEN, P. K. Moving Horizon State Estimation of Discrete Time Systems. (Thesis M.S. --University of Wisconsin--Madison 1997.). 1997. xix, 157 p.

JALEEL VALAPPIL, C. G. Systematic estimation of state noise statistics for extended Kalman filters. AIChE Journal, v.46, n.2, p.292-308. 2000.

KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Trans. ASME - Basic Engineering: 35-45 p. 1960.

KUSHNER, H. J. On the differential equations satisfied by conditional densities of markov processes. SIAM Journal on Control and Optimization, v.2, p.106. 1964.

MUSKE, K. R. e J. B. RAWLINGS. Nonlinear Moving Horizon State Estimation. In: R. Berber (Ed.). Methods of Model Based Process Control. Antalya: Kluwer Academic, v.293, 1995. Nonlinear Moving Horizon State Estimation, p.349-365. (Applied Sciences)

RAO, C. V. e J. B. RAWLINGS. Constrained process monitoring: Moving-horizon approach. AICHE Journal, v.48, n.1, p.97-109. 2002.

ROBERTSON, D. G., J. H. LEE e J. B. RAWLINGS. A Moving Horizon-Based Approach for Least-Squares Estimation. AICHE Journal, v.42, n.8, August, p.2209-2224. 1996.

TONEL, G., A. R. SECCHI e J. O. TRIERWEILER. Atualização Automática de Modelos para Otimização em Tempo Real. OKTOBER FÓRUM. Porto Alegre - Brazil, 2007. p.

WIENER, N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. New York: John Wiley & Sons. 1949

Capítulo 2

Revisão sobre Estimação de Estados

Para muitos sistemas reais os estados não podem ser medidos diretamente, conseqüentemente estimadores de estados podem ser utilizados para estimá-los a partir de medições e conhecimento das variáveis de entrada do modelo.

Os dois objetivos básicos da estimação de estados são:

1. Fazer estimação dos estados não medidos a partir de medições de processo;
2. Reduzir a influência do ruído medido nos estados estimados e medidos.

A combinação de estimação de estados e de controle *feedback* é mostrada na **Figura 2.1**.

Para sistemas estocásticos lineares com ruído Gaussiano (Seção 2.1) o filtro de Kalman (1960) fornece uma solução ótima para resolver este tipo de problema. Os ruídos de processo e de saída são assumidos variáveis aleatórias e Gaussianas com média igual a zero e covariância conhecida e independentes entre si e do estado.

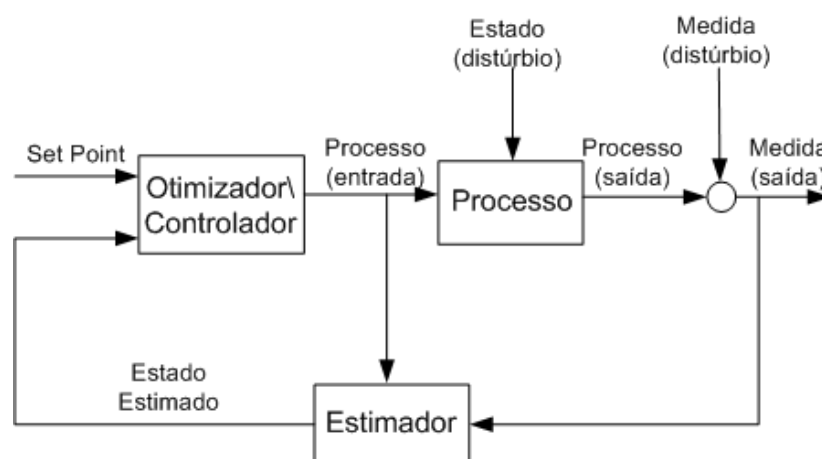


Figura 2.1: Estimação de estado e controle *feedback* de estado.

2.1 Modelos de Sistemas Estocásticos

Nos capítulos seguintes serão considerados sistemas discretos variantes no tempo, não-lineares e sobre influência de distúrbios, equacionados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + G \xi_k \\ y_k &= g(x_k, u_k) + \varphi_k \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

$x_k \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ descreve a propagação do estado x do tempo k até $k + 1$ como uma função do estado anterior x_k e da entrada $u_k \in \mathbb{R}^m$. $\xi_k \in \mathbb{R}^r$ representa o vetor de distúrbio ligado ao estado, também denominado de ruído de processo, o qual “entra” no sistema via a matriz de distribuição $G \in \mathbb{R}^{n \times r}$. ξ_k pode ser interpretado como uma “força motriz” aleatória adicional que atua no sistema. $y_k \in \mathbb{R}^p$ representa a variável de saída que depende da função não-linear $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, dos estados x_k e das entradas u_k . Outra contribuição para medida de saída é o vetor de distúrbio de medição $\varphi_k \in \mathbb{R}^p$, chamado também de ruído de medição.

Revisão: A motivação probabilística para o estimador de mínimos quadrados esclarece porque é necessário que ξ_k e φ_k entrem no sistema de forma linear. Já da motivação determinística dada na seção 2.3.1 é necessário que φ_k e ξ_k entrem no sistema desacoplados da entrada u_k e do estado x_k , respectivamente (MUSKE, 1995).

A maior parte deste trabalho não considera as entradas u_k , pois para sistemas lineares isto não representa uma limitação dado que, o sistema pode ser trocado pela trajetória nominal resultante da entrada u_k . Porém para sistemas não-lineares isto não é possível. Mudanças significativas dos algoritmos não-lineares apresentados deverão ser necessárias se as entradas u são consideradas. Assim, na seção 2.4 não são consideradas as entradas u_k e a partir da seção 2.5 as entradas u_k são consideradas em todas as equações.

O Significado de G , uma Motivação Probabilística

De um ponto de vista probabilístico, G oferece a possibilidade de considerar um ruído colorido como resultante de um ruído branco. Para isto, o sistema é aumentado por estados adicionais ξ_k^C que representam os termos relativos ao ruído colorido.

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \xi_{k+1}^C \end{bmatrix}}_{x'_{k+1}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} f(x_k, u_k) + B^C \xi_k^C \\ A^C \xi_k^C \end{bmatrix}}_{f'(x'_k, u_k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} G \\ G^C \end{bmatrix}}_{G'} \xi_k \\ y_k &= \underbrace{g(x_k, u_k) + g^C(\xi_k^C)}_{g'(x'_k, u_k)} + \varphi_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.2 Revisão dos Métodos de Estimação de Estados

O problema de estimação de estados pode ser considerado e atacado a partir de dois pontos de vista diferentes.

Ponto de Vista Determinístico

Nesta abordagem o problema de estimação é tratado como sendo puramente determinístico. Na maioria das vezes, isto é considerado se nenhuma informação satisfatória a respeito dos distúrbios φ_k e ξ_k está disponível. Outra razão é o caso em que as influências de φ_k e ξ_k sobre o sistema são negligenciáveis. Esta tarefa é então frequentemente considerada como uma recuperação ótima a partir de um erro de estimação do estado inicial ou como a extração de estados não-mensuráveis a partir das saídas.

A maior parte dos algoritmos que se enquadram nessa categoria são projetados para achar uma recuperação “ótima” a partir de um valor de partida incorreto. Esses métodos de estimação de estados são geralmente chamados de observadores.

Ponto de Vista Probabilístico

Neste segundo caso usa-se a informação probabilística de ξ_k e φ_k . Os resultados da estimação são frequentemente ótimos no sentido que eles são mais prováveis sob as informações de saída dadas. Métodos baseados nestas idéias são geralmente chamados de filtros.

A estabilidade destes métodos é frequentemente e somente mostrada para o caso nominal. Isto significa que um erro na estimação inicial \bar{x}_0 a estimação resultante \hat{x}_k irá, sob a influência de *nenhum distúrbio*, convergir para o estado real x_k .

Com o objetivo de aplicar estas técnicas, as distribuições de probabilidade de φ_k , x_0 , ξ_k : $p_{\varphi_k}(\varphi_k)$, $p_{x_0}(x_0)$, $p_{\xi_k}(\xi_k)$ devem ser conhecidas. Sob esta informação o problema de estimação pode ser visto como o cálculo do “máximo” da função densidade probabilística. Para sistemas lineares uma solução recursiva do filtro de Kalman pode ser derivada. Uma extensão para o caso não-linear genérico via os então chamados filtros de Kalman estendidos (EKF) é possível, (JAZWINSKI, 1970) e (GELB, 1974).

Outros métodos de estimação de estado são também conhecidos como métodos de aproximação estatística. Estes aproximam as equações de medição e do sistema por séries de polinômios (GELB, 1974).

A maior parte dos subseqüentes métodos de estimação baseado em otimização apresentados, podem ser derivados a partir dos pontos de vista probabilístico e determinístico. Para uma derivação probabilística, os distúrbios são considerados Gaussianos com média zero e sem restrições nos estados e distúrbios. Na Seção 2.3.2 é dado uma motivação probabilística dos então chamados métodos de estimação via mínimos quadrados para modelos com a estrutura semelhante a Equação (2.1).

Estes métodos foram explorados em meados de 1960 por Bryson e Ho (1975) e Jazwinski (1970). Limitações numéricas e computacionais fizeram a implementação prática impossível naquela época. Estes métodos ganharam interesse nos últimos anos (Michalska e Mayne (1995), Muske e Rawlings (1995), Robertson *et al.* (1996) e Tyler e Morari (1997)). Uma das razões para isto é a possibilidade de incluir explicitamente informações adicionais a respeito dos distúrbios, como limites superiores e inferiores. Estes limites nos distúrbios, porém, torna impossível se chegar aos algoritmos resultantes via uma maneira probabilística pura, desde que as distribuições subjacentes não sejam distribuições Gaussianas longas. Por outro lado parece ser natural incluir limites, desde que o distúrbio real é normalmente limitado em tamanho. Os métodos resultantes podem ser vantajosos em relação às técnicas padrões, como exemplo, o filtro de Kalman (KF) e o filtro de Kalman estendido (EKF), (ROBERTSON *et al.*, 1996), (MUSKE e RAWLINGS, 1995) e (TYLER e MORARI, 1997).

Um resumo dos métodos de estimação considerados é mostrado na **Figura 2.2**.

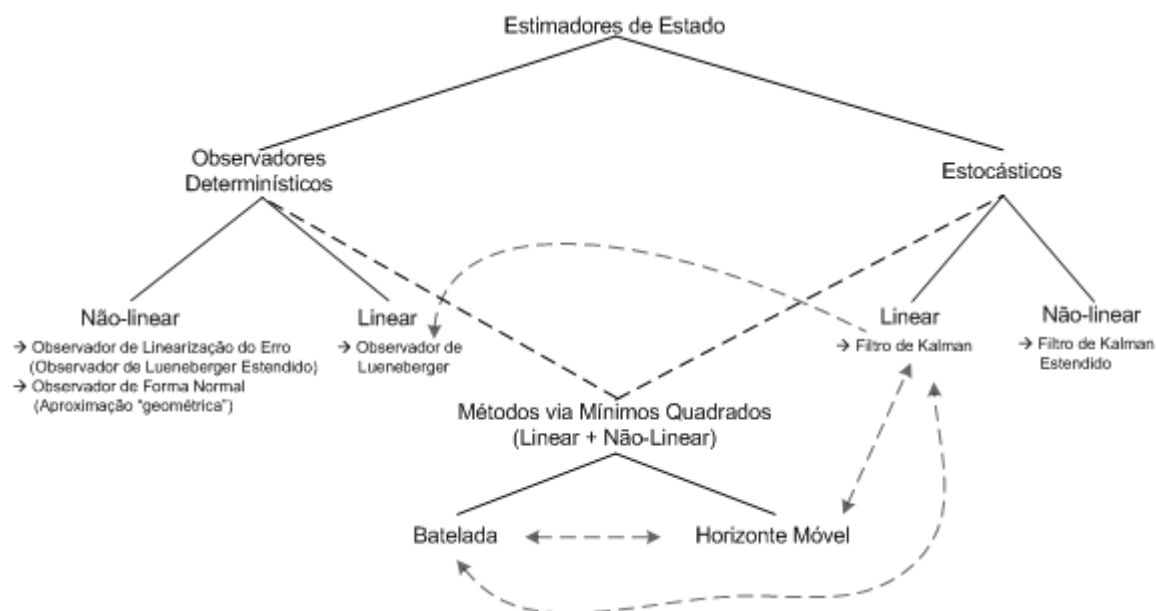


Figura 2.2: Resumo das técnicas de estimação.

2.3 Formulação Genérica do Estimador de Horizonte Móvel (GMHE)

A maioria dos métodos que serão apresentados nas seções seguintes são baseados no esquema de estimação por mínimos quadrados. Uma versão genérica desse esquema, seguindo o estimador de horizonte móvel genérico (GMHE, do inglês *Generic Moving Horizon Estimation*) é formulada como segue:

$$\begin{aligned}
\min_{\hat{\xi}_{k-N-1|k}, \dots, \hat{\xi}_{k-1|k}} & \left(\psi_k \right. \\
& = \hat{\xi}_{k-N-1|k}^T \mathcal{Q}_{-N|k} \hat{\xi}_{k-N-1|k} + \sum_{j=k-N}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T \mathcal{Q} \hat{\xi}_{j|k} \\
& \left. + \sum_{j=k-N}^k \hat{\phi}_{j|k}^T \mathcal{R} \hat{\phi}_{j|k} \right)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

sujeito às equações de igualdade,

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k-N|k} &= \bar{x}_{k-N} + G \hat{\xi}_{k-N-1|k} \\
\hat{x}_{j+1|k} &= f(\hat{x}_{j|k}) + G \hat{\xi}_{j|k} & j = k-N, \dots, k-1 \\
y_j &= g(\hat{x}_{j|k}) + \hat{\phi}_{j|k} & j = k-N, \dots, k
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Aqui $\mathcal{R} = \mathcal{R}^T > 0 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\mathcal{Q}_{-N|k} = \mathcal{Q}_{-N|k}^T > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e \bar{x}_{k-N} é a estimação do estado inicial no tempo $k-N$. $N \in \mathbb{N}^+$, representa o tamanho do horizonte de estimação ou a janela de estimação, de acordo com a **Figura 2.3**.

\mathcal{R} penaliza o erro de predição da saída, \mathcal{Q} penaliza o vetor de ruídos estimados nos estados e $\mathcal{Q}_{-N|k}$ penaliza o erro de estimação inicial. Se for esperado um erro pequeno para a predição do modelo frente o erro de medição, então se toma um \mathcal{R} maior quando comparado com \mathcal{Q} . O valor de $\hat{\phi}_{j|k}$, oriundo da otimização, será menor que o valor correspondente de $\hat{\xi}_{j|k}$ para manter o valor da função custo baixo. Para o caso em que as medidas de saída sejam confiáveis o valor de \mathcal{Q} é tomado maior quando comparado com \mathcal{R} . Limites adicionais nos estados $x_{j|k}$, nas entradas $u_{j|k}$ e nos distúrbios/ruídos $\xi_{j|k}$ e $\phi_{j|k}$ devem ser considerados.

Este conceito de GMHE pode ser motivado a partir de suposições adicionais acerca do ruído associado aos estados e as saídas de um ponto de vista probabilístico. Contudo uma motivação totalmente determinística também pode ser possível. Isto é especialmente importante do ponto de vista de engenharia, pois permite a fácil inserção de restrições e distúrbios, sem haver preocupação sobre as mudanças introduzidas na densidade probabilística das funções.

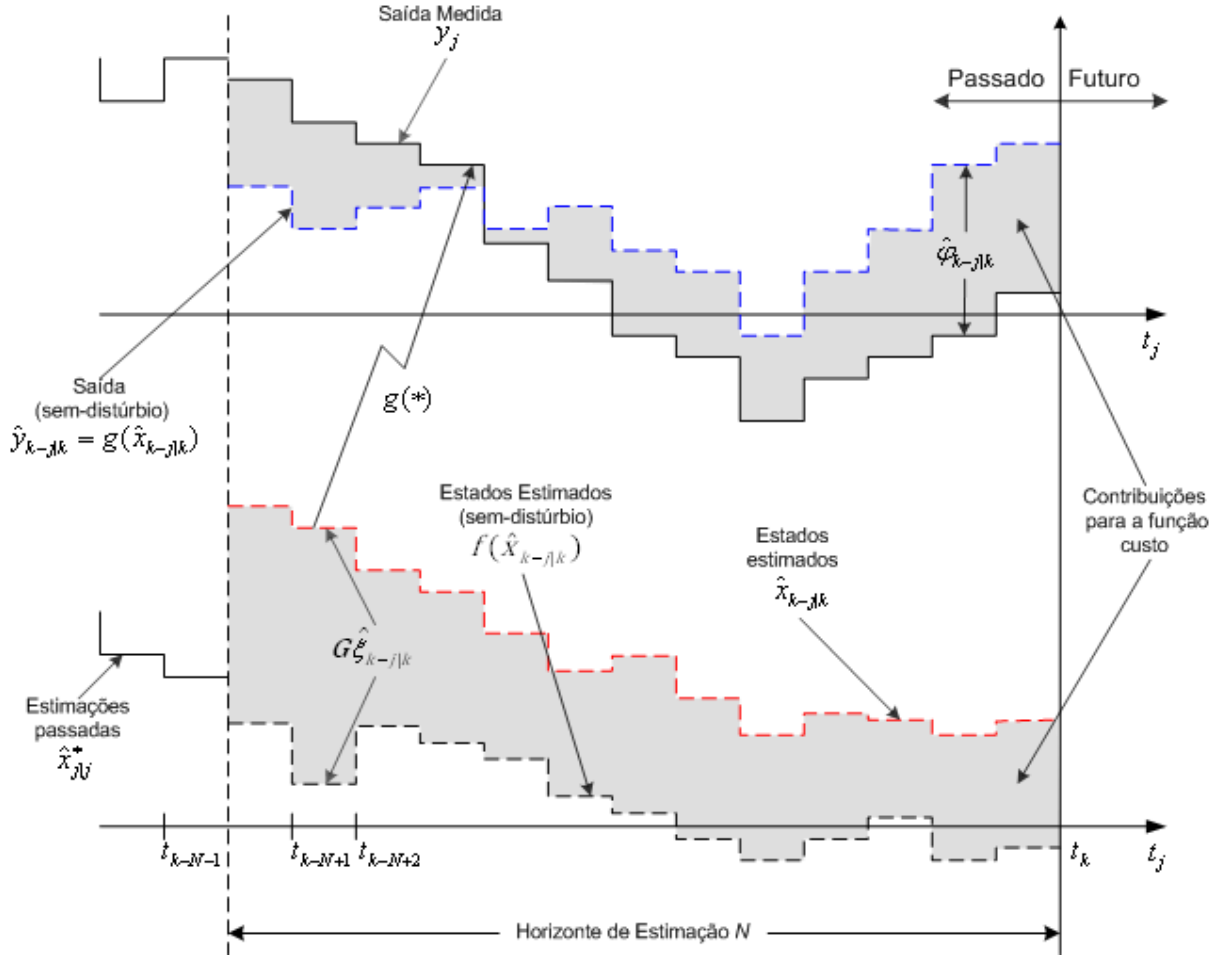


Figura 2.3: Esquema do estimador de horizonte móvel genérico e a sua função custo.

2.3.1 Motivação Determinística para o GMHE

Consideremos as seguintes equações vetoriais de diferenças:

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= f(x_j) + G(x_j)\xi_j \\ y_j &= g(x_j) + \varphi_j \end{aligned} \quad (2.5)$$

Aqui, x_j , u_j , ξ_j e φ_j tem as mesmas dimensões como no caso anterior. $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ descreve a influência de ξ_j dependendo do estado atual do sistema. Seguindo a representação dada por Jazwinski (1970), ξ_j e φ_j não são considerados como distúrbios com estatísticas bem definidas. Ao invés, eles representam erros de caráter desconhecido, sendo então que a equação (2.5) não é uma equação de diferenças estocásticas. Em vez disto, é como uma equação diferencial ordinária (ODE) que pode ser resolvida se os erros forem conhecidos. ξ_j é um erro de modelagem determinístico ou um termo de distúrbio não modelado. Suponhamos que uma sequência de distúrbios oriundos de observações y_j , até um tempo k , esteja disponível. Adicionalmente, considerando que o valor estimado de x_0 , chamado de \bar{x}_0 (ou $\hat{x}_{0|0}$) esteja disponível, a sequência $\{x_0, \dots, x_k\}$ é então calculada (estimada) de forma que os erros ξ_j e φ_j em (2.5) sejam minimizados. Uma prática interpretação para isto é que a solução de (2.5) deveria passar tão próximo quanto possível das observações $\{y_0, \dots, y_k\}$. Um possível método para se chegar a isso pode ser pelo uso da clássica aproximação por mínimos

quadrados. Para isso a equação seguinte (2.6) deve ser minimizada com respeito a sequência $\hat{\xi}_{j|k}$:

$$\Psi_k = \hat{\xi}_{-1|k}^T Q_0 \hat{\xi}_{-1|k} + \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q \hat{\xi}_{j|k} + \sum_{j=0}^k \hat{\phi}_{j|k}^T R \hat{\phi}_{j|k} \quad (2.6)$$

sujeita às equações de igualdade,

$$\begin{aligned} \hat{x}_{0|k} &= \bar{x}_0 + \hat{\xi}_{-1|k} \\ \hat{x}_{j+1|k} &= f(\hat{x}_{j|k}) + G(\hat{x}_{j|k}) \hat{\xi}_{j|k} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k-1 \\ y_j &= g(\hat{x}_{j|k}) + \hat{\phi}_{j|k} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (2.7)$$

O acento circunflexo $\hat{\cdot}$ e o subíndice duplo $\cdot_{j|k}$ são usados, para que os valores da otimização não coincidam com os reais valores da equação (2.5). O primeiro termo corresponde a nossa suposição no valor dado como valor da estimação inicial \bar{x}_0 . R , Q e Q_0 são matrizes positivas definidas simétricas e podem ser vistas como matrizes de pesos. Elas são medidas quantitativas da confiabilidade na equação de observação, na parte dinâmica do modelo do sistema e da estimação passada, respectivamente.

O problema de estimação como colocado na Equação (2.6) é um problema de otimização em batelada¹. O valor estimado de x_k depende de todas as y_j informações até este tempo. Isto irá conduzir para um crescimento contínuo do número de variáveis, conforme o tempo avança. Há várias maneiras diferentes para contornar este problema. No caso linear sem restrições é possível resolver o problema de otimização batelada recursivamente. Isto conduz para uma versão derivada deterministicamente do filtro de Kalman. Outra maneira é considerar bateladas separadas. Na batelada 1 somente usa-se a informação de $k = 0$ a $k = j_1$. A próxima batelada considera as medidas de y_j de $k = j_1 + 1$ a $k = j_2$ e assim por diante. O algoritmo resultante é frequentemente chamado de processo batelada. Esta não é uma boa idéia dado que nenhuma informação é carregada de um cálculo para outro. Uma aproximação diferente é o GMHE introduzido na Seção 2.3. Neste caso, uma “janela” de tamanho N move-se sobre as medidas de saída, veja **Figura 2.3**. As informações sobre cálculos anteriores são carregados com as estimativas “iniciais” \bar{x}_{k-N} e Q_{-N} .

A maior vantagem na motivação determinística por mínimos quadrados é a possibilidade em incluir restrições nos erros sem ter que modificar as distribuições consideradas. Isto nos permite incluir explicitamente informações sobre os erros, como valores máximos e mínimos.

2.3.2 Motivação Probabilística para o GMHE

Os métodos LSE também surgem de uma formulação probabilística no problema de estimação de estados. A estimação de estados (SE) em uma estrutura probabilística pode ser resumida como segue:

Dada a partida da estimação, com as medidas atuais e passadas $Y = \{y_{j|k}\}$, $j = 0, 1, \dots, k$ e suas distribuições probabilísticas, encontrar a distribuição da probabilidade do estado $X = \{x_{j|k}\}$ e extrair deste o mais provável estado estimado $\hat{X} = \{\hat{x}_{j|k}\}$.

¹ Na Subseção item 2.4.3 é mostrado como se chegou até a equação (2.3) a partir da equação (2.6).

A forma fechada da expressão analítica da distribuição da probabilidade dos estados é muito difícil de ser obtida, até mesmo se forem considerados o ruído e a estimativa da partida como ruídos Gaussianos com média zero. No entanto uma solução analítica fechada não é freqüentemente necessária. O cálculo da estimação de estados pode ser vista como uma “busca” por um ótimo da função densidade probabilística com respeito a uma norma adequada. Soluções para este problema são possíveis sem o total e/ou completo conhecimento da função densidade probabilística (JAZWINSKI, 1970).

Os critérios freqüentemente usados para computar a estimação $\hat{X} = \{\hat{x}_{j|k}\}$ de $p(X|Y)$ são:

- Critério: Maximizar a densidade probabilística
Solução: $\hat{X} = \text{máximo de } p(X|Y)$
Isto pode ser visto como a mais provável “estimação única”. Quando um dado ruído anterior e funções densidade-estado são uniformes, esta estimativa é a máxima probabilidade estimada.
- Critério: Minimizar $\int \|X - \hat{X}\|^2 p(X|Y) dX$
Solução: $\hat{X} = E(X|Y)$.
Esta é a média condicional.
- Critério: Minimizar o desvio máximo $|X - \hat{X}|$
Solução: $\hat{X} = \text{Média de } p(X|Y)$.
Esta é a chamada mediana ou estimativa *minimax*.

A visualização para caso escalar (monovariável) desses critérios é dado na **Figura 2.4**. Desde que uma forma analítica fechada não esteja disponível, o uso da média condicional e da estimativa *minimax* não é favorável. Conseqüentemente ao invés disso, o *modo*² é usado freqüentemente como a melhor estimativa para X .

O seguinte modelo de sistema é considerado:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, \xi_k), & k &= 0, 1, 2, \dots \\ y_k &= g(x_k, \varphi_k) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Este modelo de sistema é diferente do considerado em (2.1). A derivação seguinte esclarece porque faz sentido considerar o modelo simples.

² O *modo* é definido como a máxima probabilidade (“pico” na **Figura 2.4**) ou a mais provável estimativa de $p(x_k, \dots, x_0 | y_k, \dots, y_0)$, (JAZWINSKI, 1970).

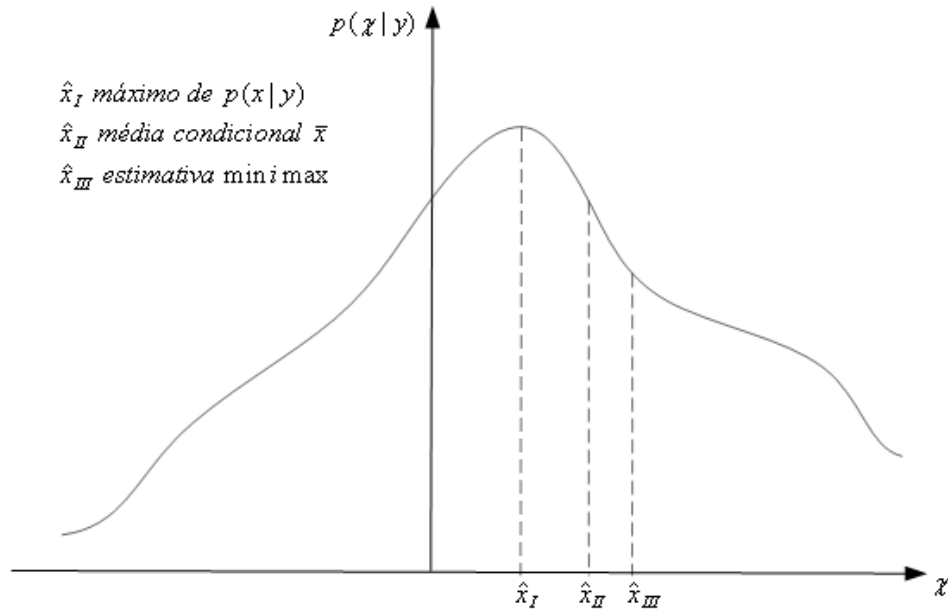


Figura 2.4: Diferentes critérios de estimação probabilística.

Suposições adicionais:

A.1 As distribuições para φ_k , x_0 , ξ_k : $p_{\varphi_k}(\varphi_k)$, $p_{\bar{x}_0}(\bar{x}_0)$, $p_{\xi_k}(\xi_k)$ são conhecidas;

A.2 $f, g \in C^1$;

A.3 $p_{\varphi_k}(\varphi_k)$, $p_{\bar{x}_0}(\bar{x}_0)$, $p_{\xi_k}(\xi_k)$ são variáveis aleatórias não correlacionadas e independentes.

O cálculo da estimativa que maximiza a função densidade probabilística pode ser dividida em duas etapas:

Etapa 1. derivação da probabilidade de todos $\{x_{j|k}\} = X_k$ em relação a sequência de medidas conhecidas $\{y_{j|k}\} = Y_k$.

Etapa 2. cálculo do *modo* de $p(x_k, x_{k-1}, \dots, x_0 | y_k, y_{k-1}, \dots, y_0)$.

Etapa 1:

Expressando $p(x_k, x_{k-1}, \dots, x_0 | y_k, y_{k-1}, \dots, y_0)$ usando o teorema de Bayes resulta em:

$$\begin{aligned} p(x_k, x_{k-1}, \dots, x_0 | y_k, y_{k-1}, \dots, y_0) \\ = \frac{p(y_k, y_{k-1}, \dots, y_0 | x_k, x_{k-1}, \dots, x_0) p(x_k, x_{k-1}, \dots, x_0)}{p(y_k, y_{k-1}, \dots, y_0)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Da equação (2.8) vê-se que cada valor x_{k+1} depende somente do valor de x_k e $p_{\xi_k}(\xi_k)$. Isto implica que a sequência x_k é uma propriedade de *Markov* (*Sequência de Markov*), (GRINSTEAD e SNELL, 1990). A sequência de Markov é uma sequência de variáveis randômicas $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_r\}$ que tem a propriedade que, dado o estado atual, os estados futuros e passados são independentes. Como uma consequência dessa propriedade a sequência y_k também o é. E assim fazendo-se o uso da propriedade de “desacoplamento” de Markov conduz-se a:

$$p(y_k, y_{k-1}, \dots, y_0 | x_k, x_{k-1}, \dots, x_0) = \prod_{i=0}^k p(y_i | x_i)$$

$$p(x_k, x_{k-1}, \dots, x_0) = \left(\prod_{i=1}^k p(x_i | x_{i-1}) \right) p(x_0)$$

Usando o teorema da função de transferência probabilística, como mostrado em Jazwinski (1970) para o cálculo das novas probabilidades, resulta em:

$$p(y_k, y_{k-1}, \dots, y_0 | x_k, x_{k-1}, \dots, x_0) = \prod_{i=0}^k p_{\varphi_k} \left(\tilde{g}^{-1}(y_i, x_i) \left\| \frac{\partial \tilde{g}^{-1}(y_i, x_i)}{\partial y_i} \right\| \right)$$

$$p(x_k, x_{k-1}, \dots, x_0) = \left(\prod_{i=1}^k p_{\xi_k} \left(\tilde{f}^{-1}(x_i, x_{i-1}) \left\| \frac{\partial \tilde{f}^{-1}(x_i, x_{i-1})}{\partial x_i} \right\| \right) \right) p(x_0) \quad (2.10)$$

Observações: O resultado dado em (2.10) é achado considerando-se $p(y_j | x_j) = p(y_j)$. Para fins de cálculo assume-se que as premissas variáveis x_j sejam fixas, o que significa que elas não são mais aleatórias. $\tilde{g}^{-1}(y_i, x_i) = \varphi_i$ é a inversa de $g(x_i, \varphi_i)$ assumindo φ_i e x_i constantes. Esta não é a inversa usual de g com respeito à x_{i-1}, ξ_i . O mesmo acontece para $\tilde{f}^{-1}(x_i, x_{i-1}) = \xi_{i-1}$ como a inversa de $f(x_{i-1}, \xi_{i-1})$ com respeito à ξ_{i-1} .

Para reformular (2.9) uma equação adicional para $p(y_k, y_{k-1}, \dots, y_0)$ é necessária. Esta densidade depende somente da seqüência y_k e conseqüentemente não muda com a escolha de x_k . Mas isto pode ser visto como uma constante com respeito à $\{x_k\}$, onde este valor não tem nenhuma influência na localização do máximo de $p(x_k, x_{k-1}, \dots, x_0 | y_k, y_{k-1}, \dots, y_0)$ para uma dada seqüência $\{y_k\}$.

Etapla 2:

Usando as relações derivadas da etapa 1, o problema de otimização seguinte tem que ser resolvido para o cálculo do modo de \hat{X}_k^* :

$$\arg \max_{\{x_k, x_{k-1}, \dots, x_0\}} p_{\varphi_k} \left(\tilde{g}^{-1}(y_i, x_i) \left\| \frac{\partial \tilde{g}^{-1}(y_i, x_i)}{\partial y_i} \right\| \right)$$

$$\cdot \left(\prod_{i=1}^k p_{\xi_k} \left(\tilde{f}^{-1}(x_i, x_{i-1}) \left\| \frac{\partial \tilde{f}^{-1}(x_i, x_{i-1})}{\partial x_i} \right\| \right) \right) p(x_0) \quad (2.11)$$

Esta é estimativa do modo probabilístico não-linear genérico para \hat{X}_k^* . Para derivar desta equação à aproximação por mínimos quadrados determinística, as seguintes restrições adicionais são necessárias:

A.4 ξ_k e φ_k entram no sistema da seguinte forma desacoplada e linear³:

³ Para um tratamento mais rigoroso e geral, mesmo com entrada de distúrbios no sistema similar ao dado em (2.5) ver em Friedland e Bernstein (1966).

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k) + \xi_k \\y_k &= g(x_k) + \varphi_k \\k &= 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

A.5 Todas as variáveis aleatórias são uma distribuição normal Gaussiana:

$$\xi_k \sim N(0, Q), \quad \varphi_k \sim N(0, R), \quad \bar{x}_0 \sim N(\bar{x}_0^M, Q_0)$$

Sob estas condições $\tilde{f}^{-1}(x_{k+1}, x_k) = x_{k+1} - f(x_k)$, $\tilde{g}^{-1}(y_k, x_k) = y_k - g(x_k)$ o resultado da otimização é a maximização de uma função exponencial com expoente negativo, (ROBERTSON *et al.*, 1996). Isto permite simplificar (2.11) para o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}\hat{X}_k^* = \arg \max_{\{x_k, x_{k-1}, \dots, x_0\}} & \|x_0 - \bar{x}_0\|_{Q_0^{-1}}^2 + \sum_{i=1}^k \|x_i - f(x_{i-1})\|_{Q^{-1}}^2 \\ & + \sum_{i=0}^k \|y_i - g(x_i)\|_{R^{-1}}^2\end{aligned} \quad (2.12)$$

com o resultado da otimização \hat{X}_k^* torna-se $\hat{X}_k^*\{x_k^*, x_{k-1}^*, \dots, x_0^*\}$. Isto iguala-se a aproximação por mínimos quadrados em batelada, onde suas matrizes de covariância inversas R^{-1} , Q^{-1} , Q_0^{-1} , são iguais as matrizes de peso \mathcal{R} , \mathcal{Q} , \mathcal{Q}_0 respectivamente. A partir disso, a formulação dos mínimos quadrados do problema de otimização surge naturalmente de um arranjo probabilístico.

A **Figura 2.3** proporciona uma interpretação gráfica do problema de otimização e as conexões entre as medidas, estados reais e estimados para o GMHE. Ainda nesta figura, uma expansão para uma janela de “estimação” do horizonte móvel é mostrada. Para as equações derivadas aqui N igual a k , corresponde a um contínuo crescimento do horizonte de filtragem. Um arranjo do estimador por mínimos quadrados em conjunto com um controlador de realimentação (*feedback*) de estados é mostrado na **Figura 2.5**.

Nesta formulação as matrizes Q e R são os parâmetros de ajuste do modelo com as medidas do processo. As matrizes carregam o significado de como os erros estão distribuídos entre modelo e as medições (saídas). Adicionalmente aos seus significados estatísticos, as matrizes têm um simples significado: a matriz Q dá uma medida da confiança no modelo, enquanto que a matriz R dá uma medida da confiança nas observações do processo (*process sensors*). Assim se a matriz Q é “grande” em relação a R então estamos menos confiantes no modelo do que nas medições e vice-versa. A matriz Q_0 dá uma medida de confiança em relação ao estado inicial \bar{x}_0 ⁴.

2.3.3 Observações sobre o GMHE

Como mostrado na Seção 2.3.2 o uso da aproximação por mínimos quadrados para otimização baseada na estimação de estados é natural. No entanto é possível o uso de uma função custo de estados não-linear ao invés de uma função quadrática na otimização.

⁴ Notar que as matrizes R , Q e Q_0 têm interpretações opostas de \mathcal{R} , \mathcal{Q} , \mathcal{Q}_0 .

$$\Psi_k = \Omega_{-N|k}(\xi_{k-N-1|k}, \hat{x}_{k-N|k}) + \sum_{j=k-N}^{k-1} \Omega(\xi_{j|k}, \varphi_{j|k}, \hat{x}_{j|k}) + \Omega_{\text{final}}(\varphi_{j|k}, \hat{x}_{k|k}) \quad (2.13)$$

Esta aproximação não é ainda considerada aqui, pois um entendimento da aproximação normal por mínimos quadrados é apropriado antes de considerarmos as formulações mais gerais.

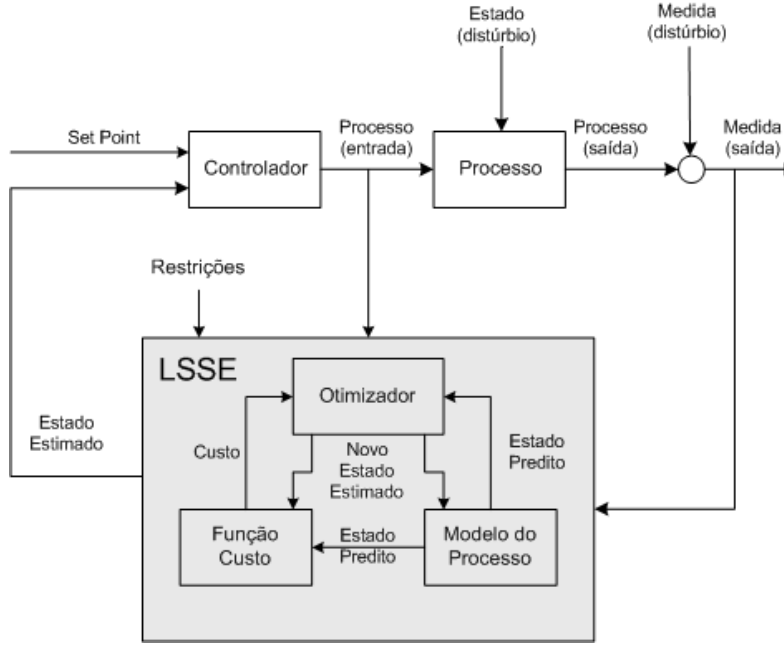


Figura 2.5: Estrutura básica de otimização baseada na estimação de estados.

2.4 Estimação de Estado Linear

Esta Seção discute a aplicação de métodos baseados nos mínimos quadrados para sistemas lineares. Para sistemas lineares é possível formular um algoritmo de solução recursiva para o método dos mínimos quadrados que permite um cálculo rápido do próximo estado estimado em função do último calculado. Esta formulação recursiva foi primeiro proposta por Kalman (1960).

O método de espaço-estados de Kalman promoveu um intenso interesse na teoria do filtro, por superar as suposições estacionárias restritivas da teoria de Wiener-Kolmogorov do filtro linear, abrindo novas perspectivas. Para sistemas lineares com estrutura de ruído Gaussiano, os quais são considerados na formulação do filtro de Kalman, a decisão que maximiza a função densidade probabilística é fácil de ser obtida, desde que o *modo* e a *média condicional* sejam iguais. Assim não há razão para o uso de uma formulação não-recursiva com o objetivo de calcular a próxima estimação. Porém a formulação batelada contempla a possibilidade de incorporar restrições adicionais, permitindo descrever um conhecimento prévio do sistema, como a restrição do estado à uma certa região ou as limitações físicas influenciadas pelos distúrbios. Esta adição de restrições não é possível por formulações

recursivas, e assim informações importantes sobre características específicas do sistema são perdidas, as quais poderiam ajudar a melhorar ou acelerar a convergência da estimação.

Primeiramente o estimador de estados em batelada (BSE) é apresentado e após isto o filtro de Kalman é discutido como uma solução recursiva do estimador batelada sem restrição. Nesta Seção do trabalho os estimadores de horizonte móvel são motivados e duas diferentes aproximações, onde são garantidas suas estabilidades sob suas respectivas restrições, são discutidas. A parte seguinte (2.4.4) fornece uma curta introdução da idéia básica de métodos de projeto de observadores lineares. No final desta Seção (2.4.5) é mostrado que todos os métodos de estimação linear podem ser reduzidos para a mesma estrutura básica. Os modelos de sistema considerado nesta Seção são lineares e têm a seguinte estrutura (similar à estrutura dada em (1.6) e (1.7)):

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + G\xi_k \quad (2.14)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + \varphi_k \quad (2.15)$$

onde x_0 é dado.

2.4.1 Estimador Batelada

Se a formulação por mínimos quadrados, resultante de uma derivação probabilística/determinística em 2.3.1, 2.3.2 é usada como um método para estimar os estados de um sistema, estar-se-á falando sobre o estimador via mínimos quadrados em batelada. Este estimador pode também ser visto do ponto de vista do GMHE com N igual a k e conseqüentemente ele é variante no tempo:

$$\min_{\hat{\xi}_{-1|k}, \dots, \hat{\xi}_{k-1|k}} \Psi_k = \hat{\xi}_{-1|k}^T Q_0^{-1} \hat{\xi}_{-1|k} + \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q^{-1} \hat{\xi}_{j|k} + \sum_{j=0}^k \hat{\varphi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\varphi}_{j|k} \quad (2.16)$$

sujeita as equações de igualdade,

$$\begin{aligned} \hat{x}_{0|k} &= \bar{x}_0 + \hat{\xi}_{-1|k} \\ \hat{x}_{j+1|k} &= A\hat{x}_{j|k} + Bu_j + \hat{\xi}_{j|k} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k-1 \\ y_j &= C\hat{x}_{j|k} + \hat{\varphi}_{j|k} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (2.17)$$

O estado estimado resultante da minimização pode ser calculado usando a seguinte equação em dependência da seqüência $\{\hat{\xi}_{j|k}^*\}$ calculada:

$$\hat{x}_{i|k}^* = A^i \bar{x}_0 + \sum_{j=0}^i A^{i-j} \hat{\xi}_{j-1|k}^* + \sum_{j=0}^i A^{i-j-1} Bu_j$$

Esta formulação tem o inconveniente de que o problema de otimização cresce conforme o tempo avança e torna-se computacionalmente intratável (conforme **Figura 2.6**), mesmo para sistemas pequenos. A estabilidade pode também ser deduzida da estabilidade do

As seguintes restrições de estado e medidas são consideradas em adição as equações dadas em (2.16), (2.17)

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \{x_{j|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{x,min} \leq H_x \hat{x}_{j|k} \leq h_{x,max}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, k\} \\ \hat{Z} &= \{\xi_{j|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{\xi,min} \leq \xi_{j|k} \leq h_{\xi,max}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k-1\}\end{aligned}\quad (2.18)$$

O fato de que o primeiro estado estimado $\hat{x}_{0|k}$ e o primeiro distúrbio $\hat{\xi}_{-1|k}$ não possuem restrições, garante-se a viabilidade do problema de otimização quadrática associado a cada passo de tempo (MUSKE, 1995).

Se as restrições de estado são consideradas para um A instável o estimador poderia não ser capaz de seguir o estado real x_k para todas as trajetórias possíveis do mesmo. Como resultado um teorema de estabilidade nominal genérico, para um A instável, não pode ser deduzido. Isto não significa que restrições nos estados não podem ser usadas, mas sim que elas somente fazem sentido se uma garantia de que o sistema real não irá violar estas restrições poderá ser dada. Um modo para garantir que isto aconteça, poderia ser pelo o uso de um controlador que força o sistema a ir para a região das restrições. Porém o uso de tal controlador modifica a questão de estabilidade de todo o *loop feedback*. Este é com certeza um problema mais complicado que o anterior. Portanto nenhuma restrição nos estados para A instável será considerada aqui.

Adicionalmente, para (2.18) é considerado que ambos os conjuntos \hat{X}, \hat{Z} contem a origem, Equação (2.19), (para um caso de entrada não-zero o resultado do estado real tem de estar dentro da região das restrições). Isto é necessário para garantir que o estimador convirja para o valor do estado real, e também assegurar que as restrições formem uma região convexa para o problema de otimização quadrática.

$$\begin{aligned}h_{x,min} &\leq 0 \leq h_{x,max} \\ h_{\xi,min} &\leq 0 \leq h_{\xi,max}\end{aligned}\quad (2.19)$$

Com estas definições os seguintes teoremas sobre a estabilidade do BSE podem derivados:

Teorema 2.2 (Estabilidade Assintótica Nominal da estimação de estado em batelada para A estável) *Se A é estável então o BSE dado em (2.16), (2.17), é um estimador estável assintoticamente, nominal e globalmente com os conjuntos \hat{X}, \hat{Z} de restrições.*

Prova: a prova será somente esboçada. Para a exata derivação ver Muske (1995). A viabilidade das restrições deriva do fato de que nenhuma delas são colocadas na primeira estimação para $\hat{\xi}_{-1|k}$ e $\hat{x}_{0|k}$. A convergência da sequência do erro na estimação $e_{k|k} = x_k - \hat{x}_{k|k}$ deriva do fato de que o seu valor, para cada k , é limitado através de $\bar{\Psi}_k = \Psi(\{-\bar{x}_0, 0, \dots, 0\})$. Esta soma converge para um valor fixo desde que A seja estável e $R^{-1} > 0$. Adicionalmente nós sabemos que a sequência Ψ_k^* é monotonicamente não-decrescente. A convergência de $e_{k|k}$ deriva da estabilidade de A e da convergência de $\xi_{j|k}^*$ (Ψ_k^* converge e $Q^{-1} > 0$ então resulta que $\xi_{j|k}$ converge para 0). A estabilidade de $e = 0$ é garantida pelo fato de que exista uma região em torno da origem que o BSE com restrição é igual ao BSE sem-restrição. Desde que o BSE sem-restrição é equivalente ao filtro Kalman, a estabilidade da origem é dada pela estabilidade do filtro de Kalman ao redor da origem.

Teorema 2.3 (Estabilidade Assintótica Nominal da estimação de estados em batelada para A instável) *Se (A, C) é detectável e A instável então o BSE dado em (2.16), (2.17), é um estimador estável assintoticamente, nominal e globalmente com o conjunto de restrições $\hat{\Xi}$.*

Prova: a prova deriva em partes da prova dada pelo Teorema 2.2, conforme Muske (1995). A viabilidade deriva do Teorema 2.2. A convergência é similar ao estimador batelada linear desde que uma sequência de zeros $\xi_{j|k}$ seja a sequência de distúrbios de estados para todo k (distúrbios nulos). A estabilidade é a mesma para um A estável.

2.4.2 Filtro de Kalman

Esta formulação para o estimador de estado linear foi primeiramente proposta por Kalman (1960). Kalman propôs o filtro em seu trabalho original usando uma aproximação geométrica chamada de teoria da projeção geométrica. Porém devido à linearidade dos modelos usados vários outros métodos diferentes e também deduzidos intuitivamente foram propostos. Jazwinski (1970) fornece uma boa revisão para as diferentes possibilidades. O autor deduz o filtro de Kalman de um modo direto usando um arranjo probabilístico rigoroso. Depois disso ele também apresenta uma idéia básica por trás dos outros métodos de dedução como os mínimos quadrados determinístico, projeção ortogonal e probabilidade máxima.

O filtro de Kalman apresenta uma solução recursiva para o problema dos mínimos quadrados em batelada dado na Seção anterior (Eq. (2.16) e (2.17)), eliminando assim a demanda computacional crescente durante a solução do problema batelada com o passar do tempo. Adicionalmente a isso se inclui a necessidade de se guardar as medidas passadas, como no método batelada, que aqui é dispensada. O novo estado é calculado usando somente a mais nova medida e o estado calculado anteriormente.

O filtro para sistemas invariantes no tempo e para sistemas autônomos discretos pode ser escrito como segue:

Predição:

$$\begin{cases} \hat{x}_{0|0} = \bar{x}_0, & P_{0|0} = Q_0 \rightarrow \text{Inicialização } k = 0 \\ x_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1|k-1}, & P_{k|k-1} = AP_{k-1|k-1}A^T + Q \rightarrow k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Correção:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + L_k(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}) \\ L_k &= P_{k|k-1}C^T(CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1} \\ P_{k|k} &= P_{k|k-1} - L_kCP_{k|k-1} \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2.20}$$

Esta estimação é a variância mínima estimada se ξ_j e φ_j são variáveis independentes com média zero, aleatórias e distribuídas normalmente com covariâncias Q e R , e \bar{x}_0 uma variável independente, aleatória e distribuída normalmente com covariância Q_0 . Para processos lineares isto também é a “mais provável” ou a máxima probabilidade estimada. As covariâncias Q e R estipulam a magnitude esperada para os distúrbios nos estados e nas medidas respectivamente. Através da aproximação probabilística, um método rigoroso para conseguir o ajuste dos parâmetros para o estimador é feito pela suposição de que a natureza

Gaussiana do processo estocástico seja satisfeita e as covariâncias sejam conhecidas ou possam ser quantificadas.

O estado estimado filtrado é calculado usando um estado estimado predito através do último valor calculado e da sua atual medida. A matriz L_k pode ser vista como um ganho *feedback* linear que penaliza a diferença entre a atual medição e a sua predição. L_k é calculada usando a covariância do último estado estimado $P_{k|k-1}$. Já $P_{k|k-1}$ é calculado pela iteração de Ricatti com condição inicial $P_{0|0} = Q_0$. A convergência da iteração de Ricatti garante a estabilidade sobre certas condições.

A estabilidade do filtro de Kalman resulta da iteração da Equação de Ricatti que é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 2.4 (Estabilidade Exponencial do Filtro de Kalman) *O filtro de Kalman é nominalmente e exponencialmente estável devido a (A, C) ser detectável, $(A, Q^{1/2})$ ser estabilizável, $R > 0$, $Q \geq 0$ e $Q_0 \geq 0$.*

Prova: Para a prova ver De Souza, Gevers *et al.* (1986) e Robert, Vincent *et al.* (1991).

2.4.3 Estimação via Horizonte Móvel

Como mostrado anteriormente, o BSE requer a solução do problema dos mínimos quadrados usando todas as medidas de saída k anteriormente conhecidas para calcular a estimação filtrada. Uma possível solução para reduzir o montante de informação a ser processada a cada tempo é começar com um novo cálculo batelada a cada passo de tempo pelo truncamento do vetor de medidas passadas. Até mesmo com uma idéia mais inferior poderia se iniciar com uma nova seqüência de estimação em batelada após um tamanho de horizonte específico ser alcançado. Os métodos que usam esta idéia têm a desvantagem que eles não têm ligação com as bateladas anteriores. Considerável conhecimento é então perdido na forma de estados passados. Jazwinski (1970) propôs outra idéia, os chamados filtros de memória limitada. Estes filtros foram construídos sobre a idéia do uso da covariância passada e valores médios para iniciar uma nova batelada. Porém, ele considera somente sistemas com distúrbio nas medidas (φ).

Em outra aproximação, um horizonte móvel tenta preservar as informações passadas pelo uso de uma janela de “informações” que desliza sobre as medidas. O estado é estimado através de um horizonte de $(N + 1)$ medidas de saída mais recentes, que se move à frente a cada tempo de amostragem quando uma nova medida está disponível. A informação passada é incorporada usando uma estimação de partida \bar{x}_{k-N} que é calculada a partir dos estados filtrados passados e da matriz de peso específica Q_{-N} . A diferença entre os métodos apresentados encontra-se no modo de como a nova estimação inicial e o novo peso inicial são calculados, e assim como é garantida a estabilidade.

A janela de dados móvel reduz o problema do crescimento do número de variáveis de decisão, encontrado no estimador de estados em batelada, para um número fixo. As primeiras N estimações são computadas usando um estimador batelada similar ao apresentado em 2.4.1. O nome “estimação via horizonte móvel” vem da analogia com uma janela de estimação deslizando ou móvel, cujo esquema pode ser visualizado na **Figura 2.7**.

Várias opções diferentes existem para a solução de problemas matemáticos como o apresentado pelas equações (2.16) e (2.17). O problema como apresentado requer a solução de

um problema de programação não-linear (NLP), embora tratável, computacionalmente grande. Se o modelo do processo é rígido (*stiff*) ou tem dinâmicas instáveis, estratégias simultâneas, na quais a discretização e o problema de otimização são resolvidos simultaneamente, são freqüentemente vantajosas, (BIEGLER, 1997), (BIEGLER, 1998) e (BOCK *et al.*, 1998) *apud* (RAO e RAWLINGS, 2002). Quando o modelo do processo é linear e quando as restrições formam um conjunto de poliedros convexos, a programação matemática reduz-se para programação quadrática cujo problema de esforço computacional é bem menor. Para implementações on-line é necessário limitar o tamanho do problema matemático dado pelas equações (2.16) e (2.17). Conseqüentemente é necessária uma estratégia para a compressão/compactação dos dados. A estratégia aplicada é a programação dinâmica *aproximada*. Rearranjando a função objetivo Ψ_k de (2.16), dividindo em duas partes $t_1 = \{j: 0 \leq j \leq k - N - 1\}$ e $t_2 = \{j: k - N \leq j \leq k\}$:

$$\begin{aligned} \Psi_k = & \hat{\xi}_{-1|k}^T Q_0^{-1} \hat{\xi}_{-1|k} + \sum_{j=0}^{k-N-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q^{-1} \hat{\xi}_{j|k} + \sum_{j=0}^{k-N-1} \hat{\phi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\phi}_{j|k} \\ & + \sum_{j=k-N}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q^{-1} \hat{\xi}_{j|k} + \sum_{j=k-N}^k \hat{\phi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\phi}_{j|k} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Assumindo que o sistema (2.21) acima apresenta o comportamento de *Markov*, (GESTHUISEN, 2001), ou seja, a expressão,

$$\sum_{j=k-N}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q^{-1} \hat{\xi}_{j|k} + \sum_{j=k-N}^k \hat{\phi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\phi}_{j|k}$$

depende somente de $\bar{x}_{k-N}, \{y_{k-N}, \dots, y_k\}, \{\hat{\xi}_{k-N|k}, \dots, \hat{\xi}_{k-1|k}\}$. O princípio da otimalidade nos permite calcular o problema de estimação dado pela equação (2.11) como um problema MHE. Assim podemos substituir as equações (2.16) e (2.17) pelo seguinte problema matemático:

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\xi}_{k-N-1|k}, \dots, \hat{\xi}_{k-1|k}} \Psi_k^N = & Z_{k-N}(\bar{x}_{k-N}) + \sum_{j=k-N}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q^{-1} \hat{\xi}_{j|k} \\ & + \sum_{j=k-N}^k \hat{\phi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\phi}_{j|k} \end{aligned} \quad (2.22)$$

sujeito às restrições da Equação (2.17), onde

$$Z_{k-N}(\hat{x}_{k-N}) = (\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N|k})^T \hat{P}_{k-N|k-N-1}^{-1} (\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N|k}) \quad (2.23)$$

é a função custo marginal que é obtida de uma analogia com o EKF (considerando que P tenha sua inversa). Usar o EKF para aproximar o custo marginal tem muitas vantagens. Quando não existem restrições o estimador é o próprio filtro de Kalman estendido. Neste caso como o modelo do processo é linear, o estimador reduz-se para o filtro de Kalman.

O custo marginal é fundamental na estimação, pois pela compressão de dados, isto nos permite transformar o problema matemático sem limites em um equivalente problema de dimensão fixa. Quanto mais a aproximação do custo marginal $Z_{k-N}(\cdot)$ satisfazer certas condições técnicas, a não-divergência ou a estabilidade é garantida (RAO e RAWLINGS, 1998). Quando o modelo do processo é linear a covariância do filtro de Kalman, embora exista restrições, resulta em um estimador estável (RAO *et al.*, 1999b). Porém quando o modelo do processo é não linear, a covariância do filtro de Kalman estendido não garante estabilidade e medições adicionais são necessárias para garantir a estabilidade. Em termos práticos deveria existir um grau de “esquecimento”: o estimador não deveria ponderar os dados passados tão fortemente. Uma propriedade do filtro de Kalman é que ele esquece exponencialmente os dados passados (ANDERSON, 1999) *apud* (RAO e RAWLINGS, 2002). Então pela adição de um fator de esquecimento para o custo marginal aproximado, a robustez dos estimadores, ameaçados de divergirem, pode melhorar. Uma estratégia simples para gerar um fator de esquecimento é pré-multiplicar o custo marginal aproximado por um escalar $\alpha \in (0,1)$.

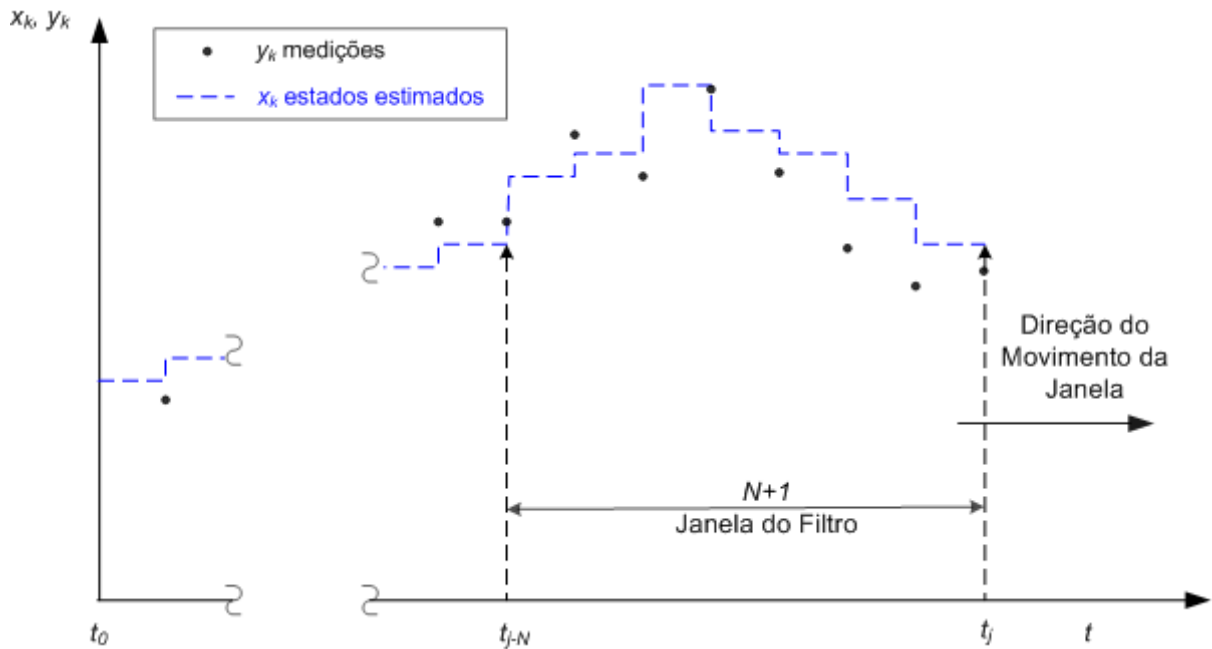


Figura 2.7: Exemplo da janela do filtro móvel.

MHE sem-restrições

A primeira formulação do MHE usa um filtro de Kalman para fazer a atualização dos valores iniciais. Este algoritmo e o equivalente ao filtro de Kalman (semelhante a equivalência do estimador batelada e o filtro de Kalman) foram apresentados em um artigo de Muske *et al.* (1993). Isto formará uma base para o esquema MHE com restrição apresentado na item seguinte. O valor de partida $\bar{x}_{k-N|k}$ é calculado a partir do valor ótimo estimado ($x_{k-N-1|k-N-1}^*$) a $N + 1$ intervalos de tempo passados.

$$\bar{x}_{k-N|k} = A\hat{x}_{k-N-1|k-N-1}^* + Bu_{k-N-1}$$

Para a matriz de penalidade inicial $Q_{-N|k}$ usa-se ao invés a matriz de Ricatti $P_{k-N|k-N-1}$, onde a mesma é resultante da atualização do filtro de Kalman como dado em (2.20) com $P_{0|0} = Q_0$. Notar que $P_{k-N|k-N-1}$ é a covariância extrapolada do estado estimado no tempo $k - N$.

$$\min_{\hat{\xi}_{k-N-1|k}, \dots, \hat{\xi}_{k-1|k}} \Psi_k^N = \hat{\xi}_{k-N-1|k}^T P_{k-N|k-N-1}^{-1} \hat{\xi}_{k-N-1|k} + \sum_{j=k-N}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q^{-1} \hat{\xi}_{j|k} + \sum_{j=k-N}^k \hat{\phi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\phi}_{j|k} \quad (2.24)$$

sujeita às equações de igualdade,

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k-N|k} &= \bar{x}_{k-N|k} + \hat{\xi}_{k-N-1|k} \\ \hat{x}_{j+1|k} &= A\hat{x}_{j|k} + Bu_j + \hat{\xi}_{j|k} \quad j = k-N, \dots, k-1 \\ y_j &= C\hat{x}_{j|k} + \hat{\phi}_{j|k} \quad j = k-N, \dots, k \end{aligned} \quad (2.25)$$

com,

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k-N|k} &= A\hat{x}_{k-N-1|k-N-1}^* + Bu_{k-N-1} \\ P_{k-N|k-N-1} &= A(P_{k-N-1|k-N-2}^{-1} + C^T R^{-1} C)^{-1} A^T + Q \\ P_{0|0} &= Q_0 \end{aligned}$$

Muske *et al.* (1993) mostraram que o valor do estado estimado predito $x_{k+1|k}^*$ calculado usando o esquema em (2.24) é equivalente a estimação do filtro de Kalman calculado pelo emprego da equação (2.20) se o sistema usado é autônomo:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + \xi_k \\ y_k &= Cx_k + \phi_k \end{aligned} \quad (2.26)$$

A estabilidade do esquema de horizonte móvel pode ser deduzido da estabilidade do filtro de Kalman usando a equivalência entre o filtro de Kalman e o MHE com o filtro de Kalman como atualizador.

Método com Restrição 1 – Nenhuma Restrição Inicial

Desde que estimador de horizonte móvel, com atualização via filtro de Kalman para os casos sem-restrição, dá o mesmo resultado que o filtro de Kalman, não há mais razão para o uso desta aproximação, devido ao tempo computacional adicional que é necessário para resolver o problema de otimização. A motivação para o uso da formulação do horizonte móvel é a possibilidade de empregar restrições. Uma discussão sobre a vantagem da incorporação de restrições é feita de uma maneira mais ampla no item 2.6. Fazendo-se isto, um problema que surge é a questão sobre o conjunto de restrições que podem ser usadas e também o tipo do esquema de atualização que deverá ser empregado. Esta formulação foi dada por Muske (1995) e uma discussão adicional do ponto de vista probabilístico foi

proposto no trabalho de Robertson *et al.* (1996). A idéia por trás desta formulação é usar as propriedades de estabilidade do filtro de Kalman de forma a achar um MHE de estabilização nominal.

Esta formulação usa um estado inicial estimado $\bar{x}_{k-N|k}$ calculado pelo emprego do filtro de Kalman no tempo $k - N - 1$ e usando o valor predito $\hat{x}_{k-N-1|k-N-1}$ (ver a equação (2.20) e como calcular isto). Denotaremos aqui estas estimações iniciais de $\hat{z}_{k-N|k}$, de forma a evitar confusão com as estimações passadas. Como matriz de peso inicial, a matriz de covariância de predição $P_{k-N|k-N-1}^{-1}$ do filtro de Kalman é usada.

As duas escolhas anteriores garantem a estabilidade do estimador, pelo emprego das propriedades de estabilidade do filtro de Kalman. Porém esta não é uma idéia muito intuitiva, desde que, como resultado das estimações de partida usadas, não é em geral possível a colocação de restrições nas estimações iniciais de forma a manter uma programação quadrática possível de ser resolvida. No entanto o estado estimado inicial $\hat{x}_{k-N|k}$ e o distúrbio-estado inicial $\hat{\xi}_{k-N-1|k}$ permanecem sem restrição (MUSKE, 1995). Os conjuntos de restrições resultantes são dados em (2.28). Outra desvantagem do uso do filtro de Kalman como chute inicial é que não há nenhuma conexão entre as estimações MHE passadas e a estimacão calculada recentemente, pois desde que valores iniciais são usados, os mesmos poderiam violar as restrições. Assim este filtro pode ser visto como uma extensão do filtro de Kalman normal, com o fato de que restrições adicionais nos últimos N valores são empregadas com o objetivo de dar um melhor ajuste na estimacão. Se as restrições de estado são consideradas para um A instável, o estimador poderá não ser capaz de seguir o estado real x_k para todas as possíveis trajetórias de x_k . No entanto, restrições nos estados para A instável são usadas aqui. Esta é uma restrição similar a aquela que foi necessária para a estimacão de estado em batelada sem-restrições com A instável (ver 2.4.1) com o objetivo de garantir a convergência.

Necessidades adicionais são que ambos os conjuntos $\hat{X}, \hat{\Xi}$ tenham que conter a origem (para um caso de entrada não-zero, o resultado do estado real tem que se encontrar na região das restrições). Isto se faz necessário para garantir que o estimador possa convergir para o valor do estado real e também assegurar que as restrições formem uma região convexa contendo o sistema de estados reais com o objetivo de assegurar o problema de otimização quadrático. O estimador resultante com as apropriadas restrições tem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\xi}_{k-N-1|k}, \dots, \hat{\xi}_{k-1|k}} \quad & \Psi_k^N = \hat{\xi}_{k-N-1|k}^T P_{k-N|k-N-1}^{-1} \hat{\xi}_{k-N-1|k} + \sum_{j=k-N}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q^{-1} \hat{\xi}_{j|k} \\ & + \sum_{j=k-N}^k \hat{\phi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\phi}_{j|k} \end{aligned} \quad (2.27)$$

sujeita a,

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k-N|k} &= \hat{z}_{k-N|k} + \hat{\xi}_{k-N-1|k} \\ \hat{x}_{j+1|k} &= A\hat{x}_{j|k} + Bu_j + \hat{\xi}_{j|k} \quad j = k-N, \dots, k-1 \\ y_j &= C\hat{x}_{j|k} + \hat{\phi}_{j|k} \quad j = k-N, \dots, k \\ \hat{X} &= \{x_{j|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{x,min} \leq H_x \hat{x}_{j|k} \leq h_{x,max}, \quad j = k-N+1, k-N+2, \dots, k\} \\ \hat{\Xi} &= \{\hat{\xi}_{j|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{\xi,min} \leq \hat{\xi}_{j|k} \leq h_{\xi,max}, \quad j = k-N, k-N+1, \dots, k-1\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

com,

$$\begin{aligned}\hat{z}_{k-N|k} &= A\hat{z}_{k-N-1|k-N-1} + Bu_{k-N-1} \\ P_{k-N|k-N-1} &= A(P_{k-N-1|k-N-2}^{-1} + C^T R^{-1} C)^{-1} A^T + Q\end{aligned}$$

Muske (1995) mostra a estabilidade assintótica para este estimador. O resultado é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 2.5 (Estabilidade Assintótica nominal) *O estimador dado por (2.27) e (2.28) em 2.4.3 é para um A estável, assintótico nominal e globalmente se (A, C) é detectável e $N \geq 1$. Para um A instável, o mesmo se aplica se \hat{X} for todo o espaço $\mathbb{R}^{N \times n}$.*

Prova: A convergência da estimação de estados vem do uso da estimação do filtro de Kalman como atualizador, viavelmente vem da escolha das restrições e a estabilidade vem da estabilidade assintótica do filtro de Kalman em torno da origem. A estabilidade assintótica vem da convergência, viabilidade e da estabilidade local do estimador ao redor da origem, (MUSKE, 1995).

Método com Restrição 2 – Estimação Inicial Sem-Penalização

Muske (1995) e Muske e Rawlings (1995) apresentaram um método de implementação do problema de estimação MHE com restrição que não requer o uso do filtro de Kalman como estimador e ao mesmo tempo garante a estabilidade nominal do mesmo. Este método permite que a primeira estimação $\hat{x}_{k-N|k}$ varie livremente pela remoção da penalidade Q_{-N}^{-1} na estimação inicial para o distúrbio de estado $\hat{\xi}_{k-N-1|k}$. Uma interpretação probabilística para isto é que o valor da estimação de partida $\bar{x}_{k-N|k}$ é completamente incerto. Este estimador herda a mesma deficiência do MHE com o filtro de Kalman fazendo a estimação de partida. Nenhuma informação “real” vinda de estimações anteriores ou de medições de tempos anteriores a $k - N$ entram no cálculo. $\hat{\xi}_{k-N-1|k}$ pode ser escolhido tanto grande ou pequeno como necessário para minimizar a função custo, desde que este entre na função custo somente indiretamente.

O resultado do problema de otimização de horizonte móvel pode ser dado como segue (como resultado da livre flutuação, o mesmo conjunto de restrições implementado para o MHE anterior pode ser usado):

$$\min_{\hat{\xi}_{k-N-1|k}, \dots, \hat{\xi}_{k-1|k}} \Psi_k^N = \sum_{j=k-N}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q^{-1} \hat{\xi}_{j|k} + \sum_{j=k-N}^k \hat{\phi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\phi}_{j|k}$$

sujeito a,

$$\begin{aligned}\bar{x}_{k-N|k} &= A\hat{x}_{k-N-1|k-N-1}^* + Bu_{k-N-1} \\ \hat{x}_{k-N|k} &= \bar{x}_{k-N|k} + \hat{\xi}_{k-N-1|k} \\ \hat{x}_{j+1|k} &= A\hat{x}_{j|k} + Bu_j + \hat{\xi}_{j|k} \quad j = k-N, \dots, k-1 \\ y_j &= C\hat{x}_{j|k} + \hat{\phi}_{j|k} \quad j = k-N, \dots, k\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \{\hat{x}_{j|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{x,min} \leq H_x \hat{x}_{j|k} \leq h_{x,max}, \quad j = k - N + 1, k - N + 2, \dots, k\} \\ \hat{\Xi} &= \{\hat{\xi}_{j|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{\xi,min} \leq \hat{\xi}_{j|k} \leq h_{\xi,max}, \quad j = k - N, k - N + 1, \dots, k - 1\}\end{aligned}\quad (2.30)$$

As restrições nos estados são consideradas somente se o modelo do sistema usado é estável, de outra maneira não se pode garantir que o estado real fique na região de restrição, desde que os estados possam se deslocar para o infinito.

Contudo um completo e novo problema resulta da remoção de Q_{-N} , mas isto não garante que exista uma única solução para o problema de otimização quadrática, desde que não se tenha um peso definido e positivo (ou uma matriz de peso definida e positiva) em $\hat{\xi}_{k-N-1|k}$. Uma única solução pode ser garantida se a restrição para sistemas com (A, C) observável e se um tamanho de horizonte maior ou igual a $n - 1$ pólos (ou modos) instáveis (r), forem impostos (MUSKE, 1995). Isto é necessário para garantir que a Hessiana resultante do problema de otimização seja positiva definida e assim juntamente com a convexidade das restrições, garante-se solução única. As propriedades de estabilidade do estimador são resumidas no seguinte teorema:

Teorema 2.6 (Estabilidade Assintótica nominal) *O estimador dado pelas Equações (2.29) e (2.30) é para um A estável, assintótico nominal e globalmente em \hat{X} e $\hat{\Xi}$, se (A, C) for detectável e $N \geq n - 1$.*

O mesmo se aplica, para um A instável, se nenhuma restrição for imposta nos estados.

Prova: A restrição para $N \geq n - 1$ garante uma solução única para o problema quadrático. A convergência, viabilidade e a estabilidade derivam de forma similar ao MHE com estimação de partida via filtro de Kalman (MUSKE, 1995).

Método com Restrição 3 – Predição do Futuro

O MHE pode ser visto como uma contraparte da estimação de estado do problema MPC, conseqüentemente parece lógico usar idéias similares no MHE às usadas no MPC (EATON, 1992) e (TENNY, 2002). A estabilidade do MPC pode ser garantida pela extensão do horizonte de predição ou por um horizonte de controle infinito no futuro (exemplos em Muske e Rawlings (1993), e Scokaert *et al.* (1997). Uma similaridade para o MHE poderia ser a extensão do horizonte de estimação para um passado infinito. Isto no entanto não é implementável, pois somente um número finito de dados (medições) está disponível. Para o MHE, um cálculo contrário, cálculo para um futuro infinito, nem sempre é possível pois necessitar-se-ia um A inversível. Para o problema MPC isto é possível, desde que a predição vá em direção do tempo positivo (futuro). A aproximação dada por Tyler e Morari (1997), sugere predizer o infinito no futuro, ao invés de ir à direção do tempo passado.

2.4.4 Observador de Luenberger

Outro método para construir um estimador recursivo de estado usando estimações passadas, segundo Muske (1995), semelhante ao filtro de Kalman, é selecionar uma matriz de ganho constante baseado em alguns critérios de desempenho desejado, ao invés de determinar o ganho das matrizes de covariância dos processos estocásticos. Este estimador é considerado

como um sistema dinâmico, onde este é dirigido pelas medições de um controlador e/ou filtro de ganho. Este sistema é designado a imitar o comportamento do sistema real com o passar do tempo. Esta aproximação é tida como o observador de Luenberger (LUENBERGER, 1964), sendo um método determinístico. O critério de desempenho é baseado na estabilidade do observador e do comportamento dinâmico da reconstrução do erro (equação do erro entre o observador e o sistema real). O observador é estável se e somente se todos os autovalores resultantes das dinâmicas do erro tiverem valores estritamente menores que 1 (em módulo). O ganho do observador é conseqüentemente escolhido de modo que a equação do erro resultante seja estável.

2.4.5 Similaridade entre os Métodos de Estimação Linear

Para o caso linear sem restrição é importante frisar que os métodos de estimação lineares como o filtro de Kalman, MHE, Batelada e o observador de Luenberger podem ser formulados para um sistema controlado pelas medições *feedback*. O *loop* é fechado devido a passagem da variável diferença (entre a saída predita \hat{y}_k e a medições reais y_k) através do controlador e/ou filtro linear de ganho L . A estrutura base e geral é mostrada na **Figura 2.8**, e é descrita pela seguinte equação:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + L(y_k - C\hat{x}_k) + Bu_k \quad (2.31)$$

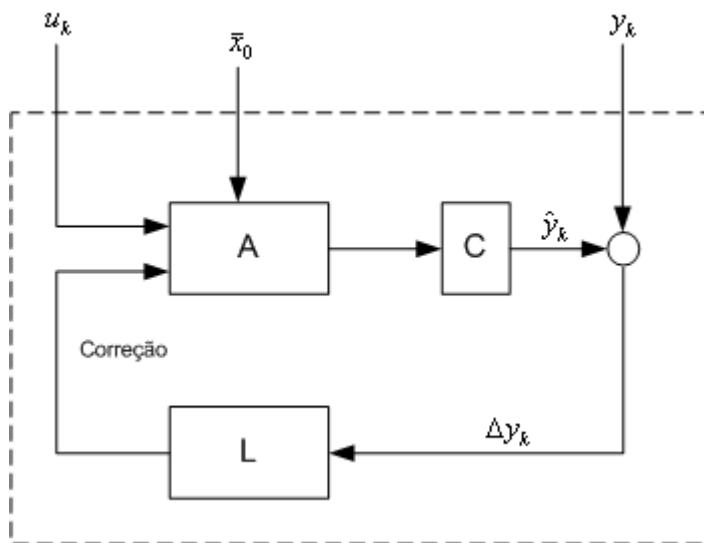


Figura 2.8: Estrutura geral de um estimador linear.

A diferença entre estes estimadores está contida em L . Para o MHE com filtro de Kalman como atualizador, o filtro de Kalman e o Batelada, L é calculado com o objetivo de minimizar o critério de desempenho. Probabilisticamente o objetivo é minimizar a influência do ruído de medição e do distúrbio de estado no sistema. Para o observador de Luenberger L é frequentemente calculado via a técnica de localização dos pólos para o “observador com *loop* fechado”.

2.5 Estimação Não-Linear

Esta Seção fornece uma breve revisão sobre os métodos de estimação de estados para os sistemas não-lineares mais gerais dados pela equação (2.1). Por várias razões, o problema da filtragem para sistemas não-lineares é considerado mais difícil, do qual também deriva uma variedade mais ampla de técnicas de solução que para o caso linear. Em oposição às técnicas de filtragem linear, existe uma pequena justificativa teórica para uso da média condicional, como uma estimação ótima, desde que x_k não esteja em uma distribuição Gaussiana. Se for usada a formulação dos mínimos quadrados probabilística do item 2.3.2 para calcular a melhor estimação, então podem-se obter valores que podem ser substancialmente diferentes da média condicional.

Embora métodos de estimação ótima possam ser derivados, eles freqüentemente não podem ser usados na forma fechada, devido que os mesmos reivindicam a solução de problemas de dimensão infinita. Para superar estes obstáculos, uma aplicação de métodos de aproximação é necessária com o objetivo de tornar os algoritmos usáveis. Esses algoritmos resultantes fornecem somente soluções subótimas. Especialmente se o modelo é bastante não-linear esses métodos são somente estimadores estáveis localmente, que podem divergir e/ou convergir para valores irreais com o passar do tempo.

Primeiramente nesta Seção, a expansão “lógica” do filtro de Kalman linear para o caso não-linear é apresentada. Este método é o filtro de Kalman estendido (EKF) de primeira ordem que calcula a solução de maneira recursiva similar ao caso linear. Depois, a extensão dos métodos via mínimos quadrados lineares para sistemas não-lineares é apresentada, pela formulação do estimador de estado em batelada não-linear, e então o estimador de estado via horizonte móvel não-linear. Estes métodos são motivados por uma interpretação probabilística do problema de estimação dado no item 2.3.2. Finalmente, uma curta revisão sobre outros métodos de estimação é feita.

2.5.1 Filtro de Kalman Estendido - EKF

Um método direto para gerar um filtro não-linear ótimo é linearizar o modelo não linear em torno de um dado ponto (ponto de operação ou ponto estacionário) e aplicar a estimação de estado linear ótima para estas equações linearizadas. Um método que usa esta idéia é o Filtro de Kalman Estendido (EKF) de primeira ordem. Este estimador calcula a estimação atual aplicando o filtro de Kalman, nas equações do sistema linearizado, em torno do último estado filtrado. Este método é essencialmente justificado se o sistema linearizado fornece uma boa representação do comportamento do sistema real para uma vizinhança suficiente em torno do atual estado do sistema.

Uma extensão para filtros de alta ordem é possível se os termos de alta ordem da série de Taylor do sistema de equações são considerados. Para os filtros de Kalman estendidos de alta ordem e também para a exata derivação do filtro de Kalman estendido, Gelb (1974) fornece uma boa revisão sobre a aplicação das técnicas de filtragem linear e não-linear. Uma derivação partindo de um ponto de vista probabilístico pode ser encontrada em (JAZWINSKI, 1970).

O EKF é sem dúvida o mais popular estimador e tem sido usado na comparação com outros estimadores baseados em horizonte. Devido a estas razões, no trabalho de Robertson *et al.* (1996) a propagação da estimação inicial e a matriz de pesos para o estimador de horizonte móvel são baseadas no algoritmo EKF. Ainda no trabalho de Robertson *et al.* (1996) é feita uma discussão detalhada da equivalência entre o EKF e o estimador de horizonte móvel, e como estas idéias são estendidas para outros algoritmos de aproximação não-linear.

O EKF considerado aqui é descrito no seguinte sistema de tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + \xi_k \\ y_k &= g(x_k) + \varphi_k \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

com $f, g \in \mathbb{C}^1$ para garantir a existência de uma aproximação via série de Taylor de primeira ordem.

Se a equação do modelo é não-linear, a existência da aproximação via série de Taylor é ainda possível se ξ_k for pequeno, pois se faz uma expansão em torno de x_k da expressão $\xi_k = x_{k+1} - f(x_k, u_k)$. O mesmo vale se φ_k for pequeno em $\varphi_k = y_k - g(x_k)$. Assim, aplicando o filtro de Kalman tempo variante para a série de Taylor de primeira ordem produz o seguinte algoritmo para o EKF:

Observação/Correção:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + L_k (y_k - g(\hat{x}_{k|k-1})) \\ L_k &= \hat{P}_{k|k-1} \mathcal{G}_k^T (\mathcal{G}_k \hat{P}_{k|k-1} \mathcal{G}_k^T + R)^{-1} \\ \hat{P}_{k|k} &= (I - L_k \mathcal{G}_k) \hat{P}_{k|k-1} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Predição de $\hat{x}_{k+1|k}$ e $\hat{P}_{k+1|k}$ (forma contínua):

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= f(\hat{x}_{k|k}, u_k) \\ \hat{P}_{k+1|k} &= \mathcal{F}_k \hat{P}_{k|k} + \hat{P}_{k|k} \mathcal{F}_k^T + Q \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k &= \frac{\partial f(x_k, u_k)}{\partial x} \Big|_{x_k = \hat{x}_{k|k}} \\ \mathcal{G}_k &= \frac{\partial g(x_k)}{\partial x} \Big|_{x_k = \hat{x}_{k|k-1}} \\ \hat{x}_{0|0} &= \bar{x}_0 \\ \hat{P}_{0|0} &= Q_0 \end{aligned}$$

Nesta formulação, quando da disponibilidade da medição, o estado atual é corrigido e/ou atualizado usando o ganho do filtro de Kalman, calculado com uma aproximação linear de g e baseado nos valores do estado predito ($\hat{x}_{k|k-1}$) e da matriz de covariância ($\hat{P}_{k|k-1}$),

onde ambos foram calculados a um passo de tempo atrás. O novo estado do sistema ($\hat{x}_{k+1|k}$), bem como sua matriz de covariância ($\hat{P}_{k+1|k}$), são preditos um passo à frente usando as equações do sistema não-linear.

Diferentes formas de implementação dos filtros de Kalman foram encontradas na literatura. Findeisen (1997), apresenta o EKF executando a etapa de predição antes da etapa de observação/correção. Já no trabalho de Robertson, Lee *et al.* (1996), a etapa de observação/correção é preliminar a etapa predição. Esta última formulação é usada mais tarde como um mecanismo de atualização para o algoritmo MHE não-linear. Song (1992), Song e Grizzle (1995) fornecem um teorema que garante a estabilidade local do EKF sob fortes condições.

2.5.2 Estimação Batelada Não-Linear

Como mostrado no item 2.3.2, a formulação mínimos quadrados em batelada pode também ser aplicada para sistemas não-lineares com distúrbios nas medições e nos estados, para estruturas de sistema idênticas à dada por (2.32).

Esta estrutura permite formular um problema de otimização de “mínimos quadrados” como uma solução direta de uma formulação probabilística. O estimador batelada não linear com restrição considerado aqui foi proposto por Muske e Rawlings (1995). Nessa formulação, estados e variáveis de distúrbio do sistema são restringidos pelo mesmo *conjunto* de restrições $\hat{X}, \hat{\Xi}$ como no estimador batelada linear. Estas restrições são dadas em (2.18). Com estas restrições o estimador de estado não-linear tem a seguinte estrutura, similar ao BSE linear em 2.4.1:

$$\min_{\hat{\xi}_{-1|k}, \dots, \hat{\xi}_{k-1|k}} \Psi_k = \hat{\xi}_{-1|k}^T Q_0^{-1} \hat{\xi}_{-1|k} + \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q^{-1} \hat{\xi}_{j|k} + \sum_{j=0}^k \hat{\phi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\phi}_{j|k} \quad (2.35)$$

sujeito a,

$$\begin{aligned} \hat{x}_{0|k} &= \hat{x}_0 + \hat{\xi}_{-1|k} \\ \hat{x}_{j+1|k} &= f(\hat{x}_{j|k}, u_k) + \hat{\xi}_{j|k} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k-1 \\ y_j &= g(\hat{x}_{j|k}) + \hat{\phi}_{j|k} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k \\ \{\hat{x}_{j|k}\} &\in \hat{X}, \quad \{\hat{\xi}_{j|k}\} \in \hat{\Xi} \end{aligned} \quad (2.36)$$

As estimações de estado atuais resultante desta minimização podem ser calculadas aplicando a sequência calculada $\{\hat{\xi}_{j|k}^*\}$ para o seguinte *conjunto* de equações recursivas:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|k}^* &= f(\hat{x}_{i|k}^*, u_k) + \hat{\xi}_{i|k}^* \\ \hat{x}_{0|k}^* &= \bar{x}_0 + \hat{\xi}_{-1|k}^* \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Esta aproximação, devido as não-linearidades do sistema, tem mais limitações computacionais que o estimador de estado batelada linear. Isto, no entanto não é prático para aplicações em tempo real. Muske e Rawlings (1995) formularam o seguinte teorema de

convergência, considerando a reconstrução inicial dos erros e_0 para o qual uma sequência de ruído estado viável $\{\xi_{j|k}\}$, e zeros de erros de reconstrução no tempo finito, existem:

Teorema 2.7 (Convergência do NBSE com restrição) *Por (2.35), (2.36) e dado BSE com $R^{-1} > 0, Q^{-1} > 0, Q_0^{-1} > 0, f \in \mathbb{C}^1$ converge para o caso nominal para o valor correto de x_k se o sistema considerado é observável uniformemente.*

Prova: A prova baseia-se nos mesmos métodos que são usados para mostrar a convergência do BSE linear, e a única diferença é que outra condição de observabilidade é necessária devido ao fato que os sistemas são considerados não lineares.

2.5.3 Horizonte Móvel Não-Linear

Desde que não é possível calcular uma solução recursiva fechada para o problema de estimação batelada como para sistemas lineares, não é possível justificar o estimador de horizonte móvel não-linear usando esses resultados. No entanto os estimadores de horizonte móvel não-linear (NMHE) apresentados aqui são baseados em algumas propriedades do estimador GMHE apresentado anteriormente na Seção 2.3. A diferença entre os métodos apresentados está na seleção das estimações iniciais e dos matrizes de pesos. Para o caso linear, a covariância do respectivo estado estimado era usada como garantia de estabilidade. Em outro método foi permitido que a primeira estimação no horizonte pudesse flutuar o quanto necessário.

Livre Flutuação do Estado Inicial

Esta aproximação é uma forma direta de método apresentado em 2.4.3. Ela foi proposta primeiramente por Michalska e Myne (1995), para sistemas tempo-contínuos não-lineares. Já uma versão tempo-discreto é proposta por Muske e Rawlings (1995) e Muske e Edgar (1996).

A maior vantagem desta aproximação é que a estabilidade para o caso nominal pode ser mostrada de um modo similar ao que foi mostrado na formulação batelada, usando uma função custo incrementada. O princípio básico é que a primeira estimação do estado-distúrbio não é penalizada na função objetivo, permitindo que o primeiro estado estimado seja escolhido livremente, pois este estado não está também incluído nas restrições de estado e de medição. Um problema é que algumas propriedades do estimador linear com estimação inicial livre são também carregadas. O peso zero no distúrbio de medição inicial pode ser visto num arranjo probabilístico junto com o fato de que não se tem nenhuma informação sobre os valores iniciais. Isto significa também que nenhuma informação obtida nos passos anteriores é usada com o objetivo de melhorar a próxima estimação.

O estimador NMHE com estimação inicial não-penalizada tem a seguinte forma:

$$\min_{\hat{\xi}_{k-N|k}, \dots, \hat{\xi}_{k-1|k}} \Psi_k^N = \sum_{j=k-N}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q^{-1} \hat{\xi}_{j|k} + \sum_{j=k-N}^k \hat{\phi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\phi}_{j|k} \quad (2.37)$$

sujeito a,

$$\begin{aligned}\hat{x}_{j+1|k} &= f(\hat{x}_{j|k}, u_k) + \hat{\xi}_{j|k} \\ y_j &= g(\hat{x}_{j|k}) + \hat{\phi}_{j|k} \\ \{\hat{x}_{j|k}\} &\in \hat{X}, \quad \{\hat{\xi}_{j|k}\} \in \hat{\Xi}\end{aligned}\quad (2.38)$$

com as seguintes restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \{\hat{x}_{j|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{x,min} \leq H_x \hat{x}_{j|k} \leq h_{x,max}, \quad j = k - N + 1, k - N + 2, \dots, k\} \\ \hat{\Xi} &= \{\hat{\xi}_{j|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{\xi,min} \leq \hat{\xi}_{j|k} \leq h_{\xi,max}, \quad j = k - N - 1, k - N, \dots, k - 1\}\end{aligned}\quad (2.39)$$

Teorema 2.9 (Convergência do NMHE com restrição e com Estimação Inicial não Penalizada) *O NMHE dado por (2.37), (2.38) com $R^{-1} > 0, Q^{-1} > 0, f \in \mathbb{C}^1$ converge para o caso nominal para o valor correto de x_k se o sistema considerado é observável uniformemente.*

Prova: A prova baseia-se na prova mostrada para o caso do MHE linear como o mesmo esquema de atualização.

Horizonte Móvel Não-Linear com Atualização da Matriz de Covariância P via Filtro de Kalman Estendido (EKF)

Nesta parte será apresentado um estimador que utiliza um filtro de Kalman estendido como um atualizador para a estimação da matriz de covariância $\hat{P}_{k-N|k-1}$. Ele foi proposto por Robertson *et al.* (1996), de onde derivou a formulação de atualização usando métodos similares a aqueles que são usados na derivação do filtro de Kalman estendido (EKF). Adicionando-se a variável distúrbio de medição ($\hat{\phi}_{j|k}$), como variável a ser otimizada, ao problema de otimização, pode se adicionar restrições nesta e com isso permitir a melhora da estimação.

Observação/Correção:

$$\begin{aligned}\min_{\hat{\xi}_{k-N-1|k}, \dots, \hat{\xi}_{k-1|k}, \hat{\phi}_{k-N|k}, \dots, \hat{\phi}_{k|k}} \quad & \Psi_k^N = \hat{\xi}_{k-N-1|k}^T \hat{P}_{k-N|k-1}^{-1} \hat{\xi}_{k-N-1|k} \\ & + \sum_{j=k-N}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q^{-1} \hat{\xi}_{j|k} + \sum_{j=k-N}^k \hat{\phi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\phi}_{j|k}\end{aligned}\quad (2.40)$$

sujeita às restrições de igualdade,

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k-N|k} &= \hat{x}_{k-N|k-1} + \hat{\xi}_{k-N-1|k} \\ \hat{x}_{j+1|k} &= f(\hat{x}_{j|k}, u_j) + \hat{\xi}_{j|k} \quad j = k - N, \dots, k - 1 \\ y_j &= g(\hat{x}_{j|k}) + \hat{\phi}_{j|k} \quad j = k - N, \dots, k\end{aligned}$$

e às seguintes restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned}
\hat{X} &= \{\hat{x}_{j|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{x,min} \leq H_x \hat{x}_{j|k} \leq h_{x,max}, \quad j = k - N + 1, k - N + 2, \dots, k\} \\
\hat{\xi} &= \{\hat{\xi}_{j|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{\xi,min} \leq \hat{\xi}_{j|k} \leq h_{\xi,max}, \quad j = k - N - 1, k - N, \dots, k - 1\} \\
\hat{\Theta} &= \{\hat{\phi}_{j|k} \in \mathbb{R}^p \mid h_{\phi,min} \leq \hat{\phi}_{j|k} \leq h_{\phi,max}, \quad j = k - N, k - N + 1, \dots, k\}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

com a atualização de $\hat{P}_{k-N|k-1}$ sendo calculada usando as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
L_i &= \hat{P}_{i|k-1} G_i^T (G_i \hat{P}_{i|k-1} G_i^T + R)^{-1} \\
\hat{P}_{i|k} &= (I - L_i G_i) \hat{P}_{i|k-1} \\
i &= k - N
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Estimação de $\hat{P}_{k-N+1|k}$ (forma contínua):

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|k} &= f(\hat{x}_{i|k}, u_i) \\
\dot{\hat{P}}_{i+1|k} &= \mathcal{F}_i \hat{P}_{i|k} + \hat{P}_{i|k} \mathcal{F}_i^T + Q
\end{aligned} \tag{2.43}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_i &= \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial x} \Big|_{x_i = \hat{x}_{i|k}} \\
\mathcal{G}_i &= \frac{\partial g(x_i)}{\partial x} \Big|_{x_i = \hat{x}_{i|k}} \\
\hat{x}_{i|0} &= \bar{x}_{0|0} = x_0 \\
\hat{P}_{i|0} &= \hat{P}_{0|0} = P_0 \\
i &= k - N
\end{aligned}$$

Predição ($\hat{x}_{k+1|k}$):

$$\hat{x}_{k+1|k} = f(\hat{x}_{k|k}, u_k) \tag{2.44}$$

A escolha do tamanho do horizonte N é um parâmetro de ajuste no MHE, (Rao e Rawlings (2002)). O desempenho do MHE melhora com o aumento deste, embora uma minimização leve à um N suficientemente grande e com isso um custo computacional elevado. Assim é preciso reconciliar estes dois compromissos quando na escolha do tamanho do horizonte. De um ponto de vista teórico, o MHE é estável quanto maior for o tamanho do horizonte que a ordem ou o índice de observabilidade do sistema.

Horizonte Móvel Não-Linear com Atualização da Matriz de Covariância P via Solução Dinâmica da Matriz de Ricatti

Considerando que a matriz de covariância P possui inversa, a atualização e estimação da mesma pode ser feita via solução da equação dinâmica de Ricatti (forma discreta), (RAO *et al.*, 2003):

$$\hat{P}_{i+1|k} = Q + \mathcal{F}_i \hat{P}_{i|k-1} \mathcal{F}_i^T - \mathcal{F}_i \hat{P}_{i|k-1} \mathcal{G}_i^T [\mathcal{G}_i \hat{P}_{i|k-1} \mathcal{G}_i^T + R]^{-1} \mathcal{G}_i \hat{P}_{i|k-1} \mathcal{F}_i^T \tag{2.45}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_i &= \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial x} \\
\mathcal{G}_i &= \frac{\partial g(x_i)}{\partial x} \\
\hat{x}_{i|0} &= \hat{x}_{0|0} = x_0 \\
\hat{P}_{i|0} &= \hat{P}_{0|0} = P_0 \\
i &= k - N
\end{aligned}$$

Assim o MHE resultante tem a seguinte estrutura:

Observação/Correção:

$$\begin{aligned}
&\min_{\hat{\xi}_{k-N-1|k}, \dots, \hat{\xi}_{k-1|k}, \hat{\varphi}_{k-N|k}, \dots, \hat{\varphi}_{k|k}} \Psi_k^N = \hat{\xi}_{k-N-1|k}^T \hat{P}_{k-N|k-1}^{-1} \hat{\xi}_{k-N-1|k} \\
&\quad + \sum_{j=k-N}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q^{-1} \hat{\xi}_{j|k} + \sum_{j=k-N}^k \hat{\varphi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\varphi}_{j|k}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

sujeita às restrições de igualdade,

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k-N|k} &= \hat{x}_{k-N|k-1} + \hat{\xi}_{k-N-1|k} \\
\hat{x}_{j+1|k} &= f(\hat{x}_{j|k}, u_j) + \hat{\xi}_{j|k} \quad j = k - N, \dots, k - 1 \\
y_j &= g(\hat{x}_{j|k}) + \hat{\varphi}_{j|k} \quad j = k - N, \dots, k
\end{aligned}$$

e às seguintes restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned}
\hat{X} &= \{\hat{x}_{j|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{x,min} \leq H_x \hat{x}_{j|k} \leq h_{x,max}, \quad j = k - N + 1, k - N + 2, \dots, k\} \\
\hat{\Xi} &= \{\hat{\xi}_{j|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{\xi,min} \leq \hat{\xi}_{j|k} \leq h_{\xi,max}, \quad j = k - N - 1, k - N, \dots, k - 1\} \\
\hat{\Theta} &= \{\hat{\varphi}_{j|k} \in \mathbb{R}^p \mid h_{\varphi,min} \leq \hat{\varphi}_{j|k} \leq h_{\varphi,max}, \quad j = k - N, k - N + 1, \dots, k\}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

com as etapas de atualização e estimação de P sendo calculada pela solução da equação dinâmica de Ricatti:

$$\hat{P}_{i+1|k} = Q + \mathcal{F}_i \hat{P}_{i|k-1} \mathcal{F}_i^T - \mathcal{F}_i \hat{P}_{i|k-1} \mathcal{G}_i^T [\mathcal{G}_i \hat{P}_{i|k-1} \mathcal{G}_i^T + R]^{-1} \mathcal{G}_i \hat{P}_{i|k-1} \mathcal{F}_i^T \tag{2.48}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_i &= \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial x} \Big|_{x_i = \hat{x}_{i|k}} \\
\mathcal{G}_i &= \frac{\partial g(x_i)}{\partial x} \Big|_{x_i = \hat{x}_{i|k}} \\
\hat{x}_{i|0} &= \bar{x}_{0|0} = x_0 \\
\hat{P}_{i|0} &= \hat{P}_{0|0} = P_0 \\
i &= k - N
\end{aligned}$$

Predição ($\hat{x}_{k+1|k}$):

$$\hat{x}_{k+1|k} = f(\hat{x}_{k|k}, u_k) \quad (2.49)$$

Segundo Marcon *et al.* (2002) uma vantagem do uso da atualização via solução da equação/matriz dinâmica de Ricatti (forma discreta) é que na etapa de predição do filtro são integradas apenas as equações que descrevem o comportamento dinâmico do processo. Já na formulação do filtro com atualização via EKF é necessário integrar simultaneamente, além do modelo dinâmico, as equações diferenciais relacionadas à matriz de covariância P (forma contínua), que ainda segundo Marcon *et al.* (2002) aumenta muito o tamanho do sistema a ser integrado e pode vir a ser problemático para sistemas com elevado número de estados. Entretanto, pode-se facilmente se integrar separadamente as equações que descrevem o modelo e as que atualizam a matriz de covariância, o que reduz consideravelmente a dimensão do problema, podendo ainda proceder na atualização discreta da matriz de covariância, o que descartaria a necessidade de se integrar o sistema. Praticamente todas estas abordagens levam a resultados equivalentes para a maioria dos casos em que a não-linearidade do sistema não é pronunciada (MARCON *et al.*, 2002). Rao *et al.* (2003) fazem uso da solução da equação/matriz dinâmica de Ricatti na estimação de estados com restrições para sistemas não-lineares discretos.

A necessidade da solução da matriz de Ricatti, segundo Grewal e Andrews (2001), é uma das etapas mais críticas. Ainda em Grewal e Andrews (2001) é encontrado uma ampla discussão sobre os métodos de solução da matriz diferencial de Ricatti.

Mais adiante, no capítulo 3 (item 3.2.1), é apresentada a formulação MHE resultante quando do uso da estratégia simultânea para a solução do problema de integração dinâmica envolvido na solução das restrições de igualdade da equação (2.46).

Para as duas formulações MHE dados por (2.40) até (2.44) e (2.46) até (2.49) não possui prova ou garantia de estabilidade.

2.5.4 Filtro de Kalman Estendido com restrição - CEKF

O CEKF (do inglês *Constrained Extended Kalman Filter*) é um tipo alternativo de estimador de estado baseado em otimização, ele é originário da formulação do MHE, que foi introduzido por Muske e Rawlings (1995) e Robertson *et al.* (1996).

A formulação do CEKF descrita a seguir é basicamente a resolução do problema MHE com horizonte de estimação igual a zero ($N = 0$). Isto é similar ao Filtro de Kalman Estendido convencional (EKF), que também possui horizonte de predição igual a zero na etapa de correção. Também o estimador CEKF proposto por Gesthuisen *et al.* (2001) usa a solução da equação/matriz dinâmica de Ricatti para a atualização da matriz de covariância P .

Observação/Correção:

$$\min_{\hat{\xi}_{k-1|k}, \hat{P}_{k|k}} \Psi_k = \hat{\xi}_{k-1|k}^T \hat{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\xi}_{k-1|k} + \hat{\phi}_{k|k}^T R^{-1} \hat{\phi}_{k|k} \quad (2.50)$$

sujeita as restrições de igualdade,

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + \hat{\xi}_{k-1|k} \\ y_k &= g(\hat{x}_{k|k}) + \hat{\varphi}_{k|k}\end{aligned}$$

e as seguintes restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned}\hat{\Xi} &= \{\hat{\xi}_{k-1|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{\xi,min} \leq \hat{\xi}_{k-1|k} \leq h_{\xi,max}\} \\ \hat{\Theta} &= \{\hat{\varphi}_{k|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{\varphi,min} \leq \hat{\varphi}_{k|k} \leq h_{\varphi,max}\}\end{aligned}\quad (2.51)$$

com as etapas de atualização e estimação de P sendo calculada pela solução da equação de Ricatti:

$$\hat{P}_{i+1|k} = Q + \mathcal{F}_i \hat{P}_{i|k-1} \mathcal{F}_i^T - \mathcal{F}_i \hat{P}_{i|k-1} \mathcal{G}_i^T [\mathcal{G}_i \hat{P}_{i|k-1} \mathcal{G}_i^T + R]^{-1} \mathcal{G}_i \hat{P}_{i|k-1} \mathcal{F}_i^T \quad (2.52)$$

onde,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i &= \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial x} \Big|_{x_i=\hat{x}_{i|k}} \\ \mathcal{G}_i &= \frac{\partial g(x_i)}{\partial x} \Big|_{x_i=\hat{x}_{i|k}} \\ \hat{x}_{i|0} &= \bar{x}_{0|0} = x_0 \\ \hat{P}_{i|0} &= \hat{P}_{0|0} = P_0 \\ i &= k\end{aligned}$$

Predição ($\hat{x}_{k+1|k}$):

$$\hat{x}_{k+1|k} = f(\hat{x}_{k|k}, u_k) \quad (2.53)$$

Uma aproximação para este estimador pode ser feita considerando-se que as variáveis distúrbios ξ e φ estejam relacionadas de forma quadrática. Então a equação (2.50) pode ser escrita na forma canônica de um problema de otimização quadrática:

$$\min_{\hat{\Theta}} \Psi_k = \hat{\Theta}_k^T \mathcal{H} \hat{\Theta}_k + d^T \hat{\Theta}_k \quad (2.54)$$

$$\text{onde, } \hat{\Theta}_k = [\hat{\xi}_{k-1|k}, \hat{\varphi}_{k|k}], \mathcal{H} = \begin{bmatrix} [\hat{P}_{k|k-1}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & [R] \end{bmatrix} \text{ e } d = 0$$

sujeita à restrição de igualdade:

$$\hat{\Theta}_k = y_k - g(\hat{x}_{k|k-1}) \quad (2.55)$$

e às seguintes restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned}\hat{\Xi} &= \{\hat{\xi}_{k-1|k} \in \mathbb{R}^n \mid h_{\xi,min} \leq \hat{\xi}_{k-1|k} \leq h_{\xi,max}\} \\ \hat{\Theta} &= \{\hat{\varphi}_{k|k} \in \mathbb{R}^p \mid h_{\varphi,min} \leq \hat{\varphi}_{k|k} \leq h_{\varphi,max}\}\end{aligned}\quad (2.56)$$

O problema de otimização representado pela equação (2.50) pode possuir vários mínimos locais e isto representa um esforço maior para o otimizador na busca do mínimo global. Quando na forma de um problema descrito pela equação (2.54), tem-se um único mínimo global o que resulta em uma solução mais rápida, a qual pode ser obtida via métodos de Programação Quadrática (QP). Além do leve esforço computacional necessário para a solução deste tipo de problema, existem implementados eficientes *solvers* de programação quadrática como por exemplo a rotina *quadprog* do Matlab[®].

2.5.5 Revisão Bibliográfica-Cronológico a cerca da estimação MHE

A estimação via horizonte móvel não é uma idéia nova, pois tem sido proposta por inúmeros pesquisadores. Embora distinto de controle, a estimação via horizonte móvel é vista melhor de uma perspectiva histórica como um descendente do controle preditivo baseado em modelo. O sucesso do emprego da otimização on-line em controle, como demonstrado pelo sucesso industrial do controle preditivo baseado em modelo Qin e Badgwell (1997) e (1998), forneceram uma motivação inicial para o MHE. A primeira proposta de MHE sem-restrições veio de Thomas (1975) e Kwon *et al.* (1982), embora Jang *et al.* (1986) terem sido os primeiros a propor o MHE sem-restrições como uma estratégia de otimização on-line. Muitos pesquisadores na área de controle de processos estenderam o trabalho de Jang e co-autores. Bequette e co-autores (Bequette (1991) e Ramamurthi *et al.* (1993)) investigaram estratégias de horizonte móvel para estimação de estados como uma extensão lógica do controle preditivo baseado em modelo. Kim *et al.* (1991) investigaram estratégias de horizonte móvel para a reconciliação de dados não-linear. Tjoa e Biegler (1991) e Albuquerque e Biegler (1995) e (1996) investigaram técnicas numéricas e estatísticas relacionadas à otimização baseada em reconciliação de dados não-linear. Narasimhan e Harikumar (1993a) e (1993b) discutiram estratégias de reconciliação de dados estática incorporando restrições. Marquardt e co-autores Binder *et al.* (1998) e (2000) discutiram estratégias multi-escala para o MHE e os benefícios da incorporação de restrições na estimação. Gesthuisen e Engell (1998) discutiram a aplicação do MHE para uma planta piloto de um reator de polimerização, e Russo e Young (1999) discutiram a aplicação do MHE para um processo de polimerização industrial na companhia química Exxon.

Robertson e Lee (1995) e (2002) e Robertson *et al.* (1996) invetigaram a interpretação probabilística das restrições na estimação. Muske *et al.* (1993) e (Muske e Rawlings (1995) derivaram algumas condições preliminares para a estabilidade da estimação de estados via horizonte móvel com restrições de desigualdade. Tyler e Morari (1996) e Tyler (1997) demonstraram como restrições podem levar para a instabilidade sistemas com fase não-mínima. Findeisen (1997) investigou a estabilidade da estrutura de programação dinâmica do MHE linear e sem-restrições com esquemas de atualização filtrada e suavizada. Rao (2000), Rao e Rawlings (1998) e Rao *et al.* (1999b) forneceram condições suficientes para estabilidade com mínimas suposições em um ajuste resumido. Rao e Rawlings (2002) mostraram que a adição de restrições no MHE melhora e simplifica o problema de monitoramento de processos.

2.5.6 Outros Métodos de Estimação de Estado Não-Lineares

Aqui é apresentado uma pequena revisão sobre alguns outros métodos de estimação de estado não-lineares existentes.

- *Aproximação da Estimação Inicial:* Este método é baseado na idéia do uso da formulação de horizonte móvel via mínimos quadrados para calcular a nova estimação. A diferença entre este e as formulações MHE apresentadas anteriormente é que nenhum erro no estado é considerado. Como resultado a parcela $\hat{\xi}_{j|k}$ na formulação MHE é retirada. Michalska e Mayne (1995) demonstram a convergência nominal para este método. Implementações deste estimador podem ser encontradas em Bequette (1991), Jang *et al.* (1986) e Kim *et al.* (1991).
- *Observador de Linearização do Erro:* Estes métodos são algoritmos recursivos usando métodos geométricos similares àqueles usados na linearização *feedback*. Estes métodos são baseados na idéia da transformação da coordenada local tal que o correspondente sistema transformado seja linear na reconstrução do erro dinâmico. Uma estimação para o estado é calculada usando um observador linear no sistema linearizado e transformando o resultado de volta para as coordenadas normais. Uma vantagem deste método é que a linearização garante a estabilidade local da estimação em torno do estado nominal. A maior desvantagem destes métodos é que é necessário resolver um conjunto de equações diferenciais parciais (EDP's) para calcular a transformação. Para muitos sistemas este cálculo é uma tarefa não-trivial. Como resultado, estes métodos podem ser usados somente em casos que uma solução atual pode ser encontrada.
- *Observador de Luenberger Estendido:* A aplicação do observador de linearização do erro envolve a necessidade do cálculo da transformação da coordenada. Desde que isto seja somente calculado facilmente para classes limitadas de sistemas, outros métodos de solução são necessários, nos quais não se faça necessário uma transformação não linear explicitamente. Esta formulação se refere como o observador de Luenberger estendido desde que o ganho do observador seja calculado pela linearização das EDP's. Este método pode ser visto como a contraparte determinística do EKF.
- *Observador de Modo Deslizante:* Esta técnica de estimação de estado não linear vem ganhando interesse, e foi introduzido por Slotine *et al.* (1987) e usa a chamada “superfície deslizante” dos sistemas não-lineares para projetar um observador.
- *Aproximação Estatística Polinomial:* O EKF utiliza uma expansão em série de Taylor do sistema de equações para calcular a próxima estimação. Outra idéia é usar aproximações polinomiais para caracterizar o sistema de equações. Estas aproximações polinomiais permitem o cálculo do erro quadrado médio com o objetivo de calcular uma nova estimação. Gelb (1974) e Stengel (1986) discutem alguns métodos baseados nestas idéias.

2.6 Estimação de Estados Não-Linear com Restrições

A grande virtude do MHE é a sua habilidade de incorporar restrições na estimação. De um modo plausível sistemas com dinâmicas não lineares motivam ainda mais o uso do MHE, embora se acredite na existência de diversas outras formas alternativamente competitivas para o MHE *sem restrições*. De um ponto de vista teórico, uma outra virtude do MHE é que ele fornece garantias de estabilidade (RAO e RAWLINGS, 1998), embora muitos outros métodos também forneçam garantias de estabilidade. Por exemplo, pode-se construir um estimador estável usando uma transformação de coordenada local pela injeção de saídas (BESTLE e ZEITZ, 1983) e (KRENER e ISIDORI, 1983) *apud* (RAO e RAWLINGS, 2002).

Garantias de estabilidade são importantes, mas desempenho é o predominante. O EKF fornece somente pequenas garantias de estabilidade para modelos de processo não-lineares (SONG e GRIZZLE, 1995) *apud* (RAO e RAWLINGS, 2002). O MHE sem-restrições pode ser visto como uma forma do filtro de Kalman estendido, ou melhor, o filtro de Kalman estendido pode ser visto como uma forma de MHE sem-restrições. Diferença entre as duas estratégias está no grau de otimização: o filtro de Kalman estendido executa somente uma iteração de Newton, enquanto o MHE sem-restrições executa tantas iterações de Newton forem necessárias para satisfazer as condições (local) de otimalidade. Embora o MHE sem-restrições pode ser visto como uma forma iterativa do filtro de Kalman estendido iterativo e o filtro de Kalman estendido como uma estratégia sub-ótima para o MHE sem-restrições com um tamanho de horizonte $N = 0$. Uma razão para o sucesso do filtro de Kalman estendido é que frequentemente a maioria dos problemas com redução de custo via otimização é obtido durante as primeiras iterações de Newton. O desempenho raramente melhora tangencialmente mesmo se iterações adicionais forem feitas. Modelos de sistemas com não linearidades acentuadas porém podem comprometer a estabilidade do EKF.

Sem restrições, o MHE tende a executar a mesma estimação que o filtro de Kalman estendido iterativo. O desempenho muda quando se adiciona restrições ao problema. Restrições conseqüentemente motivam o uso do MHE.

Para uma classe de problemas, o conhecimento de incertezas nas variáveis de estado e medição na forma de restrições são informações adicionais às leis físicas e às correlações empíricas. Por exemplo, muitas incertezas de processo, como parâmetros de modelo e distúrbios de processos são limitados. Variáveis de estado como temperatura e concentração, são sempre positivas e limitadas. Estas restrições, ao contrário das incertezas de processo, são implicitamente obrigadas pelo modelo físico do processo. Porém, quando se consideram modelos aproximados, esta obrigação implícita poderá ser ignorada e então é necessário a inclusão também de restrições de desigualdade nas variáveis de estado objetivando reconciliar o modelo aproximado com as medições do processo. Nos estudos de caso do capítulo 4 é demonstrado que, para uma classe de problemas envolvendo distúrbios limitados e modelos aproximados, restrições de desigualdade são necessárias para obter estimações de estado fisicamente significantes.

2.7 Referências

- ALBUQUERQUE, J. S. e L. T. BIEGLER. Decomposition algorithms for on-line estimation with nonlinear models. Computers & Chemical Engineering, v.19, n.10, p.1031-1039. 1995.
- _____. Data reconciliation and gross-error detection for dynamic systems. AIChE Journal, v.42, n.10, p.2841-2856. 1996.
- ANDERSON, B. D. O. From Wiener to Hidden Markov Models. IEEE Control Syst. Mag., p.41. 1999.
- BEQUETTE, W. B. NONLINEAR PREDICTIVE CONTROL USING MULTI-RATE SAMPLING. Canadian Journal of Chemical Engineering, v.69, n.1, p.136-143. 1991.
- BESTLE, D. e M. ZEITZ. Canonical Form Observer Design for Non-Linear Time-Variable Systems. International Journal of Control, v.38, n.2, p.419. 1983.
- BIEGLER, L. T. Advances in Nonlinear Programming Concepts for Process Control. IFAC Adchem '97: Int. Symp. on Advanced Control of Chemical Processes. Banff., Alta., Canada, 1997. 587 p.
- _____. Efficient Solution of Dynamic Optimization and NMPC Problems. Int. Symp. on Nonlinear Model Predictive Control. Ascona, Switzerland, 1998. p.
- BINDER, T., L. BLANK, W. DAHMEN e W. MARQUARDT. Towards Multiscale Dynamic Data Reconciliation. In: R. B. A. C. Kravaris (Ed.). Nonlinear Model Based Process Control. Dordrecht, The Netherlands: kluwer, 1998. Towards Multiscale Dynamic Data Reconciliation
- _____. Regularization of Dynamic Data Reconciliation Problems by Projection. ADCHEM. Pisa, Italy, 2000. 689 p.
- BOCK, H. G., M. DIEHL, D. B. LEINWEBER e J. P. SCHLÖSER. A Direct Multiple Shooting Method for Real-Time Optimization of Nonlinear DAE Processes. Intl. Symp. on Nonlinear Model Predictive Control. Ascona, Switzerland, 1998. p.
- BRYSON, A. E. e Y. HO. Applied Optimal Control. New York: Hemisphere Publishing. 1975
- DE SOUZA, C. E., M. R. GEVERS e G. C. GOODWIN. Riccati equations in optimal filtering of nonstabilizable systems having singular state transition matrices. IEEE Transactions on Automatic Control, v.31, p.831-838. 1986.
- EATON, J. W. Finite Horizon Predictive Control of Chemical Processes. Faculty of the Graduate School, The University of Texas at Austin, Austin, 1992. 147 p.
- FINDEISEN, P. K. Moving Horizon State Estimation of Discrete Time Systems. (Thesis M.S. --University of Wisconsin--Madison 1997.). 1997. xix, 157 p.
- FRIEDLAND, B. e I. BERNSTEIN. Estimation of the state of a nonlinear process in the presence of nongaussian noise and disturbances. Journal of the Franklin Institut, n.281, p.455-480. 1966.
- GELB, A. Applied Optimal Estimation. Cambridge, Massachusetts: The M.I.T. Press. 1974
- GESTHUISEN, R. Optimierungsbasierte Zustandsschätzung im Vergleich zum Extended Kalman Filter. Dortmund 2001.

GESTHUISEN, R. e S. ENGELL. Determination of the Mass Transport in the Polycondensation of Polyethyleneterephthalate by Nonlinear Estimation Techniques. Proc. 1998 IFAC DYCOPS Symp. Corfu, Greece, 1998. p.

GESTHUISEN, R., K. U. KLATT e S. ENGELL. Optimization-based State Estimation: a Comparative study for the batch Polycondensation of Polyethyleneterephthalate. European Control Conference, 2001. p.

GREWAL, M. S. e A. P. ANDREWS. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB: John Wiley & Sons. 2001. 416 p.

GRINSTEAD, C. M. e J. L. SNELL. Introduction to probability. 1990

JANG, S.-S., B. JOSEPH e H. MUKAI. Comparison of two approaches to on-line parameter and state estimation of nonlinear systems Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development. 25: 809-814 p. 1986.

JAZWINSKI, A. H. Stochastic Processes and Filtering Theory. New York: Academic Press, v.64. 1970

KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Trans. ASME - Basic Engineering: 35-45 p. 1960.

KIM, I. W., M. J. LIEBMAN e T. F. EDGAR. A sequential error-in-variables method for nonlinear dynamic systems. Computers and Chemical Engineering. 15: 663-670 p. 1991.

KRENER, A. J. e A. ISIDORI. Linearization by Output Injection and Nonlinear Observers. Systems and Control Letters, v.3, p.47-52. 1983.

KWON, W. H., A. M. BRUCKSTEIN e T. KAILATH. Stabilizing state-feedback design via the moving horizon method. Decision and Control, 1982 21st IEEE Conference on, 1982. 234-239 p.

LUENBERGER, D. G. Observing the State of a Linear System. IEEE Transactions on Military Electronics April 1964, p.74-80. 1964.

MARCON, S. M., J. O. TRIERWEILER e A. R. SECCHI. EKF e CEKF: Comparação entre Duas Formulações do Filtro de Kalman Estendido. CBA. Brazil, 2002. p.

MICHALSKA, H. e D. Q. MAYNE. Moving horizon observers and observer-based control. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995. 995-1006 p.

MUSKE, K. R. Linear Model Predictive Control of Chemical Processes. Universidade do Texas, Austin, 1995.

MUSKE, K. R. e T. F. EDGAR. Nonlinear state estimation. In: M. A. H. A. D. E. Seborg (Ed.). Nonlinear Process Control: Prentice Hall, 1996. Nonlinear state estimation, p.311-370

MUSKE, K. R. e J. B. RAWLINGS. Linear Model Predictive Control of Unstable Processes. Processes Control, v.3, n.2, May, p.85-96. 1993.

_____. Nonlinear Moving Horizon State Estimation. In: R. Berber (Ed.). Methods of Model Based Process Control. Antalya: Kluwer Academic, v.293, 1995. Nonlinear Moving Horizon State Estimation, p.349-365. (Applied Sciences)

MUSKE, K. R., J. B. RAWLINGS e J. H. LEE. Receding Horizon Recursive State Estimation. American Control Conference, 1993. 900-904 p.

NARASIMHAN, S. e P. HARIKUMAR. A method to incorporate bounds in data reconciliation and gross error detection--I. The bounded data reconciliation problem. Computers & Chemical Engineering, v.17, n.11, p.1115-1120. 1993a.

_____. A method to incorporate bounds in data reconciliation and gross error detection--II. Gross error detection strategies. Computers & Chemical Engineering, v.17, n.11, p.1121-1128. 1993b.

QIN, J. S. e T. A. BADGWELL. An Overview of Nonlinear Model Predictive Control Applications. Symp. on Nonlinear Model Predictive Control. Ascona, Switzerland, 1998. p.

QIN, S. J. e T. A. BADGWELL. An Overview of Industrial Model Predictive Control Technology. Chemical Process Control - V. New York: AIChE Symposium Series - American Institute of Chemical Engineers, 1997. 232-256 p.

RAMAMURTHI, Y., P. B. SISTU e B. W. BEQUETTE. Control-Relevant Dynamic Data Reconciliation and Parameter Estimation. Computers & Chemical Engineering. 17: 41-59 p. 1993.

RAO, C. V. Moving Horizon Strategies for the Constrained Monitoring and Control of Nonlinear Discrete-Time Systems. Univ. of Wisconsin-Madison, 2000.

RAO, C. V. e J. B. RAWLINGS. Nonlinear Moving Horizon Estimation. Int. Symp. on Nonlinear Model Predictive Control. Ascona, Switzerland, 1998. p.

_____. Constrained process monitoring: Moving-horizon approach. AIChE Journal, v.48, n.1, p.97-109. 2002.

RAO, C. V., J. B. RAWLINGS e J. H. LEE. Stability of Constrained Linear Moving Horizon Estimation. Proc. American Control Conference. San Diego, CA, 1999b. p.

RAO, C. V., J. B. RAWLINGS e D. Q. MAYNE. Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: stability and moving horizon approximations. Automatic Control, IEEE Transactions on, v.48, n.2, p.246-258. 2003.

ROBERT, P. B., W. VINCENT e G. MICHAEL. Adaptive Optimal Control: The Thinking Man's G.P.C. Prentice Hall Professional Technical Reference. 1991. 244 p.

ROBERTSON, D. G. e J. H. LEE. A least squares formulation for state estimation. Journal of Process Control, v.5, n.4, p.291-299. 1995.

_____. On the Use of Constraints in Least Squares Estimation and Control. Automatica: Elsevier, 2002. 11113-1123 p.

ROBERTSON, D. G., J. H. LEE e J. B. RAWLINGS. A Moving Horizon-Based Approach for Least-Squares Estimation. AIChE Journal, v.42, n.8, August, p.2209-2224. 1996.

RUSSO, L. P. e R. E. YOUNG. Moving-horizon state estimation applied to an industrial polymerization process. American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999. San Diego, CA, 1999. 1129-1133 p.

SCOKAERT, P. O. M., J. B. RAWLINGS e E. S. MEADOWS. Discrete Time Stability with Perturbations: Application to Model Predictive Control. Automatica, v.33, n.3, Março 1997, p.473-470. 1997.

SLOTINE, J. J. E., J. K. HEDRICK e E. A. MISAWA. On sliding observers for nonlinear systems. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, v.109, n.3, p.245-252. 1987.

SONG, Y. Estimation and Control in Discrete-Time Nonlinear Systems. University of Michigan, 1992.

SONG, Y. e J. W. GRIZZLE. The extended kalman filter as a local asymptotic observer for discrete-time nonlinear systems. Journal of Mathematical Systems, Estimations and Control, v.5, n.1, p.59-78. 1995.

STENGEL, R. F. Stochastic Optimal Control: Theory and Application: John Wiley and Sons. 1986

TENNY, M. J. Computacional Strategies for Nonlinear Model Predictive Control. Chemical Engineering, University of Wisconsin-Madison, Wisconsin, 2002. 233 p.

THOMAS, Y. A. Linear Quadratic Optimal Estimation and Control with Receding Horizon. Electronics Letters, v.11, n.1, 9 January 1975, p.19-21. 1975.

TJOA, I. B. e L. T. BIEGLER. Simultaneous Strategies for Data Reconciliation and Gross Error Detection of Nonlinear Systems. Computers & Chemical Engineering, v.15, n.10, p.69. 1991.

TYLER, M. L. Performance Monitoring and Fault Detection in Control System. California Institute of TechnologyPasadena, CA, 1997.

TYLER, M. L. e M. MORARI. Stability of Constrained Moving Horizon Estimation Schemes. Automatic Control laboratory. Swiss Federal Insitute of Technology, 1996. p.

_____. Stability of Constrained Moving Horizon Estimation Schemes. Automatic Control laboratory. 1997.

Capítulo 3

Considerações Gerais sobre os Estimadores, EKF, CEKF e MHE

Neste capítulo são apresentadas algumas considerações gerais a cerca da implementação dos estimadores EKF, CEKF e principalmente do MHE que serão aplicadas neste trabalho.

3.1 Diferentes Esquemas de Atualização do MHE

Esta seção discute as diferentes maneiras para a atualização do valor do estado inicial \bar{x}_{k-N-1} . A transferência de “informação”, a qual está disponível na forma de estados anteriormente estimados, para a atual estimação via \bar{x}_{k-N-1} parece ser viável para a estabilidade do estimador. Findeisen (1997) propôs dois possíveis casos de se lidar com esta “transferência de informação”:

- o uso de $\hat{x}_{k-N-1|k-N-1}^*$, a “estimação filtrada” calculada a $k - N - 1$ passos atrás;
- o uso do último valor suavizado (*smoothed value*) $\hat{x}_{k-N-1|k-1}^*$.

É possível também usar outros valores suavizados $\hat{x}_{k-N-1|k-j}^*$, no entanto as maiores vantagens e desvantagens dos diferentes esquemas de atualização podem ser exploradas com os dois esquemas apresentados. Muske e Rawlings (1995), propuseram um teorema para o estimador de horizonte móvel linear, com atualização usando a estimação filtrada e atualização usando a estimação suavizada. Para ambos os casos a estabilidade é calculada para $N, Q_{-N}, Q, R > 0$ e para sistemas observáveis, onde $Q_{-N} = Q_N = Q_{-N}^T = cte > 0$. O esquema de atualização é mostrado na **Figura 3.1**.

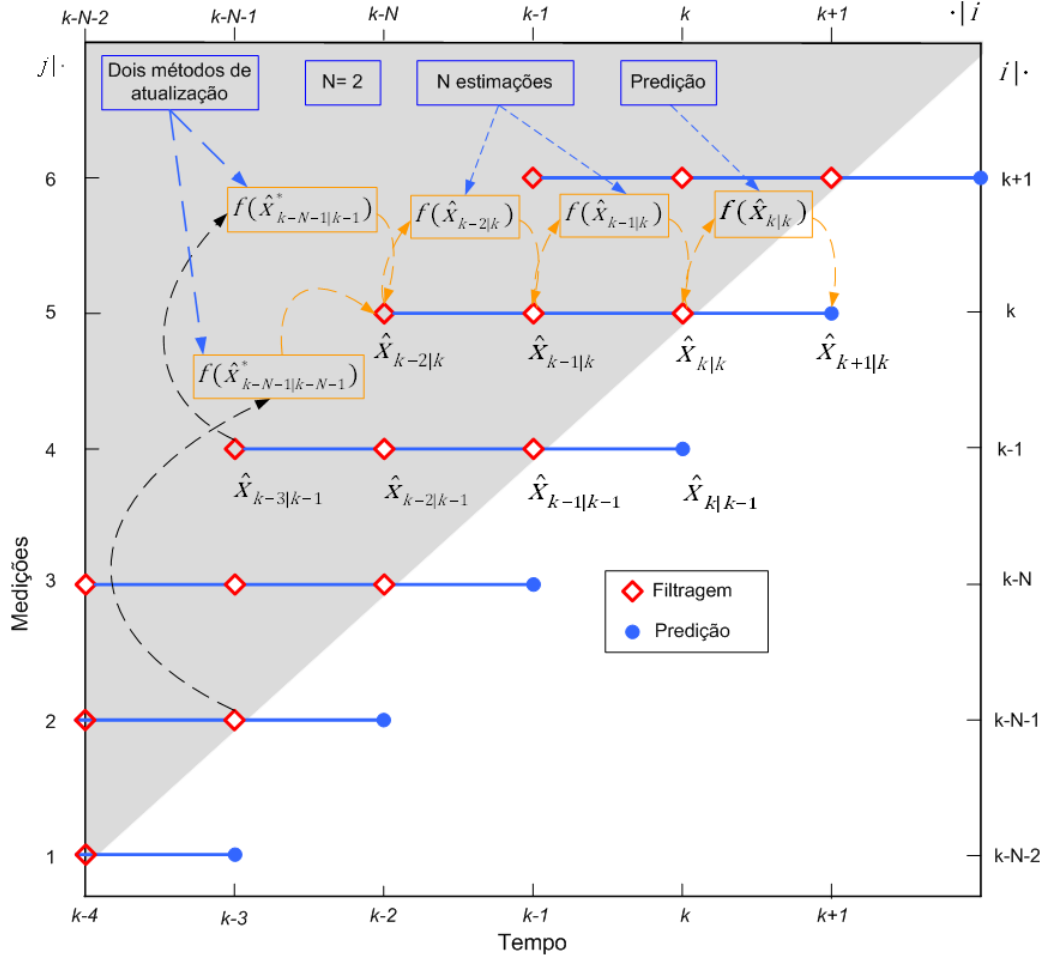


Figura 3.1: Representação dos diferentes esquemas de atualização do MHE.

3.1.1 Atualização a partir da Estimação Filtrada $\hat{x}_{k-N-1|k-N-1}^*$

A maior motivação para o uso de $\hat{x}_{k-N-1|k-N-1}^*$ vem do fato que nenhuma informação de entrada y_j é sobre valorizada durante a estimação. O valor de y_j usado durante a estimação de $\hat{x}_{k-N-1|k-N-1}^*$, vem antes do fim do atual horizonte $k - N$, isto garante que nenhuma informação oriunda de medição seja usada duas vezes. Se ao contrário uma atualização como $\hat{x}_{k-N-1|k-1}^*$ é usada, a informação de entrada será usada mais de uma vez. Isto não é favorável do ponto de vista probabilístico. No entanto uma desvantagem do uso de $\hat{x}_{k-N-1|k-N-1}^*$ junto com a constante $Q_{-N|k}$ é a ocorrência de uma “estimação” oscilante, conforme mostrado na **Figura 3.2**.

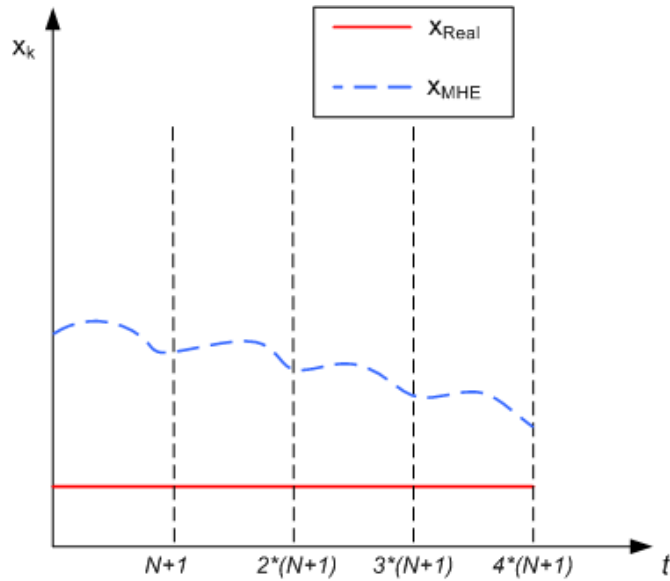


Figura 3.2: Efeito oscilante devido a atualização a cada $N+1$ passos.

Este efeito pode ser melhor interpretado dividindo o algoritmo de estimação resultante em N “independentes” estimadores e rodando com passo de tempo alterado (defasados), onde os mesmos possuem tempo de amostragem de $N + 1$ passos de tempo. O esquema é mostrado na **Figura 3.3**. Uma vez estes estimadores terem alcançado as N estimações iniciais, através do estimador batelada (ver seção 3.1.3), somente as estimações de cada estimador tem associações entre si.

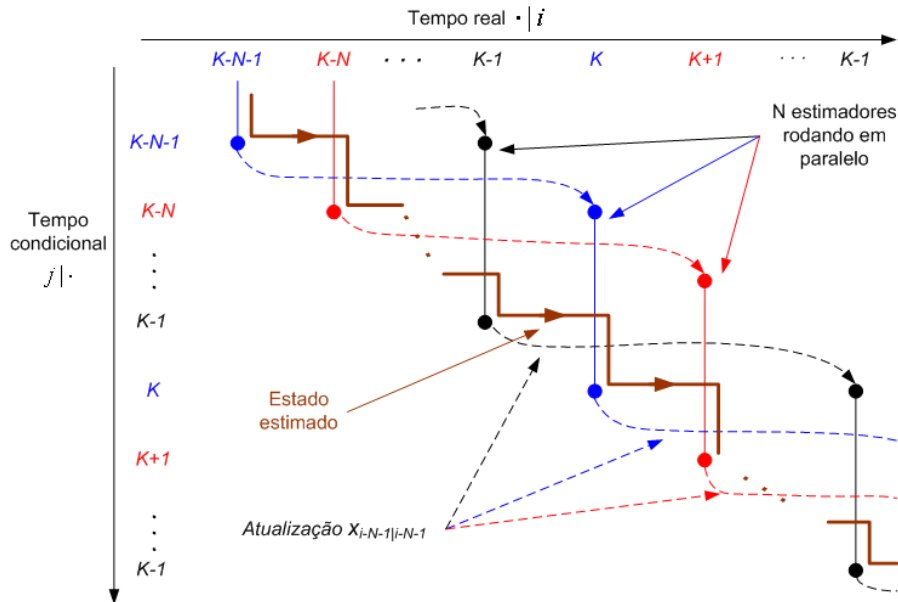


Figura 3.3: Esquema detalhado do efeito oscilatório na estimação filtrada.

Como exemplo de simulação com este comportamento, Muske e Rawlings (1995) apresentam o sistema de equações dado pela equação (3.1) que consiste em um sistema instável de um único estado.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 1.1x_k \\ y_k &= x_k \end{aligned} \quad (3.1)$$

Os parâmetros do estimador foram escolhidos como segue: $Q^{-1} = Q_N^{-1} = 1$, $R^{-1} = 1/100$ e o tamanho do horizonte $N = 13$. O sistema dado é observável $A = 1.1$, e como $Q^{1/2}$ existe, então o sistema é controlável. O estado real tem valor $x_0 = 0$ no início, o que significa que $x_k = 0 \forall k \geq 0$. A perturbação nominal da partida é $\hat{x}_{0|0} = 2$.

A **Figura 3.4** mostra claramente a oscilação do estado durante a estimação, introduzido pelo esquema de atualização usando o estado filtrado.

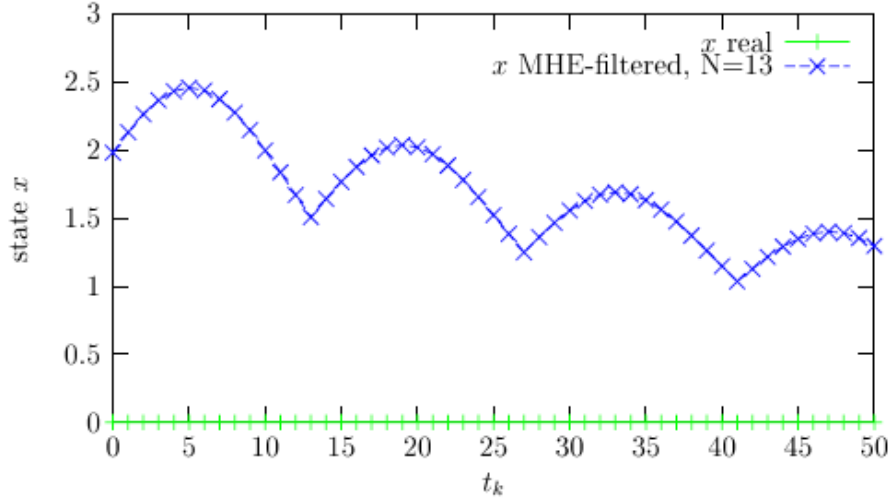


Figura 3.4: Exemplo do efeito oscilante, $A = 1.1$, $C = 1$, $Q^{-1} = Q_N^{-1} = 1$, $R^{-1} = 1/100$ com atualização a cada $N + 1$ passos (MUSKE e RAWLINGS, 1995).

3.1.2 Atualização a partir da Estimação Suavizada $\hat{x}_{k-N-1|k-1}^*$

Este método de atualização usa o valor do estado estimado suavizado calculado a um instante de tempo atrás. Devido ao “curto” período este esquema de atualização não tem nenhum estimador com efeito oscilante. No entanto, não há nenhuma motivação probabilística para o uso deste valor. A curta conexão entre a última estimação e a atual estimação nos permite derivar uma estabilidade similar a do MPC (do inglês *Model Predictive Control*) com horizonte finito. A **Figura 3.5** mostra uma ilustração do método de atualização da estimação suavizada.

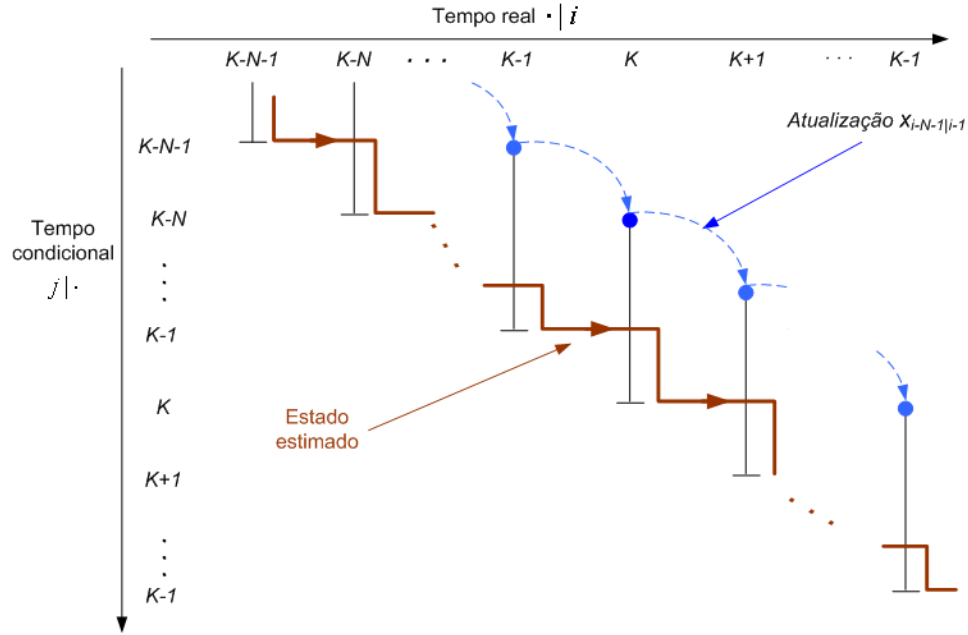


Figura 3.5: Esquema detalhado da atualização via estados suavizados, sem efeito oscilante.

A **Figura 3.6** foi retirada de Muske e Rawlings (1995) e mostra o resultado do MHE com atualização suavizada aplicado ao mesmo sistema e com os mesmos parâmetros usados para o MHE do exemplo anterior com atualização filtrada. Observa-se que nenhum estimador de efeito oscilante é introduzido, e que também a estimação suavizada proporciona uma rápida convergência do erro estimado para o valor zero. Para tanto o esquema de atualização adotado neste trabalho foi usando a estimação suavizada.

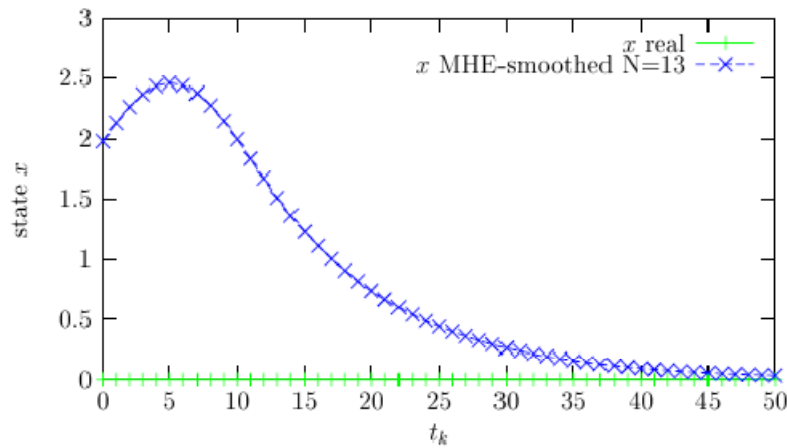


Figura 3.6: Exemplo sem o efeito oscilante para a atualização suavizada $A = 1.1$, $C = 1$, $Q^{-1} = Q_N^{-1} = 1$, $R^{-1} = 1/100$.

3.1.3 Inicialização do MHE via Estimador Batelada

Como o MHE trabalha com uma janela passada de informações (medições), salvo para um tamanho de horizonte $N = 0$, o mais comum é não possuímos medições anteriores a partida da estimação. Uma alternativa então para estimador MHE, seria inicializar com um tamanho de horizonte $N = 0$ e ir aumentando até o mesmo atingir o horizonte especificado,

caso este seja maior que zero. Isto significa rodar o estimador batelada até atingir o horizonte de estimação especificado. Para a primeira estimação, pode-se executar tanto o estimador CEKF (MHE com $N = 0$) descrito pelas equações (2.45) a (2.49) ou sua aproximação para um problema de programação quadrática descrito pelas equações (2.50) a (2.56).

3.1.4 Integração dinâmica envolvida na formulação MHE

A modelagem matemática do sistema dinâmico frequentemente resulta em um conjunto de equações diferenciais não lineares (GESTHUISEN *et al.*, 2001):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) + \xi(t) \\ x(0) &= x_0 + \xi_0 \\ y(t) &= g(x) + \varphi(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Em sistemas com amostragem, as equações contínuas em (3.2) têm de ser transformadas para a forma de tempo discreto. Para sistemas não lineares isto é usualmente feito pela integração do sistema no período de amostragem $\Delta t = t_{k+1} - t_k$:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(x(t), u(t)) + \xi(t)) dt \\ &\equiv F(x_k, u_k) + \xi_k \\ x(0) &= x_0 + \xi_0 \\ y_k &= g(x_k) + \varphi_k\end{aligned}\tag{3.3}$$

O índice k indica o tempo atual de amostragem $t = t_k$. Na equação (3.4) é mostrado as equações da integração dinâmica envolvidas na formulação MHE (quando o sistema é do tipo (3.2)).

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k-N|k} &= \bar{x}_{k-N|k-1} + \hat{\xi}_{k-N-1|k} \\ \hat{x}_{k-N+1|k} &= \hat{x}_{k-N|k} + \int_{t_{k-N}}^{t_{k-N+1}} f(x(t), u) dt + \hat{\xi}_{k-N|k} \\ \hat{x}_{k-N+2|k} &= \hat{x}_{k-N+1|k} + \int_{t_{k-N+1}}^{t_{k-N+2}} f(x(t), u) dt + \hat{\xi}_{k-N+1|k} \\ &\vdots \\ \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k-1|k} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(t), u) dt + \hat{\xi}_{k-1|k}\end{aligned}\tag{3.4}$$

A **Figura 3.7** mostra o esquema da integração dinâmica envolvido na formulação MHE.

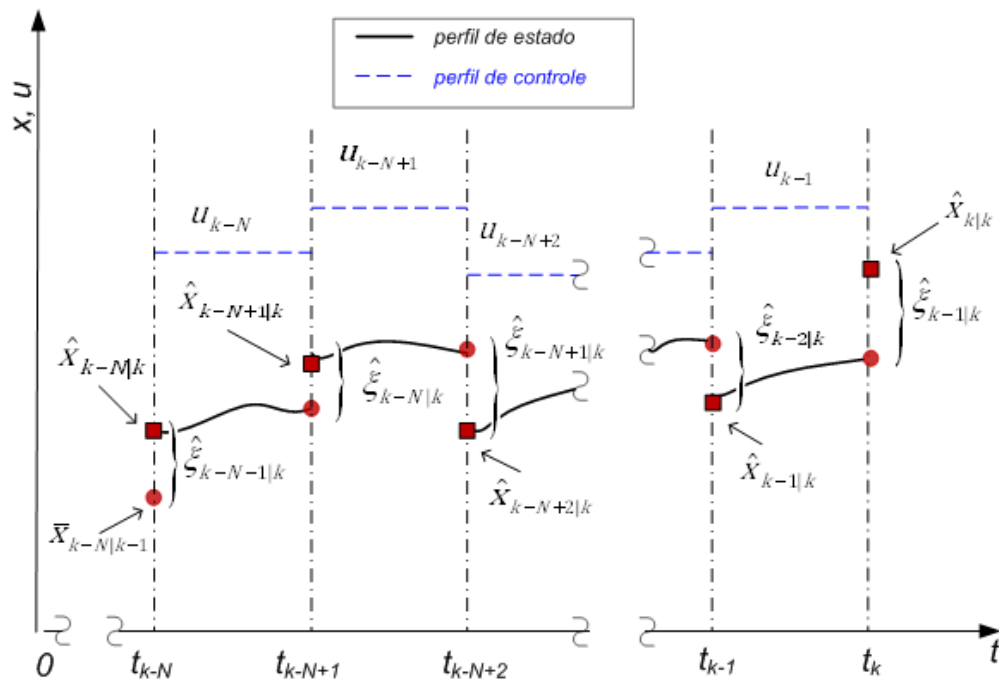


Figura 3.7: Esquema de integração dinâmica envolvido na formulação MHE.

3.2 Solução de Problemas de Integração e Otimização Dinâmica - Estratégias de Otimização para o Estimador de Horizonte Móvel

Na formulação do problema MHE, bem como na solução de problemas de controle ótimo (NMPC) existe a necessidade de executar uma otimização dinâmica de forma a determinar um conjunto de variáveis ótimas, pela otimização de um dado índice de desempenho (função objetivo ou custo) e sujeito a restrições específicas. Problemas de controle ótimo (OCP's) ou problemas de otimização algébricos diferenciais (DAOP's) não podem ser resolvidos via programação não-linear porque a otimização de perfis contínuos é um problema dimensional infinito (RIASCOS e PINTO, 2004).

Segundo Cervantes e Biegler (1999) e Cervantes *et al.* (2001) problemas de otimização são classificados em tarefas *off-line* e *on-line*. As tarefas *off-line* são:

→ projeto de controle para evitar transientes indesejáveis nos processos químicos, incluindo partidas (startups) e paradas de planta, manipulação de perturbações (resultante de distúrbios severos), e transições para pontos de operação diferentes.

→ estudos de procedimentos de segurança e avaliação de esquemas de controle em situações anormais.

→ estratégias sistemáticas para lidar com interação entre processos e projeto de equipamentos, e ajuste de controladores.

Tarefas *on-line*:

→ identificações de sistemas com modelos de processos não-lineares para estimar estados e entradas de processos imensuráveis, incluindo também reconciliação de dados e estimação de parâmetros;

→ o controle preditivo não-linear (NMPC) requer a solução de um problema de otimização dinâmico para determinar uma trajetória *on-line*, atualizando o modelo do processo a cada nova medição;

Da modelagem de processos químicos, dentro da Engenharia Química, obtêm-se freqüentemente um sistema de Equações Algébrico Diferenciais (DAE) ou um conjunto de Equações Diferenciais Ordinárias (ODE). A formulação DAE consiste em equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico do sistema, oriundos de balanços de massa e energia, e equações algébricas que asseguram relações físicas e termodinâmicas.

Uma formulação geral de um problema de otimização é assim definido:

$$\min_{x(t), y(t), u(t), t, p} \Phi(x(t), y(t), u(t), t, p)$$

sujeito ao modelo DAE (semi-explícito):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), y(t), u(t), t, p), & t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) &= x_0 \\ c(x(t), y(t), u(t), t, p) &= 0 \\ X(t)^L &\leq X(t) \leq X(t)^U \\ U(t)^L &\leq U(t) \leq U(t)^U \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde:

$c(\cdot)$ – vetor de equações de restrições,

$X(t)^L, X(t)^U$ – limites inferior e superior para as variáveis de estado,

$U(t)^L, U(t)^U$ – limites inferior e superior para as variáveis de controle.

Sem perda de generalidade, pode se considerar que o índice (ASCHER e PETZOLD, 1997) do modelo DAE, descrito por (3.5), seja igual a um e que a função objetivo é uma forma linear de Mayer conforme Cervantes e Biegler (1999) e Cizniar *et al.* (2006).

Problemas de otimização dinâmica podem ser resolvidos tanto via aproximação variacional ou via a aplicação de discretização que converte o problema tempo-contínuo original em um problema discreto. A primeira aproximação é baseada na obtenção de uma solução para as condições clássicas de otimalidade, onde são conhecidos como métodos

indiretos. Já os métodos que discretizam o problema tempo-contínuo original pode ser dividido em duas categorias, de acordo com o modo de discretização. Cervantes e Biegler (1999) fazem uma distinção entre os métodos que discretizam somente os perfis de controle (discretização parcial) e aqueles que discretizam os perfis de controle e o dos estados (discretização total).

Basicamente, o problema parcialmente discretizado pode ser resolvido tanto via programação dinâmica ou via aplicação de estratégias (seqüencial-direto) de programação não-linear (NLP). Uma característica básica destes métodos é que a cada iteração uma solução viável do sistema DAE, para dados valores de controle, é obtido por integração. A principal vantagem desses métodos é que eles geram problemas discretos menores que os métodos de discretização total.

Os métodos que aplicam a discretização total nos problemas tempo-discretos também usam estratégias NLP para resolver sistemas discretos e são conhecidos como métodos simultâneos diretos. Estes métodos podem usar diferentes problemas NLP e técnicas de discretização, mas a característica relevante é que eles resolvem o sistema DAE de uma única vez, permitindo a solução direta de problemas com restrições e/ou limites nas variáveis de estado e nas de controle, Riascos e Pinto (2004). Adicionalmente, eles possuem melhores propriedades de estabilidade que os métodos de discretização parcial.

Portanto, para resolver o problema de otimização dinâmica não-linear (NLP), envolvido na formulação MHE, existem três estratégias básicas, a seqüencial (*single-shooting*), *multiple-shooting* (ou *multishooting*) e a simultânea.

Na estratégia seqüencial as restrições de igualdade são resolvidas a cada passo da otimização, com a integração numérica do sistema de equações diferenciais. Devido ao grande esforço numérico nas integrações, o cálculo do MHE seqüencial demanda um elevado tempo computacional. Outra desvantagem é a impossibilidade de controlar as restrições nos estados durante a integração do sistema pelos integradores tradicionais (tais como Runge-Kutta). Se a integração diverge, o algoritmo de otimização não convergirá também.

O *multiple-shooting* serve como transição entre a aproximação seqüencial e a simultânea, esta última é baseada na discretização completa das variáveis de controle e de estado. No *multiple-shooting* o domínio do tempo é dividido em pequenos elementos de tempo e o modelo DAE é integrado separadamente em cada elemento. As variáveis de controle são tratadas como na aproximação seqüencial. Além disso, para obter a informação do gradiente, as equações de sensibilidade são obtidas para as variáveis de controle e para as condições iniciais dos estados em cada elemento. Finalmente, restrições de igualdade são adicionadas ao NLP para realizar a junção dos elementos e assegurar que os estados são contínuos no decorrer dos elementos. Com esta aproximação, restrições de desigualdade para o controle e estado podem ser impostas diretamente aos pontos discretos (BIEGLER *et al.*, 2001) *apud* (DE SOUZA e SECCHI, 2007). Devido a maior complexidade desta técnica, não

foram investidos esforços para a implementação da mesma na formulação MHE, ficando assim somente como uma sugestão de trabalhos futuros.

Na estratégia simultânea as restrições de igualdade são transformadas em restrições de igualdade puramente algébricas via técnicas de discretização. Uma das técnicas de discretização muito usada para a aproximação das equações diferenciais não lineares é o método dos resíduos ponderados, Cuthrell e Biegler (1987), onde comumente se usa colocação ortogonal. Nesta técnica, as variáveis de estado e controle são aproximadas por polinômios. Com o conjunto de restrições de igualdade algébricas, o problema pode ser resolvido usando, por exemplo, os tradicionais algoritmos de SQP. Desta forma, é possível também controlar as restrições para os estados em cada passo de otimização.

A aplicação da colocação ortogonal para a solução simultânea de OCPs foi proposta por Biegler (1984), onde equações diferenciais são discretizadas usando colocação ortogonal com polinômios de Legendre; o DAE é então transformado em um conjunto de equações de igualdade e resolvido como um NLP. Na Subseção 3.2.3 é apresentado um comparativo entre as estratégias sequencial e simultânea dentro da formulação MHE.

3.2.1 Discretização e aproximação via colocação ortogonal em elementos finitos

Considerando que o modelo DAE dado pela equação (3.5) seja um problema de valor inicial (PVI) sob um elemento finito i , pode se transformar estas equações diferenciais em equações algébricas usando colocação ortogonal. O tempo $t \in [t_0, t_f]$ é dividido em NE elementos finitos e normalizados em cada um, onde estes admitem descontinuidade em seu perfil (**Figura 3.8**).

Então a relação entre o tempo e o tempo normalizado ($z \in [0,1]$) é:

$$z_i = \frac{t_{n,i} - l_n}{l_{n+1} - l_n} \quad (3.6)$$

$$n = 1, \dots, NE, \quad i = 1, \dots, K$$

onde l_n e l_{n+1} são os elementos limites incluídos como graus de liberdade adicionais, e z_i são os pontos de colocação que correspondem as raízes do polinômio de Legendre ortogonal (que pertence a classe dos polinômios de Jacobi). Rice e Do (1995) mostram que a escolha dos pontos de colocação é crítica e concluem que polinômios de Jacobi são particularmente atrativos.

Os polinômios de Legendre para a aproximação dos perfis das variáveis de estado e de controle são:

$$x_{n,K+1}(z) = \sum_{i=0}^K x_{n,i} \phi_i(z), \quad n = 1, \dots, NE \quad (3.7)$$

onde,

$$\phi_i(z) = \prod_{k=0, k \neq i}^K \frac{z - z_k}{z_i - z_k}, \quad i = 0, \dots, K \quad (3.8)$$

e

$$u_{n,K}(z) = \sum_{i=0}^K u_{n,i} \psi_i(z), \quad n = 1, \dots, NC \quad (3.9)$$

onde,

$$\psi_i(z) = \prod_{k=1, k \neq i}^K \frac{z - z_k}{z_i - z_k}, \quad i = 1, \dots, K \quad (3.10)$$

Assim o perfil de estado é aproximado por um polinômio de ordem $K + 1$ (em cada elemento n), e o perfil de controle por um polinômio de ordem K , permitindo a representação de pontos de descontinuidade no perfil da variável de controle e pontos de não diferenciação no perfil da variável de estado, conforme a **Figura 3.8**.

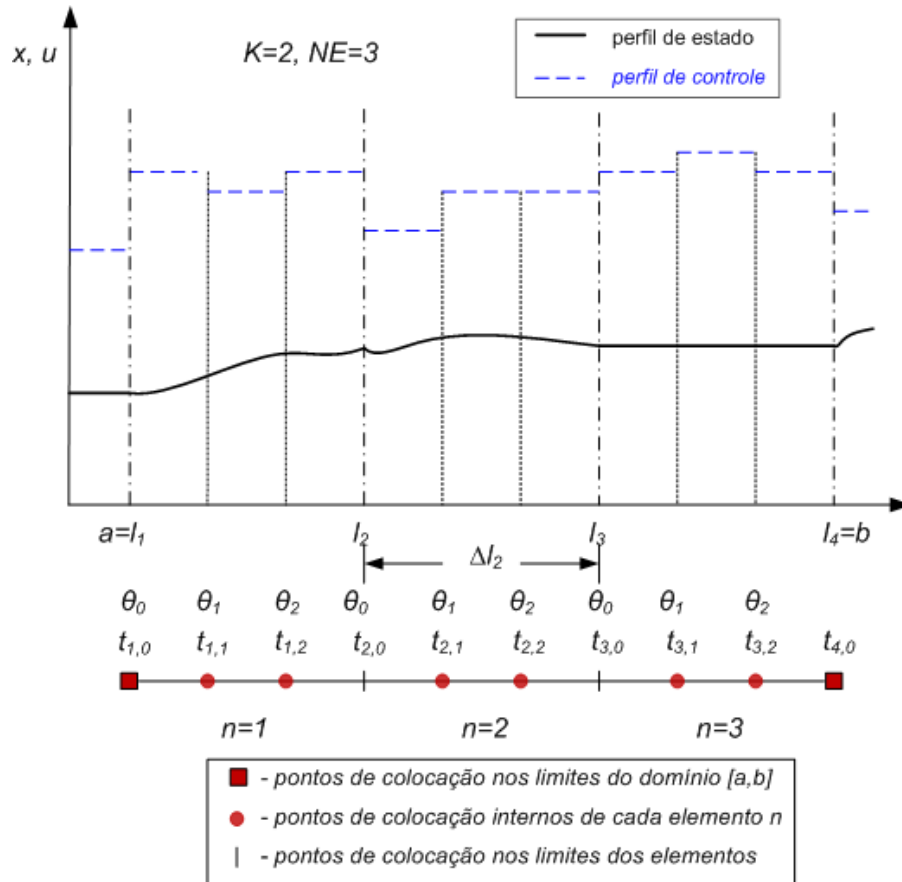


Figura 3.8: Perfis de estado e controle com pontos de descontinuidade e não-diferenciação discretizados em elementos finitos.

$x_{n,i}$ e $u_{n,i}$ em (3.7) e (3.9) respectivamente, são coeficientes polinomiais que correspondem as variáveis a serem otimizadas. As funções ϕ_i e ψ_i são dependentes somente da localização dos pontos de colocação. Com a aproximação polinomial o DAE pode ser escrito através de um conjunto de equações residuais, em cada ponto de colocação i (raízes do polinômio de Legendre):

$$\begin{aligned} Res(t_{n,i}) &= \frac{dx_{n,K+1}(z_i)}{dz} \frac{dz}{dt} - f(x_{n,i}, u_{n,i}, t_{n,i}) = 0 \\ n &= 1, \dots, NE, \quad i = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (3.11)$$

Em uma notação vetorial para as derivadas do polinômio de Legendre nos pontos de colocação, tem-se a forma (RICE e DO, 1995):

$$\begin{aligned} \frac{dx_{n,K+1}(z)}{dz} &= \underline{A} \cdot \underline{x}_n, \quad \underline{x}_n = [x_n(z_0), x_n(z_1), \dots, x_n(z_K)]^T \\ n &= 1, \dots, NE \end{aligned} \quad (3.12)$$

Em (3.12), \underline{A} é uma matriz de dimensão $K + 1$ que é calculada a partir de z_i , e \underline{x}_n é o vetor dos valores calculado nos pontos de colocação. De (3.6) vem:

$$\frac{dz_i}{dt_{n,i}} = \frac{1}{(l_{n+1} - l_n)} \quad (3.13)$$

Substituindo (3.12) e (3.13) em (3.11) obtêm-se um conjunto de equações residuais algébricas:

$$\begin{aligned} Res(t_{n,i}) &= \underline{A} \cdot \underline{x}_n \frac{1}{(l_{n+1} - l_n)} - f(x_{n,i}, u_{n,i}, t_{n,i}) = 0 \\ n &= 1, \dots, NE, \quad i = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (3.14)$$

Outras restrições devem ser adicionadas para garantir a continuidade do perfil do estado nos limites do elemento. Conseqüentemente, os polinômios são extrapolados para gerar um ponto inicial para o próximo elemento. Com a aproximação via colocação ortogonal, o OCP ou o DAE torna-se um problema NLP:

$$\min_{x_{n,i}, u_{n,i}, t_{n,i}} \Phi(x_{n,i}, u_{n,i}, t_{n,i}) \quad (3.15)$$

sujeito a;

$$\begin{aligned} Res(t_{n,i}) &= \underline{A} \cdot \underline{x}_n \frac{1}{(l_{n+1} - l_n)} - f(x_{n,i}, u_{n,i}, t_{n,i}) = 0 \\ ceq(x_{n,i}, u_{n,i}) &= 0 \\ c(x_{n,i}, u_{n,i}) &\leq 0 \\ x_{1,0} &= x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{n,0} &= x_{n-1,K+1} = \sum_{i=0}^K x_{n-1,i} \phi_i(z=1), \quad n = 2, \dots, NE \\
 u_{n,0} &= \sum_{i=1}^K u_{n,i} \psi_i(z=0), \quad n = 2, \dots, NE \\
 u_{n,K+1} &= \sum_{i=1}^K u_{n,i} \psi_i(z=1) \\
 \sum_{n=1}^{NE} \Delta l_n &= l_{total}, \quad n = 1, \dots, NE \\
 X^L &\leq x_{n,i} \leq X^U, \quad i = 0, \dots, K+1 \\
 U^L &\leq u_{n,i} \leq U^U, \quad i = 0, \dots, K+1
 \end{aligned}$$

Embora haja uma equivalência entre as formulações MHE e MPC (como já citado anteriormente), na formulação MHE não é necessário a discretização em elementos finitos do perfil de controle. Russo e Young (1999) utilizaram colocação ortogonal para a solução de um sistema DAE para a estimação de estados e parâmetros usando um modelo de processo de polimerização industrial.

Então para a formulação MHE, usando a estratégia simultânea com colocação ortogonal, o problema de otimização fica assim descrito:

$$\begin{aligned}
 \min_{\hat{\xi}_{j-1|k}, \hat{\phi}_{j|k}, \hat{x}_{j,i|k}} \quad & \Psi_k^N = \hat{\xi}_{k-N-1|k}^T \hat{P}_{k-N|k-N-1}^{-1} \hat{\xi}_{k-N-1|k} \\
 & + \sum_{j=k-N}^{k-1} \hat{\xi}_{j|k}^T Q^{-1} \hat{\xi}_{j|k} + \sum_{j=k-N}^k \hat{\phi}_{j|k}^T R^{-1} \hat{\phi}_{j|k}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

sujeito às equações de igualdade :

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{k-N,0|k} &= \hat{x}_{k-N,0|k-1} + \hat{\xi}_{k-N-1|k} \\
 \hat{x}_{j+1,0|k} &= f(\hat{x}_{j,0|k}) + \hat{\xi}_{j|k} \quad j = k-N, \dots, k-1 \\
 y_j &= g(\hat{x}_{j,0|k}) + \hat{\phi}_{j|k} \quad j = k-N, \dots, k
 \end{aligned}$$

onde,

$$\underline{A} \cdot \underline{x}_n = f(\hat{x}_{n,i|k}, u_n, t_n) T_s$$

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{1,0|k} &= x_0 \\
 \hat{x}_{NE+1,0|k} &= x_f
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n &= 1, \dots, NE \\
 j &= k-N, \dots, k \\
 i &= 0, \dots, K
 \end{aligned}$$

e limites nas variáveis :

$$\begin{aligned}
x_{\min} &\leq \hat{x}_{j|k} \leq x_{\max} \\
\xi_{\min} &\leq \hat{\xi}_{j-1|k} \leq \xi_{\max} \\
\varphi_{\min} &\leq \hat{\varphi}_{j|k} \leq \varphi_{\max} \\
j &= k - N, \dots, k \\
i &= 0, \dots, K
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\underline{x}_n &= [\hat{x}_{n,0|k}(\theta_0), \hat{x}_{n,1|k}(\theta_1), \dots, \hat{x}_{n,K|k}(\theta_K)]^T \\
\hat{x}_{n,0|k} &= \sum_{i=0}^K \hat{x}_{n-1,i} \phi_i(\theta = 1), \quad n = 2, \dots, NE + 1 \\
\hat{x}_{2,0|k} &= \hat{x}_{k-N+1|k} \\
\hat{x}_{3,0|k} &= \hat{x}_{k-N+2|k} \\
&\vdots \\
\hat{x}_{NE+1,0|k} &= \hat{x}_{k|k} \\
j &= k - N, \dots, k \\
n &= 1, \dots, NE \\
i &= 0, \dots, K
\end{aligned}$$

Neste trabalho foi considerado o tamanho dos elementos fixos e igual ao tempo de amostragem T_S ($T_S = l_{n+1} - l_n$) e o número de elementos igual ao tamanho do horizonte móvel ($NE = N$).

3.2.2 Integradores tradicionais de sistemas DAE's e ODE's

No ambiente de simulação do Matlab[®] existe uma série de integradores de ODE's disponíveis, como exemplo o *ode45* (Runge-Kutta), *ode23*, *ode15s*, etc. Estes funcionam bem fornecendo bons resultados, porém demandam elevado tempo computacional e por ora só resolvem sistemas ODE's e uma classe especial de DAE's (sistemas linearmente implícitos). Já outros solvers como o *DASSL* (do inglês *Differential-Algebraic System Solver*), implementado em linguagem Fortran[®] por Petzold (1983), e o *DASSLC* que é uma versão modificada do *DASSL* implementado em linguagem C por Secchi *et al.* (1991), são capazes de resolver tanto sistemas DAE's como ODE's¹.

3.2.3 Comparativo entre as estratégias seqüencial e simultânea

Aqui é apresentado um comparativo do tempo computacional demandado na solução do problema de programação dinâmica não-linear (NLP) envolvido na formulação MHE

¹ O código do solver *DASSL* pode ser encontrado em Hauan (2007), e o código do *DASSLC* pode ser encontrado no REPOSITÓRIO NACIONAL DE PROGRAMAS DA ENGENHARIA QUÍMICA / ALGORITMOS NUMÉRICOS (SECCHI, 2007). Ambos com as duas respectivas interfaces para Matlab[®]

usando a estratégia sequencial via os integradores *ode45* e *DASSLC* e via a estratégia simultânea com colocação ortogonal.

Na **Tabela 3.1** são apresentados os tempos computacionais para cada estratégia, variando o tamanho do horizonte de 2 até 4. O problema testado foi o reator isotérmico de van de Vusse apresentado no capítulo 4, onde paralelamente, foram adicionados também os tempos computacionais dos estimadores EKF e CEKF.

Tabela 3.1: Comparativo do tempo computacional entre as estratégias sequencial (via *ode45* e *DASSLC*) e simultânea (via colocação ortogonal) na formulação MHE.

<i>EKF*</i>	<i>CEKF*</i>	<i>MHE**</i>								
		Sequencial						Simultânea		
		<i>ode45</i>			<i>DASSLC</i>			Col. Ortogonal		
4 s	7 s	N=2	N=3	N=4	N=2	N=3	N=4	N=2	N=3	N=4
		63 s	120 s	212 s	32 s	62 s	106 s	34 s	73 s	110 s

(*) usando *DASSLC*. (**) parâmetros do otimizador *fmincon*: $TolX = 10^{-4}$ e $TolCon = 10^{-4}$.

A **Tabela 3.1** mostra que o tempo computacional, quando utilizada a estratégia sequencial com o integrador *ode45*, é praticamente duas vezes maior quando utilizado o solver *DASSLC*. Para um horizonte de tamanho maior que 2 a estimação *on-line* torna-se impossível, visto que o tempo de simulação ultrapassa o tempo de amostragem (T_s). Como visto no item 3.2.2 o integrador *ode45* é computacionalmente mais lento que os integradores *DASSL* e *DASSLC*. Portanto neste trabalho não será usado o integrador *ode45* em nenhuma das etapas de integração dos estimadores aqui implementados. A estratégia sequencial via *DASSLC* foi ligeiramente mais rápida que a estratégia simultânea via colocação ortogonal. Esse resultado é esperado uma vez que para modelos de baixa escala a estratégia sequencial consegue lidar bem com esse número de variáveis. Para tanto a estratégia simultânea só é justificada para modelos de larga escala. Em Tonel *et al.* (2007) também pode ser encontrado um comparativo de desempenho para o MHE, usando as estratégias sequencial via Runge-Kutta (*ode45*) e simultânea via colocação ortogonal, para o modelo de 4 tanques cilíndricos.

3.3 Referências

ASCHER, U. M. e L. R. PETZOLD. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics 1997. 332 p.

BIEGLER, L. T. Solution of dynamic optimization problems by successive quadratic programming and orthogonal collocation. Computers & Chemical Engineering, v.8, n.3-4, p.243-247. 1984.

BIEGLER, L. T., A. M. CERVANTES e A. WÄCHTER. Advances in Simultaneous Strategies for Dynamic Process Optimization. February 19, 2001. 2001

CERVANTES, A. e L. T. BIEGLER. Optimization Strategies for Dynamic Systems: 21 p. 1999.

CIZNIAR, M., M. FIKAR e M. A. LAFITI. MATLAB Dynamic Optimisation Code - DYNOPT. Bratislava, Slovak Republic, 2006. 2006.

CUTHRELL, J. E. e L. T. BIEGLER. On the optimization of differential-algebraic process systems. AICHE Journal, v.33, n.8, p.1257-1270. 1987.

DE SOUZA, S. J. e A. R. SECCHI. Parametrização Automatizada das Variáveis de Controle Em Problemas de Otimização Dinâmica. OKTOBER FÓRUM. Porto Alegre - Brazil, 2007. 9 p.

FINDEISEN, P. K. Moving Horizon State Estimation of Discrete Time Systems. (Thesis M.S. --University of Wisconsin--Madison 1997.). 1997. xix, 157 p.

GESTHUISEN, R., K. U. KLATT e S. ENGELL. Optimization-based State Estimation: a Comparative study for the batch Polycondensation of Polyethyleneterephthalate. European Control Conference, 2001. p.

HAUAN, S. DASSL: MEX Interface Programming. www.andrew.cmu.edu/user/steinhau/Research/mex-interfaces.html. 2007 2007.

MUSKE, K. R. e J. B. RAWLINGS. Nonlinear Moving Horizon State Estimation. In: R. Berber (Ed.). Methods of Model Based Process Control. Antalya: Kluwer Academic, v.293, 1995. Nonlinear Moving Horizon State Estimation, p.349-365. (Applied Sciences)

PETZOLD, L. R. DASSL: Differential algebraic system solver. Sandia National Laboratories. Livermore, California. 1983

RIASCOS, C. A. M. e J. M. PINTO. Optimal control of bioreactors: a simultaneous approach for complex systems. Chemical Engineering Journal, v.99, n.1, p.23-34. 2004.

RICE, R. G. e D. D. DO. Applied Mathematics and Modeling for Chemical Engineers. John Wiley & Sons. 1995. 730 p.

RUSSO, L. P. e R. E. YOUNG. Moving-horizon state estimation applied to an industrial polymerization process. American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999. San Diego, CA, 1999. 1129-1133 p.

SECCHI, A. R. DASSLC: REPOSITÓRIO NACIONAL DE PROGRAMAS DA ENGENHARIA QUÍMICA / ALGORITMOS NUMÉRICOS. <http://www.enq.ufrgs.br/enqlib/numeric/>. 2007 2007.

SECCHI, A. R., M. MORARI e E. C. BISCAIA. Dawrs: A differential-algebraic system solver by the waveform relaxation method. The Sixth Distributed Memory Computing Conference (DMCC6). Portland, Oregon. April, 1991. 502-505 p.

TONEL, G., A. R. SECCHI e J. O. TRIERWEILER. Atualização Automática de Modelos para Otimização em Tempo Real. OKTOBER FÓRUM. Porto Alegre - Brazil, 2007. p.

Capítulo 4

Comparação entre os estimadores EKF, CEKF e MHE

Neste Capítulo são apresentados sete estudos de casos, onde os estimadores EKF, CEKF e MHE são submetidos a uma ampla avaliação. Os quatro primeiros estudos compreendem sistemas que não possuem significado físico real. Neles busca-se mostrar como a escolha das matrizes $P_{0|0}$, Q e R pode afetar a estimação de estados (falta de sintonia). Também é mostrado como restrições nos distúrbios podem melhorar a estimação de estados para o caso onde há incertezas no modelo do sistema. Os três últimos estudos de casos tratam de problemas e/ou sistemas reais, nos quais busca-se explorar, além das características citadas anteriormente, a estimação para problemas com: não-linearidade acentuada, inversão de ganho, restrições nos distúrbios, modelos com incertezas, distúrbios nas variáveis medidas com considerável amplitude e/ou covariância e distúrbios nas condições iniciais.

4.1 Estudo de Caso 1: sistema instável de um estado.

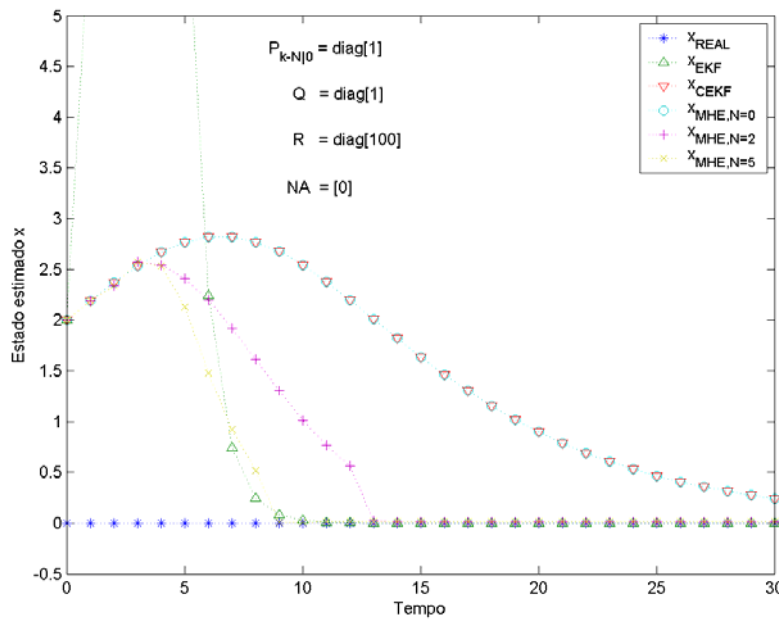
O sistema dado pela equação (3.1) foi tomado como o primeiro estudo de caso para teste da implementação do estimador de horizonte móvel MHE. Aqui o MHE foi pela primeira vez submetido a uma avaliação juntamente com os estimadores tradicionais baseados no filtro de Kalman: o EKF e o CEKF. Findeisen (1997) fixou um horizonte $N = 12$ para este caso, mas aqui foi fixado um horizonte $N = 5$. Para este caso o sistema é observável, e as matrizes de peso $P_{k-N|0}$, Q e R bem como os demais parâmetros para os estimadores são dados na **Tabela 4.1**.

Baseado nos valores dos parâmetros considerados para a estimação, significa que o problema real está sobre influência de um pequeno distúrbio no estado (ξ), mas com um grande distúrbio de medição (φ), uma vez que $R \gg Q$. A estimação inicial é $\hat{x}_{0|0} = 2$. Na **Figura 4.1** são apresentados os resultados da estimação para os três estimadores.

Tabela 4.1: Parâmetros dos estimadores para a simulação com o sistema instável de 1 estado.

<i>Parâmetros</i>	<i>Valor</i>
$P_0 = P_{0 0} = P_{K-N 0}$	1
Q	1
R	100
T_S	1

Como consequência do valor inicial baixo da matriz de covariância P_{k-N} existe uma demora na convergência da estimação para o valor real (falta de sintonia), uma vez que a condição inicial para o estimador foi dada bem distante da real. Percebe-se, porém, que no estado estacionário todos os estimadores convergem para o valor real. O estimador EKF inicialmente oscila e só mais adiante consegue convergir para o valor real. A resposta do CEKF é idêntica a encontrada por Findeisen (1997), onde a estimação caminha lentamente para o valor real. O MHE inicia com a mesma trajetória do CEKF, mas muito antes ele “percebe” a incoerência e inicia uma trajetória de correção em direção ao valor real.

**Figura 4.1:** Comparação entre o MHE ($N=5$), EKF e CEKF para o sistema instável de um estado.

Aumentando-se mais o tamanho do horizonte N , além de 5, a trajetória de estimação obtida pelo estimador MHE não se altera mais tão significativamente. Porém variando o tamanho do horizonte de $N = 5$ até $N = 0$ vão se obtendo trajetórias que se afastam da trajetória $N = 5$ em direção a trajetória obtida pelo estimador CEKF. Para verificar a implementação a condição de horizonte zero ($N = 0$) para o MHE também foi simulada produzindo, o mesmo resultado obtido com CEKF, certificando a implementação realizada. Neste exemplo fica claro como uma realimentação maior de informações (horizonte de medições passadas) consegue fazer com que o estimador MHE não se perca nas primeiras

estimações, como o EKF, e nem demore a convergir como o CEKF, acelerando para o valor real. Na **Tabela 4.2** é apresentado o erro quadrático para cada um dos estimadores.

Tabela 4.2: Soma do erro quadrático para o sistema linear com um estado.

Estado	EKF	CEKF	MHE		
			N=0	N=2	N=5
x	30.25	2.02	2.02	0.94	0.69

A sintonia e/ou ajuste dos filtros é uma assunto crucial devido a necessidade de se quantificar a acuracidade do modelo em termos da matriz de covariância dos ruídos de processo para processos caracterizados por incertezas estruturais que são variantes tempo (SALAU *et al.*, 2008).

Para sistemas reais que possuem baixo grau de não-linearidade poderíamos usar o estimador MHE inicialmente para fazermos a sintonia da matriz P e posteriormente poderíamos usar tanto o estimador EKF como o CEKF para a estimação de estados, já que ambos apresentam bom desempenho para sistemas lineares ou pouco não-lineares, quando estão sintonizados. De forma prática então os estimadores EKF e CEKF seriam reinicializados com os valores iniciais dos estados x e da matriz de covariância P fornecidos pelo MHE.

Para este caso ainda, com maior facilidade para o EKF e menor para o CEKF, podem estes estimadores divergir no decorrer da estimação uma vez que $R \gg Q$ e então a informação contida por uma única medição ($N = 0$) pode não ser suficiente para evitar que os mesmos mantenham-se na trajetória de estimação real. Neste caso necessitar-se-ia novamente recorrer ao MHE para “trazer” a estimação para próximo do valor real.

A simulação MHE com $N = 0$ para este exemplo também serviu para fazer a primeira validação da implementação da formulação MHE desenvolvida aqui neste trabalho, ao comparar com os resultados do CEKF.

4.2 Estudo de Caso 2: sistema de segunda ordem.

O sistema considerado foi retirado de Muske e Rawlings (1995), e consiste de um sistema de segunda ordem (dois estados). O sistema de equações é dado por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 5/3 & -2/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_k \\ y_k &= [-2/3 \quad 1] x_k \end{aligned} \quad (4.1)$$

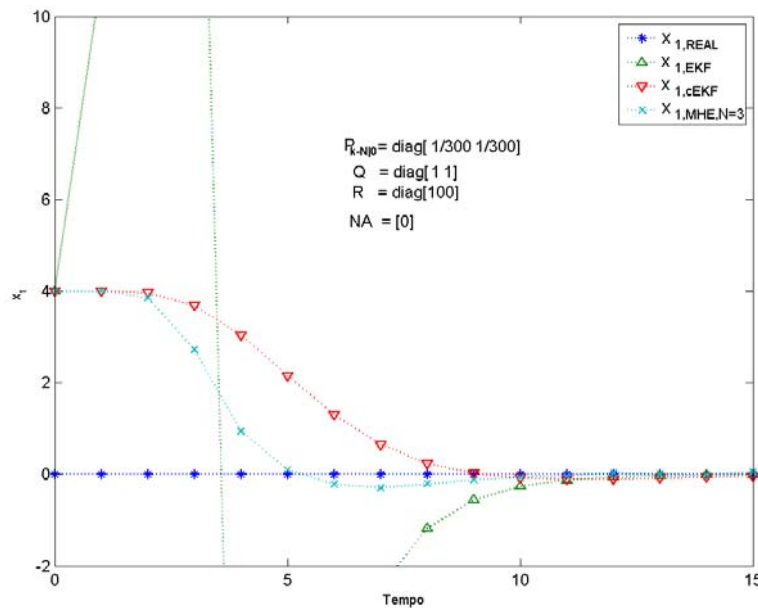
ou seja, a variável medida (y) tem uma relação linear com os dois estados do sistema ($y_k = -2/3 x_k^{(1)} + x_k^{(2)}$). Os parâmetros dos estimadores foram escolhidos conforme a **Tabela 4.3**.

Tabela 4.3: Parâmetros dos estimadores para a simulação com o sistema de segunda ordem.

<i>Parâmetros</i>	<i>Valor</i>
$P_0 = P_{0 0} = P_{K-N 0}$	$diag[1/300 \ 1/300]$
Q	$diag[1 \ 1]$
R	100
T_s	1

O tamanho do horizonte de estimação foi escolhido igual a 3 ($N = 3$). O sistema dado é observável e tem autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2/3$. O estado inicial do sistema real tem valor $x_0 = [0 \ 0]^T$, o que significa que $x_k = 0 \ \forall k \geq 0$. A estimação inicial é $\hat{x}_{0|0} = [4 \ 0]^T$.

Na **Figura 4.2** é apresentado os resultados para a simulação dos três estimadores. Aqui novamente os resultados são semelhantes aos obtidos para o sistema de 1 estado. Neste caso nota-se que o EKF apresentou uma grande oscilação inicial devido ao grande erro no valor inicial estimado dos estados e o fato da matriz de covariância inicial P_0 ter um valor pequeno. Novamente o MHE foi o que apresentou os melhores resultados. Para tamanho de horizonte maior que 3 percebeu-se que a estimação não tem melhora significativa, o que portanto, não justifica o seu aumento.

**Figura 4.2:** Comparação entre o MHE ($N=3$), EKF e CEKF para o sistema de segunda ordem*.*.*.

(*) para simplicidade da notação, na legenda desta figura e das figuras subseqüentes o índice que denota o estado (i) aparecerá em subscrito (x_i) nas mesmas, ao invés de sobrescrito e entre parênteses ($x^{(i)}$). Também no texto muitas vezes, se fará referência ao estado portando somente o índice subscrito.

(**) foi mostrado somente o estado x_1 para melhor visualização no gráfico.

4.3 Estudo de Caso 3: sistema de segunda ordem oscilatório.

O sistema considerado aqui é o sistema apresentado no estudo de caso anterior modificado. O sistema de equações é dado por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 1.1 \\ -0.95 & 0 \end{bmatrix} x_k + \xi_k \\ y_k &= [1 \quad 0] x_k + \varphi_k \end{aligned} \quad (4.2)$$

Os parâmetros dos estimadores foram escolhidos conforme a **Tabela 4.4**.

Tabela 4.4: Parâmetros dos estimadores para a simulação com o sistema de segunda ordem oscilatório.

<i>Parâmetros</i>	<i>Valor</i>
$P_0 = P_{0 0} = P_{K-N 0}$	$inv \begin{bmatrix} 1.0 & 0.9 \\ 0.9 & 1.0 \end{bmatrix}$
Q	$diag[1 \quad 1]$
R	100
T_s	1

O tamanho do horizonte de estimação foi escolhido igual a 5 ($N = 5$). Agora este sistema apresenta autovalores complexos conjugados $\lambda_j = 0.05 + 1.021i$, que têm como valor absoluto $|\lambda_j| = 1.0223 > 1$, apresentando, portanto, comportamento oscilatório e instável (levemente instável).

Na **Figura 4.3** é apresentado os resultados da simulação para o sistema de segunda ordem modificado. Este exemplo mostra como os estimadores CEKF e MHE, baseados em otimização, retornam uma estimação oscilante. O MHE com $N = 0$ retorna a mesma estimação oscilante (em torno do valor) que o estimador CEKF. Com horizonte $N = 5$ o MHE retorna um resultado amortecido em comparação ao CEKF e converge para o valor real muito antes que o CEKF. Embora o MHE tenha convergido para o valor real, praticamente no mesmo instante de tempo que o EKF, o CEKF foi o que apresentou os melhores resultados para a estimação. Porém o EKF é um estimador “localmente estável”. Assim se ocorrerem pequenas mudanças na dinâmica do sistema, ou o estimador for operado com parâmetros diferentes da **Tabela 4.4** a estimação pode oscilar em torno do valor real e/ou divergir.

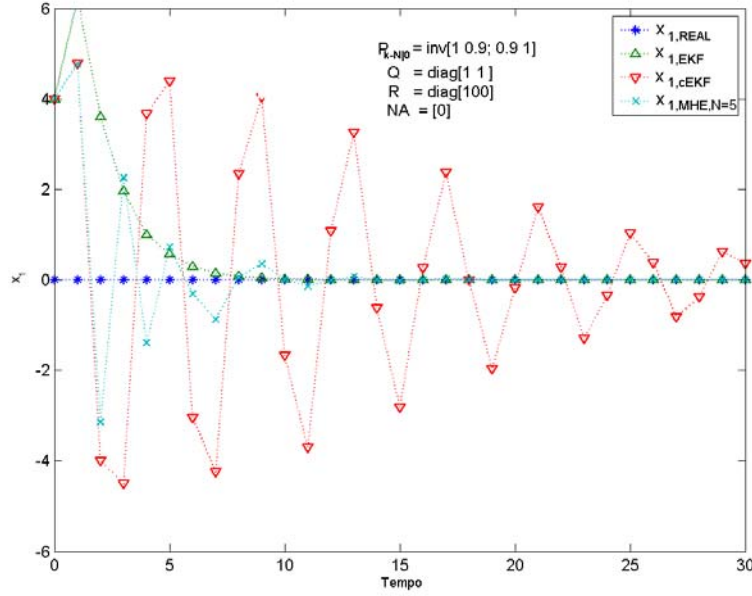


Figura 4.3: Comparação entre o MHE ($N=5$), EKF e CEKF para o sistema de segunda ordem oscilatório.

4.4 Estudo de Caso 4: sistema não linear com restrição de desigualdade.

Este estudo de caso foi baseado no trabalho de Rao *et al.* (2003), e objetiva-se mostrar como restrições de desigualdade podem melhorar a estimação de estados quando os distúrbios são limitados. O modelo do sistema é dado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^{(1)} &= -0.1x_k^{(2)} + \frac{0.5x_k^{(1)}}{1 + (x_k^{(1)})^2} + \xi_k^{(1)} \\ x_{k+1}^{(2)} &= +0.99x_k^{(2)} + 0.2x_k^{(1)} + \xi_k^{(2)} \\ y_k &= -2x_k^{(1)} + \varphi_k \end{aligned} \quad (4.3)$$

Considera-se que $\{\varphi_k\}$ é uma sequência de variáveis independentes com média zero, aleatórias e normalmente distribuídas, com amplitude (ou covariância) igual a 0.01 e ξ_k é uma sequência de variáveis independentes com média zero, aleatórias e normalmente distribuídas, com covariância igual a 1. A condição inicial real é $x_0 = [0.6 \ 1.2]^T$, e a estimativa inicial é $\hat{x}_{0|0} = [0.9 \ 1.7]^T$, ou seja, $\hat{\xi}_{0|0} = [0.3 \ 0.5]^T$. Para capturar a informação contida na sequência randômica $\{\xi_k\}$, adicionou-se então uma restrição de desigualdade nesta, de forma que $\hat{\xi}_k \geq 0$.

Os parâmetros dos estimadores foram escolhidos conforme a **Tabela 4.5**.

Tabela 4.5: Parâmetros dos estimadores para a simulação com o sistema de segunda ordem oscilatório.

<i>Parâmetros</i>	<i>Valor</i>
$P_0 = P_{0 0} = P_{K-N 0}$	$diag[1 \ 1]$
Q	$diag[1 \ 1]$
R	0.01
T_s	1

O tamanho do horizonte MHE (N) foi simulado para $N = 0, 2, 5$ e 10 e os resultados comparativos entre o MHE ($N = 0$), EKF e CEKF são apresentados na **Figura 4.4**. Na **Figura 4.5**, são apresentados os resultados para o estimador MHE com $N = 0, 2, 5$ e 10 . Em ambas as figuras são mostrados o estado real x , o estado filtrado \hat{x}_1 e o estado estimado \hat{x}_2 .

Na **Figura 4.4** pode ser visto que o EKF falha tanto para o estado filtrado quanto para o estado estimado, e não converge para o valor real, nem mesmo com o passar do tempo. Isso se deve ao fato do EKF não incorporar as restrições nas variáveis ξ_k e φ_k . O CEKF conseguiu melhores resultados em relação ao EKF, para o estado filtrado, uma vez que ele consegue levar em conta a informação fornecida (restrição em ξ_k). Já para o estado estimado o CEKF falha, gerando um resultado influenciado pelo distúrbio de medição φ_k . Esse resultado ruim para o estado estimado vem do fato de o CEKF fazer uma aproximação do problema de otimização como um problema quadrático e não conseguir assim obter uma solução viável para o problema não-linear com restrição de desigualdade. De fato nas simulações foi observado que o algoritmo *QP* gerava uma advertência de não sucesso na solução do problema. O resultado obtido para o MHE com horizonte $N = 0$ comparado com o resultado obtido pelo estimador CEKF mostra que o MHE consegue obter resultados melhores que o CEKF, unicamente por não fazer uma aproximação do problema de otimização e, assim, juntamente com a informação fornecida (restrição em ξ_k), consegue obter uma solução viável para o mesmo. Na **Tabela 4.6** são apresentados os resultados da soma do erro quadrático para cada um dos estados, para os três estimadores.

Apesar de ter-se obtido bons resultado para o MHE com $N = 0$, simulou-se para horizontes maiores o comportamento do estimador. Nota-se pela **Figura 4.5** que a estimação dos estados se aproxima cada vez mais do valor real com o aumento do número de medições usadas pelo MHE. Isto mostra que o erro associado à estimação vai reduzindo gradualmente com o aumento do horizonte. Porém, percebe-se pela **Tabela 4.7**, que a redução do erro para horizontes (N) superiores a 5 não é justificada.

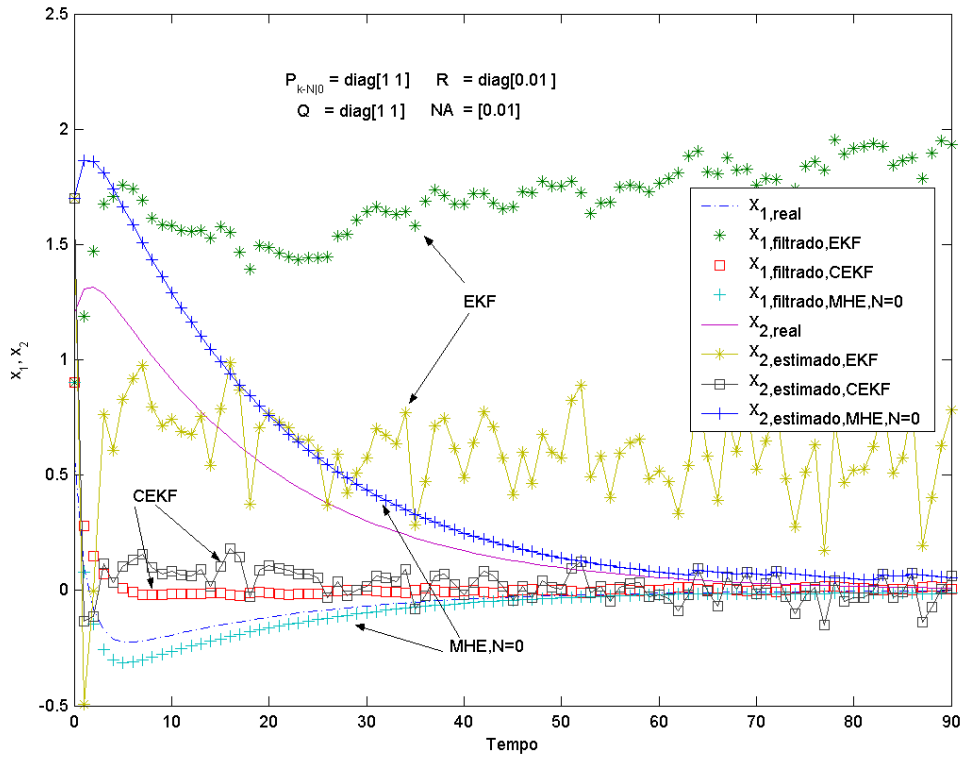


Figura 4.4: Comparação dos resultados da simulação entre os estimadores MHE ($N=0$), EKF e CEKF para o sistema não linear com restrição de desigualdade.

Tabela 4.6: Soma do erro quadrático para cada um dos estados para o sistema não linear com restrição de desigualdade.

<i>Estado</i>	<i>EKF</i>	<i>CEKF</i>	<i>MHE</i> ($N=0$)
x_1	278.82	0.83	0.21
x_2	23.85	18.30	3.86

Tabela 4.7: Soma do erro quadrático para cada um dos estados ($N=0,1,2,3,5$ e 10), sistema não linear com restrição de desigualdade.

<i>Estado</i>	<i>MHE</i>					
	N=0	N=1	N=2	N=3	N=5	N=10
x_1	0.21	0.20	0.19	0.17	0.14	0.13
x_2	3.86	3.85	2.91	2.26	1.53	1.42

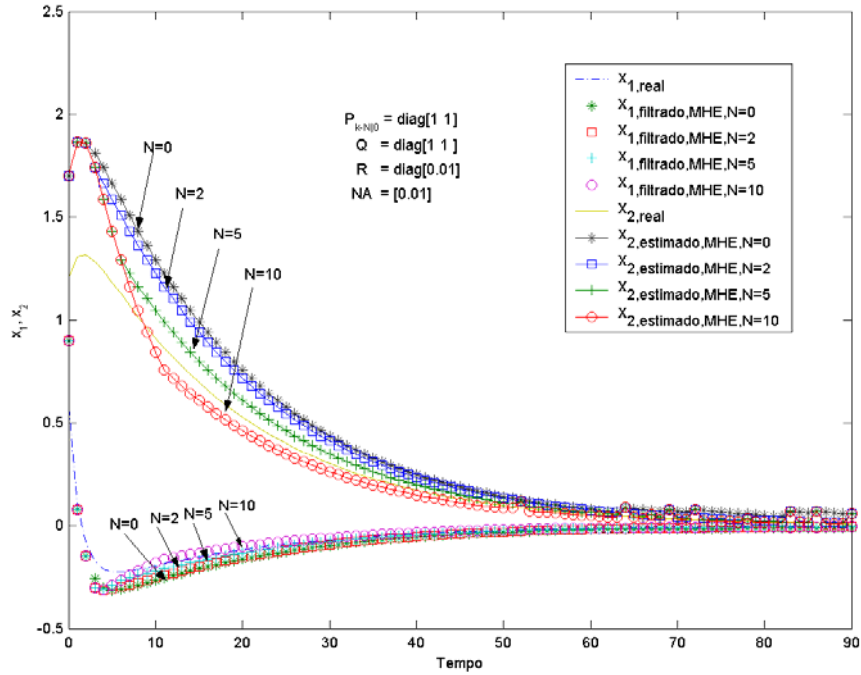


Figura 4.5: Resultados da simulação para o estimador MHE ($N=0, 2, 5$ e 10), para o sistema não linear com restrição de desigualdade.

4.5 Estudo de Caso 5: modelo 4 tanques cilíndricos.

O quarto caso de estudo utilizado para a comparação dos estimadores foi um modelo de uma planta laboratorial composta por quatro tanques cilíndricos. Esta planta foi proposta por Johansson (2000), onde possui diversas características interessantes para estudos na área de controle multivariável de processos. Paralelamente temos o também especial interesse em investigar o comportamento dos estimadores quando há inversão de ganho de planta, pois se espera que os mesmos falhem na estimação diante deste comportamento dinâmico peculiar que é apresentado por esta planta, conforme abordagem feita por Marcon *et al.* (2002). Do balanço de massa do sistema obtém-se as equações do modelo dinâmico da planta, equações (4.4), conforme notação ilustrada na **Figura 4.6**.

$$\begin{aligned}
 A_1 \frac{dz_1}{dt} &= X_1 F_1 + R_3 \sqrt{z_3} - R_1 \sqrt{z_1} \\
 A_2 \frac{dz_2}{dt} &= X_2 F_2 + R_4 \sqrt{z_4} - R_2 \sqrt{z_2} \\
 A_3 \frac{dz_3}{dt} &= (1 - X_2) F_2 - R_3 \sqrt{z_3} \\
 A_4 \frac{dz_4}{dt} &= (1 - X_1) F_1 - R_4 \sqrt{z_4}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde,

A_i : área da seção transversal de cada um dos tanques;

z_i : nível de cada um dos tanques¹;
 R_i : constante relacionada à resistência ao escoamento do fluido;
 F_1 : vazão volumétrica através da válvula V_1 ;
 F_2 : vazão volumétrica através da válvula V_2 ;
 F_{out_1} : vazão volumétrica medida na saída do tanque 1;
 F_{out_2} : vazão volumétrica medida na saída do tanque 2;
 X_1 : parcela do escoamento que irá diretamente para o tanque 1 ($0 \leq X_1 \leq 1$);
 X_2 : parcela do escoamento que irá diretamente para o tanque 2 ($0 \leq X_2 \leq 1$).

O fluido utilizado no processo é água. O fluxo de líquido total de cada bomba é dado pela soma $F_1 + F_2$. O fluxo para o tanque 1 é dado por $X_1 F_1$ e para o tanque 4 é $(1 - X_1) F_1$, para os tanques 2 e 3 o cálculo é idêntico. As variáveis manipuladas nesse sistema são as vazões F_1 e F_2 , dadas pelas aberturas das válvulas V_1 e V_2 , e as variáveis X_1 e X_2 , dadas pela abertura das válvulas v_1 e v_2 . Conforme a posição das válvulas v_1 e v_2 , o processo apresenta condições distintas de operação. À medida que suas aberturas são alteradas, o modelo apresenta um zero de transmissão que se move ao longo do eixo real, assumindo valores positivos e negativos. As distintas condições de operação podem ser classificadas conforme os valores da soma X_1 e X_2 :

$X_1 + X_2 > 1$ o sistema apresenta características de sistema de fase mínima²;
 $X_1 + X_2 < 1$ o sistema apresenta características de fase não-mínima (resposta inversa)³;
 $X_1 + X_2 = 1$ o sistema apresenta ganho multivariável nulo, ou seja, $\det(G(0)) = 0$.

Os valores dos parâmetros da planta laboratorial utilizadas na modelagem estão na **Tabela 4.8**.

Tabela 4.8: Valores dos parâmetros para o modelo dinâmico com 4 tanques cilíndricos.

<i>Parâmetros</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidade</i>
A_1, A_2	28.0	cm^2
A_3, A_4	32.0	cm^2
R_1, R_3	3.1	$cm^{5/2}s^{-1}$
R_2, R_4	2.5	$cm^{5/2}s^{-1}$

¹ Para este estudo de caso, usaremos z_i como a variável que representa os estados do modelo ao invés de $x^{(i)}$.

² Com X_1 e X_2 grandes ocorre alimentação direta dominante, logo sem resposta inversa.

³ Alimentação indireta dominante provoca o surgimento de resposta inversa.

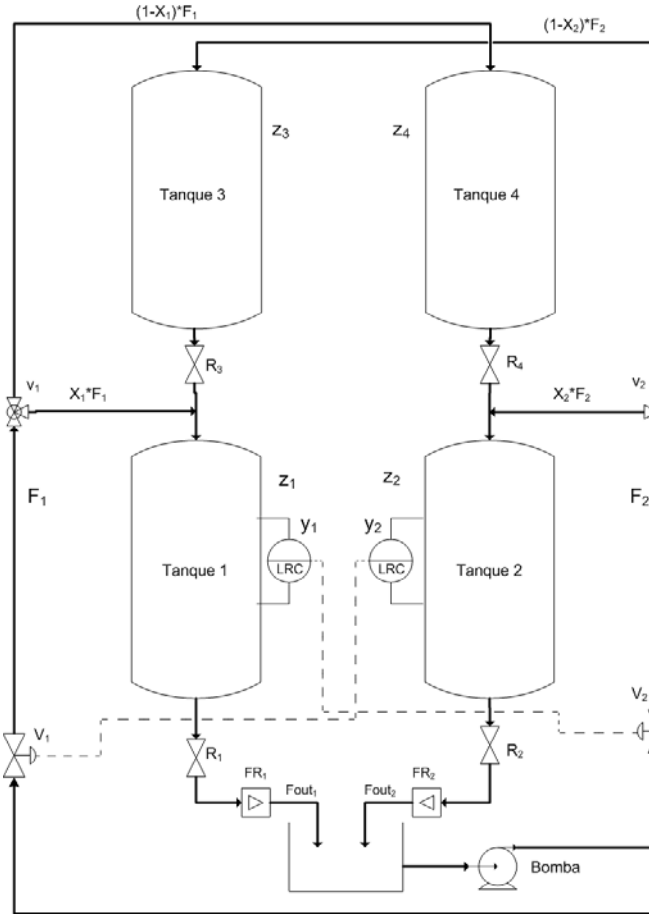


Figura 4.6: Representação esquemática da planta de 4 tanques cilíndricos.

Neste estudo de caso objetiva-se filtrar os ruídos oriundos da medição e estimar os níveis dos tanques 1, 2, 3 e 4, usando o modelo dinâmico da planta descrito por (4.4). Isto pode ser obtido de duas maneiras: (1) através da medição direta dos níveis dos tanques 1 e 2 (z_1 e z_2), ou (2) pela medição das respectivas vazões de saída (variáveis secundárias) dos tanques 1 e 2 (F_{out1} e F_{out2}). Nesta última, uma vez conhecida a relação (equação) entre a variável medida (F_{out}) e o respectivo estado (z) pode-se usar esta informação, ainda que esta possa ser não-linear e conter ruído, para alimentar o estimador.

Caso (1): sem desvios no modelo com mudança de fase mínima para fase não-mínima.

Os dados medidos são gerados a partir da simulação do modelo real com a adição de um ruído gaussiano ou ruído branco (φ_k) nos estados (z_1 e z_2) as quais serão as variáveis de entrada dos estimadores. Este ruído consiste em uma sequência de variáveis independentes com média zero, aleatórias e normalmente distribuídas, com covariância igual a NA . Na simulação parte-se de um ponto de operação no qual o sistema apresenta características de fase mínima e, devido à mudança na abertura das válvulas, passa para o ponto de fase não-mínima. A **Tabela 4.9** apresenta os valores iniciais para os estados e as alterações realizadas nas variáveis X_1 , X_2 e F_1 , F_2 , tidas como as variáveis manipuladas.

Tabela 4.9: Condições iniciais para as variáveis de estado e controladas e degrau nas variáveis manipuladas para o modelo 4 tanques cilíndricos.

<i>Parâmetros</i>	<i>Valor Inicial ($t=0s$)</i>	<i>Degrau ($t=300s$)</i>
z_{10}, z_{20}	12.4, 12.7 [cm]	
z_{30}, z_{40}	1.8, 1.4 [cm]	
F_1, F_2	8.0, 8.2 [$cm^3 s^{-1}$]	8.0, 8.2 [$cm^3 s^{-1}$]
X_1, X_2	0.7, 0.6	0.3, 0.3

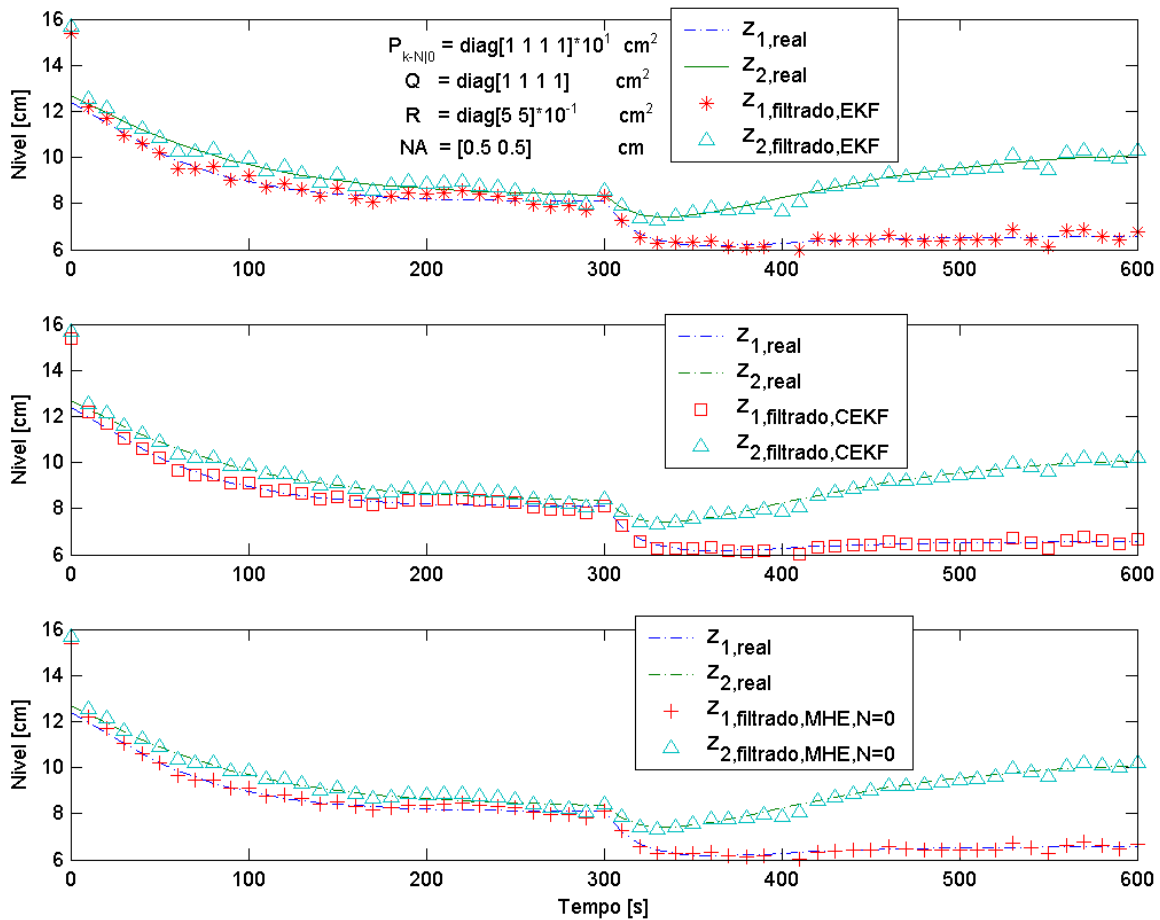


Figura 4.7: Resultados da simulação para os três estimadores (estados filtrados), caso (1), para o modelo 4 tanques cilíndricos.

Na **Figura 4.7** são apresentados os resultados para os estados filtrados (z_1 e z_2), na **Figura 4.8** para estados estimados (z_3 e z_4) e na **Tabela 4.11** é apresentado a soma do erro quadrático médio. Observa-se que todos os estimadores tiveram bons resultados, inclusive para a mudança do ponto de operação da planta acompanhada pela inversão do sinal de ganho da planta. A **Tabela 4.10** apresenta os valores dos parâmetros dos estimadores para a simulação.

Tabela 4.10: Parâmetros para os estimadores na simulação com o modelo 4 tanques cilíndricos.

<i>Parâmetros</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidade</i>
$P_{0 0}$	$\text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1] \times 10$	cm^2
Q	$\text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1]$	cm^2
R	$\text{diag}[5 \ 5] \times 0.1$	cm^2
<i>Período de amostragem (T_s)</i>	10	s
<i>Amplitude do ruído (NA)</i>	$[5 \ 5] \times 0.1$	cm
<i>Distúrbio inicial ($\xi_{0 0}$)</i>	$[3 \ 3]$	cm

onde, $P_{0|0} = P_{k-N|0} = P_0$.

Na **Tabela 4.11** pode-se perceber que o erro para os três estimadores é bem próximo um do outro, os quais podem ser considerados praticamente iguais. Como os resultados do MHE com tamanho de horizonte $N = 0$ já foram bons, não houve a necessidade de se empregar um tamanho de horizonte maior.

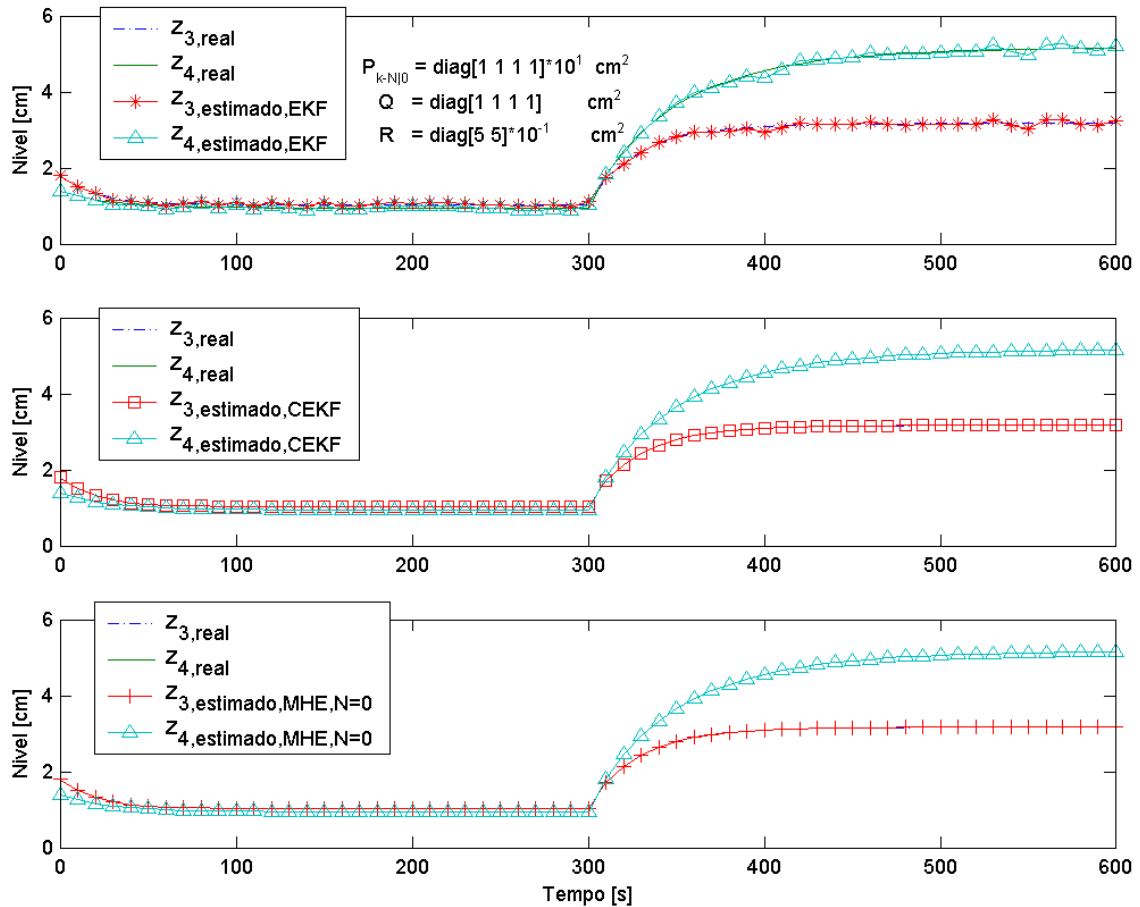
**Figura 4.8:** Resultados da simulação para os três estimadores, (estados estimados ou níveis superiores), caso (1), para o modelo 4 tanques cilíndricos.

Tabela 4.11: Soma do erro quadrático para cada um dos estados para o modelo 4 tanques cilíndricos, caso (1).

<i>Estado</i>	<i>EKF</i>	<i>CEKF</i>	<i>MHE</i> (<i>N=0</i>)
z_1	0.19	0.16	0.16
z_2	0.19	0.17	0.17
z_3	0.00	0.00	0.00
z_4	0.00	0.00	0.00

Caso (2): variáveis medidas $Fout_1$ e $Fout_2$.

Os dados medidos são gerados a partir da simulação do modelo real com a adição de um ruído gaussiano ou ruído branco (φ_k) nas variáveis medidas ($Fout_1$ e $Fout_2$). Este ruído consiste em uma seqüência de variáveis independentes com média zero, aleatórias e normalmente distribuídas, com covariância igual a NA . Para este caso tem-se normalmente uma equação não-linear, que relaciona as variáveis de estado estimadas (\hat{z}_k) com as variáveis medidas ($Fout_i$), do tipo:

$$Fout_i = R_i(\hat{z}_k^i)^{1/2} + \varphi_k \quad (4.5)$$

onde φ_k agora possui a mesma unidade da variável medida ($cm^3 \cdot s^{-1}$), neste caso a vazão volumétrica ($Fout$).

Na **Figura 4.9** são apresentados os resultados para os níveis inferiores (z_1 e z_2), agora também como estados estimados, na **Figura 4.10** os níveis superiores (z_3 e z_4) e na **Tabela 4.12** é apresentado a soma do erro quadrático.

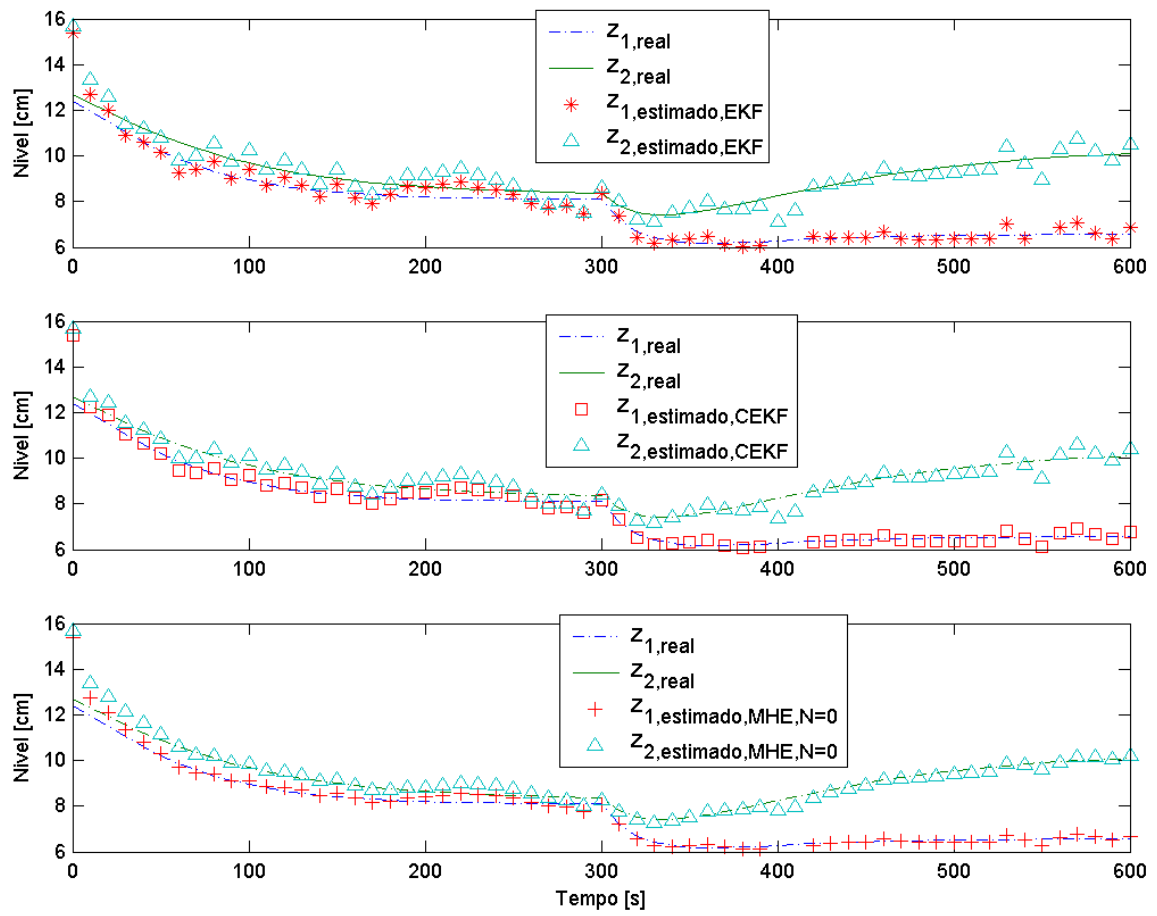


Figura 4.9: Resultados da simulação para os três estimadores (níveis inferiores), caso (2), para o modelo 4 tanques cilíndricos.

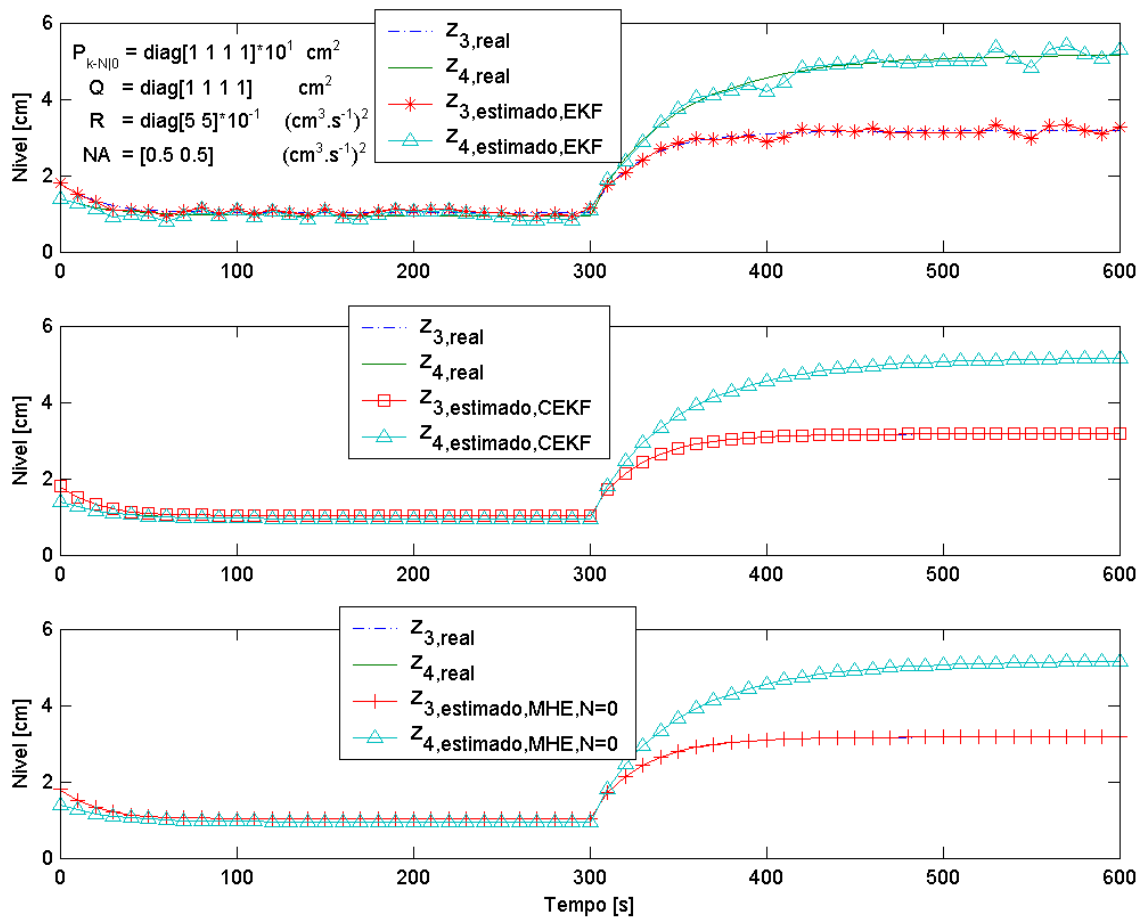


Figura 4.10: Resultados da simulação para os três estimadores (níveis superiores), caso (2), para o modelo 4 tanques cilíndricos.

Tabela 4.12: Soma do erro quadrático para cada um dos estados para o modelo 4 tanques cilíndricos, caso (2).

<i>Estado</i>	<i>EKF</i>	<i>CEKF</i>	<i>MHE</i> (<i>N=0</i>)
z_1	0.27	0.21	0.19
z_2	0.36	0.27	0.22
z_3	0.01	0.00	0.00
z_4	0.01	0.00	0.00

Pode-se perceber pela **Tabela 4.12** que o melhor desempenho foi do estimador MHE mesmo com tamanho de horizonte $N = 0$. Fica claro que o efeito da não-linearidade associado à equação de medição torna a estimação mais difícil tanto para o EKF quanto para o CEKF. Esse fato pode se agravar se incertezas na equação de medição ou no modelo dinâmico do processo estiverem presentes. Essa situação é mostrada no caso seguinte.

Caso (3): variáveis medidas F_{out_1} e F_{out_2} e modelo diferente da planta.

Uma situação típica é possuir um modelo matemático que aproxima o comportamento de um equipamento e/ou processo real, cuja origem vem da realização de balanços de massa e de energia. Quase na totalidade dos processos existentes na área de Engenharia Química o modelo existente não leva em conta alguns parâmetros, variáveis e distúrbios modelados ou medidos, o que acarreta na impossibilidade do monitoramento e controle deste. Neste sentido aproveitando a peculiaridade do **Caso (2)**, e grifando-se aqui novamente a relação não linear entre a variável medida e o respectivo estado, no modelo da planta de 4 tanques cilíndricos, iremos simular a estimação de estados usando um modelo diferente da planta real. Assim a Equação (4.6) representa a relação real entre as variáveis medidas e as variáveis (estados) estimadas, onde porém o estimador continua com a Equação (4.5) como seu modelo para estimação dos estados a partir da medição de (F_{out}).

$$F_{out_i} = R_i(\hat{z}_i)^{0.3} + \varphi_i \quad (4.6)$$

A **Figura 4.11** mostra os resultados para os estados estimados (níveis inferiores) para os três estimadores.

Nota-se na **Figura 4.11** que o valor da estimação para os níveis inferiores se afastou do real (para todos os três estimadores), uma vez que se considerou serem os dados oriundos da medição mais confiáveis que os dados calculados pelo modelo matemático da planta. Na estimação dos níveis superiores tanto o CEKF quanto o MHE para $N = 0$, obteve-se resultados idênticos ao real. O mesmo não aconteceu com o EKF, pois após a inversão de ganho da planta, a trajetória de estimação para os níveis superiores seguiu afastada do valor real.

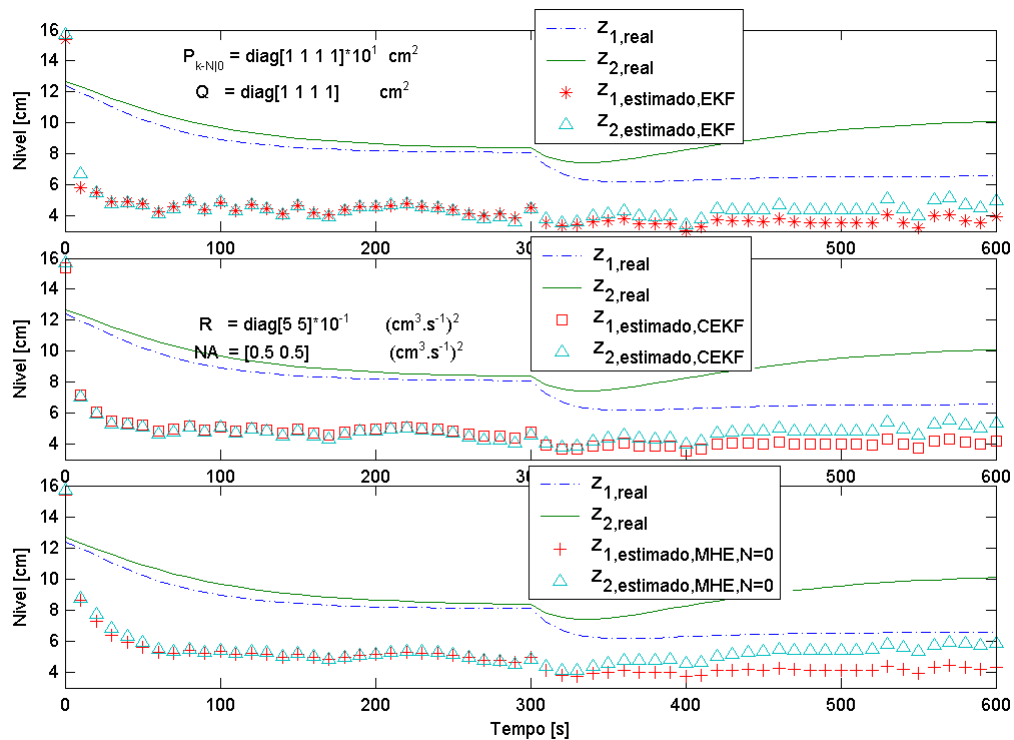


Figura 4.11: Resultados da simulação para os três estimadores (níveis inferiores), caso (3), para o modelo 4 tanques cilíndricos.

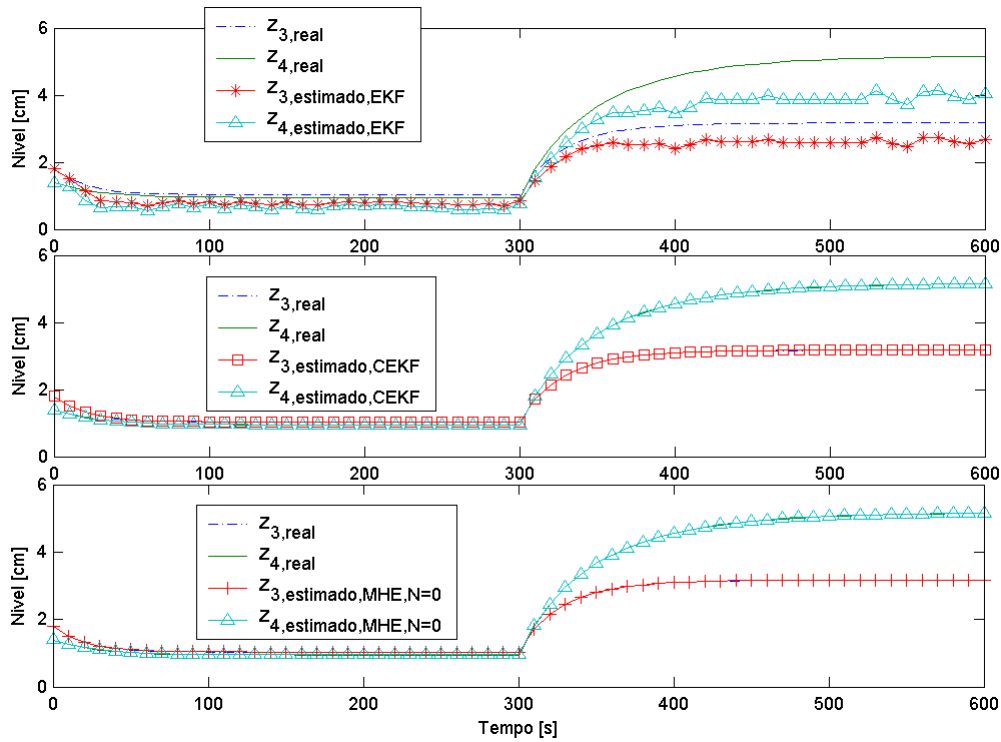


Figura 4.12: Resultados da simulação para os três estimadores (níveis superiores), caso (3), para o modelo 4 tanques cilíndricos.

Na **Tabela 4.13** encontram-se os valores da soma do erro quadrático, para cada estado, obtido pelos três estimadores.

Tabela 4.13: Soma do erro quadrático para cada um dos estados para o modelo 4 tanques cilíndricos, caso (3).

<i>Estado</i>	<i>EKF</i>	<i>CEKF</i>	<i>MHE</i> (<i>N=0</i>)
z_1	13.94	10.98	9.29
z_2	22.94	19.55	15.05
z_3	0.16	0.00	0.00
z_4	0.51	0.00	0.00

Como visto no Estudo de Caso 4 (4.4), conhecendo-se o comportamento do distúrbio ξ_k pode-se usar esta informação, como uma restrição de desigualdade, para melhorar a estimação de estado. Baseado nos resultados dos estimadores para os níveis inferiores na **Figura 4.11**, pode se usar uma restrição de desigualdade $\xi_k \geq 0$ para buscar uma estimação mais próxima do real para este caso. Na **Figura 4.13** são apresentados os resultados para os níveis inferiores e na **Figura 4.14** são apresentados os resultados para os níveis superiores. Nota-se que para os estimadores CEKF e MHE houve uma sensível melhora dos resultados (níveis estimados inferiores 1 e 2), uma vez que os mesmos permitem a adição de restrições

de desigualdade no problema de otimização, o que não ocorre no EKF, justificando assim o resultado idêntico obtido para o caso sem a restrição de desigualdade na variável ξ_k . Comparando o MHE com o CEKF, usando um horizonte $N = 0$, conseguiram-se resultados melhores para o MHE em relação ao CEKF. A justificativa vem do fato da formulação MHE tratar melhor problemas não lineares, principalmente quando as variáveis de otimização (ou variáveis de decisão) apresentam restrições. Assim, a consideração de um problema de Programação Quadrática (QP) adotada pela formulação CEKF, não convergiu para uma solução viável do problema de otimização envolvido (TONEL *et al.*, 2008b).

Na **Figura 4.14** se observa que existe uma discrepância inicial (“pico”) entre os estados estimados pelo MHE e o valor real. O fato da estimativa inicial fornecida (\hat{z}_1 e \hat{z}_2) para os estados (z_1 e z_2) ser um pouco distante da real, faz com que todos os estimadores busquem corrigir essa discrepância de modo a levar a estimativa para o mais próximo do real, já nas primeiras medições disponíveis. A justificativa para o aparecimento do pico na estimativa MHE vem da imposição da restrição de desigualdade na variável de decisão ($\xi_k \geq 0$), o que limita a ação desta variável na tentativa do estimador fazer a correção da estimativa inicial dos estados (z_1 e z_2). Assim o estimador MHE assume que existe também um erro na estimativa inicial de \hat{z}_3 e \hat{z}_4 (distribuição dos erros), almejando a atualização das corretas condições, e a estimativa dos estados estimados se distancia do real. Posteriormente a correção da discrepância inicial nos estados filtrados a estimativa dos estados estimados iniciou sua trajetória de volta para as proximidades do respectivo valor real, caracterizando assim o aparecimento do pico, uma vez que as condições iniciais fornecidas para os estados (z_3 e z_4) são as mesmas das condições iniciais reais, ou seja, $z_3 = \hat{z}_3$ e $z_4 = \hat{z}_4$.

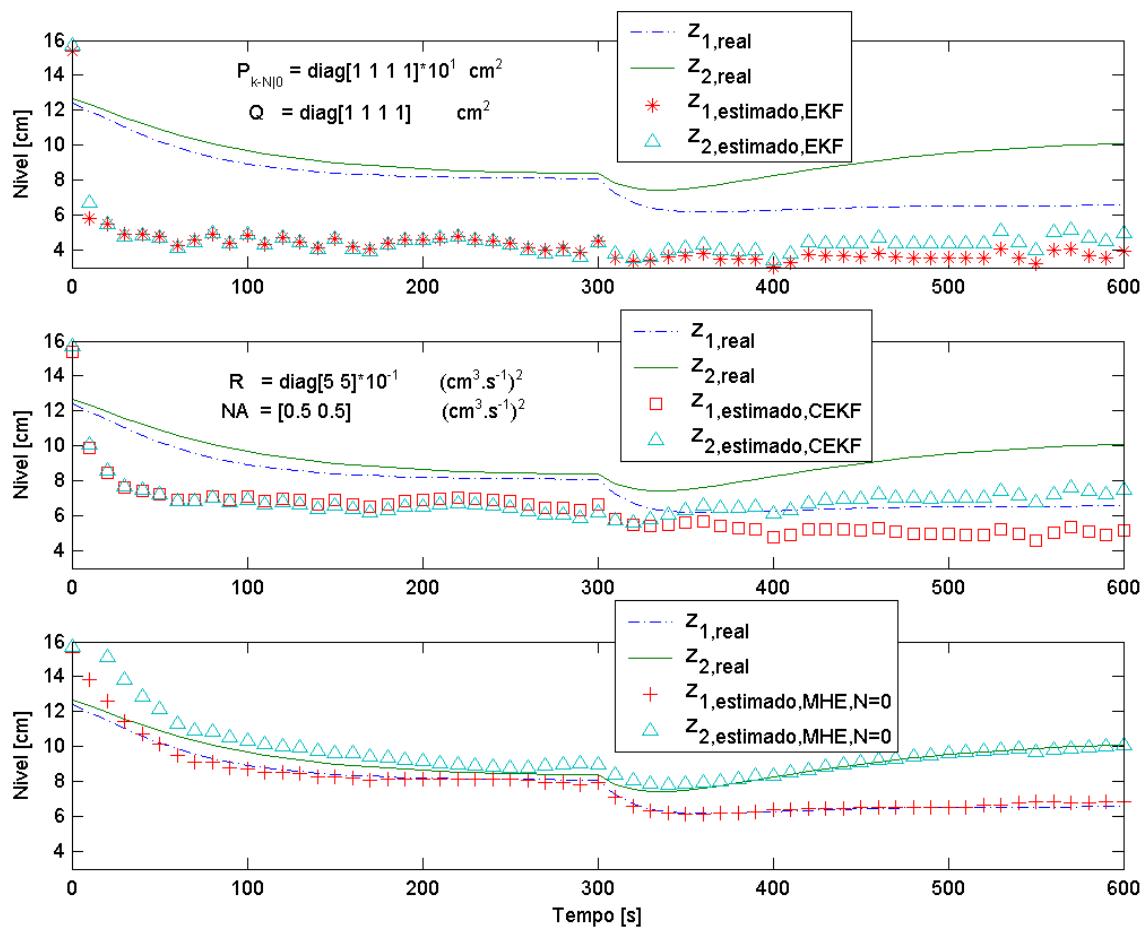


Figura 4.13: Resultados da simulação para os três estimadores, níveis inferiores, caso (3) com restrição de desigualdade, para o modelo 4 tanques cilíndricos.

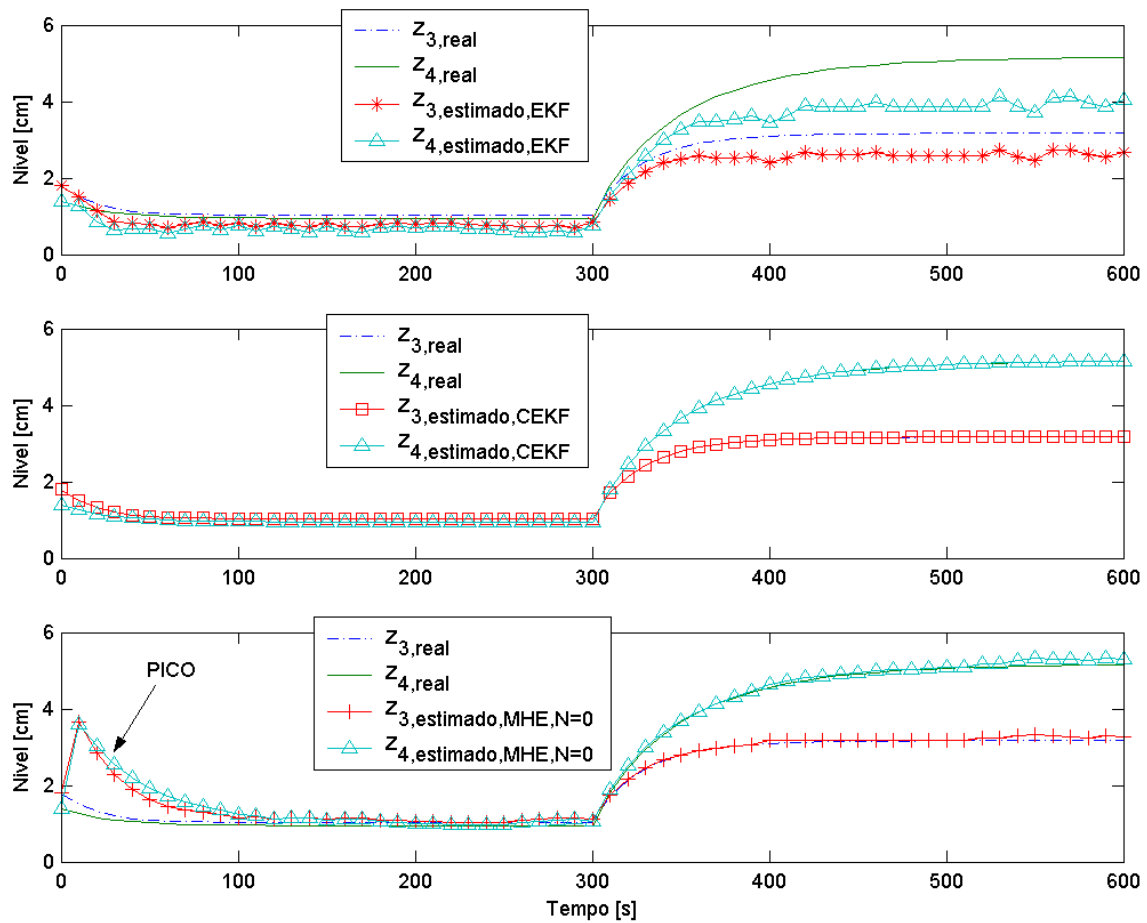


Figura 4.14: Resultados da simulação para os três estimadores, níveis superiores, caso (3) com restrição de desigualdade, para o modelo 4 tanques cilíndricos.

Tabela 4.14: Soma do erro quadrático para cada um dos estados, caso (3) com restrição de desigualdade, para o modelo 4 tanques cilíndricos.

<i>Estado</i>	<i>EKF</i>	<i>CEKF</i>	<i>MHE</i> (<i>N=0</i>)
z_1	13.94	2.98	0.26
z_2	22.94	6.06	0.96
z_3	0.16	0.00	0.18
z_4	0.51	0.00	0.28

Nas **Figura 4.15** e **Figura 4.16** são apresentados os resultados para a estimação para o MHE, via estratégia sequencial usando o solver DASSLC para $N = 1, 2$ e 3 e via estratégia simultânea usando colocação ortogonal para $N = 1$. Na **Tabela 4.15** são apresentados os resultados da soma do erro quadrático para cada estado.

Os resultados obtidos via a estratégia sequencial com colocação ortogonal (**Figura 4.15**) mostram a deficiência deste método quando as variáveis a serem otimizadas do problema MHE necessitam ser intensamente exploradas objetivando a busca da solução do

problema NLP, onde este está sujeito a restrições de igualdade e desigualdade. Isto é a consequência da falha da solução do problema DAE na aproximação polinomial do perfil de estado via colocação ortogonal. Este problema é relatado por Vasantharajan e Biegler (1990) *apud* Riascos e Pinto (2004) onde eles propõem duas estratégias para o controle do erro na aproximação de perfis de estado via colocação ortogonal. Para casos como este seria necessário a implementação de uma estratégia de controle do erro, conforme feito por Riascos e Pinto (2004) para controladores MPC. Porém, este tratamento não se enquadra no escopo deste trabalho e fica como uma sugestão de trabalho futuro. Sendo assim, se focou os esforços na estratégia sequencial quando a estratégia simultânea via colocação ortogonal não obteve sucesso.

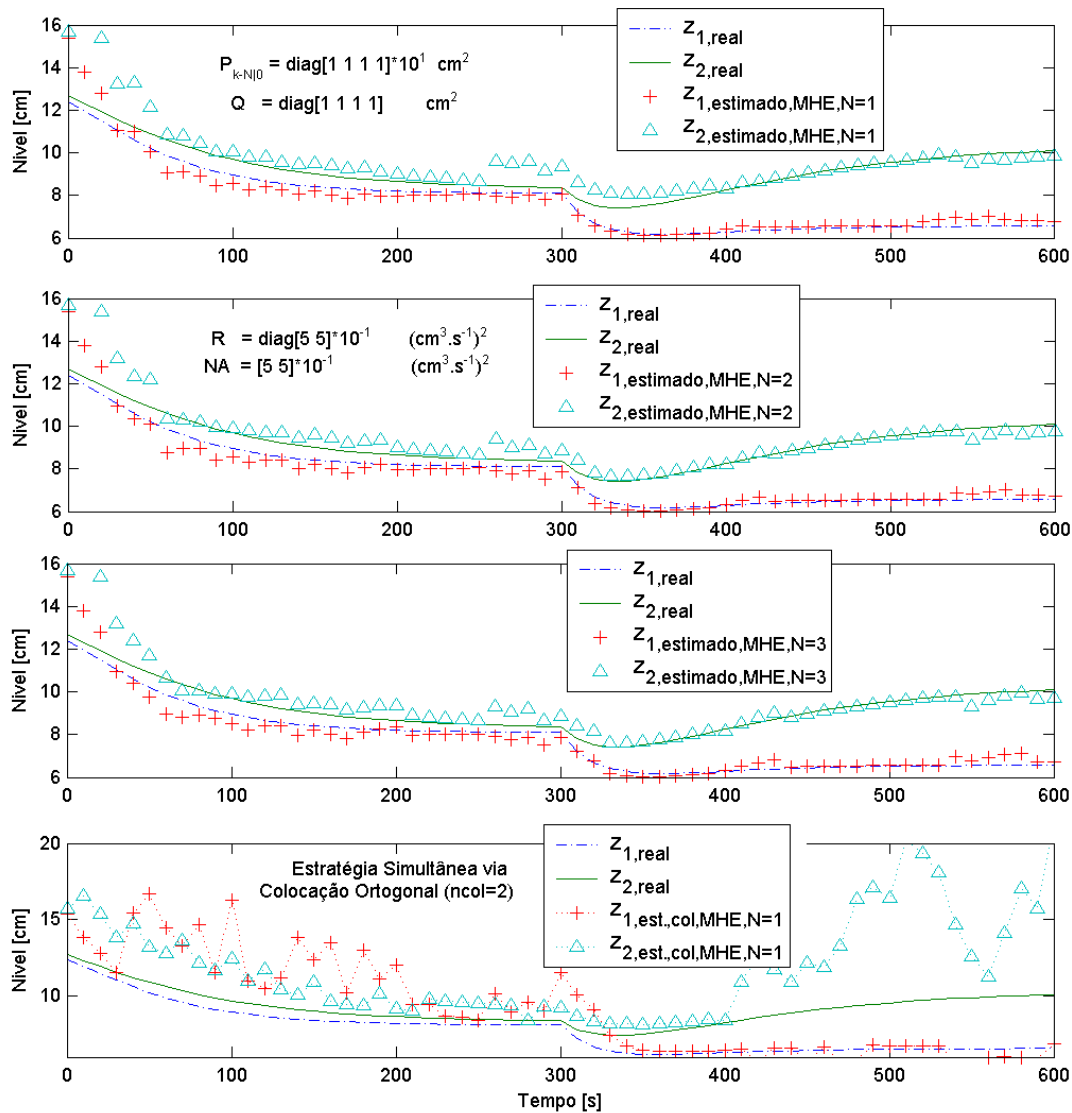


Figura 4.15: Resultados da simulação do MHE ($N=1, 2$ e 3), níveis inferiores, caso (3) com restrição de desigualdade, para o modelo 4 tanques cilíndricos.

A **Tabela 4.15** mostra que o erro associado à estimação diminui (estratégia sequencial) com o aumento do tamanho do horizonte, mas para um tamanho de horizonte maior que 2 não há melhora significativa da estimação.

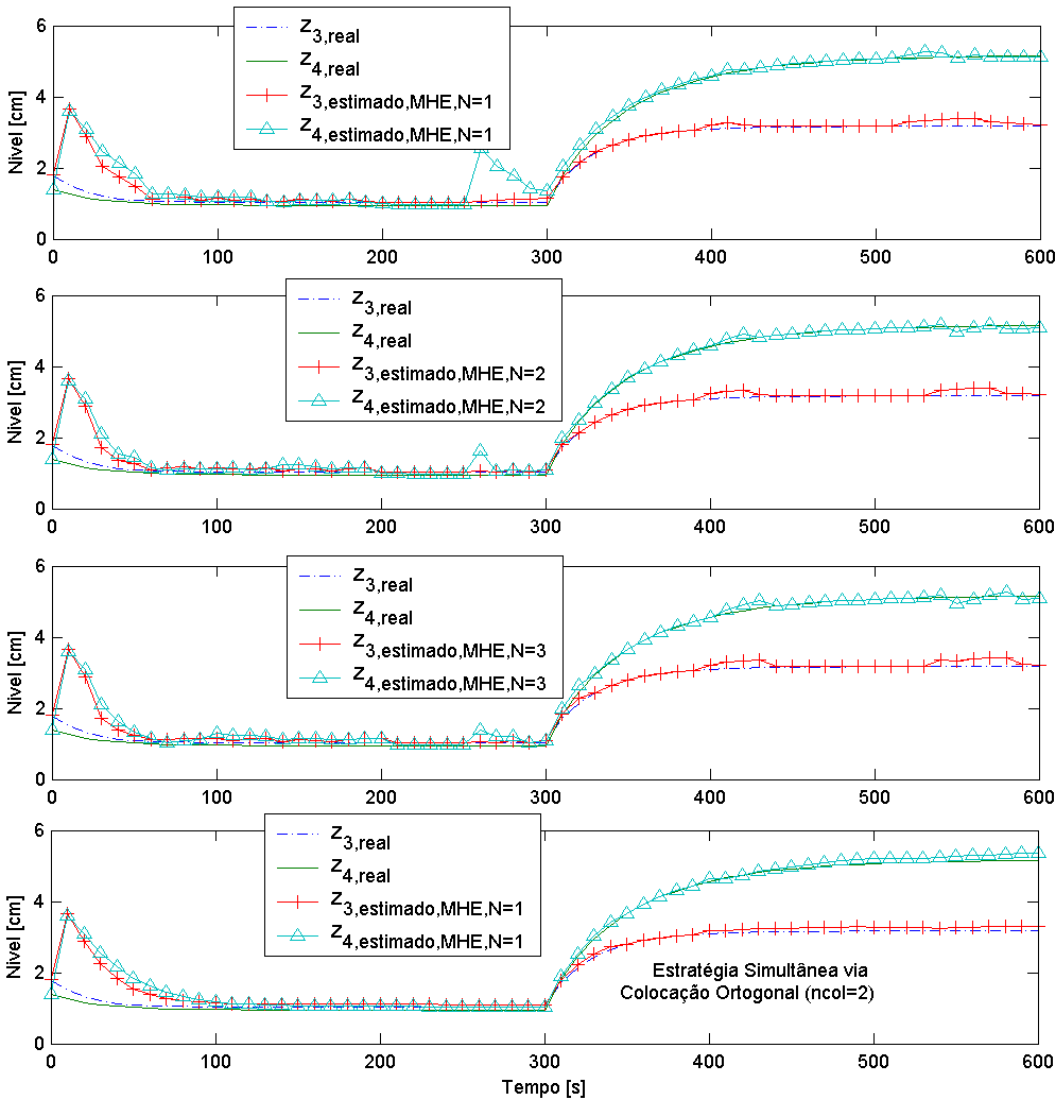


Figura 4.16: Resultados da simulação do MHE ($N= 1,2$ e 3), níveis superiores, caso (3) com restrição de desigualdade, para o modelo 4 tanques cilíndricos.

Tabela 4.15: Soma do erro quadrático para cada um dos estados ($N= 1,2$ e 3), caso (3) com restrição de desigualdade, para o modelo 4 tanques cilíndricos.

Estado	<i>MHE</i> (<i>N</i> =1)	<i>MHE</i> (<i>N</i> =2)	<i>MHE</i> (<i>N</i> =3)	<i>MHE</i> (<i>N</i> =1)
	Sequencial (DASSLC)			Simultâneo (Col. Ort.)
z_1	0.30	0.32	0.32	6.25
z_2	0.97	0.83	0.83	14.27
z_3	0.14	0.13	0.13	0.15
z_4	0.30	0.19	0.19	0.24

4.6 Estudo de Caso 6: modelo reação de van de Vusse – reator CSTR isotérmico.

Neste estudo de caso iremos explorar o comportamento da reação de van de Vusse realizada em um reator isotérmico idealmente agitado, conforme a **Figura 4.17**. Esse sistema é tido como um problema clássico às técnicas de controle.

Reatores batelada são geralmente aplicados para produzir uma vasta variedade de produtos especiais, então há um grande interesse em melhorar a operação dos mesmos com o fim de encontrar produtos de alta qualidade e pureza enquanto se minimiza a conversão do produto indesejado (ARPORNWICHANOP *et al.*, 2005).

A reação de van de Vusse consiste em uma reação em série e uma em paralelo segundo o seguinte esquema reacional:



O objetivo é a produção de B. Os componentes C e D são subprodutos. A reação de van de Vusse controlada isotermicamente é modelada por:

$$\begin{aligned} \frac{dc_A}{dt} &= f(c_{Ain} - c_A) - (k_1 c_A + k_3 c_A^2) \\ \frac{dc_B}{dt} &= -f c_B + (k_1 c_A - k_2 c_B) \\ f &= \frac{F_{in}}{V_R} \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde k_i é dado pela equação de Arrhenius,

$$k_i(T) = k_{i0} \exp\left(\frac{E_i}{T[^\circ C] + 273.15}\right), \quad i = 1, 2 \text{ e } 3$$

$f = F_{in}/V_R$ é a variável manipulada (inverso do tempo de residência),

c_B é a variável controlada (concentração do componente B),

c_{Ain} distúrbio (concentração de entrada do componente A).

k_{i0} constante pré-exponencial.

E_i é a energia de ativação.

Como o objetivo é a maximização da produção do componente B é necessário o conhecimento da concentração do reagente e do produto para a otimização das condições operacionais ao longo da reação. Assim o objetivo da estimação é promover a estimação do componente B, tido como o estado imensurável, através da medição direta da concentração do componente A na reação, de modo a fornecer condições iniciais atualizadas para o esquema de controle e/ou otimização.

Devido ao modelo desta reação apresentar uma maior não-linearidade, quando comparada com o modelo da planta de 4 tanques cilíndricos, foram efetuadas simulações levando a reação de um ponto de operação à outro, de modo a obter uma troca de sinal no ganho do modelo, e assim verificar novamente o comportamento dos estimadores frente a esse desafio às técnicas de controle. Os valores dos parâmetros da reação, de van de Vusse usados nas simulações, que foram retirados de Engell *et al.*, (1993) *apud* Trierweiler (1997), estão na **Tabela 4.16**.

Tabela 4.16: Valores dos parâmetros para o modelo reação de van de Vusse, simulação 1 e 2.

<i>Parâmetros</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidade</i>
k_{10}, k_{20}	1.287×10^{12}	h^{-1}
k_{30}	9.043×10^9	$L/(mol \cdot h)$
E_1, E_2	9758.3	K
E_3	-8560.0	K

Na **Figura 4.17** é apresentado o esquema do reator isotérmico modelado para reação de van de Vusse. Para simplificação a temperatura da reação será mantida constante via camisa externa do reator.

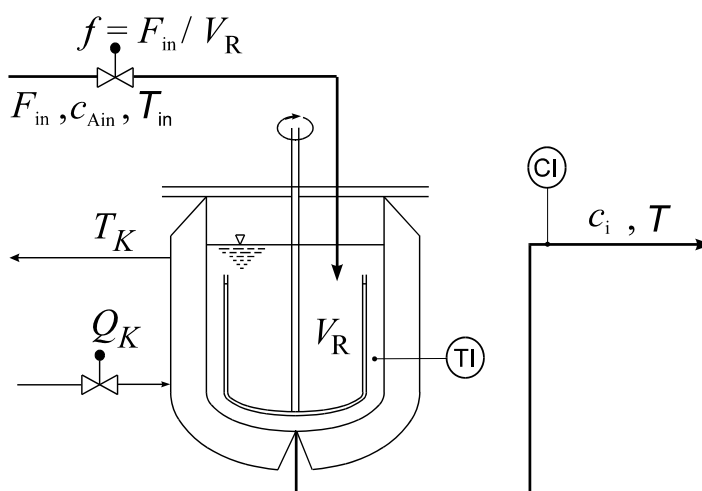


Figura 4.17: Esquema do reator isotérmico modelado para reação de van de Vusse.

Os valores dos pontos de operação para o reator isotérmico com a reação de van de Vusse foram retirados de Trierweiler (1997) e estão na **Tabela 4.17**.

Tabela 4.17: Pontos de operação para a reação de van de Vusse.

<i>Pontos de operação*</i>	<i>1</i>	<i>2</i>
<i>Concentração de A na entrada [mol/L]</i>	4.1	5.1
<i>Temperatura do reator [°C]</i>	134.14	113.61
<i>f [h-1]</i>	18.83	14.19

(*) mudança de ponto de operação (degrau) nos 70 s de reação.

As três variáveis, concentração de A na entrada/alimentação c_{Ain} , temperatura do reator T e taxa de diluição f são as variáveis manipuladas da estimação.

Simulação 1:

Para esta simulação o valor real dos estados iniciais são respectivamente, 2.0 e 0.2 mol/L (C_{A0} e C_{B0}) e o valor do distúrbio inicial ($\xi_{0|0}$) é de 1.0 mol/L em C_{A0} , assim o valor do estado inicial estimado (\hat{C}_{A0}) é 3.0 mol/L. Na **Tabela 4.18** são apresentados os parâmetros dos estimadores considerados para a simulação 1.

Tabela 4.18: Parâmetros para os estimadores na simulação com o modelo reação de van de Vusse, simulação 1.

<i>Parâmetros</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidade</i>
$P_0 = P_{0 0} = P_{K-N 0}$	$diag[10 \ 10]$	mol^2/L^2
Q	$diag[5 \ 5]$	mol^2/L^2
R	10	mol^2/L^2
T_s	5	s
NA	[0.3 0.0]	mol/L

Na **Figura 4.18** são apresentados os resultados comparativos das estimações obtidas pelos três estimadores, para o estado filtrado (\hat{C}_{A0}) e o estado estimado (\hat{C}_{B0}) respectivamente, na simulação da mudança do ponto de operação 1 para o ponto de operação 2 (simulação 1) com o modelo reação de van de Vusse.

Nota-se que para todos os estimadores o perfil do estado filtrado (\hat{C}_{A0}) sofreu influência do distúrbio na medição (conforme **Figura 4.18**), como resultado de estar se acreditando que a estimação esteja sob influência de um também considerável distúrbio no modelo.

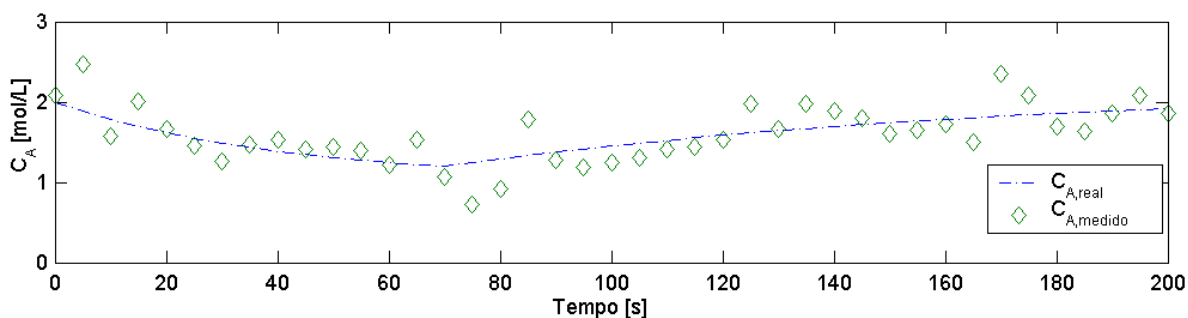


Figura 4.18: Perfil da variável de estado C_A real e medido para a reação de van de Vusse, simulações 1 e 2.

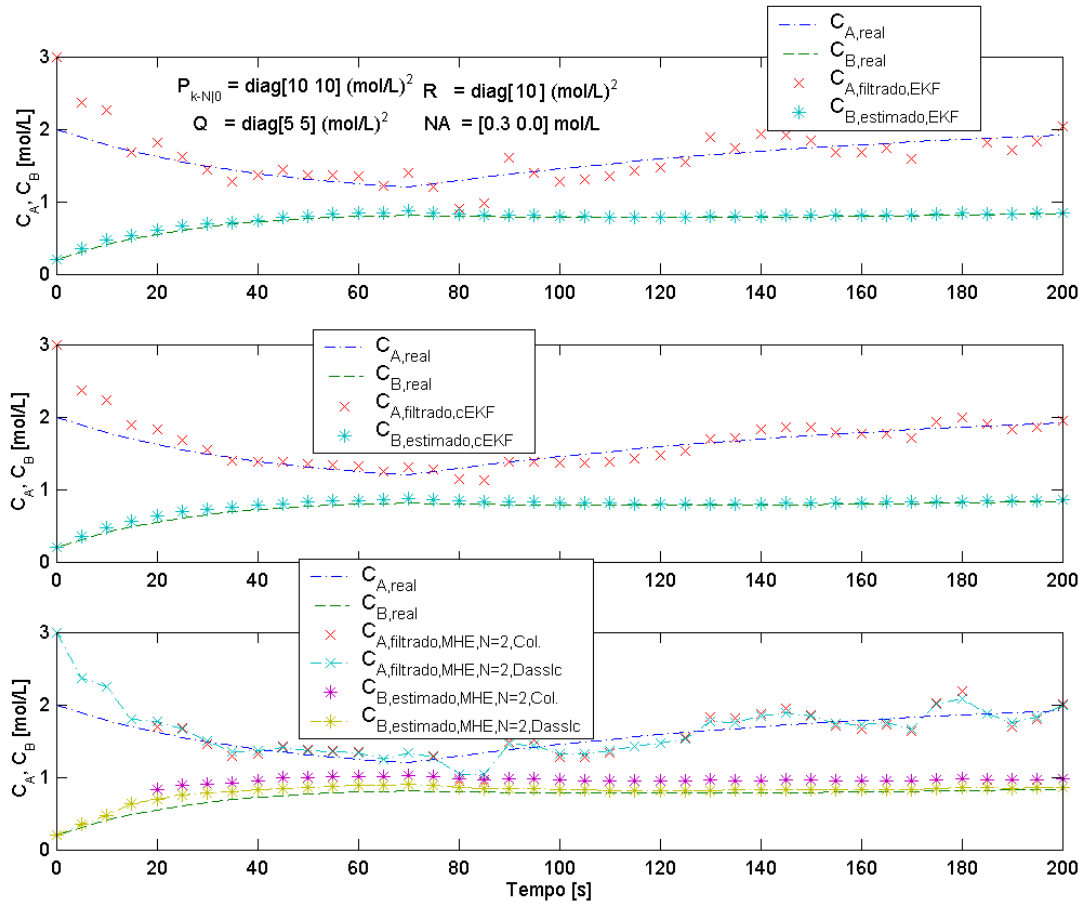


Figura 4.19: Comparação dos valores de C_A e C_B real, C_A filtrado e C_B estimado para os três estimadores (EKF, CEKF e MHE) para a reação de van de Vusse, simulação 1.

Na **Tabela 4.19** são apresentados os resultados para do erro quadrático das estimações obtidas pelos três estimadores, para a simulação da mudança do ponto de operação 1 para o ponto de operação 2 (simulação 1), com o modelo da reação de van de Vusse. Para o MHE são apresentados os resultados para as estratégias sequencial, via solver *DASSLC*, e simultânea via colocação ortogonal. O CEKF é o que apresenta os melhores resultados. Já para o MHE com estratégia sequencial observa-se que a estimação do estado C_B é afetada pela adição do distúrbio de medição onde isto é agravado quando a estratégia simultânea é usada. Aumentando o tamanho do horizonte do MHE pode-se melhorar a estimação/filtragem do estado C_A , mas por outro lado piora-se a estimação do estado C_B . Esse comportamento é mostrado para a simulação seguinte (simulação 2) na **Tabela 4.22**, onde o erro quadrático em função do tamanho do horizonte diminui para o estado filtrado C_A e aumenta para o estado estimado C_B . Novamente esse efeito é consequência da distribuição dos erros da estimação via formulação MHE.

Tabela 4.19: Soma do erro quadrático para cada um dos estados, simulação 1.

<i>Estado</i>	<i>EKF</i>	<i>CEKF</i>	<i>MHE(N=2)</i>	
			Col. Ortogonal	DASSLC
C_A	2.54	1.80	2.40	2.01
C_B	0.04	0.08	1.38	0.21

Na **Tabela 4.20** são apresentados os resultados o erro quadrático para as 4 primeiras estimações. O objetivo é mostrar a rapidez com que cada estimador busca eliminar o distúrbio da estimativa inicial. Para um tamanho de horizonte $N = 2$ o MHE não consegue resultados melhores que o EKF e CEKF como esperado. O efeito da distribuição dos erros é também sentido já nas primeiras estimações, onde o erro quadrático em função do tamanho do horizonte diminui para o estado filtrado C_A e aumenta para o estado estimado C_B , conforme mostrado na simulação seguinte (simulação 2) na **Tabela 4.23**.

Tabela 4.20: Soma do erro quadrático para cada um dos estados (4 primeiras estimações, $t=20s$), simulação 1.

<i>Estado</i>	<i>EKF</i>	<i>CEKF</i>	<i>MHE(N=2)</i>	
			Col. Ortogonal	DASSLC
C_A	1.50	1.50	1.45	1.47
C_B	0.04	0.02	0.11	0.05

Simulação 2:

Nesta simulação aumentou-se o valor do distúrbio inicial ($\xi_{0|0}$), usado anteriormente na simulação 1, ou seja, o valor do estado inicial estimado (\hat{C}_{A0}) é considerando 4.0 mol/L . Também são alterados os parâmetros dos estimadores para os valores descritos na **Tabela 4.21**. O objetivo é mostrar como a estimação pode ser prejudicada com condições iniciais distantes das reais mesmo considerando-se matriz de covariância inicial P_0 pequena (sem sintonia) e matriz de covariância R grande. É esperado que o estimador MHE possa trazer a estimação o mais rápido para próximo do real com o aumento do tamanho do horizonte de estimação N .

Conforme os estudos de caso 1, 2 e 3 deste capítulo, o MHE provou ser superior mesmo quando existe a falta de sintonia causada por um valor pequeno da matriz de covariância inicial P_0 . Segundo Russo e Young (1999) a seleção da matriz de peso inicial (ou matriz de covariância inicial P_0) demonstra ter um significativo impacto nos esforços computacionais envolvidos na estimação via horizonte móvel. Assim fica justificado o tempo maior de simulação do estimador MHE, quando existe a falta de sintonia por parte da matriz de covariância inicial P_0 com o distúrbio inicial ($\xi_{0|0}$), comparado com o caso quando há sintonia. Na **Tabela 4.21** são apresentados os parâmetros dos estimadores considerados para a simulação 2.

Tabela 4.21: Parâmetros para os estimadores na simulação com o modelo reação de van de Vusse, simulação 2.

<i>Parâmetros</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidade</i>
$P_0 = P_{0 0} = P_{K-N 0}$	$diag[1 \ 1]$	mol^2/L^2
Q	$diag[5 \ 5]$	mol^2/L^2
R	50	mol^2/L^2
T_S	5	s
NA	[0.3 0.0]	mol/L

Na **Tabela 4.22** são apresentados os resultados comparativos das estimações obtidas pelos três estimadores, para a simulação da mudança do ponto de operação 1 para o ponto de operação 2 (simulação 2) com a reação de van de Vusse. Para o MHE são apresentados os resultados para as estratégias sequencial, via solver *DASSLC*, e simultânea via colocação ortogonal. O EKF é o que apresentou os melhores resultados. Novamente pelo aumento do tamanho do horizonte de estimação MHE pôde-se melhorar a filtragem do estado C_A , mas por outro lado piorou-se a estimação do estado C_B .

Tabela 4.22: Soma do erro quadrático para cada um dos estados, simulação 2.

<i>Estado</i>	<i>EKF</i>	<i>CEKF</i>	<i>MHE</i>				
			($N=0$)	Col. ($N=2$)	Dasslc ($N=2$)	Col. ($N=4$)	Dasslc ($N=4$)
C_A	9.20	12.01	12.02	10.51	10.12	10.64	9.45
C_B	0.31	1.82	1.81	5.30	1.84	9.40	1.96

Tabela 4.23: Soma do erro quadrático para cada um dos estados (12 primeiras estimações, $t=60s$), simulação 2.

<i>Estado</i>	<i>EKF</i>	<i>CEKF</i>	<i>MHE</i>				
			($N=0$)	Col. ($N=2$)	Dasslc ($N=2$)	Col. ($N=4$)	Dasslc ($N=4$)
C_A	8.75	11.92	11.93	9.45	10.00	9.50	9.40
C_B	0.23	0.95	0.95	1.92	1.06	3.00	1.29

Na **Figura 4.20** são apresentados os resultados comparativos das estimações obtidas pelos três estimadores, para o estado filtrado (\hat{C}_{A0}) e o estado estimado (\hat{C}_{B0}), respectivamente, na simulação da mudança do ponto de operação 1 para o ponto de operação 2 (simulação 2) com o modelo reação de van de Vusse.

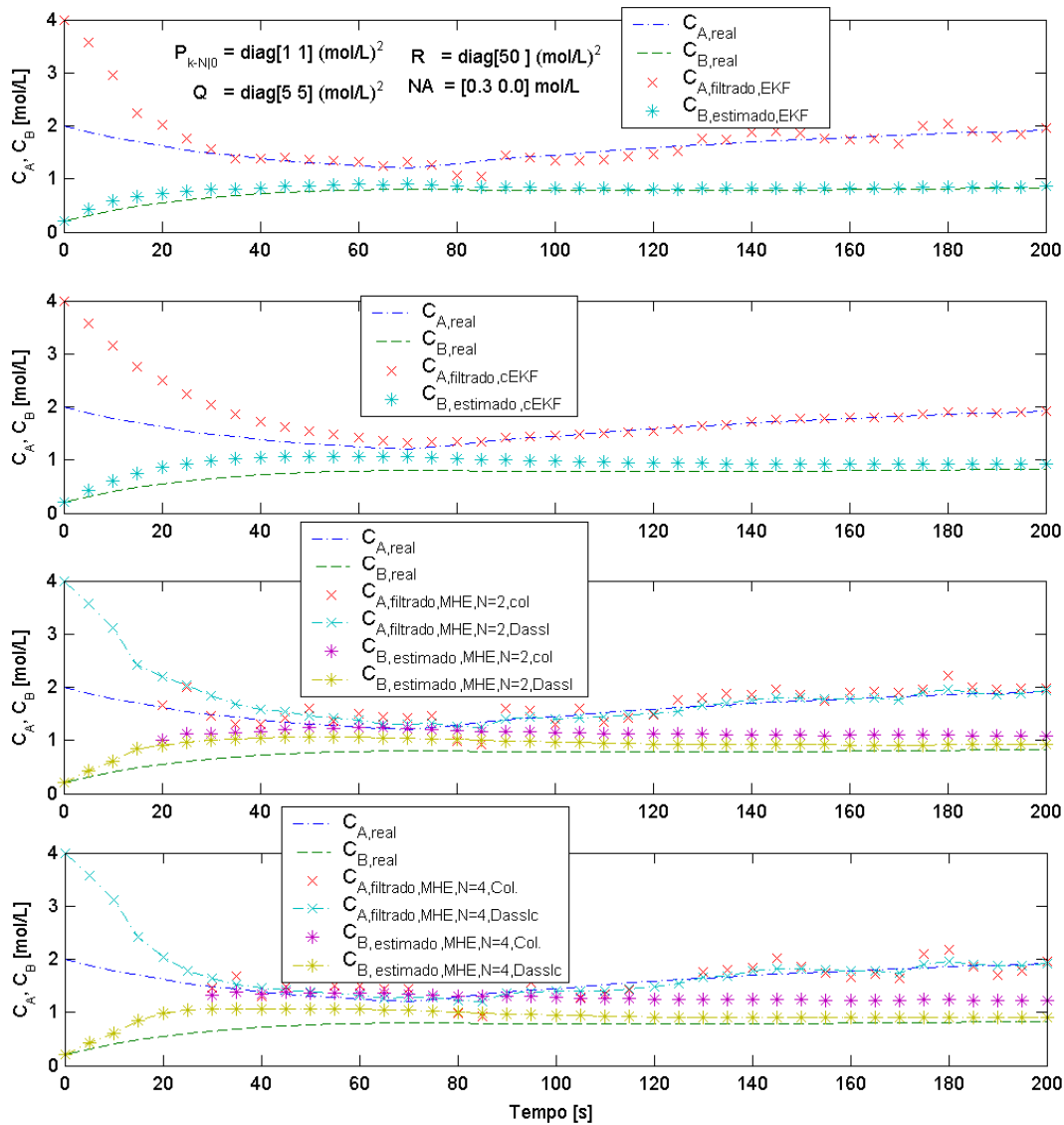


Figura 4.20: Comparação dos valores de C_A e C_B real, C_A filtrado e C_B estimado para os três estimadores (EKF, CEKF e MHE) para a reação de van de Vusse, simulação 2.

Os resultados para o MHE mostram que o aumento no tamanho do horizonte piorou a estimação do estado C_B e, portanto este não é justificado, salvo, porém, se o objetivo único é melhorar a filtragem do estado C_A . A estimação de C_B pode ser melhorada se restrições forem adicionadas como mostrado no estudo da planta de 4 tanques cilíndricos.

Para este estudo de caso com a reação de van de Vusse, baseado nas simulações 1 e 2, conclui-se que os três estimadores conseguiram promover a estimação do perfil de concentração de B (C_B), tido como o estado estimado, embora o modelo apresente uma inversão no sinal de ganho para a mudança entre os pontos de operação simulados, o que representa um desafio para os estimadores baseados nos filtros de Kalman segundo Tonel, *et al.* (2008a) e (2008b). Para este caso, como a variável medida do processo é o estado C_A e relação deste com o estado a ser estimado C_B é razoavelmente não-linear, a estimativa de C_B torna-se uma tarefa difícil. Para ambas as simulações (1 e 2) foi-se considerado que a condição inicial estimada (\hat{C}_{B0}) é a mesma da real, ou seja, $\hat{\xi}_{0|0} = 0$. Se for dada uma condição inicial estimada distante da real a estimação do estado C_B poderá não convergir para

o valor real e assim necessitaríamos de uma medição de uma variável secundária, na qual o estado C_B pudesse estar relacionado, de modo a melhorar a estimação.

4.7 Estudo de Caso 7: reações irreversíveis de primeira ordem – reator CSTR exotérmico.

Neste estudo de caso iremos explorar o comportamento de um reator CSTR exotérmico encamisado onde ocorrem duas reações irreversíveis de primeira ordem. A modelagem do reator encamisado, onde ocorre a reação $A \rightarrow B \rightarrow C$, é dada pelo equacionamento abaixo (TORRES e TLACUAHUAC, 1999):

$$\begin{aligned}\frac{dC_A}{dt} &= \frac{Q}{V}(C_{Af} - C_A) - k_1(T)C_A \\ \frac{dC_B}{dt} &= \frac{Q}{V}(C_{Af} - C_A) - k_2(T)C_B + k_1(T)C_A \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{Q}{V}(T_f - T) + k_1(T)C_A \frac{(-\Delta H_A)}{\rho C_p} + k_2(T)C_B \frac{(-\Delta H_B)}{\rho C_p} - \frac{UA}{\rho C_p V}(T - T_c) \\ \frac{dT_c}{dt} &= \frac{Q_c}{V_c}(T_{cf} - T_c) + \frac{UA}{\rho_c C_{pc} V_c}(T - T_c)\end{aligned}\quad (4.9)$$

onde as constantes cinéticas são dadas pela equação de Arrhenius,

$$k_i(T) = A_i \exp\left(\frac{-E_i}{RT}\right)$$

$$i = 1, 2$$

O conjunto de equações dados por (4.9) pode ser reescrito para uma forma adimensional:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau} &= q(x_{1f} - x_1) - x_1\eta(x_3)\phi \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= q(x_{2f} - x_2) - x_2\eta_2(x_3)\phi S + x_1\eta(x_3)\phi \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= q(x_{3f} - x_3) + \delta(x_4 - x_3) + \beta\phi[x_1\eta(x_3) + \alpha x_2\eta_2(x_3)S] \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= \delta_1(q_c(x_{4f} - x_4) + \delta\delta_2(x_3 - x_4))\end{aligned}\quad (4.10)$$

onde:

$$\eta(x_3) = \exp\left(\frac{x_3}{1 + \frac{x_3}{\gamma}}\right), \eta_2(x_3) = \exp\left(\frac{x_3\psi}{1 + \frac{x_3}{\gamma}}\right)$$

e x_1 é a concentração adimensional do reagente A, x_2 é a concentração adimensional do componente B, x_3 é a temperatura adimensional do reator e x_4 é a temperatura adimensional

da camisa de resfriamento. Em Torres e Tlacuahuac (1999) são encontrados os demais parâmetros adimensionalizados.

O sistema possui diversas características interessantes para o estudo da estimação de estados, como alta não-linearidade, instabilidade e diversos pontos estacionários para os mesmos parâmetros, os quais são apresentados na **Tabela 4.24**. Dependendo da condição inicial dada, o sistema pode se deslocar para qualquer um dos pontos que compõe o perfil apresentado na **Figura 4.21**. Assim, a estimação de estados se torna uma tarefa difícil para os estimadores uma vez que os mesmos podem convergir para um dos pontos estacionários diferentes do real (TONEL *et al.*, 2008b).

Tabela 4.24: Valores dos parâmetros usados na simulação (TORRES e TLACUAHUAC, 1999) *apud* (RAMMINGER e SECCHI, 2007).

Variável	Valor	Variável	Valor
ϕ	0.133	δ_1	10.0
β	8.0	δ_2	1.0
δ	1.0	γ	1000.0
q	1.0	x_{1f}	1.0
α	1.0	x_{2f}	0.0
S	0.01	x_{3f}	0.0
ψ	1.0	x_{4f}	-1.0

Conforme a **Figura 4.21**, pode-se constatar que para um determinado valor de q_c em torno de 2 (ex. $q_c = 2.3$) existem 5 pontos estacionários para o estado x_3 , formado por 3 ramos estáveis ($1 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 5$ e $7 \rightarrow 8$) e dois instáveis ($3 \rightarrow 4$ e $6 \rightarrow 7$).

Embora este sistema seja uma representação física de um processo real, e o mais plausível seria se medir as temperaturas (estados x_3 e x_4) e estimar as concentrações (estados x_1 e x_2), iremos aqui considerar o mesmo como somente um sistema de quatro estados onde a estimação do estado x_3 representa um desafio à estimação. Para tal, iremos considerar como variáveis medidas os estados x_1 e x_2 e os estados x_3 e x_4 serão os estados estimados.

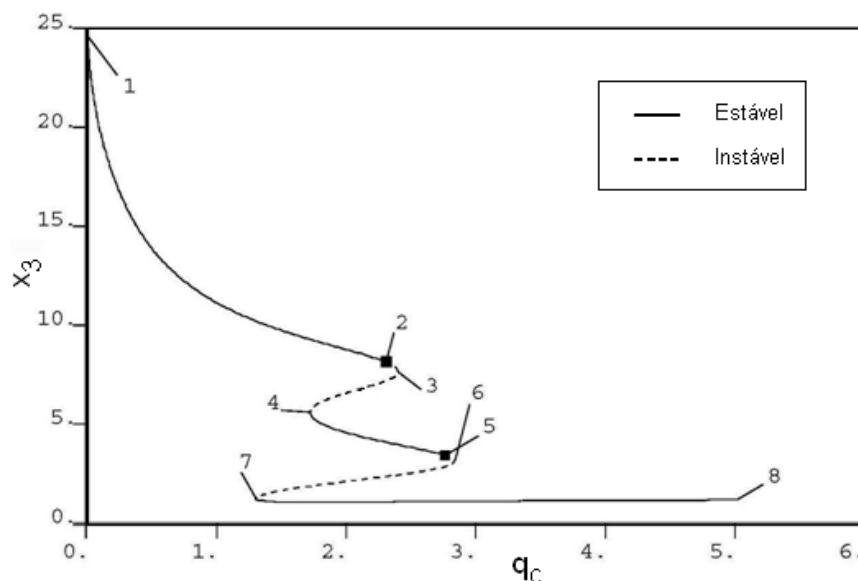


Figura 4.21: Perfil de pontos estacionários para o estado x_3 em função de q_c para o modelo de reações de primeira ordem irreversíveis (RAMMINGER e SECCHI, 2007).

Para esta simulação o valor real dos estados iniciais x_1, x_2, x_3 e x_4 serão respectivamente 0.01, 0.2, 8.0 e 6.0 e o valor do distúrbio inicial ($\hat{\xi}_{0|0}$) será de 0.1 nos valores de x_1 e x_2 iniciais. Um ruído de medição (φ), de amplitude (NA) e/ou covariância igual a 0.01, foi adicionado às variáveis medidas. Na **Tabela 4.25** são apresentados os parâmetros dos estimadores assumidos na simulação.

Tabela 4.25: Parâmetros para os estimadores na simulação com o reator CSTR exotérmico.

<i>Parâmetros</i>	<i>Valor</i>
$P_0 = P_{0 0} = P_{K-N 0}$	$diag[1 \ 1 \ 1 \ 1]$
Q	$diag[1 \ 1 \ 1 \ 1]$
R	$diag[2 \ 2]$
T_s	1

A **Figura 4.22** mostra os resultados para os estados filtrados e a **Figura 4.23** mostra os resultados para os estados estimados. A **Tabela 4.26** apresenta o resultado da soma do erro quadrático de estimação relativo a cada estado. Os resultados mostram que os estimadores EKF e CEKF falham tanto na estimação dos estados estimados quanto para os estados filtrados. Nota-se que a estimação converge para outros pontos estacionários diferentes do real. De fato aqui erros pequenos na estimação fazem com que os estimadores (EKF e CEKF) caiam diante de um sistema como este, com não-linearidade acentuada, instabilidade e distúrbios de modelo e de medição.

Os resultados do estimador MHE com um tamanho de horizonte $N = 1$ comprovam que o uso de uma quantidade maior de informações e/ou *feedbacks* contribuiu para melhoria da estimação. A simulação do MHE com horizonte $N = 0$ não foi possível uma vez que o mesmo reporta um erro no cálculo da atualização da matriz de covariância $\hat{P}_{k-N|k}$, devido à alguns dos seus auto-valores serem negativos. Isso demonstra que o otimizador do estimador MHE não conseguiu obter uma solução real para o problema de otimização envolvido.

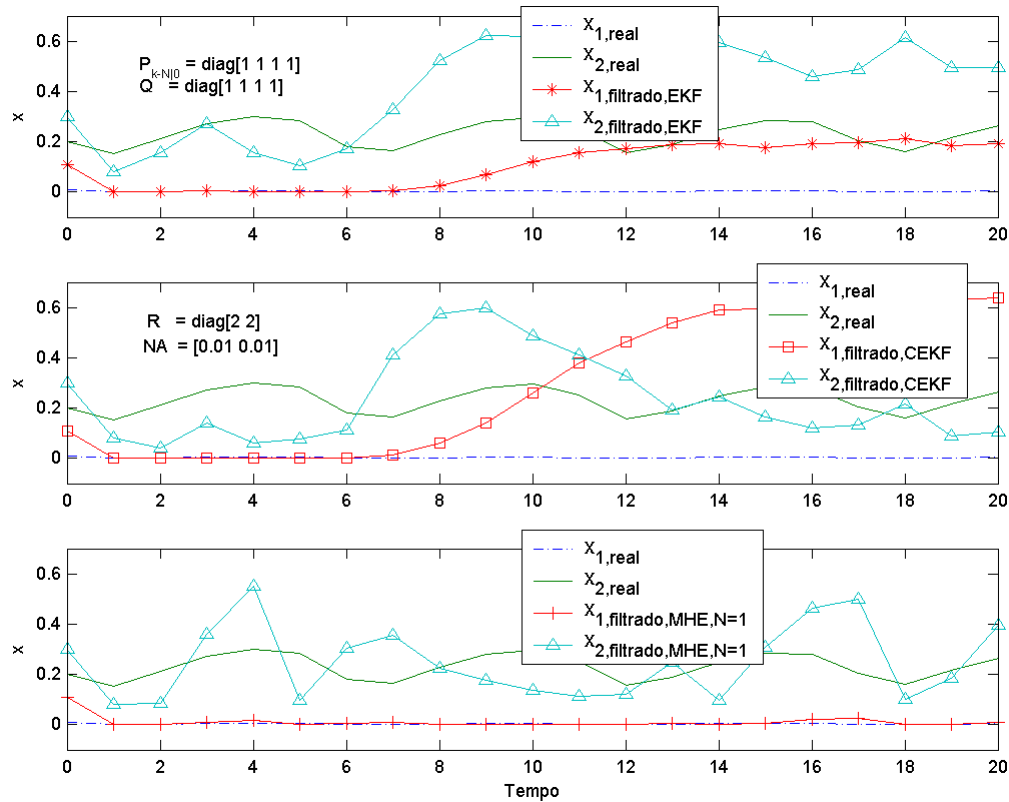


Figura 4.22: Comparação dos estados filtrados x_1 e x_2 para os três estimadores (EKF, CEKF e MHE) para o reator CSTR exotérmico.

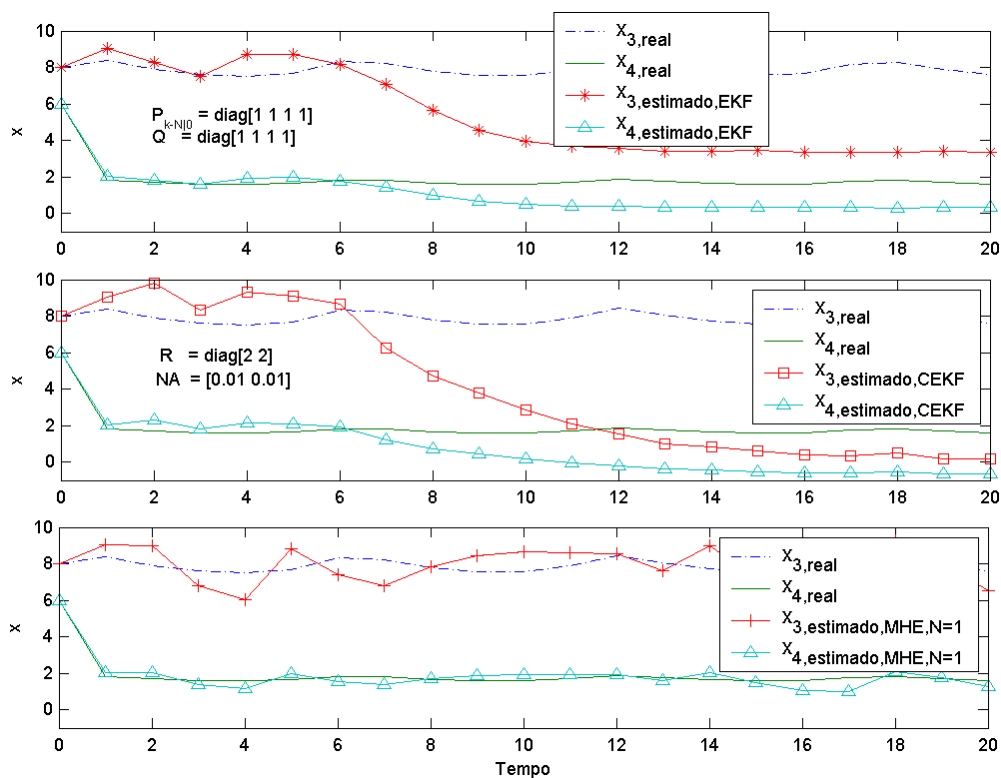
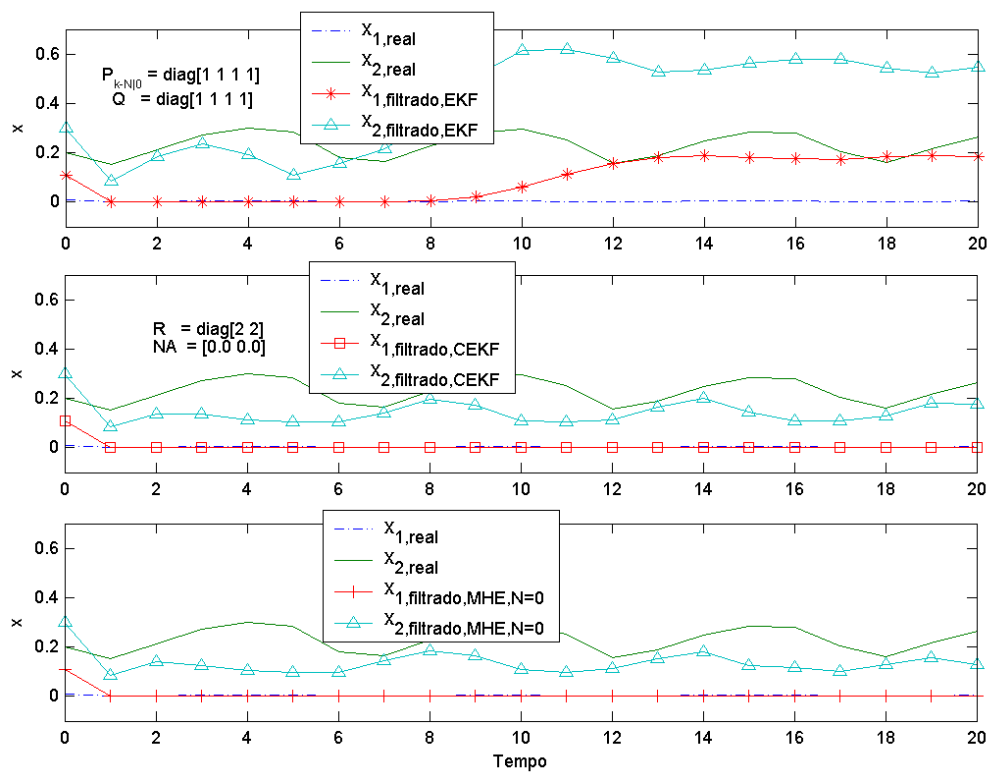


Figura 4.23: Comparação dos estados estimados x_3 e x_4 para os três estimadores (EKF, CEKF e MHE) para o reator CSTR exotérmico.

Tabela 4.26: Soma do erro quadrático para cada um dos estados para o reator CSTR exotérmico.

<i>Estado</i>	<i>EKF</i>	<i>CEKF</i>	<i>MHE</i> (<i>N=1</i>)
x_1	0.02	0.17	0.00
x_2	0.07	0.03	0.02
x_3	11.20	27.44	1.21
x_4	1.03	2.51	0.11

Para demonstrar como os distúrbios de medição afetam a estimação, foi simulado o mesmo caso anterior, mas sem ruídos de medição nas variáveis medidas x_1 e x_2 . A **Figura 4.24** mostra os resultados para os estados filtrados e a **Figura 4.25** mostra os resultados para os estados estimados da simulação com os três estimadores sem distúrbios de medição. A **Tabela 4.27** apresenta o resultado da soma do erro quadrático de estimação relativo a cada estado (simulação com os três estimadores na ausência de distúrbios de medição).

**Figura 4.24:** Comparação dos estados filtrados x_1 e x_2 para os três estimadores (EKF, CEKF e MHE) para o reator CSTR exotérmico, simulação sem ruídos de medição.

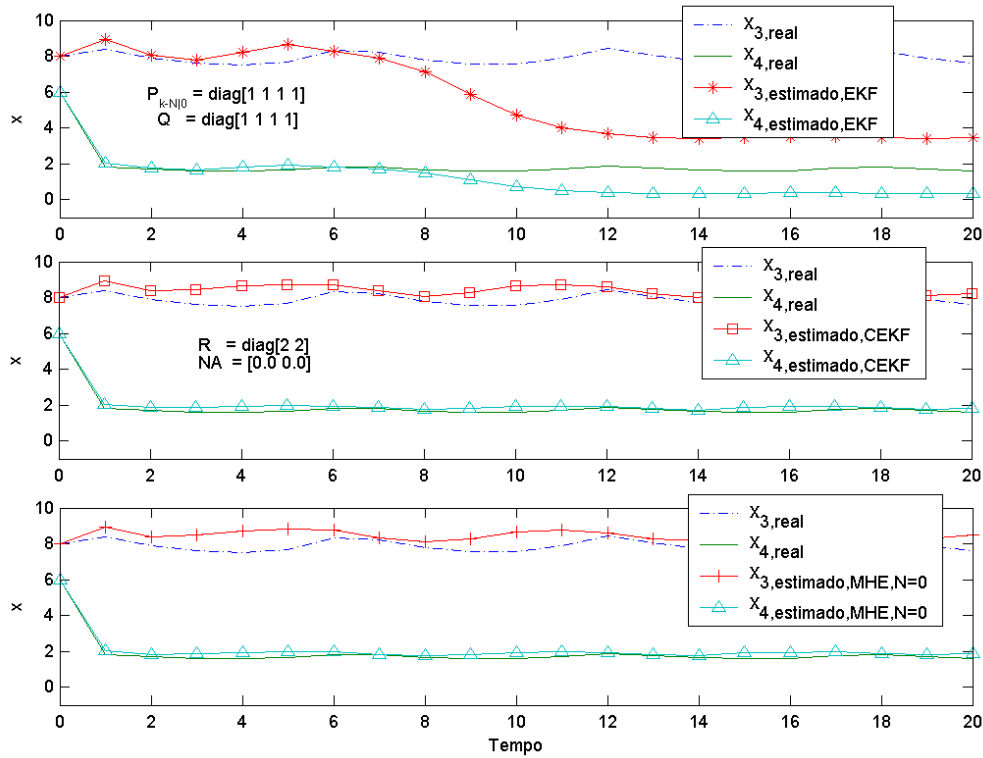


Figura 4.25: Comparação dos estados estimados x_3 e x_4 para os três estimadores (EKF, CEKF e MHE) para o reator CSTR exotérmico, simulação sem ruídos de medição.

O EKF teve uma pequena melhora nos resultados, mas que ainda é considerado um resultado ruim. Já para o estimador CEKF houve uma sensível melhora da estimação em relação à estimação com ruído na medição. Para o MHE foi possível simular para um tamanho de horizonte igual a $N = 0$ onde os resultados foram praticamente os mesmos do estimador CEKF, conforme a **Tabela 4.27**.

Tabela 4.27: Soma do erro quadrático para cada um dos estados para o reator CSTR exotérmico, simulação sem ruídos de medição.

<i>Estado</i>	<i>EKF</i>	<i>CEKF</i>	<i>MHE</i> ($N=0$)
x_1	0.01	0.00	0.00
x_2	0.07	0.01	0.01
x_3	9.90	0.42	0.49
x_4	0.91	0.04	0.05

Este estudo de caso mostra como os estimadores baseados nos filtros de Kalman podem falhar quando se estiver tratando de sistemas com não-linearidade acentuada, instabilidade, multiplicidade operacional e distúrbios de modelo e de medição. Saindo em vantagem novamente, o estimador MHE mostra sua robustez na estimação de estados e fixa seu compromisso na obtenção de bons resultados, superiores aos estimadores EKF e CEKF, com pequenos tamanhos de horizonte N demandando assim um baixo custo computacional e por consequência um tempo computacional também menor.

Um outro efeito nocivo causado pela instabilidade deste sistema é figurado quando um valor alto de P_0 for dado em relação ao distúrbio inicial $\hat{\xi}_{0|0}$. Com P_0 grande a estimação inicial é penalizada fortemente e assim para este caso pode divergir para um dos diversos pontos de equilíbrio ou estacionários (x^e) existentes. Para o EKF e CEKF esse efeito é irreversível, enquanto que o MHE pode se recuperar pelo aumento considerável do seu horizonte de estimação N . Porém, isto não é recomendável uma vez que devido a alta não linearidade do sistema, o tempo computacional necessário será alto, ultrapassando assim o período de amostragem do mesmo.

Sistemas com características severas semelhantes, como reatores de FCC, processos com reciclo, processos integrados, etc. são exemplos de aplicações industriais possíveis e justificáveis para estimação de estados usando a estimação via horizonte móvel.

4.8 Referências

ARPORNWICHANOP, A., P. KITTISUPAKORN e I. M. MUJTABA. On-line dynamic optimization and control strategy for improving the performance of batch reactors. Chemical Engineering and Processing. 44: 101-114 p. 2005.

ENGELL, S. e K. U. KLATT. Nonlinear Control of a Non-Minimum-Phase CSTR Americal Control Conference. San Francisco, California, 1993. 2941-2945 p.

FINDEISEN, P. K. Moving Horizon State Estimation of Discrete Time Systems. (Thesis M.S. --University of Wisconsin--Madison 1997.). 1997. xix, 157 p.

JOHANSSON, K. H. The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. Control Systems Technology, IEEE Transactions on, v.8, n.3, p.456-465. 2000.

MARCON, S. M., J. O. TRIERWEILER e A. R. SECCHI. EKF e CEKF: Comparação entre Duas Formulações do Filtro de Kalman Estendido. CBA. Brazil, 2002. p.

MUSKE, K. R. e J. B. RAWLINGS. Nonlinear Moving Horizon State Estimation. In: R. Berber (Ed.). Methods of Model Based Process Control. Antalya: Kluwer Academic, v.293, 1995. Nonlinear Moving Horizon State Estimation, p.349-365. (Applied Sciences)

RAMMINGER, G. O. e A. R. SECCHI. Integração do Software AUTO com o Simulador de Processos EMSO. Salão de Iniciação Científica - UFRGS. Porto Alegre - Brazil 2007.

RAO, C. V., J. B. RAWLINGS e D. Q. MAYNE. Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: stability and moving horizon approximations. Automatic Control, IEEE Transactions on, v.48, n.2, p.246-258. 2003.

RIASCOS, C. A. M. e J. M. PINTO. Optimal control of bioreactors: a simultaneous approach for complex systems. Chemical Engineering Journal, v.99, n.1, p.23-34. 2004.

RUSSO, L. P. e R. E. YOUNG. Moving-horizon state estimation applied to an industrial polymerization process. American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999. San Diego, CA, 1999. 1129-1133 p.

SALAU, N. P. G., G. TONEL, J. O. TRIERWEILER e A. R. SECCHI. Data Treatment and Analysis for On-Line Dynamic Process Optimization. Submitted article to European Symposium on Computer Aided Process Engineering – ESCAPE 18. Lyon, France: Elsevier. November, 2007, 2008. 6 p.

TONEL, G., N. P. G. SALAU, J. O. TRIERWEILER e A. R. SECCHI. Comprehensive evaluation of EKF, CEKF, and Moving Horizon estimators. Submitted abstract to Congresso Brasileiro de Engenharia Química – COBEQ. Recife, Brazil. October, 2007, 2008a. 1 p.

_____. Comprehensive evaluation of EKF, CEKF, and Moving Horizon estimators for on-line processes applications. European Symposium on Computer Aided Process Engineering – ESCAPE 18, Selected for POSTER presentation. Lyon, France: Elsevier. January, 2007, 2008b. 6 p.

TORRES, A. E. G. e A. F. TLACUAHUAC. Effect of process modeling on the nonlinear behaviour of a CSTR Reactions $A \rightarrow B \rightarrow C$. Chemical Engineering Journal, v.77, n.2000, p.153-164. 1999.

TRIERWEILER, J. O. A Systematic Approach to Control Structure Design. Chemical Engineering Department, University of Dortmund, Dortmund, 1997. 178 p.

VASANTHARAJAN, S. e L. T. BIEGLER. Simultaneous strategies for optimization of differential-algebraic systems with enforcement of error criteria. Computers & Chemical Engineering, v.14, n.10, p.1083-1100. 1990.

Capítulo 5

Conclusões

O foco deste trabalho foi baseado em três objetivos principais. Primeiro foi promover uma revisão bibliográfica a respeito dos métodos e/ou técnicas de estimação de estados com ênfase na formulação MHE. O segundo foi a implementação da formulação de horizonte móvel, bem como a dos estimadores EKF e CEKF, em um software de engenharia. A realização de um comparativo de desempenho entre as técnicas implementadas, aplicadas para diferentes tipos de sistemas e/ou modelo de processos na área de controle, figurou o último objetivo a ser buscado neste trabalho. Uma aplicação teórica e prática com a planta laboratorial de seis tanques esféricos, que se tornou operante no LACIP¹, foi almejado nos últimos meses do trabalho, porém isto não foi possível devido a alguns contratemplos.

Da aplicação para os estudos de caso propostos no capítulo 4, permitiu-se uma avaliação ampla entre os estimadores EKF, CEKF e MHE na busca da mais eficiente e robusta técnica para a estimação de estados. Como apostado inicialmente, a formulação via horizonte móvel mostrou ter robustez superior, em relação aos estimadores tradicionais baseados no filtro Kalman.

A estimação via horizonte móvel mostrou ser mais eficiente, em relação ao EKF e CEKF quando na presença de grandes distúrbios ($\hat{\xi}_{0|0}$) nas condições iniciais estimadas, ao mesmo tempo em que se há uma falta de sintonia com relação a matriz P_0 e pouca confiança na medição ($R \gg Q$). As simulações com sistemas lineares, apresentados nos estudos de caso 1, 2 e 3, mostraram que o estimador MHE pôde melhorar a estimação, ou seja, não se perder nas primeiras estimações como o EKF e nem demorar a convergir como o CEKF. Isto foi conseguido com tamanhos de horizonte N não tão grandes, sem, portanto, comprometer a estimação devido ao tempo computacional. Para sistemas lineares com dinâmicas semelhantes, mas de alta ordem (ou larga escala), o MHE foi sugerido fazer a sintonia inicial

¹ LACIP – Laboratório de Controle e Integração de Processos.

da matriz P_0 e posteriormente a estimação é prosseguida tanto pelo EKF ou pelo CEKF (após reinicialização com os valores fornecidos pelo MHE), com um menor esforço computacional em relação ao MHE.

Trabalhando com sistemas e/ou modelos de processo (estudos de caso 4, 5 e 6) com baixa não-linearidade, inversão de sinal de ganho, distúrbios iniciais de modelo ($\hat{\xi}_{0|0}$) e distúrbios de medição (φ), os estimadores EKF e CEKF geraram bons resultados, sem assim demandar uma ferramenta com esforço maior como o MHE. O MHE, porém, foi sugerido ser acionado sempre que houver falta de sintonia por parte da matriz de covariância inicial P_0 . De outra forma também o MHE pode ser operando em paralelo com um destes estimadores, com N pequeno (ex.: $N = 0$), e então sempre que for necessário a ordem N pode ser aumentada.

Conforme os estudos de caso 4 e 5, o aparecimento de incertezas de modelo e o uso de restrições para melhorar a estimação, praticamente exclui o uso do estimador EKF e limita o desempenho do CEKF, ambos no exercício da estimação de estados. Esta impossibilidade do EKF vem da não incorporação de restrições por esta técnica, uma vez que estas são úteis para a garantia da estimação quando na presença de incertezas de modelo. O CEKF apresentou resultados melhores que o EKF (erro quadrático menor), mas a estimação não convergiu, ao longo do tempo, para o valor real. O MHE, porém foi o que melhor conseguiu utilizar a informação disponível na variável distúrbio (ξ), encontrando uma solução viável para o problema de otimização. O aumento no horizonte de estimação (N) mostrou trazer a estimação cada vez para mais próxima do valor real. Nestas simulações outras dificuldades para a estimação como distúrbio nas condições iniciais e distúrbios de medição com amplitude considerável, também estiveram presentes, tornando a tarefa de estimação ainda mais complicada para os estimadores.

A troca de sinal de ganho, testada nos estudos de caso 5 e 6 mostrou não ser um problema para a estimação, uma vez que os estimadores trabalham com a matriz Jacobiana atualizada a cada instante de tempo, baseado no valor do estado corrigido.

Do comparativo feito entre as estratégias seqüencial e simultânea para a formulação MHE nos estudos de caso 5 e 6, a estratégia simultânea com colocação ortogonal mostrou ser falha para os casos onde distúrbios de modelo (ξ) e de medição (φ) com amplitude considerável estavam presentes. A necessidade do controle do erro na integração bem como o melhoramento da estimativa do perfil inicial dos estados ($x_{j,i|k}$) para a solução do problema descrito por (3.13) foi identificada. Na simulação sem ruídos de medição e para modelos pouco não-lineares os resultados da estratégia simultânea são idênticos a seqüencial. Os tempos computacionais (DASSLC versus Colocação Ortogonal) também foram parecidos (item 3.2.3).

A aplicação para um sistema e/ou processo com acentuada não-linearidade, instabilidade e multiplicidade operacional, pôs as técnicas de estimação a um severo teste no estudo de caso 7. A presença de distúrbios na condição inicial ($\hat{\xi}_{0|0}$) e na medição (φ) tornou a estimação de estados uma tarefa ainda mais complicada. Os resultados mostraram que tanto o EKF como o CEKF, falham na estimação e na filtragem dos dados enquanto o MHE (com horizonte $N = 1$) conseguiu bons resultados. A simulação com ausência de ruídos de medição

mostrou que a estimação via CEKF é melhorada significativamente o que não aconteceu, porém, com o EKF.

De maneira geral o MHE teve robustez superior frente aos estimadores EKF e CEKF na estimação de estados, e assim este trabalho veio encorajar o uso da estimação via horizonte móvel, como uma técnica de controle avançado justificável em se tratando de sistemas e/ou processos com características que tornam a estimação de estados dificultada. Neste trabalho, foi mostrado que onde os demais estimadores falham, a estimação pode ser melhorada usando o MHE, mesmo com horizontes pequenos, não demandando assim um excessivo tempo computacional.

Além do código dos estimadores EKF, CEKF e MHE implementado e disponibilizado em software Matlab[®], acredita-se que a contribuição deste trabalho vem da possibilidade de oferecer suficiente material e suporte para a tarefa da escolha do melhor e mais adequado método de estimação de estados, frente às diferentes características de cada sistema e/ou modelo de processo, visando à posterior execução de controle e otimização desses processos químicos na área de engenharia química.

Dada a ampla gama de assuntos relacionados à estimação de estados que foram abordados aqui, alguns necessitam ser melhores explorados na intenção de tornar este trabalho como uma boa referência no campo de estimação de estados. Assim a seguir são listados alguns desses possíveis assuntos, que são aqui sugestões e/ou propostas de trabalhos futuros:

- 1) Migração das rotinas para outra linguagem: objetivando-se trabalhar com sistemas maiores (escala maior) que os apresentados neste trabalho, existe primeiramente a necessidade de se implementar os algoritmos (implementados em Matlab[®]) em alguma linguagem de programação (C, C++, Fortran ou Java), de modo a permitir, que aplicações futuras em tempo real sejam possíveis para sistemas deste tipo.
- 2) Investir em um novo otimizador: o otimizador *fmincon* usado nas rotinas do MHE é uma dependência do software Matlab[®], e assim uma resistência à migração para outra linguagem. Assim na busca de possível um candidato, para a substituição do *fmincon*, o *IPOPT* (do inglês *Interior Point OPTimizer*) se apresenta como um opção promissora. Tentativas foram-se feitas para o uso do *IPOPT* (JIPOPT em Java), mas esbarrou-se na criação da interface para a plataforma Windows[®].
- 3) Implementação de estratégias de controle de erro: conforme discutido no capítulo 4 é necessária a implementação de estratégias para o controle do erro na aproximação dos perfis de estado via colocação ortogonal, dentro da formulação MHE. A melhora na estimativa dos perfis iniciais para a solução do problema de otimização também pode ser desenvolvido paralelamente.
- 4) Implementar a estratégia de *multiple-shooting*: a implementação da estratégia de integração *multiple-shooting* na formulação MHE torna-se atrativa para um

comparativo com as estratégias sequencial (*single-shooting*) e simultânea já implementadas.

- 5) Aplicação prática a planta de tanques esféricos: uma aplicação teórica e prática com a planta laboratorial de tanques esféricos é interessante uma vez que esta reúne muitas características interessantes às técnicas de controle.

Apêndice A

Comentários adicionais

A.1 Atualização da matriz de covariância P_{k-N} via solução dinâmica da equação de Ricatti

Como visto na formulação do MHE não-linear a desvantagem da formulação MHE com atualização via EKF, em relação a atualização da matriz de covariância P via solução da matriz de Ricatti (secção 2.5.3), é que se tem a necessidade de integrar simultaneamente, além do modelo dinâmico, as equações diferenciais relacionadas à matriz de covariância P , o que aumenta muito o tamanho do sistema a ser integrado e pode vir a ser problemático para sistemas com elevado número de estados. Portanto neste trabalho a atualização da matriz de covariância P , para a formulação MHE, será feita via à solução dinâmica da matriz de Ricatti (forma discreta), descrita pela equação (2.45), ao invés do uso do filtro EKF (forma contínua), como foi no pioneiro trabalho de Robertson *et al.* (1996).

A.2 Índice de desempenho para o comparativo entre os estimadores EKF, CEKF e MHE

Rao *et al.* (2003) adotaram a soma do erro quadrático de estimação como um índice de desempenho na comparação entre as estimações feitas pelos estimadores EKF e MHE, que é dado por:

$$e = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^T \left(x_k^{(j)} - \hat{x}_k^{(j)} \right)^2 \quad (\text{A.1})$$

onde $x_k^{(j)}$ é o valor do estado real no tempo k e $\hat{x}_k^{(j)}$ é o valor do estado estimado ou filtrado para o tempo k , e T é o número total de estimações feitas e/ou consideradas na simulação. Neste trabalho este índice de desempenho, dado pela equação (3.17) foi usado nas comparações feitas com o estimador MHE e com os estimadores tradicionais (EKF e CEKF).

REFERÊNCIA

RAO, C. V., J. B. RAWLINGS e D. Q. MAYNE. Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: stability and moving horizon approximations. Automatic Control, IEEE Transactions on, v.48, n.2, p.246-258. 2003.

ROBERTSON, D. G., J. H. LEE e J. B. RAWLINGS. A Moving Horizon-Based Approach for Least-Squares Estimation. AIChE Journal, v.42, n.8, August, p.2209-2224. 1996.

Apêndice B

Definições

Sistemas e Processos. Um sistema é uma coleção de objetos relacionados tratados como um todo para o propósito de modelar seu comportamento. É chamado de dinâmico se os atributos de interesse estão mudando constantemente com o tempo. Um processo é a evolução de um sistema sobre o tempo.

Tempo contínuo e tempo discreto. Embora algumas vezes seja conveniente modelar o tempo como uma quantidade contínua, é por conseqüentemente mais prático considerar este como uma forma de valores discretos. (Muitos relógios, por exemplo, avançam em passos de tempo discreto.)

Vetores e Variáveis de Estado. O estado de um sistema dinâmico em um dado instante de tempo é caracterizado por valores instantâneos de seus atributos de interesse. Para os problemas de interesse deste trabalho, os atributos de interesse podem ser caracterizados por números reais, como temperaturas, concentrações, etc. Uma variável de estado de um sistema está associado a um número real. O vetor estado de um sistema tem variáveis de estado como seus elementos componentes. O sistema é considerado fechado se o estado futuro do sistema, em todo o tempo, é unicamente determinado pelo estado atual. Por exemplo, negligenciando os campos de gravidade oriundos de outros corpos de massa do universo, o sistema solar pode ser considerado como um sistema fechado. Se um sistema dinâmico não é fechado, então as causas exógenas são chamadas “entradas” do sistema. Este vetor de estados de um sistema pode ser completo no sentido que o estado futuro do sistema é unicamente determinado por seu estado atual e suas entradas futuras. Com o objetivo de obter um vetor estado completo para um sistema, pode-se estender as componentes da variável estado para incluir derivadas de outras variáveis de estado. Isto permite o uso da velocidade ou a aceleração (a derivada da velocidade) como variáveis de estado, por exemplo.

Modelos Espaço-Estado para Sistemas Dinâmicos. Com o intuito de que os estados futuros possam ser determinados a partir de seus estados atuais e entradas futuras, o comportamento dinâmico de cada variável estado do sistema deve ser uma função conhecida de valores instantâneos, em função das outras variáveis de estado e das entradas do sistema. Como exemplo canônico voltamos ao nosso sistema solar, onde a aceleração de cada corpo é

uma função conhecida da posição relativa dos outros corpos. O modelo de espaço-estado para um sistema dinâmico representa estas dependências funcionais em termos de equações diferenciais de primeira-ordem (em tempo contínuo) ou equações de diferenças (em tempo discreto). As equações diferenciais e de diferenças, que representam o comportamento de um sistema dinâmico, são chamadas de equações de estado. Se elas podem ser representadas por funções lineares, então isto é chamado de um sistema dinâmico linear.

Modelos de Sistema Dinâmico Linear. O modelo para um sistema dinâmico linear em tempo contínuo pode ser expressado de forma geral como uma equação diferencial vetor de primeira-ordem:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)x(t) + C(t)u(t),$$

onde $x(t)$ é o vetor estado sistema n -dimensional no tempo t , $F(t)$ é sua matriz de coeficiente dinâmico $n \times n$, $u(t)$ é o vetor de entrada do sistema r -dimensional, e $C(t)$ é a matriz que acoplagem das entradas. O correspondente modelo para um sistema dinâmico linear em tempo-discreto pode ser expressado em geral por:

$$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}u_{k-1},$$

onde x_{k-1} é o vetor de estados do sistema n -dimensional no tempo t_{k-1} , x_k é o seu valor no tempo $t_k > t_{k-1}$, Φ_{k-1} é a matriz de transição dos estados $n \times n$ para o sistema no tempo t_{k-1} , u_k é o vetor de entrada para o sistema no tempo t_{k-1} , e Γ_{k-1} é a correspondente matriz de acoplamento das entradas.

Sistemas Dinâmicos Variantes e Invariantes no Tempo. Se F e C (ou Φ e C) não dependem de t (ou k), então o modelo contínuo (ou discreto) é chamado *tempo-invariante*. De outro modo, o modelo é *tempo-variante*.

Transformação de Modelos Tempo-Contínuo para Tempo-Discreto. Um modelo de um sistema dinâmico em tempo-contínuo pode ser transformado em um modelo tempo-discreto usando a equação (B.1):

$$\begin{aligned} \Phi_{k-1} &= \Phi(t_k)\Phi^{-1}(t_{k-1}) \\ u_{k-1} &= \Phi(t_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi^{-1}(\tau)C(\tau)u(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Sistemas Lineares, Saídas de Modelos e Observabilidade. A *saída* de um sistema dinâmico é algo que podemos medir diretamente. Um modelo de sistema dinâmico é dito ser observável, dado um conjunto de saídas, se é viável determinar o estado do sistema a partir daquelas saídas. Se a dependência de uma saída z com o estado x do sistema é linear, isto pode ser expressado na forma:

$$z = Hx,$$

onde H é chamado de matriz de sensibilidade da medição. Esta pode ser uma função tempo-contínuo ($H(t)$) ou tempo-discreto (H_k). Observabilidade pode ser caracterizada pelo rank de uma *matriz de observabilidade* associados com o modelo do sistema dado.

Segundo Russo e Young (1999) a observabilidade de sistemas lineares é uma propriedade global. Muske e Edgar (1996) propõe que testes de observabilidade linearizados são usualmente adequados para a determinação da observabilidade de sistemas não-lineares. Russo e Young (1999) propõe para a estimação via horizonte móvel que a observabilidade de um sistema não-linear implica que o problema não linear (NLP) envolvido na formulação MHE seja bem-formulado, não-singular e subseqüentemente que as condições de otimalidade de Kuhn-Tucker sejam satisfeitas. A matriz de observabilidade, para sistemas lineares, é definida como:

$$\vartheta = \begin{cases} \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau) H^T(\tau) H(\tau) \Phi(\tau) d\tau & \text{para modelos tempo-contínuos,} \\ \sum_{i=0}^m \left[\left(\prod_{k=0}^{i-1} \Phi_k^T \right) H_i^T H_i \left(\prod_{k=0}^{i-1} \Phi_k^T \right)^T \right] & \text{para modelos tempo-discretos.} \end{cases}$$

O sistema é observável se e somente se sua matriz de observabilidade tiver *rank* completo (n) para o qualquer inteiro $m \geq 0$ ou tempo $t > t_0$. O teste para observabilidade pode ser simplificado para sistemas tempo-invariante.) Notar que a determinação da observabilidade (contínua ou discreta) depende do intervalo sobre o qual a matriz de observabilidade é determinada (XIAO-HUA e WEI-BIN, 1989).

Definição de Estado Suavizado (Smoothed), Filtrado e Predito. Assumindo que se conheça o vetor de medições Y_k dado por (B.2), para estimar $x(k+m)$, tem-se três casos possíveis:

- 1- Suavização ($m < 0$)
- 2- Filtragem ($m = 0$)
- 3- Predição ($m > 0$)

$$Y_k = \{y(i), u(i) \mid i \leq k\} \quad (\text{B.2})$$

A **Figura B.1** ilustra os três diferentes casos.

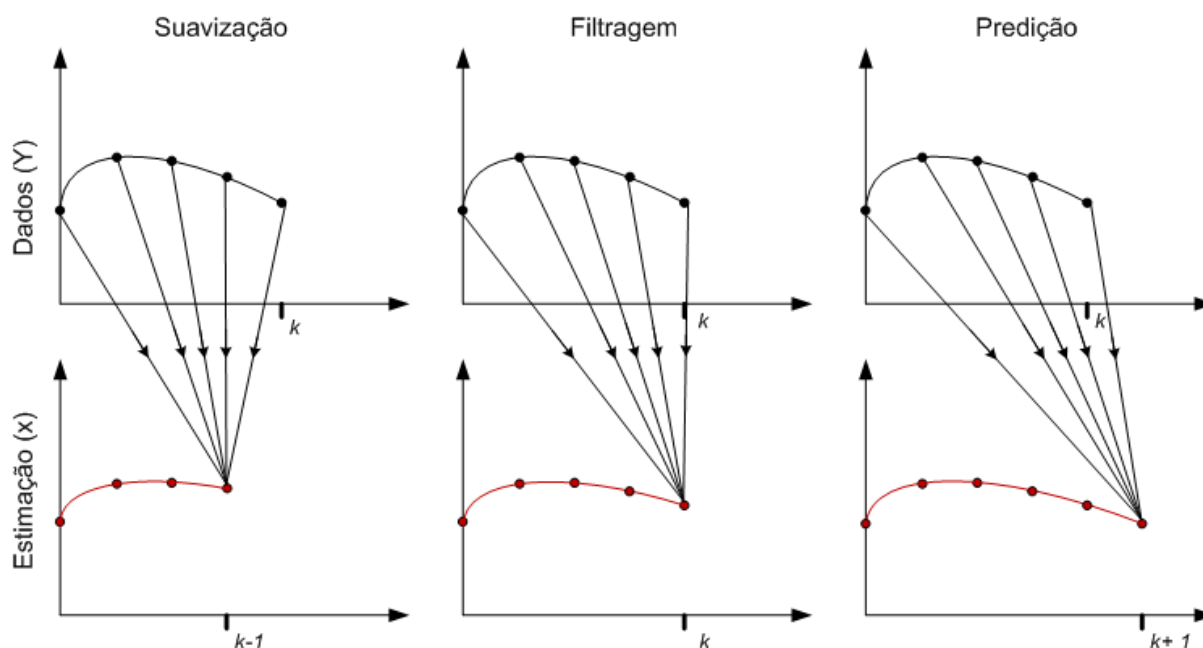


Figura B.1: Suavização, Filtragem e Predição (KARL e BJORN, 1984).

REFERÊNCIA

KARL, A. J. e W. BJORN. Computer Controlled Systems: Theory and Design: Prentice Hall Professional Technical Reference. 1984. 432 p.

MUSKE, K. R. e T. F. EDGAR. Nonlinear state estimation. In: M. A. H. A. D. E. Seborg (Ed.). Nonlinear Process Control: Prentice Hall, 1996. Nonlinear state estimation, p.311-370

RUSSO, L. P. e R. E. YOUNG. Moving-horizon state estimation applied to an industrial polymerization process. American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999. San Diego, CA, 1999. 1129-1133 p.

XIAO-HUA, X. e G. WEI-BIN. Nonlinear observer design by observer error linearization. SIAM J. Control Optim., v.27, n.1, p.199-216. 1989.

Apêndice C

Implementação dos estimadores EKF, CEKF e MHE

Os três estimadores (EKF, CEKF e MHE) foram implementados em Matlab[®] (versão 6.5) com interface gráfica no Simulink[®]. O método de colocação ortogonal foi também inteiramente implementado em rotinas do Matlab[®]. As rotinas originais dos solvers *DASSL* e *DASSLC* em linguagem *Fortran*[®] e *C* foram compiladas juntamente com suas respectivas interfaces em padrão *mex* para arquivos do tipo *dll* (*Dynamic Link Library*). Outras rotinas importantes do Matlab[®] usadas foram o otimizador *fmincon* e o integrador *ode45* (*Runge-Kutta*), este último usado inicialmente, mas posteriormente foi abandonado devido ao alto tempo computacional.

As simulações foram rodadas em um PC Pentium IV[®] 3.0 GHz com 2.0 GB de memória CACHE. Na **Figura C.1** é apresentada a interface criada no software Simulink[®]. Rotinas extras implementadas em Matlab[®] durante este trabalho estão disponíveis no repositório pessoal da *MathWorks* (TONEL, 2007).

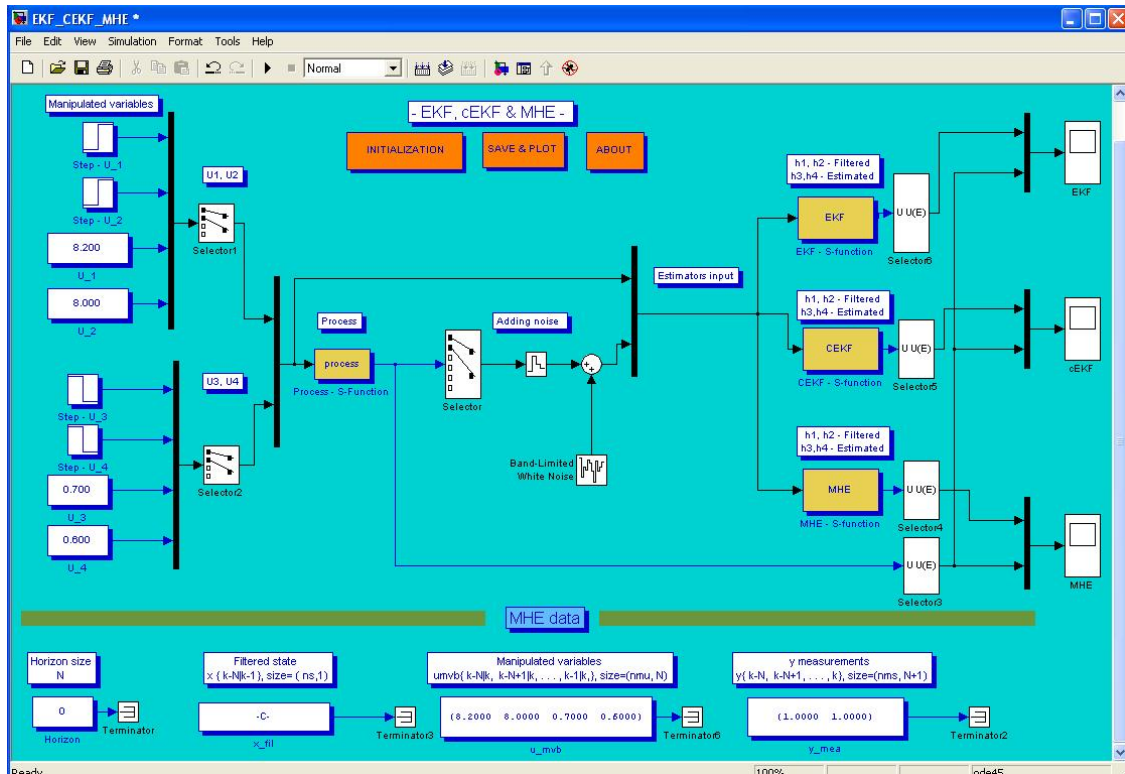


Figura C.1: Interface de trabalho no Simulink[®] para rodar as rotinas implementadas em Matlab[®].

REFERÊNCIA

TONEL, G. My FileExchange: The MathWorks - FileExchange. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadAuthor.do?objectId=1095501&objectType=author>. 2007 2007.

Apêndice D

Descrição das Rotinas Implementadas em Matlab[®]

Na **Tabela D.1** é apresentado as principais rotinas de cada um dos três estimadores implementados no software Matlab[®]. Na **Tabela D.2** são mostradas as rotinas comuns para os três estimadores. Na **Tabela D.3** as rotinas internas do Matlab[®] utilizadas.

Tabela D.1: Descrição das principais rotinas que compõe os três estimadores implementados em Matlab[®].

Rotina	Descrição
EKF	
EKF.m	Contém a rotina principal do EKF (<i>S-function</i>).
EKF_c.m	Executa a parte de correção e/ou atualização do EKF.
CEKF	
CEKF.m	Contém a rotina principal do CEKF (<i>S-function</i>).
CEKF_c.m	Executa a parte de correção e/ou atualização do CEKF.

Rotina	Descrição
MHE	
confun.m	Contém as restrições de igualdade e desigualdade do MHE.
confun.dll	Versão compilada da rotina confun.m.
MHE.m	Contém a rotina principal do MHE (<i>S-function</i>).
MHE_objfun.m	Função objetivo do MHE.
MHE_objfun.dll	Versão compilada da rotina MHE_objfun.m.
MHE – Colocação Ortogonal	
guest.m	Cria o chute inicial (ou estimativa do perfil de estado) das variáveis de estado discretizadas para o problema de integração e/ou otimização dinâmica.
nonlincon.m	Contém as restrições de igualdade da aproximação dos perfis de estado via colocação ortogonal.
nonlincon.dll	Versão compilada da rotina nonlincon.m.
orthcoll.m	Calcula as raízes dos polinômios de Jacobi normalizados.

Tabela D.2: Rotinas comuns para os três estimadores implementados em Matlab®.

Rotina	Descrição
bounds.m	Contém os limites inferiores e superiores das variáveis de estado x , das variáveis ξ e φ .
call_input_data.m	Interface gráfica para a entrada de parâmetros de simulação.
check.m	Faz uma checagem dos dados de inicialização.
Dassl.f	Rotina original do solver DASSL em linguagem <i>Fortran</i> .
Dasst.f	Interface <i>mex</i> do <i>Dassl.f</i> para o Matlab®.
dassl.dll	Rotina do DASSL compilada (com a interface).
dasslc.c	Rotina original do solver DASSLC em linguagem <i>C</i> .
dasslc2ml.c	Interface <i>mex</i> do <i>dasslc.c</i> para o Matlab®.
dasslc.dll	Rotina do DASSL compilada (com a interface).
DAEp.m	Retorna os resíduos do modelo ODE (ODEpmfun.m), para a integração com os solvers DASSL ou DASSLC.
EKF_CEFK_MHE.mdl	Interface gráfica no Simulink® para a simulação.
Fmatrix.m	Matriz Jacobiana de $f(x, u)$.
Gmatrix.m	Matriz Jacobiana de $g(x)$.
ini_EKF_CEFK_MHE.m	Inicialização para a simulação no Simulink®.
model_choose.m	Interface gráfica para a escolha do modelo a ser simulado.
ODEpmfun.m	Contém modelo dinâmico do sistema.

Rotina	Descrição
plot_EKF_CEFK_MHE.m	Plota os dados de simulação.
pmfun.m	Calcula o valor futuro de x , $f(x, u, t)$.
prbs.m	Geração de sinal PRBS (do inglês <i>Pseudo-Random Binary Sequence</i>).
Ppred.m	Equação de predição da matriz de covariância P , via EKF.
process.m	Simula o processo real (<i>S-function</i>).
Pxpred.m	Modelo ODE de predição de x e da matriz de covariância P , via EKF.
smfun.m	Predição da saída (\hat{y}) através do estado estimado, $\hat{y} = g(\hat{x})$.

Tabela D.3: Rotinas do Matlab[®] internas que foram usadas.

Rotina	Descrição
fmincon.m	Calcula o máximo ou o mínimo de uma função objetivo (MHE_objfun.m) sujeita a equações de igualdade e desigualdade (confun.m).
quadprog.m	Resolve o problema de programação quadrática.
ode45.m	Integrador tipo Runge-Kutta, não-rígido (<i>nonstiff</i>).

Obs.: neste trabalho todas as versões (as quais possuem tanto a versão *.m* como a *.dll*) de rotinas *.dll* (ou *mex*) foram utilizadas, ao invés de suas respectivas versões em *.m* (*m-file*). Isto permitiu uma maior rapidez computacional quando do uso das mesmas. No caso as rotinas do DASSL (implementado em *Fortran*), DASSLC (implementado em *C*) e Colocação Ortogonal (implementado em *Matlab*), a compilação para um mesmo padrão (*mex*) permitiu fazer o comparativo¹ relativo aos seus respectivos tempos computacionais (item 3.2.2 e 3.2.3). Não foi possível, porém fazer um padrão *mex* das rotinas internas do Matlab[®], apresentadas na **Tabela D.3**, devido as suas enormes dependências a outras sub-rotinas internas do Matlab[®].

¹ Isto é somente um comparativo aproximado do tempo computacional demandado, uma vez que o ambiente de execução é diferente.