Otimização de Processos (COQ897)

Prof. Argimiro R. Secchi

Segunda Lista de Exercícios - 2020

José Rodrigues Torraca Neto

4) A engenheira Fiona, responsável pela operação da Unidade de Extração por Solvente (UES) de uma indústria química, recebeu a incumbência de encontrar condições operacionais que fossem lucrativas para a UES para evitar o seu desligamento. A avaliação econômica realizada pela Eng. Fiona resultou na seguinte função lucro:

> $L(\boldsymbol{x}) = a - \frac{b}{x_1} - cx_2 - d\frac{x_1}{x_2}$

, em que x_1 e x_2 são as razões mássicas do produto que deixam cada estágio de extração na corrente rafinada,

com $x_1 \leq 0,02$ e $x_2 \leq x_1$,

e $a = 129,93, b = 0,5, c = 4000, d = 25$ são constantes.

A condição de operação atual é dada por: $x_1 = 0,015$ e $x_2 = 0,001$.

(a) Qual é o valor da função lucro na condição atual?

(b) Qual a condição de máximo lucro encontrada pela Eng. Fiona e o valor da função lucro nessa nova condição, sabendo que a solução foi irrestrita?

(c) Mostre que a nova condição é realmente um ponto de máximo;

(d) Após operar vários meses nessa nova condição, a falta de solvente no mercado aumentou em quatro vezes o seu preço, modificando as constantes da função lucro para $a = 279,72, b = 2,0, c = 4000, d = 100$. Se a planta continuasse a operar nas mesmas condições encontradas em (b), qual seria o valor da função lucro? Qual foi a decisão tomada pela Eng. Fiona nessa nova condição do mercado? Por quê?

Solução:

(a) O problema se resume a encontrar o valor da função lucro:

> $L(\boldsymbol{x}) = a - \frac{b}{x_1} - cx_2 - d\frac{x_1}{x_2}$

, com as constantes: $a = 129,93, b = 0,5, c = 4000, d = 25$

e impondo:

$x_1 = 0,015$ e $x_2 = 0,001$

```
#Definindo a função lucro:

def f(x1, x2, a=129.93, b=0.5, c=4000, d=25):
    return a-(b/x1)-(c*x2)-(d*(x1/x2))

#Impondo x1 e x2:

result = f(0.015,0.001)

print(result)
```

```
-282.4033333333333
```

Resposta: (a) O valor da função lucro atual é $L(x) = -282,4$.

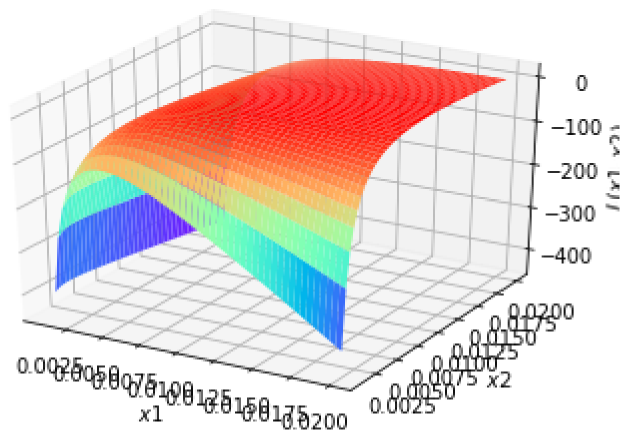
(b) O problema consiste em encontrar a condição de máximo lucro $(x_1, x_2)^{max}$ e o valor da função lucro nesta condição:

> $L(\boldsymbol{x}) = a - \frac{b}{x_1} - cx_2 - d\frac{x_1}{x_2}$

, com as constantes: $a = 129,93, b = 0,5, c = 4000, d = 25$

e sem restrições (mas impondo limites para x_1 e x_2 como valores positivos e menores ou iguais a 1, para serem fisicamente consistentes, já que são razões mássicas).

```
import numpy as np
import scipy.integrate
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
from scipy.optimize import minimize

#Verificando a forma da superfície:

from matplotlib import cm

x1 = np.linspace(1E-3, 2E-2, 50)
x2 = np.linspace(1E-3, 2E-2, 50)
X, Y = np.meshgrid(x1, x2)

Z = 129.93 - 0.5/X - 4000*Y - 25*(X/Y)

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': '3d'})
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.rainbow)

ax.set_xlabel('$x1$')
ax.set_ylabel('$x2$')
ax.set_zlabel('$L(x1,x2)$');
```




```
## Conceitualmente, a maximização é análoga à minimização: para encontrar

#o máximo da função f, basta encontrar o mínimo de -f.

## Para efetuar a minimização, utilizaremos a função scipy.optimize.minimize.

## Seu uso tem a seguinte sintaxe:

#scipy.optimize.minimize (fun, x0)

#sendo os argumentos:

#fun: função que deve ser minimizada, definida previamente (f);

#x0: estimativa inicial do mínimo.

## A função minimize também fornece uma interface para vários algoritmos

#de minimização com restrição. Como exemplo, o algoritmo de otimização

#Sequential Least SQuares Programming (SLSQP) será considerado aqui.

## Esse algoritmo permite lidar com problemas de otimização com restrições

#de igualdade (eq) e desigualdade (ineq).

## Definindo a função objetivo - lucro (func):

def func(x, a=129.93, b=0.5, c=4000, d=25, sign=-1.0):
    return sign*(a - b/x[0] - c*x[1] - d*x[0]/x[1])

## Definindo a função das derivadas de f em relação a x1 e x2 (func_deriv):

def func_deriv(x, a=129.93, b=0.5, c=4000, d=25, sign=-1.0):
    dfdx0 = sign*(0 + b/(x[0])**2 + 0 - d/x[1])
    dfdx1 = sign*(0 + 0 - c + d*x[0]/(x[1])**2)
    return np.array([ dfdx0, dfdx1 ])
```

```
#Observe que, uma vez que 'minimize' apenas minimiza funções,

#o parâmetro de sinal (sign) é introduzido para multiplicar a função objetivo

#(e sua derivada) por -1, para realizar uma maximização.

## Definindo as condições de contorno (limites físicos do problema:

# 0 < x1 <= 1; 0 < x2 <= 1) como

# um objeto 'bounds' do scipy:

from scipy.optimize import Bounds
bounds = Bounds([1E-9, 1E-9], [1.0, 1.0])

#Tivemos que impor [1E-9, 1E-9] e não [0, 0] porque senão o método

#acaba fazendo uma divisão por zero.

## (OPCIONAL) Em seguida, as restrições são definidas como uma sequência de

#dicionários (Python), com as teclas type, fun e jac (default x >= 0).

## Definindo as restrições de desigualdade x1 <= 0,02, x2 <= x1:

ineq_cons = {'type': 'ineq',
             'fun' : lambda x: np.array([0.02 - x[0],
                                         x[0] - x[1]]),
             'jac' : lambda x: np.array([[-1.0, 0.0],
                                         [1.0, -1.0]])}

#Em Python, existe um conceito bastante poderoso e integrado à linguagem

#que é chamado de expressão LAMBDA ou forma lambda.

#O conceito em si é bastante simples:

#consiste em uma função que é atribuida a um objeto.

#Por conter a palavra reservada lambda o objeto se comportará como uma função,

#e podemos usar funções anônimas dentro de outras funções.


#Agora, pode ser feita uma otimização sem restrições

#(apenas com os limites físicos 'bounds'):

x0 = np.array([0.99, 0.1])
res = minimize(func, x0, jac=func_deriv,
               method='SLSQP', options={'ftol': 1e-9, 'disp': True},
               bounds = bounds)
print(res.x)

     Optimization terminated successfully.    (Exit mode 0)
                 Current function value: -19.409055040270935
                 Iterations: 31
                 Function evaluations: 55
                 Gradient evaluations: 27
     [0.01357208 0.00921004]


#E a otimização com restrições (OPCIONAL - constraints = ineq_cons):

x0 = np.array([0.5, 0.5])
res = minimize(func, x0, jac=func_deriv, constraints=ineq_cons,
               method='SLSQP', options={'ftol': 1e-9, 'disp': True},
               bounds = bounds)
print(res.x)

     Optimization terminated successfully.    (Exit mode 0)
                 Current function value: -19.409055040739943
                 Iterations: 14
                 Function evaluations: 21
                 Gradient evaluations: 14
     [0.01357208 0.00921008]


#Resultado em notação científica:

scientific_notation1 = "{:.2e}".format(res.x[0])
```

```
scientific_notation2 = "{:.2e}".format(res.x[1])

print(scientific_notation1 + "," + scientific_notation2)
```

```
1.36e-02,9.21e-03
```

```
#Valor da função objetivo (lucro) no ponto máximo:

#Lembrar de alterar o sinal novamente para sign=1.0:

def func(x, a=129.93, b=0.5, c=4000, d=25, sign=1.0):
    return sign*(a - b/x[0] - c*x[1] - d*x[0]/x[1])

result = func([1.36E-2, 9.21E-3])

print(result)
```

```
19.40889889506292
```

Resposta: (b) A condição de máximo lucro é $(x_1;\ x_2)^{max} = (1,36 \cdot 10^{-2};\ 9,21 \cdot 10^{-3})$ e o valor da função lucro nessa nova condição é $L(x) = 19,41$.

(c) Podemos verificar se o ponto encontrado é um ponto de máximo, analisando a matriz Hessiana $H(x)$:

Como já calculamos o jacobiano no item anterior, temos:

> $$L(\boldsymbol{x}) = a - \frac{b}{x_1} - cx_2 - d\frac{x_1}{x_2}$$
> $$\nabla L(x) = \begin{pmatrix} \frac{b}{x_1^2} - \frac{d}{x_2} \\ -c + d\frac{x_1}{x_2^2} \end{pmatrix}$$

Calculando a matriz Hessiana:

> $$H(x) = \begin{pmatrix} -\frac{2b}{x_1^3} & +\frac{d}{x_2^2} \\ \frac{d}{x_2^2} & -2d\frac{x_1}{x_2^3} \end{pmatrix}$$

Podemos analisar a matriz Hessiana diretamente no ponto ótimo $x^* = \begin{pmatrix} 1,36 \cdot 10^{-2} \\ 9,21 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$:

> $$H(x^*) = \begin{pmatrix} -400001 & 294722 \\ 294722 & -868613 \end{pmatrix}$$

Como a matriz $H(x^*)$ é apenas simétrica, e não diagonal neste ponto, temos que calcular seus autovalores (λ):

```
H = np.array([[-400001, 294722],
             [294722, -868613]])

sigma = np.linalg.eigvals(H)
sigma
```

```
array([ -257796.23133594, -1010817.76866406])
```

```
#Verifica se os autovalores são positivos:

import numpy as np

def is_pos_def(x):
    return np.all(np.linalg.eigvals(x) > 0)

is_pos_def(H)
```

```
False
```

> $$\lambda = \begin{pmatrix} -257796 \\ -1010818 \end{pmatrix}$$

Resposta: (c) Como todos seus autovalores são negativos, a matriz $H(x^*)$ é negativa definida no ponto $x^* = \begin{pmatrix} 1,36 \cdot 10^{-2} \\ 9,21 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$; o que implica em um ponto de máximo local.

(c) Método alternativo: Apesar do Python não ser naturalmente uma linguagem de programação com métodos simbólicos, é possível importar uma biblioteca que utiliza métodos simbólicos ***(Sympy)***, e então calcular as matrizes do Jacobiano e Hessiana diretamente, quando os problemas são simples o suficiente:

A renderização de equações Sympy requer que o MathJax esteja disponível em cada saída de célula. A seguir temos uma função que fará isso acontecer:

```
from IPython.display import Math, HTML
def enable_sympy_in_cell():
  display(HTML("<script src='https://cdnjs.cloudflare.com/ajax/libs/"
             "mathjax/2.7.3/latest.js?config=default'></script>"))
get_ipython().events.register('pre_run_cell', enable_sympy_in_cell)
```

```
from sympy import Function, hessian, Matrix, init_printing
from sympy.abc import x, y
init_printing

##Definindo a função L(x1,x2):
x1, x2, a, b, c, d = symbols('x1 x2 a b c d')
f = a-(b/x1)-(c*x2)-(d*(x1/x2))
f
```

$$a - \frac{b}{x_1} - cx_2 - \frac{dx_1}{x_2}$$

```
Matrix([f]).jacobian([x1, x2])
```

$$\begin{bmatrix} \frac{b}{x_1^2} - \frac{d}{x_2} & -c + \frac{dx_1}{x_2^2} \end{bmatrix}$$

```
hessian(f, (x1,x2))
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{2b}{x_1^3} & \frac{d}{x_2^2} \\ \frac{d}{x_2^2} & -\frac{2d}{x_2^3}x_1 \end{bmatrix}$$

```
##Substituindo as constantes 'a,b,c,d' na função lucro original:

import sympy as sp
from sympy import *
import numpy as np
x1, x2 = sp.symbols('x1 x2', real=True)
f = 129.93-(0.5/x1)-(4000*x2)-(25*(x1/x2))

F = sp.Matrix([f])

F
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{25x_1}{x_2} - 4000x_2 + 129.93 - \frac{0.5}{x_1} \end{bmatrix}$$

```
##Calculando a função hessiana:

H = hessian(f, (x1,x2))

H
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{1.0}{x_1^3} & \frac{25}{x_2^2} \\ \frac{25}{x_2^2} & -\frac{50x_1}{x_2^3} \end{bmatrix}$$

```
##Calculando a função hessiana no ponto ótimo [0.01357208, 0.00921008]:

Hp = hessian(f, [x1,x2]).subs([(x1,0.01357208), (x2,0.00921008)])

Hp
```

$$\begin{bmatrix} -400000.714671238 & 294722.439673709 \\ 294722.439673709 & -868612.765371583 \end{bmatrix}$$

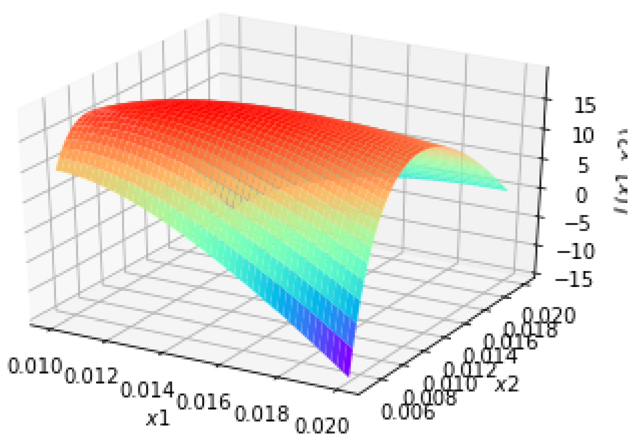
```
##Finalmente calculamos os autovalores de H no ponto ótimo:

Hp.eigenvals()
```

$$\left\{ -\frac{1268613480042821}{2000000000} - \frac{\sqrt{567042519850474875870526385749}}{2000000000} : 1, \quad -\frac{1268613480042821}{2000000000} + \frac{\sqrt{567042519850474875870526385749}}{2000000000} : 1 \right\}$$

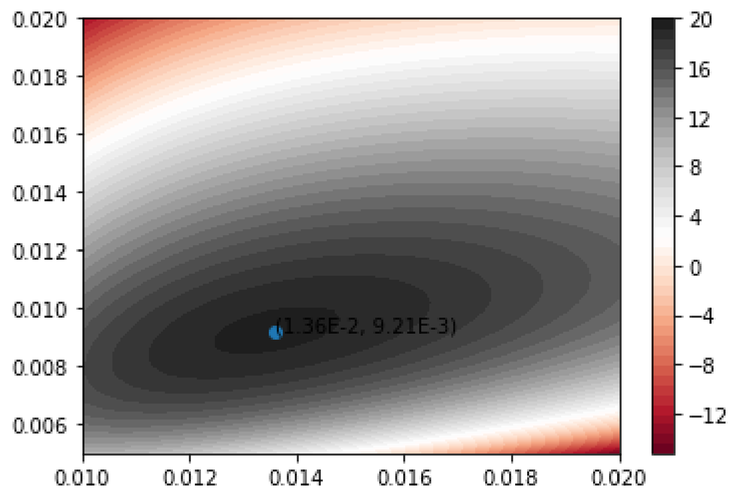
Esses autovalores são negativos, e a notação :1, significa que possuem multiplicidade algébrica 1.

(c) Adicional: Também podemos demonstrar que o ponto encontrado é um ponto de máximo plotando o gráfico (superfície 3d) e curvas de níveis da função objetivo $L(x)$:

```
import numpy as np
import scipy.integrate
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
from scipy.optimize import minimize

#Verificando a forma da superfície:

from matplotlib import cm

x1 = np.linspace(1E-2, 2E-2, 50)
x2 = np.linspace(5E-3, 2E-2, 50)
X, Y = np.meshgrid(x1, x2)

Z = 129.93 - 0.5/X - 4000*Y - 25*(X/Y)

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': '3d'})
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.rainbow)

ax.set_xlabel('$x1$')
ax.set_ylabel('$x2$')
ax.set_zlabel('$L(x1,x2)$');
```

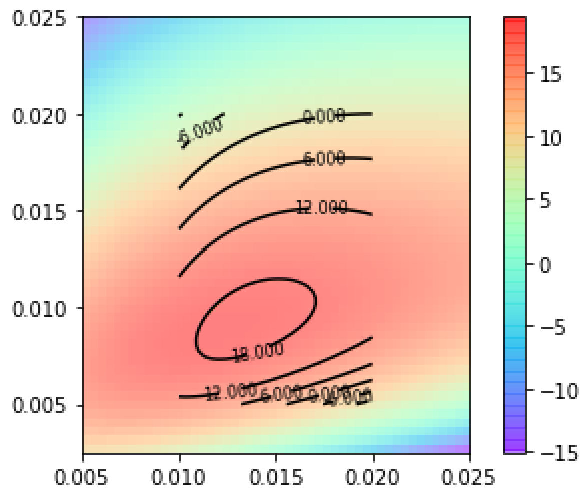



```
#Plotando superfície de contorno (com colorbar) - com ponto de máximo indicado:

plt.contourf(X, Y, Z, 50, cmap='RdGy')
plt.colorbar();
plt.scatter([1.36E-2], [9.21E-3])
plt.annotate("(1.36E-2, 9.21E-3)", (1.36E-2, 9.21E-3))
plt.show()
```



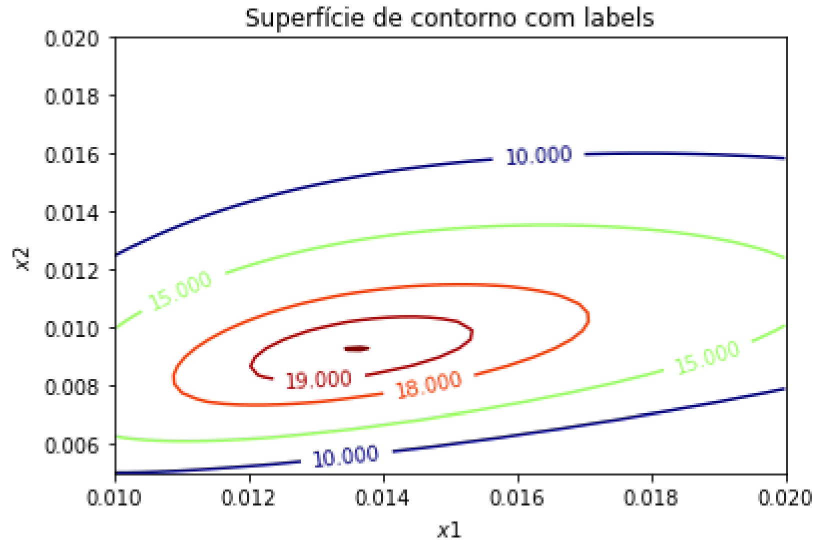

```
#Plotando superfície de contorno (com colorbar) - com labels:
```

```
contours = plt.contour(X, Y, Z, 5, colors='black')
plt.clabel(contours, inline=True, fontsize=8)

plt.imshow(Z, extent=[0.005, 0.025, 0.0025, 0.025], origin='lower',
           cmap='rainbow', alpha=0.5)
plt.colorbar();
```



```
#Plot superfície de contorno (padrão) - com labels:

fig, ax = plt.subplots()
CS = ax.contour(X, Y, Z, [10,15,18,19, 19.4], cmap='jet')
ax.clabel(CS, inline=1, fontsize=10)
ax.set_title('Superfície de contorno com labels')
ax.set_xlabel('$x1$')
ax.set_ylabel('$x2$')
```

```
Text(0, 0.5, '$x2$')
```



(d) Temos a mesma forma da função objetivo $L(x)$, mas com constantes diferentes:

$a = 279,72;\ b = 2,0;\ c = 4000;\ d = 100.$

```
#Valor da nova função objetivo (lucro) no ponto máximo da letra(b):

#Lembrar de alterar o sinal novamente para sign=1.0:

def func(x, a=279.72, b=2.0, c=4000, d=100, sign=1.0):
    return sign*(a - b/x[0] - c*x[1] - d*x[0]/x[1])

result = func([1.36E-2, 9.21E-3])

print(result)
```

```
-51.844404419748344
```

```
## Vamos fazer uma maximização para a nova função objetivo:

def func(x, a=279.72, b=2.0, c=4000, d=100, sign=-1.0):
    return sign*(a - b/x[0] - c*x[1] - d*x[0]/x[1])

## Definindo a função das derivadas de f em relação a x1 e x2 (func_deriv):

def func_deriv(x, a=279.72, b=2.0, c=4000, d=100, sign=-1.0):
    dfdx0 = sign*(0 + b/(x[0])**2 + 0 - d/x[1])
    dfdx1 = sign*(0 + 0 - c + d*x[0]/(x[1])**2)
    return np.array([ dfdx0, dfdx1 ])

## Definindo as condições de contorno:
```

```
from scipy.optimize import Bounds
bounds = Bounds([1E-9, 1E-9], [1.0, 1.0])

## Definindo as restrições de desigualdade x1 <= 0,02, x2 <= x1:

ineq_cons = {'type': 'ineq',
             'fun' : lambda x: np.array([0.02 - x[0],
                                         x[0] - x[1]]),
             'jac' : lambda x: np.array([[-1.0, 0.0],
                                         [1.0, -1.0]])}


#Agora, pode ser feita uma otimização sem restrições

#(apenas com os limites físicos 'bounds'):

x0 = np.array([0.5, 0.5])
res = minimize(func, x0, jac=func_deriv,
               method='SLSQP', options={'ftol': 1e-9, 'disp': True},
               bounds = bounds)
print(res.x)
```

```
     Optimization terminated successfully.    (Exit mode 0)
                 Current function value: -1.2246699827823875
                 Iterations: 16
                 Function evaluations: 27
                 Gradient evaluations: 16
     [0.02154434 0.02320799]
```

```
#E a otimização com restrições (OPCIONAL - constraints = ineq_cons):

x0 = np.array([0.5, 0.5])
res = minimize(func, x0, jac=func_deriv, constraints=ineq_cons,
               method='SLSQP', options={'ftol': 1e-9, 'disp': True},
               bounds = bounds)
print(res.x)
```

```
     Optimization terminated successfully.    (Exit mode 0)
                 Current function value: 0.2800000000520271
                 Iterations: 9
                 Function evaluations: 14
                 Gradient evaluations: 9
     [0.02 0.02]
```

```
#Valor da função objetivo (lucro) no ponto máximo (sem restrições):

#Lembrar de alterar o sinal novamente para sign=1.0:

def func(x, a=279.72, b=2.0, c=4000, d=100, sign=1.0):
    return sign*(a - b/x[0] - c*x[1] - d*x[0]/x[1])

result = func([2.15E-2, 2.32E-2])

print(result)
```

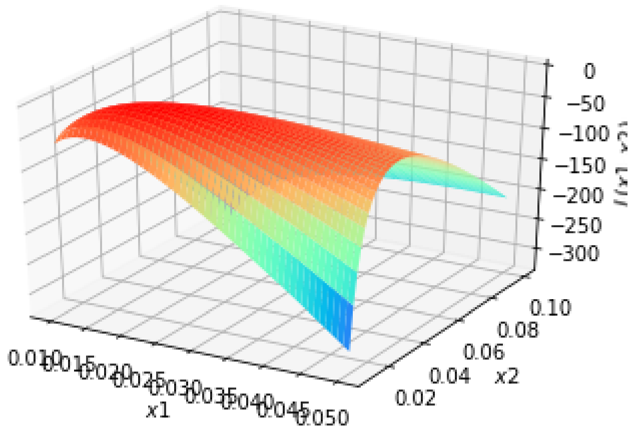
```
     1.2243303929431022
```

```
#Valor da função objetivo (lucro) no ponto máximo (com restrições):

#Lembrar de alterar o sinal novamente para sign=1.0:

def func(x, a=279.72, b=2.0, c=4000, d=100, sign=1.0):
    return sign*(a - b/x[0] - c*x[1] - d*x[0]/x[1])

result = func([2E-2, 2E-2])

print(result)
```

```
     -0.2799999999999727
```

```
import numpy as np
import scipy.integrate
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
from scipy.optimize import minimize

#Verificando a forma da superfície:
```

```
from matplotlib import cm

x1 = np.linspace(1E-2, 5E-2, 50)
x2 = np.linspace(1E-2, 1E-1, 50)
X, Y = np.meshgrid(x1, x2)

Z = 279.72 - 2.0/X - 4000*Y - 100*(X/Y)

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': '3d'})
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.rainbow)

ax.set_xlabel('$x1$')
ax.set_ylabel('$x2$')
ax.set_zlabel('$L(x1,x2)$');
```



***Resposta:* (d)** O novo valor da função lucro na condição da letra (b) seria $L(x) = -51,84$.

A Eng. Fiona tem 2 opções:

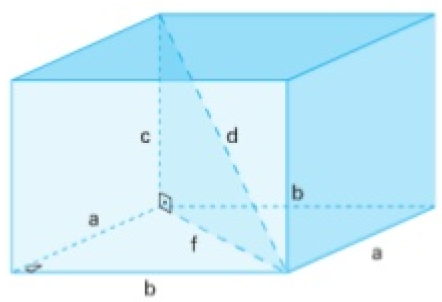
i) **Desligar a planta.** Porque considerando a nova função objetivo, obedecendo as restrições impostas $x_1 \leq 0,02$ e $x_2 \leq x_1$; o maior valor do lucro ainda seria negativo $(-0,28)$, o que seria inviável economicamente.

ii) **Continuar operando com a planta**, caso seja possível desrespeitar as restrições impostas $x_1 \leq 0,02$ e $x_2 \leq x_1$. Porque nesse caso (sem restrições), é possível obter um lucro positivo de $1,22$; para $x = (2,15 \cdot 10^{-2}, 2,32 \cdot 10^{-2})$. Mesmo assim, esse valor do lucro parece ser muito baixo para ser viável economicamente.

5) Determine as dimensões do paralelepípedo, cuja diagonal tem um comprimento d, que apresenta o maior volume possível.

Solução:

O problema consiste em maximizar a função objetivo que representa o volume do paralelepípedo, com dimensões $(a,\ b,\ c)$ e diagonal d:



$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

A função objetivo que representa o volume, em termos das dimensões $(a,\ b,\ c)$ pode ser expressa como:

> $V(a,b,c) = a \cdot b \cdot c$

Para expressar a diagonal d em relação às dimensões, podemos fazer algumas relações geométricas (ver figura - triângulo interior):

> $d^2 = c^2 + f^2$
> $f^2 = a^2 + b^2$
> $d^2 = c^2 + b^2 + a^2$

Para definir uma restrição, podemos expressar a última equação em relação à uma das dimensões (c):

> $c = \sqrt{d^2 - a^2 - b^2}$

Então, podemos reescrever o volume como:

> $V(a,b) = ab\sqrt{d^2 - a^2 - b^2}$

Agora, precisamos maximizar V com as restrições $(a, b > 0)$ e $(a^2 + b^2 \leq d^2)$.

Podemos então encontrar os pontos críticos derivando V em relação à a e b:

> $V_a(a,b) = b\sqrt{d^2 - a^2 - b^2} - \frac{a^2 b}{\sqrt{d^2-a^2-b^2}} = \frac{1}{\sqrt{d^2-a^2-b^2}}(d^2 - 2a^2 - b^2)b,$
> $V_b(a,b) = a\sqrt{d^2 - a^2 - b^2} - \frac{ab^2}{\sqrt{d^2-a^2-b^2}} = \frac{1}{\sqrt{d^2-a^2-b^2}}(d^2 - a^2 - 2b^2)a$

Lembrando que $a, b \neq 0$, como dito anteriormente, e igualando as 2 últimas equações a zero; teremos que as seguintes relações serão verdadeiras:

> $(d^2 - 2a^2 - b^2) = 0,$
> $(d^2 - a^2 - 2b^2) = 0$

Reescrevendo a primeira equação como $b^2 = d^2 - 2a^2$ e substituindo na segunda equação, temos:

> $d^2 - a^2 - 2(d^2 - 2a^2) = 0$
> $3a^2 = d^2$
> $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$

Substituindo a na primeira equação, temos que $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Substituindo a e b em $c = \sqrt{d^2 - a^2 - b^2}$, temos que $c = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Então, temos que o volume máximo é obtido quando:

> $a = b = c = \frac{d}{\sqrt{3}}$
> $V_{max} = \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$

***Resposta:* (5)** O volume máximo é dado por $V_{max} = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$, com dimensões $a = b = c = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Solução alternativa:

O problema também pode ser resolvido por meio de multiplicadores de Lagrange:

Com $f(a,b,c) = abc; \quad g(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 0$

Então,

> $\bigtriangledown f(a,b,c) = \langle bc, ac, ab \rangle,$
> $\bigtriangledown g(a,b,c) = \langle 2a, 2b, 2c \rangle$

E as equações são:

> $bc = 2a\lambda,$
> $ac = 2b\lambda,$
> $ab = 2c\lambda.$

Logo,

> $abc = 2a^2\lambda = 2b^2\lambda = 2c^2\lambda,$

que obtemos ao multiplicar cada equação por a, b, c; respectivamente. Então, como $a, b, c > 0$; temos que $\lambda = 0$ ou $a = b = c$.

Se $\lambda = 0$, então a, b ou $c = 0$; o que não pode ocorrer.

Então, devemos ter $a = b = c$; e, da equação de restrição, significa que:

> $a = b = c = \frac{d}{\sqrt{3}}$

E também temos novamente:

> $V_{max} = \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$