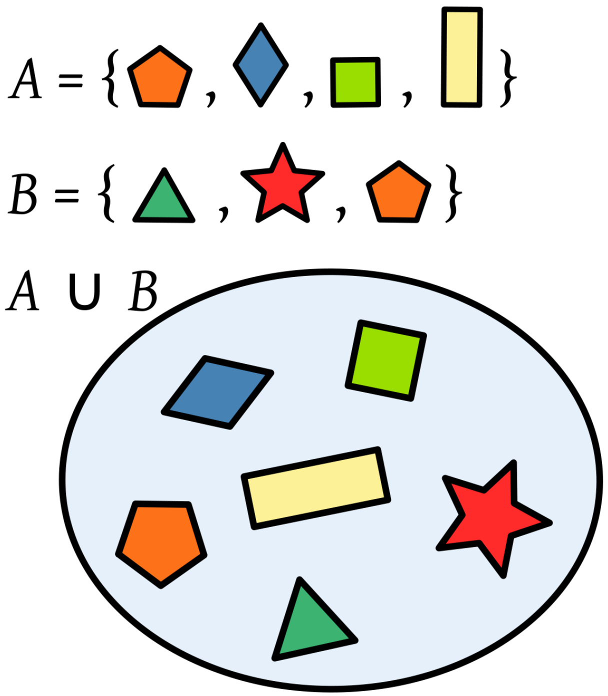
Teoría de conjuntos

Dr. José Lázaro Martínez Rodríguez

Introducción

- La teoría de conjuntos es una rama de la lógica matemática encargada de estudiar las propiedades y relaciones de los conjuntos



Conjuntos

- Un conjunto es cualquier colección de objetos que pueda tratarse como una entidad.
- A cada objeto de la colección lo llamaremos elemento o miembro del conjunto.
- Se dice que un conjunto contiene a sus elementos

Conjuntos

- Hay varias formas de describir un conjunto.
- Una es enumerar todos los miembros del conjunto cuando esto sea posible.
- Para esto se utiliza la notación en la que todos los elementos se enumeran entre llaves.
- El conjunto de las vocales del alfabeto se puede escribir como:
  V={a,e,i,o,u}

Conjuntos

- Un conjunto es un grupo de "objetos”
  - Personas de una clase: { Alice, Bob, Chris }
  - Clases ofrecidas por un departamento: { Álgebra,Programación, ... }
  - Colores del arco iris: { rojo, naranja, amarillo, verde, azul, morado }
  - Estados de la materia { sólido, líquido, gas, plasma }
  - Estados de EE.UU: { Alabama, Alaska, Virginia, ... }
  - Los conjuntos pueden contener elementos no relacionados: { 3, a, rojo, Virginia }
- Aunque un conjunto puede contener (casi) cualquier cosa, la mayoría de las veces utilizaremos conjuntos de números
- Todos los números positivos menores o iguales que 5: {1, 2, 3, 4, 5}
- Algunos números reales seleccionados: { 2.1, π, 0, -6.32, e }

Conjuntos

- El orden no importa
- A menudo los escribimos en orden porque así es más fácil de entender para los humanos
- {1, 2, 3, 4, 5} es equivalente a {3, 5, 2, 4, 1}
- Los conjuntos se escriben entre llaves

Conjuntos - duplicados

- Los conjuntos no tienen elementos duplicados
  - Consideremos el conjunto de vocales del alfabeto.
    - No tiene sentido enumerarlas como {a, a, a, e, i, o, o, o, o, u}.
    - Lo que realmente queremos es {a, e, i, o, u}.
  - Consideremos la lista de alumnos de esta clase
    - De nuevo, no tiene sentido enumerar a alguien dos veces
  - Observa que una lista es como un conjunto, pero el orden importa y se permiten elementos duplicados.
    - No estudiaremos mucho las listas en esta clase.

Conjuntos - nomenclatura

- Los conjuntos suelen representarse con una letra mayúscula (A, B, S, etc.)
- Los elementos suelen representarse con una letra minúscula cursiva (a, x, y, etc.)
- La forma más sencilla de especificar un conjunto es enumerar todos sus elementos: A = {1, 2, 3, 4, 5}
    - No siempre es posible para conjuntos grandes o infinitos.

Conjuntos - especificación

- Puede utilizar una elipsis (...): B = {0, 1, 2, 3, ...}
- Puede causar confusión. Consideremos el conjunto C = {3, 5, 7, ...}. ¿Qué viene después?
  - Si el conjunto son todos los números enteros impares mayores que 2, es 9
  - Si el conjunto son todos los números primos mayores que 2, es 11
- Se puede utilizar la notación de construcción de conjuntos
  - D = {x | x es primo y x > 2}
  - E = {x | x es impar y x > 2}
  - La barra vertical significa "tal que”
  - Así, el conjunto D se lee (en inglés) como: "todos los elementos x tales que x es primo y x es mayor que 2"

Conjuntos - pertenencia

- Se dice que un conjunto "contiene" los distintos "miembros" o "elementos" que lo componen.
- Si un elemento a es miembro (o elemento) de un conjunto S, se utiliza la notación $a \in S$
- $4 \in \{1, 2, 3, 4\}$
- Si un elemento a no es miembro (o elemento) de un conjunto S, se utiliza la notación $a \notin S$
- $7 \notin \{1, 2, 3, 4\}$
- Virginia $\notin \{1, 2, 3, 4\}$

Conjuntos comunes

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de los números naturales
- $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ es el conjunto de los números enteros
- $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de los números enteros positivos.
  - Tenga en cuenta que no hay acuerdo sobre las definiciones exactas de los números enteros y los números naturales.
- $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ es el conjunto de los números racionales.
  - Cualquier número que pueda expresarse como fracción de dos enteros (donde el de abajo no sea cero)
- $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales

Conjunto universal

- *U* es el conjunto universal: el conjunto de todos los elementos (o el "universo") del que se extrae un conjunto cualquiera.
- Para el conjunto {-2, 0, 4, 2}, *U* serían los números reales.
- Para el conjunto {0, 1, 2}, *U* podría ser los números naturales (cero en adelante), los números enteros, los números racionales o los números reales, dependiendo del contexto.

Conjuntos

- Los conjuntos pueden contener otros conjuntos
- S = { {1}, {2}, {3} }
- T = { {1}, {{2}}, {{{3}}} }
- V = { {{1}, {{2}}}, {{{3}}}, { {1}, {{2}}, {{{3}}} } }
  - ¡V tiene sólo 3 elementos!
- Tenga en cuenta que 1 ≠ {1} ≠ {{1}} ≠ {{{1}}}
- Todos ellos son diferentes

Conjunto vacío

- Si un conjunto tiene cero elementos, se denomina conjunto vacío (o nulo).
- Escrito con el símbolo ∅
    - Así, ∅ = { } ← MUY IMPORTANTE
    - Si en un problema te confundes con el conjunto vacío, prueba a sustituir ∅ por { }
- Como el conjunto vacío es un conjunto, puede ser un elemento de otros conjuntos
    - {∅, 1, 2, 3, x } es un conjunto válido

Conjunto vacío

- Obsérvese que $\varnothing \neq \{\varnothing\}$
  - El primero es un conjunto de cero elementos
  - El segundo es un conjunto de 1 elemento (siendo ese único elemento el conjunto vacío)

- Sustituye $\varnothing$ por $\{\ \}$, y obtendrás: $\{\ \} \neq \{\ \{\ \}\ \}$
  - Es más fácil ver que no son iguales de esa manera

Igualdad de conjuntos

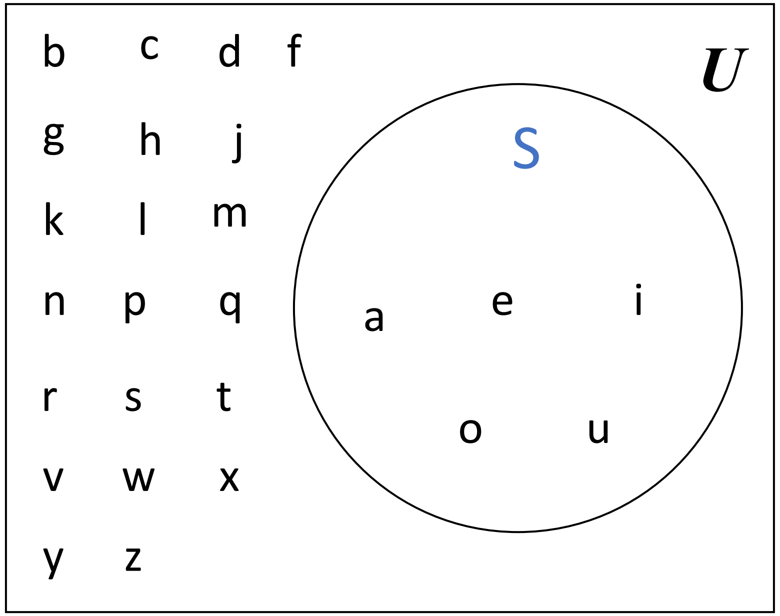
- Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos
  - {1, 2, 3, 4, 5} = {5, 4, 3, 2, 1}
- Recuerda que el orden no importa
  - {1, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 1} = {4, 3, 2, 1}
- Recuerda que los elementos duplicados no importan.
- Dos conjuntos no son iguales si no tienen los mismos elementos
  - {1, 2, 3, 4, 5} ≠ {1, 2, 3, 4}

Diagramas de Venn

- Los conjuntos también se pueden representar gráficamente mediante diagramas de Venn (John Venn).
- En los diagramas de Venn, el conjunto universal U, el cual contiene todos los objetos bajo consideración, se representa por un rectángulo. Dentro del rectángulo se utilizan círculos u otras figuras geométricas para representar conjuntos.
- En ocasiones se utilizan puntos para representar elementos particulares del conjunto.

Diagramas de Venn

- Representan conjuntos gráficamente
  - La caja representa el conjunto universal
  - Los círculos representan los conjuntos
- Consideremos el conjunto S, que es el conjunto de todas las vocales del alfabeto.
- Los elementos individuales no suelen escribirse en un diagrama de Venn



Subconjunto

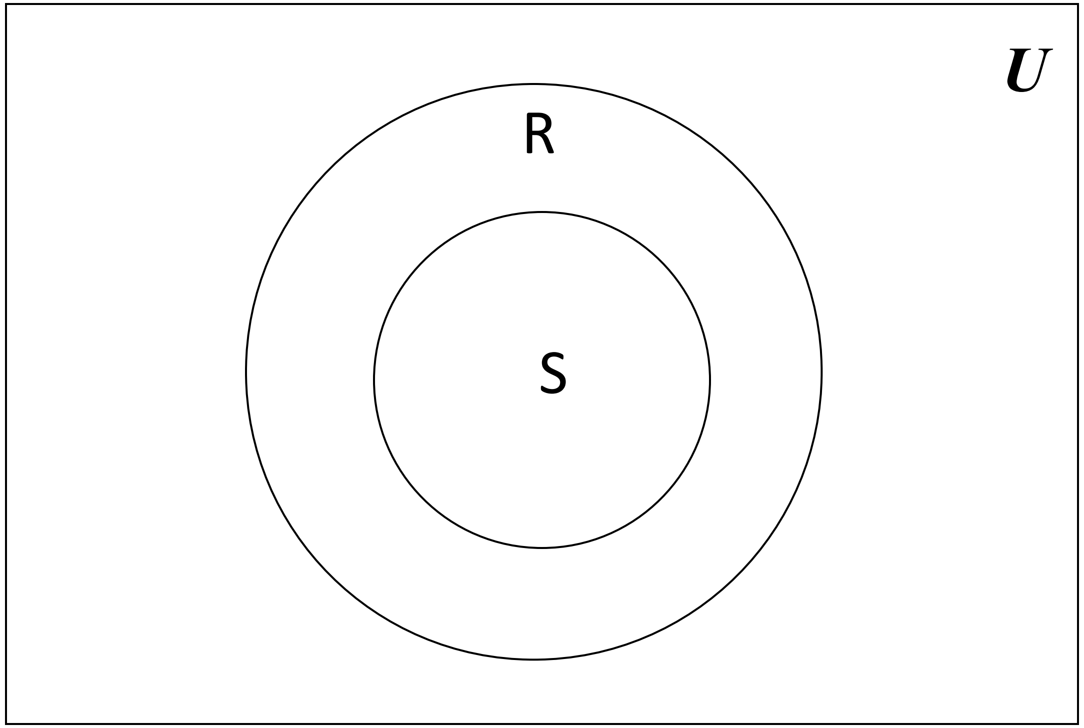
- Si todos los elementos de un conjunto S son también elementos de un conjunto T, entonces S es un subconjunto de T
  - Por ejemplo, si S = {2, 4, 6} y T = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, S es un subconjunto de T
  - Esto se especifica mediante $S \subseteq T$
    - O por $\{2, 4, 6\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- Si S no es un subconjunto de T, se escribe así $S \nsubseteq T$
- Por ejemplo, $\{1, 2, 8\} \nsubseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- Cuando queremos enfatizar que A es un subconjunto de B, pero que $A \neq B$, escribimos $A \subset B$ y decimos que A es un subconjunto propio de B.

Subconjunto propio

- Si S es un subconjunto de T, y S no es igual a T, entonces S es un subconjunto propio de T
  - Sea T = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
  - Si S = {1, 2, 3}, S no es igual a T, y S es un subconjunto de T
- Un subconjunto propio se escribe como S $\subset$ T
  - Sea R = {0, 1, 2, 3, 4, 5}. R es igual a T, y por lo tanto es un subconjunto (pero no un subconjunto propio) de T
  - Puede escribirse como: R $\subseteq$ T y R $\not\subset$ T (o simplemente R = T)
  - Sea Q = {4, 5, 6}. Q no es ni un subconjunto de T ni un subconjunto propio de T

Subconjunto propio- diagrama de Venn

$S \subset R$



Ejemplo

- Indique si los siguientes son subconjuntos propios de A

A={a | a es vocal}

- {a}
- {b}
- {a,e}
- {a,e,i}
- {z}
- {a,e,i,o,u}

Ejemplo

- Indique los subconjuntos de B
- $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x^2 < 10\}$

B={-3,-2,-1,0,1,2,3}

- {a}
- {1}
- 2
- {1,2}
- {1,2,3,4}
- {1,2,3}

Cardinalidad

- La cardinalidad de un conjunto es el número de elementos de un conjunto
- Se escribe como $|A|$
- Ejemplos
  - Sea $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Entonces $|R| = 5$
  - $|\varnothing| = 0$
  - Sea $S = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Entonces $|S| = 4$
- Es la misma notación que se utiliza en geometría para la longitud de los vectores.
- Un conjunto con un solo elemento se denomina a veces conjunto único.

Conjunto potencia

- Dado el conjunto $S = \{0, 1\}$. ¿Cuáles son todos los subconjuntos posibles de S?
  - Son: $\emptyset$ (ya que es un subconjunto de todos los conjuntos), $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{0, 1\}$.
- El conjunto potencia de S (escrito como P(S)) es el conjunto de todos los subconjuntos de S
  - $P(S) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\} \}$
- Nótese que $|S| = 2$ y $|P(S)| = 4$

Conjunto potencia

- Sea $T = \{0, 1, 2\}$.
  - $P(T) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$
- Observe que $|T| = 3$ y $|P(T)| = 8$
- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
  - Obsérvese que $|\emptyset| = 0$ y $|P(\emptyset)| = 1$
- Si un conjunto tiene n elementos, entonces el conjunto potencia tendrá 2^n elementos

$\in$ y $\subseteq$ son diferentes

- Por ejemplo:

  $1 \in \{1\}$ es verdadero

  $1 \subseteq \{1\}$ es falso

  $\{1\} \subseteq \{1\}$ es verdadero

- Cuales de las siguientes declaraciones es verdad?

  $S \subseteq P(S)$

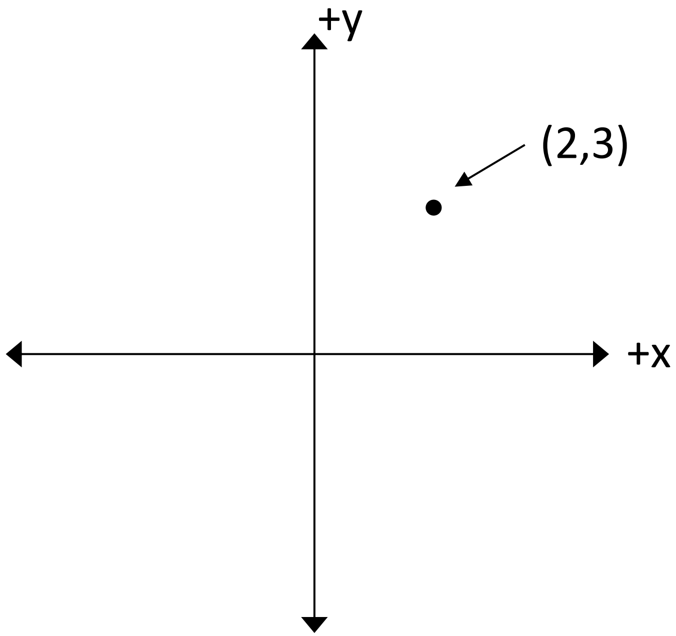
  $S \in P(S)$

Tuplas

- Como los elementos de un conjunto están desordenados, se requiere una estructura diferente para representar colecciones ordenadas.
- La n-tupla ordenada $(a_1, a_2, . . . , a_n)$ es la colección ordenada en la que a_1 es su primer elemento, a_2 el segundo, ... y a_n el elemento n-ésimo.
- Dos n-tuplas ordenadas son iguales si, y sólo si, cada par correspondiente de sus elementos es igual. En otras palabras, $(a_1,a_2,...,a_n) = (b_1,b_2,...,b_n)$ si, y sólo si, $a_i = b_i$, para $i = 1,2,...,n$.
- Las 2-tuplas se llaman pares ordenados. Los pares ordenados (a,b) y (c,d) son iguales si, y sólo si, a=c y b=d. Observa que (a,b) y (b,a) no son iguales, a no ser que a = b.

Tuplas

- En el espacio de 2 dimensiones, es un (x, y) par de números para especificar una ubicación
- En el espacio tridimensional (1,2,3) no es lo mismo que (3,2,1), es una tripleta de números (x, y, z).
  - En un espacio de n dimensiones, es una n-tupla de números.
  - En el espacio bidimensional se utilizan pares o 2tuplas.
  - El espacio tridimensional utiliza tripletas, o 3 tuplas.
- Obsérvese que estas tuplas están ordenadas, a diferencia de los conjuntos.
  - el valor x tiene que ser el primero



Producto cartesiano

- Un producto cartesiano es un conjunto de todas las 2-tuplas ordenadas donde cada "parte" es de un conjunto dado
  - Se denota por A x B, y utiliza paréntesis (no corchetes).
  - Por ejemplo, las coordenadas cartesianas bidimensionales son el conjunto de todos los pares ordenados Z x Z
    - Recordemos que Z es el conjunto de todos los números enteros.
    - Se trata de todas las coordenadas posibles en el espacio bidimensional.
- Ejemplo: Dados A = { a, b } y B = { 0, 1 }, ¿cuál es su producto cartesiano?
  - C = A x B = { (a,0), (a,1), (b,0), (b,1) }

Producto cartesiano

- Nótese que los productos cartesianos sólo tienen 2 partes en estos ejemplos (los ejemplos posteriores tienen más partes)
- Definición formal de un producto cartesiano:
- $A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B \}$

Producto cartesiano

- Todas las posibles calificaciones de esta clase serán un producto cartesiano del conjunto S de todos los alumnos de esta clase y el conjunto G de todas las posibles calificaciones
- Sea S = { Alice, Bob, Chris } y G = { A, B, C }
- D = { (Alice, A), (Alice, B), (Alice, C), (Bob, A), (Bob, B), (Bob, C), (Chris, A), (Chris, B), (Chris, C) }
- Las calificaciones finales serán un subconjunto de esto: { (Alice, C), (Bob, B), (Chris, A) }
  - Este subconjunto de un producto cartesiano se denomina relación (más adelante en el curso se tratará este tema).

Producto cartesiano

- Puede haber productos cartesianos en más de dos conjuntos
- Una coordenada 3D es un elemento del producto cartesiano de Z x Z x Z
- El producto cartesiano de los conjuntos A_1, A_2, . . . , A_n, denotado por $A_1 \times A_2 \times . . . \times A_n$, es el conjunto de n-tuplas $(a_1,a_2,...,a_n)$, donde a_i pertenece a A_i para i = 1,2,...,n.
- En otras palabras:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i \ para \ i = 1,2, \ldots, n\}$$

Producto cartesiano

- Ejemplo, cual es el producto cartesiano de $A \times B \times C$, donde
- $A=\{0,1\}$ y $B =\{1,2\}$ y $C =\{0,1,2\}$.
- $A\times B\times C =\{(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(0,2,0),(0,2,1),$
  $(0,2,2),(1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),(1,2,0),(1,2,1),(1,2,2)\}$

Ejercicio

- Obtenga el producto cartesiano de los conjuntos AxB
- A = {a,b,d}
- B = $\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x^2 < 17\}$

Ejercicio

Enumera los miembros de los siguientes conjuntos

1. $\{x|x$ es un número real positivo tal que $x^2 = 1\}$
2. $\{x|x$ es un número entero positivo menor que $12\}$
3. $\{x|x$ es el cuadrado de un entero y $x < 100\}$
4. $\{x|x$ es un número entero tal que $x^2 = 2\}$

Ejercicio

- Supongamos que A = {2,4,6}, B = {2,6}, C = {4,6} y D = {4, 6, 8}. Determine cuáles de estos conjuntos son subconjuntos de cuáles.
- Cuál es el cardinal de estos conjuntos:
  1. {a}
  2. {{a}}
  3. {a, {a}}
- Obtenga el conjunto potencia de estos conjuntos:
  1. A={2,4,6}
  2. B={a,b,c,d}
  3. C={a,0,b}

Ejercicio

- Sean $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{y,z\}$. Obtén:
  1. $A \times B$
  2. $B \times A$
- Sean $A = \{a,b,c\}$, $B = \{x,y\}$ y $C = \{0,1\}$. Obtén:
  1. $A \times B \times C$
  2. $C \times B \times A$
  3. $C \times A \times B$
  4. $B \times B \times B$
- ¿Cuántos elementos distintos tiene $A \times B$ si A tiene m elementos y B tiene n?