VERDAD, BELLEZA, PROBIDAD

Universidad Autónoma de Tamaulipas

FIC

Facultad de Ingeniería y Ciencias

# Relaciones y funciones

Dr. José Lázaro Martinez Rodríguez

# Introducción

- En la realidad que nos circunda existen relaciones entre elementos, entre conjuntos y entre elementos y conjuntos.
    - Existen relaciones de parentesco, de amistad, de paisanaje, etc., entre personas; relaciones diplomáticas, económicas, etc., entre países;
    - relaciones de paralelismo o de perpendicularidad entre rectas de un plano; relaciones de inclusión entre conjuntos; relaciones como “mayor que” o “menor o igual que” entre números, etc.
- La matemática intenta hacerse eco de tales sucesos y, mediante un proceso de abstracción, expresarlas y estudiarlas científicamente.

# …recordando producto cartesiano

- Un producto cartesiano es un conjunto de todas las 2-tuplas ordenadas donde cada "parte" es de un conjunto dado
  - Se denota por A x B, y utiliza paréntesis (no corchetes).
  - Por ejemplo, las coordenadas cartesianas bidimensionales son el conjunto de todos los pares ordenados Z x Z
    - Recordemos que Z es el conjunto de todos los números enteros.
    - Se trata de todas las coordenadas posibles en el espacio bidimensional.
- Ejemplo: Dados A = { a, b } y B = { 0, 1 }, ¿cuál es su producto cartesiano?
  - C = A x B = { (a,0), (a,1), (b,0), (b,1) }

# Relación

- Sean los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Una relación R sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ es cualquier subconjunto de este producto cartesiano, es decir

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

- Una relación (binaria) R de un conjunto A a un conjunto B es un subconjunto R ⊆ A × B (siendo posible que A = B).
- Para todo a∈A y para todo b∈B si(a,b)∈R se escribe ${}_aR_b$.

# Ejemplo

- Sea U={1, 2, 3, …,7}, A={2, 3, 4} y B={4, 5}, las siguientes son ejemplos de relaciones de A a B:
- $\emptyset$
- {(2, 4), (2, 5)}
- {(2, 4), (3, 4), (4, 5)}
- {(2, 4), (3, 4), (4, 4)}

# Ejemplo

- La relación de menor que $<$ en el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ se describe por el conjunto:
- $\{(0,1),(0,2),(1,2),(0,3),\ldots\} \subseteq N \times N$

- La relación de igualdad “=“ en R se define por el conjunto:
- $\{(x, x) \mid x \in R\} \subseteq R \times R$

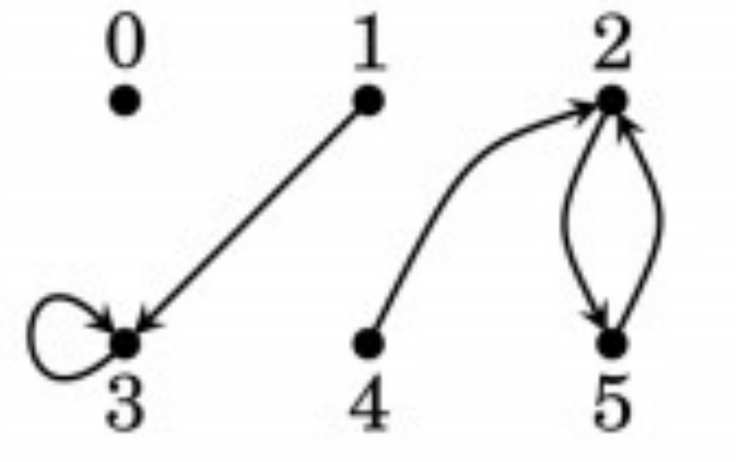
# Relaciones

- Dominio: conjunto de los elementos que definen la función, es decir, los elementos que se van a asociar con otro conjunto (los que sólo pueden asociarse una vez).
- El dominio de R es: $\{a \in A | (a, b) \in R \text{ para algún } b\}$

- Contradominio: también llamado imagen, rango o codominio, es el conjunto de elementos que son el resultado de la asociación del dominio bajo la relación.
- El contradominio de R: $\{b \in B | (a, b) \in R \text{ para algún } a\}$

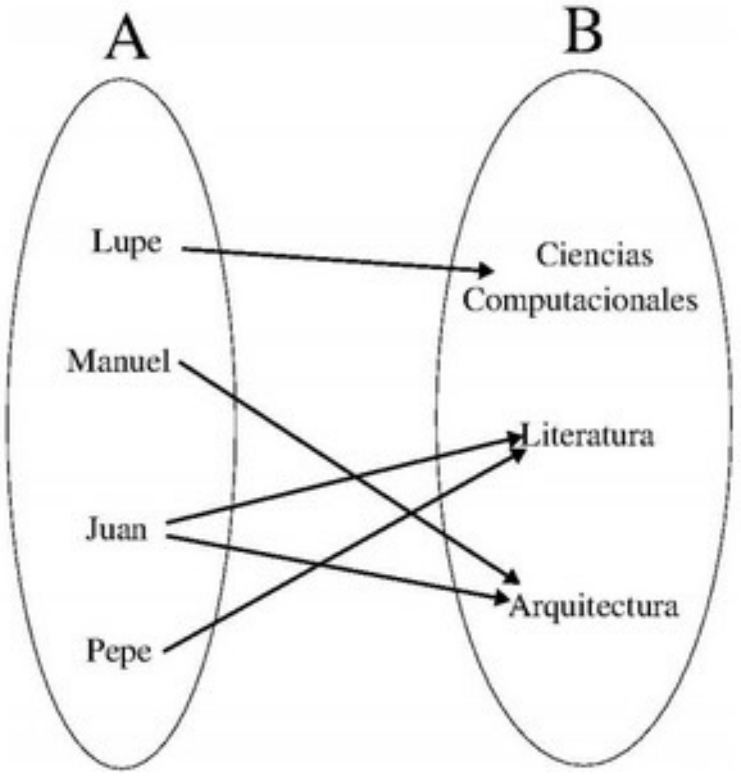
# Relaciones - ejemplo

- Si A = {0,1,2,3,4,5}
- R = {(1, 3), (3, 3), (5, 2), (2, 5), (4, 2)} en A ($R \subseteq A \times A$)



# Relaciones - ejemplo

- Sea A = {Juan, Lupe, Pepe, Manuel} y
  B = {Arquitectura, Ciencias Computacionales, Literatura}
- R= {(Juan, Arquitectura), (Lupe, Ciencias Computacionales), (Pepe, Literatura), (Manuel, Arquitectura), (Juan, Literatura)}
- La relación $R \subseteq A \times B$ indica las licenciaturas que estudian un grupo de personas.



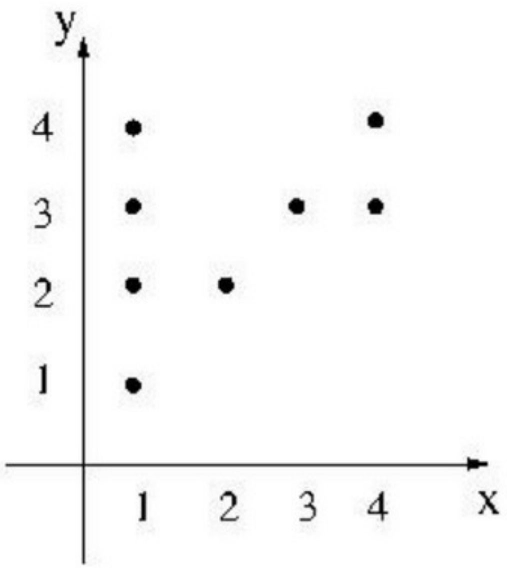
# Relaciones

- Sea A = {1,2,3,4}
  R es la relación “<” sobre A, así:
- R = ?
  - {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}
- Dibuje el grafo correspondiente

# Relaciones

- Sea A = {1,2,3,4}
- R = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3),(4,3),(4,4)} sobre A

$$
\begin{array}{cc}
 & y \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
x \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$




| x | y |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | 2 |
| 1 | 3 |
| 1 | 4 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 3 |
| 4 | 4 |

# Ejercicio

- Sea A = {0, 2, 4, 6, 8}. Describa la relación “≥” y dibuje su grafo.
- Sea A el conjunto {1, 2, 3, 4}. ¿Qué pares ordenados están en la relación R = {(a, b)|b es divisible entre a}?.
  - Dibuje la relación.

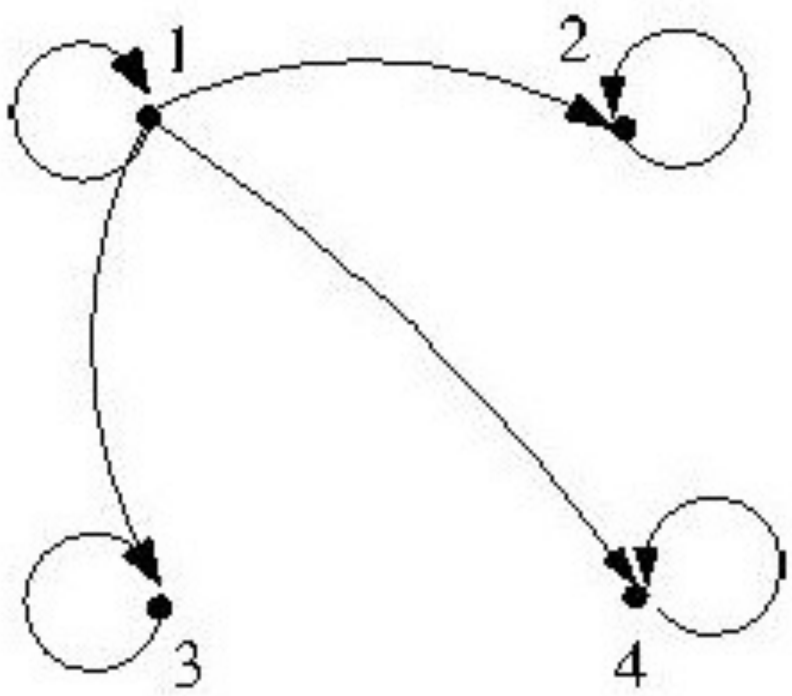
# Ejercicios

- Considere las siguientes relaciones en el conjunto de los enteros:
- $R_1 = \{(a, b) | a \ \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) | a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) | a = b \ \vee a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) | a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) | a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) | a + b \ \leq 3\}$

- ¿Cuáles de estas relaciones contienen a cada uno de los pares (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, −1) y (2, 2)?

# Relación reflexiva

- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R \subseteq A \times A$
- Si $(a, a) \in R$, para todo $a \in A$ entonces $R$ es reflexiva (i.e., todos los elementos están asociados a sí mismos).
- Ejemplo: $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 4)\}$
- Este tipo de relación se identifica visualmente por sus "autolazos" en el grafo



# Relación antirreflexiva

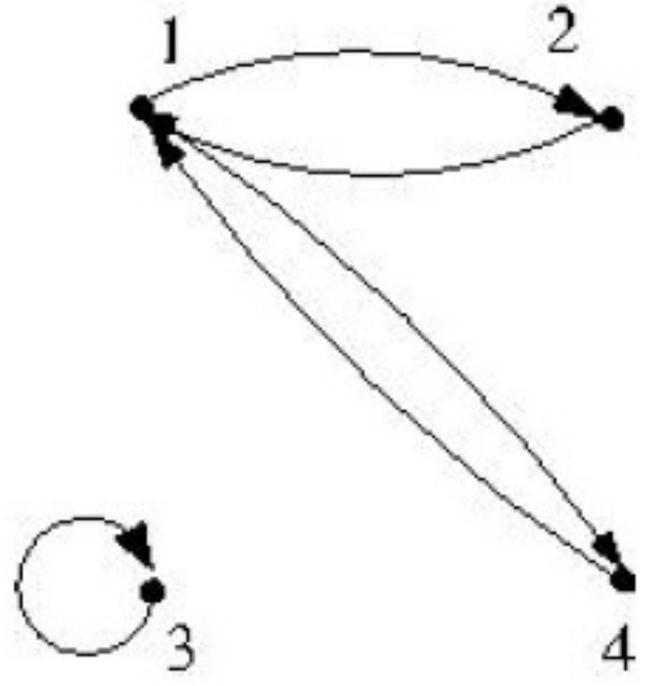
- Si (a, a) $\notin$ R, para todo a $\in$ A (i.e., hay elementos no asociados a si mismos) entonces la relación es antirreflexiva
- Un ejemplo es la relacion "$\neq$" sobre R

# Ejemplo

- Sea $A=\{1, 2, 3, 4\}$, considere las siguientes relaciones R sobre A y determine si son reflexivas:
- $R=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
  - No es reflexiva
- $R=\{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y\}$
  - Es reflexiva

# Relación simétrica

- La relación $R \subseteq A \times A$ es simétrica si para todo $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$
- Ejemplo: $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (4, 1)\}$




- Este tipo de relación se identifica por las ligas de “ida y regreso”.

# Relación antisimétrica

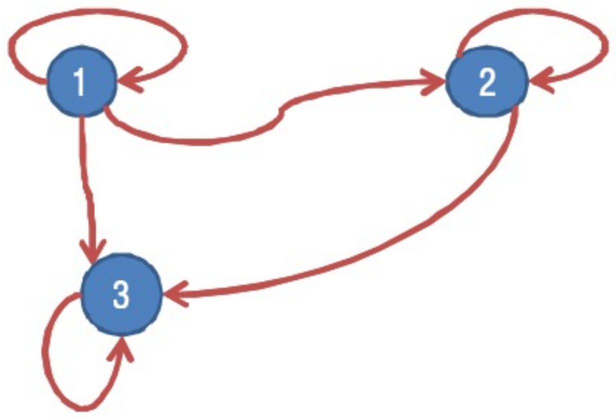
- Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $R \subseteq A \times A$
  Una relación R sobre A es antisimétrica si para todo $(a,b) \in R$ y$(b,a) \in R$ se tiene que $a=b$
  Ejemplo: $R = \{(0, 5), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (3, 3), (3, 2)\}$
- Los lazos “ida y regreso” no son permitidos, sólo los “autolazos”
- Otro ejemplo: “$\leq$” sobre R(e.g. que $a \leq b \wedge b \leq a$, es solo cuando $a = b$)

# Ejemplos

- Sea A={1, 2, 3} y R una relación en A
- R={(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)}
  - Simétrica y no reflexiva
- R={(1,1),(2,2),(3,3),(2,3)}
  - Reflexiva y no simétrica
- R={(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)}
  - Simétrica y reflexiva
- R={(1,1),(2,3),(3,3)}
  - No Simétrica y no reflexiva

# Relación transitiva

- Sea $A = \{1,2,3,4\}$
  La relación $R \subseteq A \times A$ es transitiva si para todo $(a, b) \in R$ y $(b,c) \in R$ entonces $(a,c) \in R$ para todo $a,b,c \in A$
- Ejemplo: $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$




- Otro ejemplo: "Si a es antepasado de b y b es antepasado de c entonces a es antepasado de c"

# Relación transitiva

- Este tipo de relación requiere que si hay un lazo de *a* a b y de b a c, entonces debe de haber un lazo de *a* hacia c
- Ejemplo: A={a,b,c} y R={(a,b),(b,c),(a,c)}⊆A×A

# Ejemplo

- Considere las siguientes relaciones con el conjunto A={1,2,3}

- R1={(1,1),(1,2),(2,3)}
- R2={(1,2),(2,3),(1,3)}

- ¿Cuál es transitiva?

# Relación antitransitiva

- La relación $R \subseteq A \times A$ es antitransitiva si $(a, b) \in R$ y $(b,c) \in R$ entonces $(a,c) \notin R$, para todo $a,b,c \in A$
- Ejemplo: “En un torneo de futbol, si un equipo descalificó al equipo b y b descalificó al equipo c, no sucede que a descalificó a c”

# Ejemplo

- Sea A={1, 2, 3, 4}
- R={(1,1),(2,3),(3,4),(2,4)}
  - Es una relación transitiva en A
- R={(1,3),(3,2)}
  - No es transitiva

# Nota

- Relación antisimétrica no es lo mismo que relación no simétrica
- Relación antireflexiva no es lo mismo que relación no reflexiva
- Relación antitransitiva no es lo mismo que relación no transitiva

# Ejercicios

- Sea A = {a,b,c,d,e} y R = {(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (c, b), (a, d), (d, d), (d, c), (c, a)}.
  - Dibuje el grafo de la relación R.
  - Indique si la relación es reflexiva, no reflexiva, o antireflexiva y por qué.
- Sea A = {a,b,c,d}. Si R = {(a,a),(b,b),(c,c),(d,d), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)}.
  - Grafique la relación.
  - Indique si R es transitiva, simétrica o reflexiva o no y diga por qué.
- Sea A = {1,2,3,4,5,6} y R = {(1, 2), (2, 3), (4, 5), (4, 6), (3, 3)}.
  - Indique el dominio y contradominio de R.