Universidad Autónoma de Tamaulipas
Facultad de Ingeniería y Ciencias

Cuantificadores

Dr. José Lázaro Martínez Rodríguez

Cuantificadores

- En la lógica de predicados se debe definir un conjunto universo, dominio: universo del discurso, que contiene a todos los elementos a los cuales se está sometiendo al predicado.
- Además se cuenta con los conceptos “Todos” y “Algunos ” , que permiten manejar más de un elemento de un conjunto
- Para hacer referencias a conjuntos de elementos son necesarios los cuantificadores universal y existencial.

Cuantificador Universal

- Hace referencia a todos los elementos de un universo $\mathcal{U}$
- $\forall_{x \in \mathcal{U}} P(x)$:
  - $P(x_1) \land P(x_2) \land \cdots \land P(x_n)$

- Se lee: “Todos los x cumplen la propiedad P”

Ejemplo

- Considere la frase: “La suma de dos números enteros también es entero”:
- $\forall_{x,y \in \mathbb{Z}}, suma(x, y) \in \mathbb{Z}$
- $\forall_x \forall_y (x, y \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow (x + y) \in \mathbb{Z}$
- $(\forall_x)\left(\forall_y\right), (x, y \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow (x + y) \in \mathbb{Z}$
- $\forall_x \forall_y (\mathrm{Entero}(x) \wedge \mathrm{Entero}(y)) \Longrightarrow (x + y) \in \mathbb{Z}$

Ejemplo

- Sea P(x) el enunciado ”x+1>x”. ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\forall_x P(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?
- Solución
- Como P(x) es verdadera para todo número real x, la cuantificación $\forall_x P(x)$ es verdadera.

Ejemplo

- Sea $Q(x)$ el enunciado "$x < 2$". ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\forall x Q(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?
- Solución
- Como $Q(x)$ no es verdadera para todo número real x. Por ejemplo, $Q(3)$ es falsa. Por lo tanto, la cuantificación $\forall x Q(x)$ es falsa

Ejercicio

- Sea P(x) la sentencia "x asiste más de cinco horas de clases al día", donde el dominio de x consiste en todos los estudiantes. Expresa las siguientes cuantificaciones en lenguaje natural:
  - $\forall_x P(x)$
  - $\forall_x \neg P(x)$
- Determina el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias si el dominio consiste en todos los enteros.
- $\forall_n(n + 1 > n)$
- $\forall_n(n^2 \geq n)$

Cuantificador existencial

- Hace referencia a uno o más de los elementos del conjunto:
- $\exists_x P(x)$:
  - $P(x_1) \vee P(x_2) \vee, \ldots, \vee P(x_n)$
- Se lee “Algún x cumple la propiedad P”

Ejemplo

- Considera ahora “Hay alguna manzana roja” o “Hay cuando menos una manzana que es roja”” o “Hay algunas manzanas rojas”:
- $\exists_y$ (Manzana(y) $\wedge$ Roja(y))

Ejemplo

- Sea $P(x)$ el enunciado “$x > 3$”. ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\exists x P(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?
- Solución
- Como $x > 3$ es verdadero, por ejemplo, para $x = 4$, la cuantificación existencial de $P(x)$, es decir, $\exists x P(x)$ es verdadera

Ejemplo

- Sea $Q(x)$ el enunciado "$x = x + 1$". ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\exists x Q(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?
- Solución
- Como $Q(x)$ es falsa para todo número real x, la cuantificación existencial de $Q(x)$, que es $\exists x Q(x)$, es falsa

Ejercicio

- Sea P(x) la sentencia "x asiste más de cinco horas de clases al día", donde el dominio de x consiste en todos los estudiantes. Expresa las siguientes cuantificaciones en lenguaje natural:
  - $\exists x P(x)$
  - $\exists x \neg P(x)$
- Determina el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias:
  - $\exists_{n \in \mathbb{Z}} (2n = 3n)$
  - $\exists_{n \in \mathbb{R}} (x^2 = 2)$
  - $\exists_{n \in \mathbb{R}} (x^2 = -1)$

Ejercicio

- De manera individual simbolice las siguientes sentencias:
    - “Existe una bailarina que no es delgada”
    - “Algunos números naturales son impares”
    - “Algunos perros son cazadores”
    - “Todos los hombres y mujeres son mamíferos”
    - “Los gatos tienen cola”
    - “No es cierto que todos los números reales son pares”
    - “Algunos patos no son blancos”
    - “Al menos un estudiante de Telemática es músico”
    - “Todos los estudiantes de computación deben estudiar”

Ejercicios

- Considere el universo de todos los polígonos con tres o cuatro lados y las siguientes proposiciones para este universo:
  - a(x) : todos los ángulos internos de x son iguales
  - e(x) : x es un triángulo equilátero
  - h(x) : todos los lados de x son iguales
  - i(x) : x es un triángulo isósceles
  - p(x) : x tiene un ángulo interno mayor que 180◦
  - q(x) : x es un cuadrilátero
  - r(x) : x es un rectángulo
  - s(x) : x es un cuadrado
  - t(x) : x es un triángulo

Ejercicio

- Traduzca cada una de las siguientes proposiciones en una frase en español, y determine si la proposición es verdadera o falsa.

1. $\forall_x[q(x) \oplus t(x)]$
2. $\forall_x[i(x) \Rightarrow e(x)]$
3. $\exists_x[t(x) \wedge p(x)]$
4. $\forall_x[a(x) \Rightarrow e(x)]$
5. $\forall_x[(a(x) \wedge t(x)) \Leftrightarrow e(x)]$
6. $\exists_x[q(x) \wedge \neg r(x)]$
7. $\exists_x[r(x) \wedge \neg s(x)]$
8. $\forall_x[h(x) \Rightarrow e(x)]$
9. $\forall_x[(h(x) \wedge q(x)) \Rightarrow s(x)]$
10. $\exists_x[q(x) \wedge p(x)]$
11. $\forall_x[t(x) \Rightarrow \neg p(x)]$
12. $\forall_x[a(x) \Rightarrow (e(x) \oplus r(x))]$
13. $\forall_x[s(x) \Leftrightarrow (a(x) \wedge h(x))]$
14. $\forall_x[t(x) \Rightarrow (a(x) \Leftrightarrow h(x))]$