Matriz aumentada y escalonada

Dr. José Lázaro Martínez Rodríguez

Matriz aumentada

- la matriz aumentada, o matriz ampliada, de una matriz se obtiene al combinar dos matrices tal y como se muestra a continuación.

- Sean las matrices A y B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Entonces la matriz aumentada (A|B) se representa de la siguiente manera:

$$(A|B) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta notación es útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales dados por matrices cuadradas.

Matriz aumentada

- En álgebra lineal, se utiliza la matriz aumentada para representar los coeficientes, así como las constantes de cada ecuación. Dado el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2 \\ 6x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 11 \end{cases}$$

- la matriz aumentada estaría formada por:

dando como resultado final:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \\ 6 & 5 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

Matriz escalonada

- Una Matriz Escalonada (o también Matriz en forma escalonada o Escalonada por Filas), es aquella en la que el primer elemento distinto de cero (llamado pivote) está a la derecha del pivote de la fila anterior.
- Es decir, debajo de cada pivote, todos los elementos de la matriz son iguales a 0.

Matriz escalonada

- En álgebra lineal una matriz se dice que es escalonada, escalonada por filas o que está en forma escalonada si:
  1. Todos los renglones cero están en la parte inferior de la matriz.
  2. El elemento delantero de cada renglón diferente de cero está a la derecha del elemento delantero diferente de cero del renglón anterior.
  3. El primer elemento diferente de 0 y 1 de cada fila está a la derecha del primer elemento diferente de 0.
- Si en cada fila el pivote es el único elemento no nulo de su columna, se dice que es escalonada reducida por filas.

Matriz escalonada

- Ejemplos
- Escalonada reducida
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solución a sistema lineal

- Los sistemas de ecuaciones lineales más sencillos de resolver son los sistemas de forma triangular o escalonada. Considere:
- $2x + 3y - 2z = 1$
- $2y + z = -2$
- $3z = -6$
- Estos sistemas se resuelven mediante sustitución hacia atrás. Este método consiste en resolver primero la última ecuación; con su solución resolver la penúltima ecuación y así sucesivamente

Operaciones elementales de renglón

- En lugar de manejar ecuaciones es preferible manejar la matriz aumentada del sistema. Por lo que las operaciones entre ecuaciones pueden verse como operaciones entre renglones de una matriz.

- La idea es que capturen las operaciones elementales entre las ecuaciones de un sistema lineal pero llevadas a la matriz aumentada.

Operaciones elementales de renglón

- Intercambio. Intercambia dos renglones

$$\boxed{R_i \leftrightarrow R_j}$$

- Escalamiento. Multiplicar un renglón por una constante diferente de cero

$$\boxed{R_i \leftarrow c\,R_i,\ c \neq 0}$$

- Eliminación. Sume a un renglón un múltiplo de otro renglón

$$\boxed{R_j \leftarrow R_j + c\,R_i}$$

Operaciones elementales de renglón

- **a.** Intercambiar el primer renglón por el segundo
- *Matriz original* *Nueva matriz*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- **b.** Multiplicar primer renglón por $\frac{1}{2}$
- *Matriz original* *Nueva matriz*

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} \frac{1}{2}R_1 \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Operaciones elementales de renglón

- **c.** Suma -2 veces la primera fila de la matriz original a la tercera fila.

Matriz original *Nueva matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ \\ -2R_1 + R_3 \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 13 & -8 \end{bmatrix}$$

Operaciones elementales de renglón

- Las operaciones elementales son importantes porque ellas no cambian el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales
- Al efectuar un número finito de operaciones elementales a la matriz aumentada asociada a un sistema de ecuaciones lineales, las soluciones del sistema obtenido son las **mismas** soluciones del sistema original.

Ejercicio

- Represente la forma aumentada del siguiente sistema
- $2x + 3y - 2z = 1$
- $x + 2y + z = 5$
- $3x + y + 3z = 10$
- Realice las operaciones
- $R_3 \longleftarrow R_3 - 3R_2$
- $R_3 \longleftrightarrow R_1$
- $R_2 \longleftarrow 3R_2$