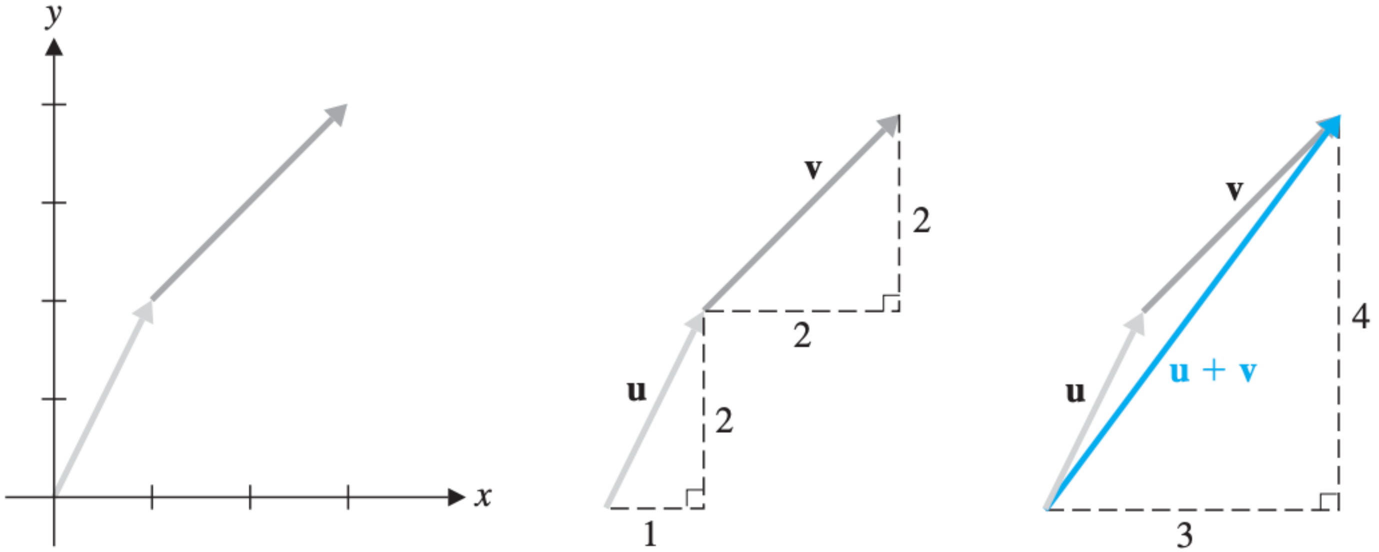
Operaciones con vectores

Dr. José Lázaro Martínez Rodríguez

Suma de vectores

- Con frecuencia se quiere "seguir" un vector a partir de otro. Esto conduce a la noción de suma de vectores, la primera operación vectorial básica.
- u = [1, 2] y v = [2, 2], de modo que el efecto neto de seguir u por v es
- [1 +2, 2 + 2] = [3, 4]



Suma de vectores

- Consideremos dos vectores u y v en R^n, digamos

$u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

- Su suma, escrita $u + v$, es el vector obtenido sumando los componentes correspondientes de u y v. Es decir,

$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

Suma de vectores

- Ejemplo
- Sea $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$ Entonces
- $u + v = \begin{bmatrix} 2+1 \\ 4+(-6) \\ -5+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Suma de vectores

- Considere los siguientes vectores a,b y c
- $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$
- Realice las operaciones
  - $a + b$
  - $a + c$
  - $a + b + c$
  - $a + 2$
  - $a - c$

$$A - B =$$
$$\langle (a_1 - a_2), (b_1 - b_2), (c_1 - c_2) \rangle$$

---

ex.

$$A = \langle 18, 5, 3 \rangle \qquad B = \langle -10, 9, -10 \rangle$$

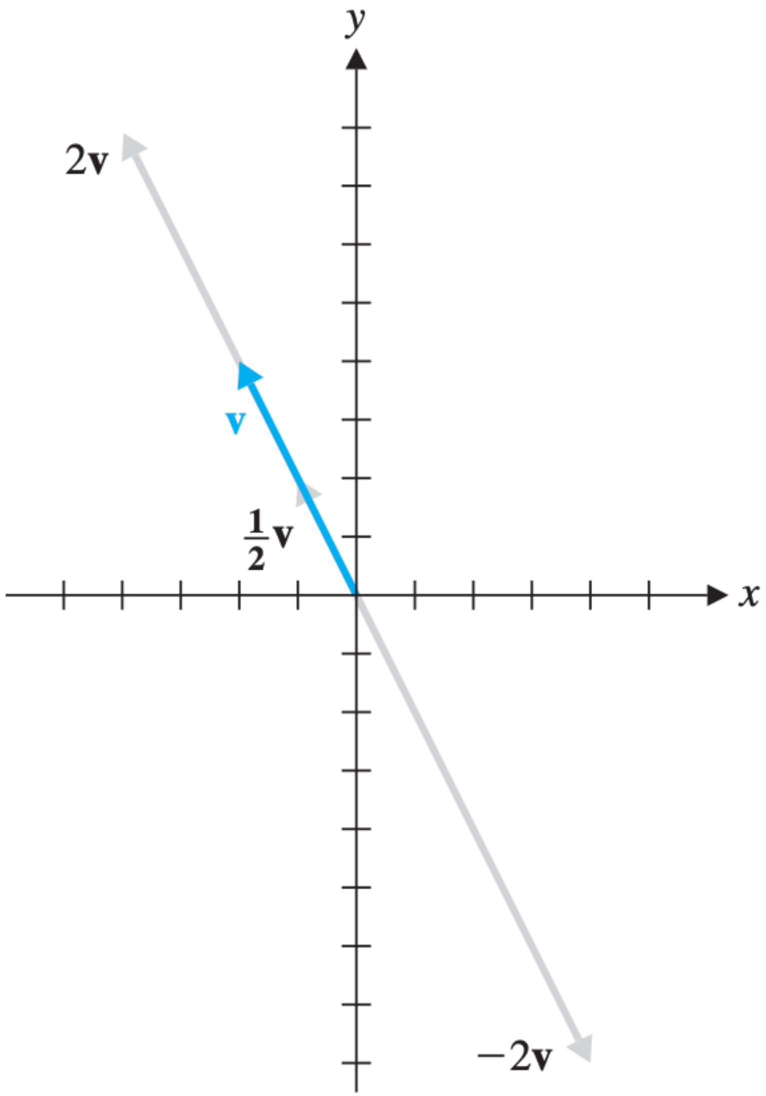
$$A - B = \langle (18 - (-10)), (5 - 9), (3 - (-10)) \rangle$$
$$= \langle 28, -4, 13 \rangle$$

Multiplicación escalar

- La segunda operación vectorial básica es la multiplicación escalar. Dado un vector v y un número real c , el múltiplo escalar cv es el vector que se obtiene al multiplicar cada componente de v por c.
- Por ejemplo, 3[-2, 4] = [-6, 12].
- En general,
- $cv = c[v_1, v_2] = [cv_1, cv_2]$
- Geométricamente, cv es una versión “a escala” de v

Multiplicación escalar

- Si v = [-2, 4], calcule y dibuje 2v, 12 v, y -2v
- Calcule el modo siguiente
  - $2v = [2(-2), 2(4)\ ] = [-4{,}8]$
  - $\frac{1}{2}v = \left[\frac{1}{2}(-2), \frac{1}{2}(4)\ \right] = [-1{,}2]$
  - $-2v = [-2(-2), -2(4)\ ] = [4, -8]$



- Observe que cv tiene la misma dirección que v si c > 0 y la dirección opuesta si c < 0.
- También observe que cv es |c| veces más largo que v. Por esta razón, en el contexto de los vectores, las constantes (esto es: números reales) se conocen como **escalares**.

Combinación lineal

- Supongamos ahora que se nos dan los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_m$en R^n y los escalares $k_1, k_2, \ldots, k_m$ en R.
- Podemos multiplicar los vectores por los escalares correspondientes y luego sumar los productos escalares resultantes para formar el vector
- $v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + \cdots + k_m u_m$

- El vector v se conoce como una combinación líneal de $u_1, u_2, \ldots, u_m$

Ejercicios

- Considere los siguientes vectores a,b y c
- $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$
- Realice las operaciones
  - $7a$
  - $3a - 5c$
  - $b - 2a$

Obtener combinación lineal

- Escriba el vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ como una combinación lineal de los vectores $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ¿Cómo era la forma de una combinación lineal?
- $v = xu_1 + yu_2 + zu_3$
- Reemplazando tenemos
- $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y + 2z \\ x + 2y - z \\ x + 3y + z \end{bmatrix}$

Debemos encontrar $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$

Obtener combinación lineal

- $\begin{bmatrix} x+y+2z \\ x+2y-z \\ x+3y+z \end{bmatrix}$ consideremos cada elemento como $\begin{bmatrix} E1 \\ E2 \\ E3 \end{bmatrix}$ entonces tenemos un sistema triangular que podemos ir sustituyendo de acuerdo con v

$x+y+2z=1$ (E1)

- $x+2y-\ \ z=-2$ (E2)

$x+3y+z=5$ (E3)

- Restamos E1 a las ecuaciones E2 y E3 para despejar x

$x+y+2z=1$

$y-\ \ 3z\ \ =-3$ (E4)

$2y-\ \ z=4$ (E5)

- Multiplicamos por 2 la E4 y la restamos a E5

$$=-\ \begin{array}{r} 2y-\ \ z=4 \\ 2y-\ \ 6z=-6 \end{array}$$

$$5z=10$$

$$z=2$$

Con esto despejamos las otras variables

Obtener combinación lineal

- Por lo tanto tenemos que $x = -6, y = 3, z = 2$
- Con lo que resulta la combinación lineal
- $v = -6u_1 + 3u_2 + 2u_3$

- Tenga en cuenta que buscamos sistemas equivalentes para ir eliminando variables de las ecuaciones y así poder despejar la variable restante

Ejercicio

- Escriba el vector $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ como una combinación lineal de los vectores $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ $u_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio

- Escriba el vector $v = \begin{bmatrix} 193 \\ 75 \\ 117 \end{bmatrix}$ como una combinación lineal de los vectores $u_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} u_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$