Sistemas de ecuaciones lineales – Método de sustitución

Dr. José Lázaro Martínez Rodríguez

Resolución de sistemas por el método de sustitución

- Puedes resolver un sistema de ecuaciones utilizando distintos métodos. La idea es determinar qué método es más fácil para ese problema concreto.
- El método de sustitución es una técnica utilizada para resolver sistemas de ecuaciones.
- Cuando se tiene un sistema de dos o más ecuaciones, cada una de las cuales contiene múltiples variables, se puede utilizar el método de sustitución para encontrar los valores de esas variables que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente.

Resolución de sistemas por el método de sustitución

- Así es como suele funcionar el método de sustitución:

1. **Resuelve una ecuación para una variable:** Elige una de las ecuaciones del sistema y resuélvela para una de las variables en términos de las otras variables.
2. **Sustituye:** Toma la expresión que has encontrado en el paso 1 y sustitúyela en las demás ecuaciones del sistema siempre que aparezca la misma variable.
3. **Resuelve** para la(s) variable(s) restante(s): Ahora tienes una ecuación con una variable que puedes resolver.
4. **Regresar.** Una vez hallado el valor de esa variable, puedes volver a sustituirla en una de las ecuaciones originales para hallar el valor o los valores de las demás variables.
5. **Comprueba tu solución:** Una vez que hayas encontrado los valores de todas las variables, sustitúyelos en todas las ecuaciones originales para asegurarte de que las satisfacen todas. Si es así, habrás encontrado la solución del sistema de ecuaciones

Resuelve el sistema utilizando la sustitución

$$x + y = 5$$

$$y = 3 + x$$

Paso 1: Resolver una ec. para una variable.

Resuelve el sistema utilizando la sustitución

$$x + y = 5$$

$$y = 3 + x$$

Paso 1: Resolver una ec. para una variable.	¡La segunda ecuación ya está resuelta para y!
Paso 2: Sustituir	$x + y = 5$ $x + (\mathbf{3 + x}) = 5$
Paso 3: Resuelve la ecuación.	$2x + 3 = 5$ $2x = 2$ $x = 1$

Resuelve el sistema utilizando la sustitución

$x + y = 5$

$y = 3 + x$

Paso 4: Vuelve para hallar la otra variable.

$x + y = 5$

$(1) + y = 5$

$y = 4$

Paso 5: Comprueba tu solución.

(1, 4)

$(1) + (4) = 5$ ✓

$(4) = 3 + (1)$ ✓

La solución es (1, 4). ¿Cuál crees que sería la solución si representaras gráficamente las dos ecuaciones?

¿Cuál es la respuesta correcta?

$$3x - y = 4$$
$$x = 4y - 17$$

1. (2, 2)
2. (5, 3)
3. (3, 5)
4. (3, -5)

Resuelve el sistema utilizando la sustitución

$$3y + x = 7$$
$$4x – 2y = 0$$

- Primero, resolver para una variable

$$3y + x = 7$$

$$x = -3y + 7$$

- Segundo, sustituir

$$4x – 2y = 0$$
$$4(-3y + 7) – 2y = 0$$

Resuelve el sistema utilizando la sustitución

$$3y + x = 7$$
$$4x - 2y = 0$$

- Tercero, resolver

$$-12y + 28 - 2y = 0$$
$$-14y + 28 = 0$$
$$-14y = -28$$
$$\mathbf{y = 2}$$

- Cuarto, volver

$$4x - 2y = 0$$
$$4x - 2(\mathbf{2}) = 0$$
$$4x - 4 = 0$$
$$4x = 4$$
$$\mathbf{x = 1}$$

Resuelve el sistema utilizando la sustitución

$$3y + x = 7$$
$$4x - 2y = 0$$

- Quinto, comprobar

(1, 2)

$$3(2) + (1) = 7$$
$$4(1) - 2(2) = 0$$

Si resolvieras la primera ecuación para x, ¿qué se sustituiría en la ecuación inferior?

$$2x + 4y = 4$$
$$3x + 2y = 22$$

1. $-4y + 4$
2. $-2y + 2$
3. $-2x + 4$
4. $-2y + 22$

Resuelve el sistema utilizando la sustitución

$$x = 3 - y$$
$$x + y = 7$$

- Primero, resolver para una variable
- La primera ecuación está resuelta para x

- Segundo, sustituir

$$x + y = 7$$
$$(\mathbf{3 - y}) + y = 7$$

- Tercero, resolver

NO hay soluciones

$$3 = 7$$

Las variables se eliminan, este es un caso especial

3 = 7? FALSO!

Resuelve el sistema utilizando la sustitución

$$2x + y = 4$$
$$4x + 2y = 8$$

- Primero, resolver para una variable
- La primera ecuación se resuelve fácil para y

$$y = -2x + 4$$

- Segundo, sustituir

$$4x + 2y = 8$$
$$4x + 2(-2x + 4) = 8$$

Cuando el resultado es Verdadero, tenemos infinitas soluciones

- Tercero, resolver

$$4x – 4x + 8 = 8$$
$$8 = 8$$

Este también es un caso especial

8 = 8? Verdadero!

Punto de equilibrio

Método de sustitución: Punto de equilibrio

- Aplicaciones empresariales de los sistemas lineales
- Los analistas empresariales suelen interesarse por los beneficios, los ingresos y los costes de una empresa.
- Al evaluar un plan de empresa, es importante saber a qué nivel de ventas se espera que se igualen los ingresos y los costes. Este nivel de ventas se denomina umbral de rentabilidad y es el punto en el que la empresa empieza a obtener beneficios.
- Toda empresa tiene dos tipos de costos: los **fijos** y los **variables**.

Resolución de un sistema por el método de sustitución

Los costes fijos son aquellos que permanecen constantes independientemente de los niveles de producción. Por ejemplo, el alquiler de edificios, la investigación y desarrollo de productos y la publicidad suelen ser costes fijos.

Los costes variables son los que varían con el nivel de producción. Por ejemplo, las materias primas y los salarios de los trabajadores de la línea de producción son costes variables.

Ejemplo- Determinar umbral de rentabilidad

- Una artesana quiere vender en Internet sus ángeles hechos a mano.
- Calcula que el costo de material de cada ángel es de $3,50 . En enero de 2024, el vendedor online craftmall.com cobraba $14.95 al mes por una cuenta Premier con hasta 25 productos.

- Comparando su artesanía con otras similares en el mercado, la artesana calcula que puede vender el ángel artesanal por $9.95.
- **¿Cuántos ángeles tendrá que vender al mes para alcanzar el punto de equilibrio?** A ese nivel de producción, ¿cuáles serán sus costos de producción, sus ingresos y sus beneficios?

Ejemplo- Determinar umbral de rentabilidad

- La ecuación de costos de los ángeles artesanales es la suma del costo variable, $3.50 por ángel, y el costo fijo, $14.95. Sea **a** el número de ángeles vendidos en un mes.

- La ecuación de costos es

$$C(a) = 3.50a + 14.95 \text{ dollars}$$

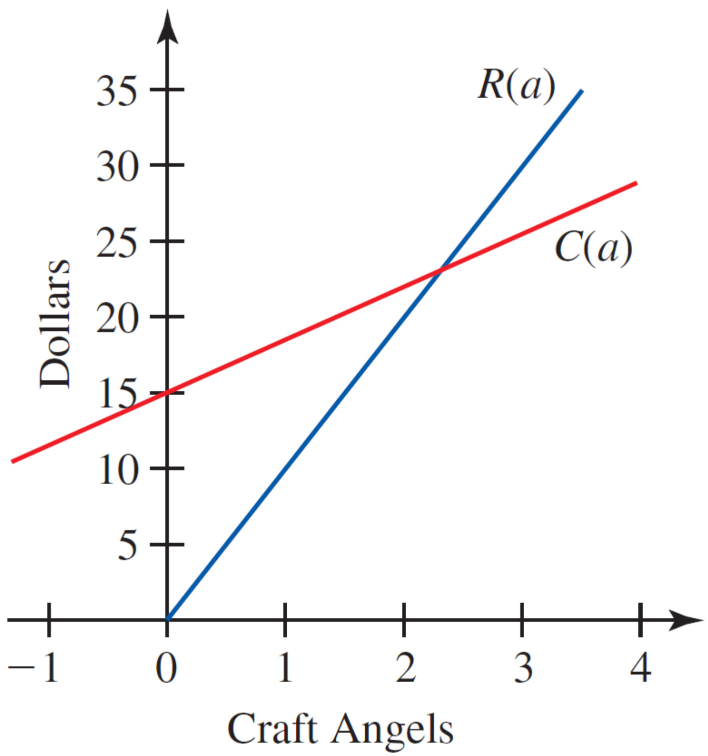
- La ecuación de ingresos es

$$R(a) = 9.95a \text{ dollars}$$

- Queremos determinar cuándo sus ingresos serán iguales a sus costos.

Solución

- En otras palabras, queremos encontrar el valor de ***a*** tal que $R(a) = C(a)$.
- Si se grafican las dos funciones simultáneamente, se obtiene la figura siguiente.



Solución

- Parece que las gráficas se intersecan cerca de (2.3, 23) en el punto de intersección, $R(a) = C(a)$. Podemos encontrar el punto exacto de intersección utilizando el método de sustitución.
- Podemos encontrar el punto exacto de intersección utilizando el método de sustitución.

$$R(a) = C(a)$$

$$9.95a = 3.50a + 14.95$$

$$6.45a = 14.95$$

$$a = \frac{14.95}{6.45}$$

$$a \approx 2.318$$

Solución

Evaluamos *R*(*a)* en *a* = 2.318 y determinamos que

$$R(2.318) = 9.95(2.318)$$
$$\approx 23.06$$

Por tanto, el punto de equilibrio es aproximadamente (2.318, 23.06).

En el contexto del problema, sin embargo, no tiene sentido hablar de 2.318 ángeles. Así que concluimos que debe vender 3 ángeles al mes para cubrir sus gastos.

Solución

El costo de producción y publicidad de 3 ángeles es

$$C(3) = 3.50(3) + 14.95$$

$$= \$25.45$$

Los ingresos por la venta de 3 ángeles son

$$R(3) = 9.95(3)$$

$$= \$29.85$$

Ganará 4,40 dólares si vende 3 ángeles.

$$(\$29.85 - \$25.45 = \$4.40).$$

Resolución de un sistema de tres o más ecuaciones

Resolución de un sistema de tres o más ecuaciones

Para que un sistema de tres o más ecuaciones lineales tenga solución, todas las rectas deben intersecarse en el mismo punto.

El hecho de que dos rectas se crucen en un punto (a, b) no asegura que la tercera recta cruce a las dos primeras en el mismo punto.

Ejemplo - Resolución de un sistema de tres ecuaciones

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ 3x + 2y &= 11 \\ 4x - 4y &= 8 \end{aligned}$$

Solución:

Encontraremos el punto de intersección de las dos primeras ecuaciones y luego comprobaremos si el punto es una solución de la tercera ecuación.

Ejemplo - Solución

La primera ecuación puede escribirse como *y* = *2x* - 5. Sustituyendo este valor por *y* en la segunda ecuación y resolviendo para *x* se obtiene

$$3x + 2y = 11$$

$$3x + 2(2x - 5) = 11$$

$$3x + 4x - 10 = 11$$

$$7x - 10 = 11$$

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

Ejemplo - Solución

Sustituimos este valor de *x* en *y* = *2x* - 5 y resolvemos.

$$y = 2(3) - 5$$
$$= 1$$

El punto de intersección de las dos primeras rectas es (3, 1).
Comprobaremos si este punto satisface la tercera ecuación.

$$4x - 4y = 8$$
$$4(3) - 4(1) = 8$$
$$12 - 4 = 8$$
$$8 = 8$$

Ejemplo - *Solución*

Como el enunciado resultante es verdadero, la solución del sistema de ecuaciones es $x = 3$ $y = 1$. (Un enunciado falso habría mostrado que el sistema era inconsistente.) Confirmamos el resultado con la gráfica.