Espacios vectoriales

Dr. José Lázaro Martínez Rodríguez

Vectores en R^n

- Una *n-tupla* ordenada:

  una secuencia de *n números* reales $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

- *n-espacio*: R^n

  el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas

Ejemplo

$n = 1 \qquad R^1 = 1\text{-espacio}$

$= \text{conjunto de todos los números reales}$

$n = 2 \qquad R^2 = 2\text{-espacio} \qquad (x_1, x_2)$

$= \text{conjunto de todos los pares ordenados de números reales}$

$n = 3 \qquad R^3 = 3\text{-espacio} \qquad (x_1, x_2, x_3)$

$= \text{conjunto de todos los triples ordenados de números reales}$

$n = 4 \qquad R^4 = 4\text{-espacio} \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$= \text{conjunto de todos los cuádruples ordenados de}$
números reales

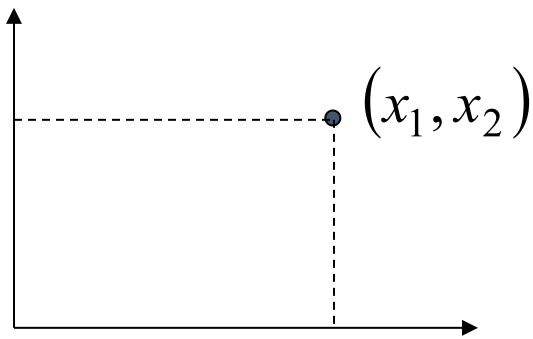
Notas:

(1) Una *n-tupla* puede verse como un punto en R^n con las x_i's como sus coordenadas. $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

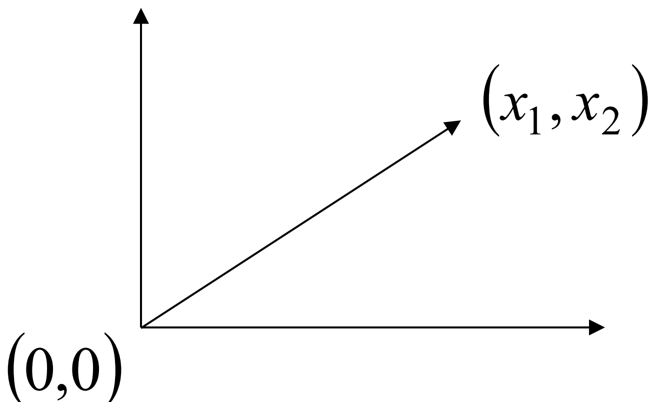
(2) Una *n-tupla* puede verse como un vector

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ en R^n con la x_i's como sus componentes.

- Ex:



un punto



un vector

Espacios vectoriales

- Espacios vectoriales:
  - Sea ***V*** un conjunto sobre el que se definen dos operaciones (*suma vectorial y multiplicación escalar*). Si se cumplen los siguientes axiomas para cada **u, v,** y **w** en *V* y cada escalar (número real) *c* y *d*, entonces *V* se llama un **espacio vectorial**.

Adición:

(1) **u+v** *también* está en *V*

(2) **u+v=v+u**

(3) **u+(v+w)=(u+v)+w**

(4) *V* tiene un vector cero **0** tal que para cada **u** en *V*, **u+0=u**

(5) Para cada **u** en *V*, hay un vector en *V* denotado por -u tal que **u+(-u)=0**

Multiplicación escalar:

(6) $c\mathbf{u}$ *también* está en V *(multiplicación por un escalar)*.

(7) $c(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$

(8) $(c+d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$

(9) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$

(10) $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$

- **Nota:**

(1) Un espacio vectorial consta de **cuatro entidades**:

un conjunto de vectores, un conjunto de escalares y dos operaciones

V: conjunto no vacío

c: scalar

$+$ $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ adición vectorial

$\bullet$ $(c, \mathbf{u}) = c\mathbf{u}$ multiplicación escalar

$(V, \quad +, \quad \bullet)$ **se denomina entonces espacio vectorial**

(2) $V = \{\mathbf{0}\}$: espacio vectorial cero

- Ejemplos de espacios vectoriales:

(1) espacio de *n-tuplas*: $\boxed{R^n}$

$$(u_1,u_2,\cdots,u_n)+(v_1,v_2,\cdots,v_n)=(u_1+v_1,u_2+v_2,\cdots,u_n+v_n)$$ adición vectorial

$$k(u_1,u_2,\cdots,u_n)=(ku_1,ku_2,\cdots,ku_n)$$ multiplicación escalar

(2) Espacio matricial: $\boxed{V=M_{m\times n}}$ (conjunto de todas las matrices $m\times n$ con valores reales)

Exp: $(m=n=2)$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}$$ adición vectorial

$$k\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$ multiplicación escalar

(3) espacio polinómico de grado *n-ésimo*: $\boxed{V = P_n(x)}$
(el conjunto de todos los polinomios reales de grado n o inferior)

$$p(x)+q(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n$$

$$kp(x)=ka_0+ka_1x+\cdots+ka_nx^n$$

(4) Espacio de funciones: $\boxed{V=c(-\infty,\infty)}$ (el conjunto de todas las funciones continuas de valor real definidas en toda la recta real).

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(kf)(x)=kf(x)$$

- (Propiedades de la multiplicación escalar)

  Sea **v cualquier** elemento de un espacio vectorial V, y sea c cualquier escalar. Entonces se cumplen las siguientes propiedades.

  (1) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

  (2) $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$

  (3) If $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$, then $c = 0$ or $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

  (4) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

- Nota: Para mostrar que un conjunto no es un espacio vectorial, necesitas encontrar un axioma que no se satisface

- Ej: El conjunto de todos los enteros no es un espacio vectorial.

$$1 \in V, \tfrac{1}{2} \in R$$

$$\underset{\text{escalar}}{\left(\tfrac{1}{2}\right)}\underset{\text{entero}}{(1)} = \underset{\text{no entero}}{\tfrac{1}{2}} \notin V$$

(no es cerrado bajo multiplicación escalar)

- Ej: El conjunto de todos los polinomios de segundo grado no es un espacio vectorial.

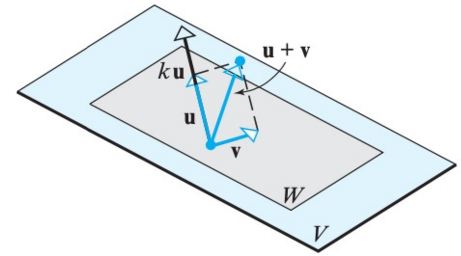
Sea $\quad p(x) = x^2 \qquad q(x) = -x^2 + x + 1$

$$\Rightarrow p(x) + q(x) = x + 1 \notin V$$

(no es cerrado bajo suma de vectores)

Subespacios de espacios vectoriales

- Subespacio:



▶ Figure 4.2.1 The vectors **u** and **v** are in W, but the vectors $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ and $k\mathbf{u}$ are not.

Si

$(V,+,\bullet)$ un espacio vectorial

$\left.\begin{array}{l} W \neq \phi \\ W \subseteq V \end{array}\right\}$ un subconjunto no vacío

$(W,+,\bullet)$: un espacio vectorial (bajo las operaciones de suma y multiplicación escalar definida en V)

$\Rightarrow$ *Entonces* ***W*** **es un subespacio** de ***V***

- Subespacio trivial:

Todo espacio vectorial V tiene al menos dos subespacios.

(1) El espacio vectorial cero **{0}** es un subespacio de V.

(2) V *es* un subespacio de V.

- (Prueba de un subespacio)

Si W *es* un **subconjunto no vacío** de un espacio vectorial V, entonces W es un subespacio de V **si y sólo si** se cumplen las siguientes condiciones.

(1) Si **u** y **v están** en W, entonces **u+v** está en W *(cerrado por adición)*

(2) Si **u** ***está*** en W y c es un escalar cualquiera, entonces **cu** está en W *(cerrado bajo multiplicación por un escalar)*.

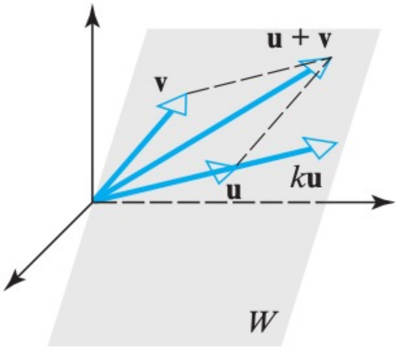


Figure 4.2.3 The vectors **u** + **v** and k**u** both lie in the same plane as **u** and **v**.

Combinación lineal

- Combinación lineal:

Un vector **v** en un espacio vectorial *V* es llamado combinación lineal de vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k$ en V si v puede ser escrito de la forma

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k \qquad c_1, c_2, \cdots, c_k : \text{scalars}$$

- Ejemplo (Encontrar una combinación lineal)

Sea v1=(1,2,3) v2=(0,1,2) v3=(-1,0,1)

Probar si los siguientes vectores son una combinación lineal de $\mathbf{v_1}$,$\mathbf{v_2}$,$\mathbf{v_3}$

a) w= (1,1,1)

b) w=(1,-2,2)

Sol a):

$$\text{(a)}\quad \mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

$$\begin{aligned}(1,1,1) &= c_1(1,2,3) + c_2(0,1,2) + c_3(-1,0,1)\\ &= (c_1 - c_3,\, 2c_1 + c_2,\, 3c_1 + 2c_2 + c_3)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} c_1 \qquad\quad - c_3 & = & 1 \\ 2c_1 + \quad c_2 \qquad\quad & = & 1 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Guass}-\text{Jordan Elimination}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_2 \longleftarrow R_2 - 2R_1$$
$$R_3 \longleftarrow R_3 - 3R_1$$
$$R_3 \longleftarrow R_3 - 2R_2$$

(este sistema tiene infinitas soluciones)

(b)

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Guass−Jordan Elimination}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

(este sistema no tiene solución)

$$\Rightarrow \mathbf{w} \neq c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

- el span de un conjunto: span (S)

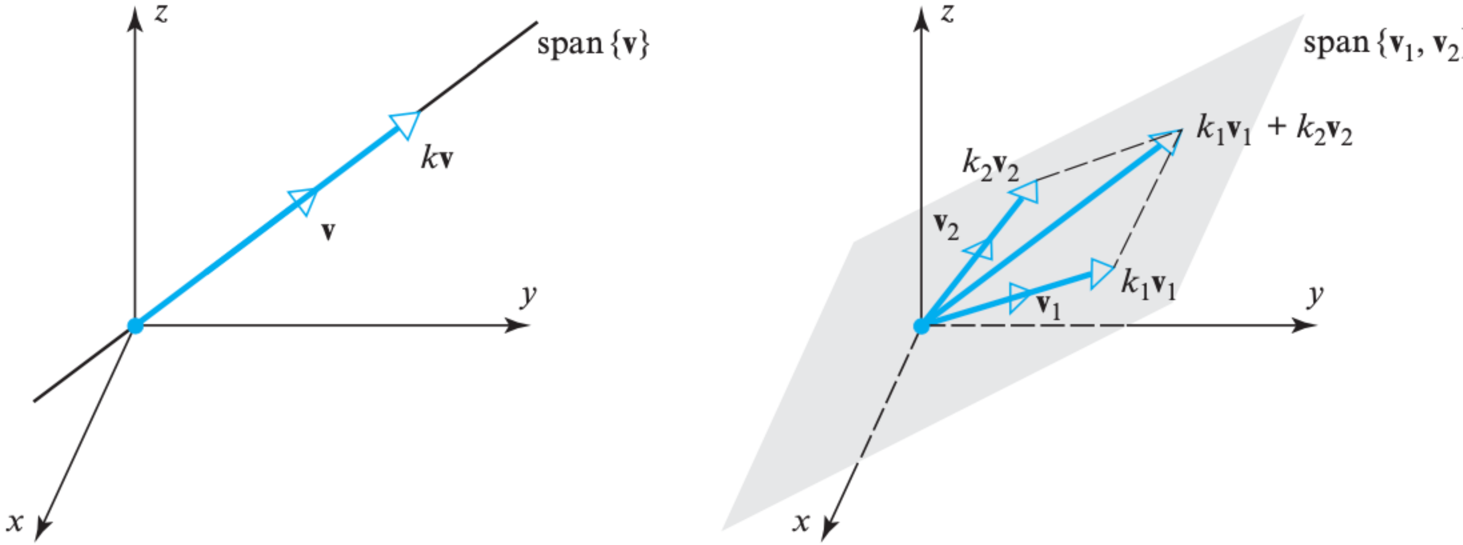
Si $\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, entonces **el span de S** es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores en S,

$$\boxed{span(S) = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \mid \forall c_i \in R\}}$$

(el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores en S)

- un conjunto que abarca un espacio vectorial:

Si **cada vector** de un espacio vectorial dado puede escribirse como una combinación lineal de vectores de un conjunto dado S, entonces S *se* denomina **conjunto de expansión** del espacio vectorial.



(*a*) Span $\{\mathbf{v}\}$ is the line through the origin determined by $\mathbf{v}$.

(*b*) Span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ is the plane through the origin determined by $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$.

- Notas:

$$\text{span}\,(S) = V$$

$\Rightarrow$ S spans (generates) V

V is spanned (generated) by S

S is a spanning set of V

- Notas:

(1) $span(\phi) = \{\mathbf{0}\}$

(2) $S \subseteq span(S)$

(3) $S_1, S_2 \subseteq V$

$$S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow span(S_1) \subseteq span(S_2)$$

Tarea

- Realice una investigación de lo que son las transformaciones lineales
- Definición
- 5 ejemplos de diferentes tipos de transformaciones lineales