Contar combinaciones

Permutaciones y ordenaciones

Cuando encontramos permutaciones, nos interesa el número de formas de ordenar los elementos de un conjunto.

- Sin embargo, en muchos problemas de recuento, el orden *no es* importante.
- Por ejemplo, una mano de póquer es la misma mano, independientemente de cómo esté ordenada.

Permutaciones y ordenaciones

Un jugador de póquer interesado en el número de manos posibles quiere saber el número de formas de sacar cinco cartas de 52.

- Sin tener en cuenta el orden en que se reparten las cartas de una mano determinada.

- Sabemos desarrollar una fórmula para contar en situaciones como ésta, en las que el orden no importa.

Combinación

Una combinación de *r* elementos de un conjunto es cualquier subconjunto de *r* elementos de los conjuntos.

- Sin tener en cuenta el orden.
- Si el conjunto tiene *n* elementos, entonces el número de combinaciones de *r elementos* se denomina por $C(n, r)$.
- Este número se denomina número de combinaciones de *n* elementos tomados *r a la* vez.

Combinaciones

El número de r-combinaciones de un conjunto de n elementos se denota C(n,r).

Obsérvese que C(n,r) también se denota por $\binom{n}{r}$, expresión que se denomina el coeficiente binomial.

Combinaciones

Por ejemplo, consideremos un conjunto con cuatro elementos, A, B, C y D.

- Las combinaciones de estos cuatro elementos tomados de tres en tres son

$$ABC \quad ABD \quad ACD \quad BCD$$

Permutación frente a combinación

Las permutaciones de estos elementos tomados de tres en tres son

ABC ABD ACD BCD

ACB ADB ADC BDC

BAC BAD CAD CBD

BCA BDA CDA CDB

CAB DAB DAC DBC

CBA DBA DCA DCB

Permutación frente a combinación

Observamos que el número de combinaciones es mucho menor que el de permutaciones.

- De hecho, cada combinación de los tres elementos genera 3! permutaciones.
- Así que $C(4,3) = \dfrac{P(4,3)}{3!} = 4$

Permutación frente a combinación

En general, cada combinación de *r objetos da* lugar a r! permutaciones de estos objetos. por lo que obtenemos la siguiente fórmula.

Así,

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Combinaciones de n objetos tomados r a la vez

El número de combinaciones de *n* objetos tomados *r a la vez* es

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Permutación frente a combinación

La diferencia clave entre permutaciones y combinaciones es *el orden*.

- Si estamos interesados en arreglos ordenados, entonces estamos contando permutaciones.

- Pero, si nos ocupamos de subconjuntos sin orden, entonces estamos contando combinaciones.

Ej. 9-Hallar el número de combinaciones

Un club tiene nueve miembros.

- ¿De cuántas maneras puede elegirse un comité de tres entre los socios de este club?

Ej. 9-Hallar el número de combinaciones

Necesitamos el número de formas de elegir a tres de los nueve miembros.

- El orden no es importante aquí.
- La comisión es la misma independientemente se ordenen sus miembros.
- Así que queremos el número de combinaciones de nueve objetos (los miembros del club) tomadas de tres a la vez.

Ej. 9-Hallar el número de combinaciones

Este número es

$$C(9,3) = \frac{9!}{3!(9-3)!}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{(3 \times 2 \times 1) \times \cancel{(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}}$$

$$= 84$$

P. ej. 10-Hallar el número de combinaciones

De 20 boletos de rifa en un sombrero, se elegirán cuatro al azar.

- Los poseedores de los billetes serán premiados con viajes gratis a las Bahamas.
- ¿De cuántas formas pueden elegirse los cuatro ganadores?

P. ej. 10-Hallar el número de combinaciones

Tenemos que encontrar el número de formas de elegir cuatro ganadores entre 20 participaciones.

- El orden en que se elijan las entradas no importa.
- Se concede el mismo premio a cada uno de los cuatro ganadores.
- Así, queremos el número de combinaciones de 20 objetos (los billetes) tomados de cuatro en cuatro.

P. ej. 10-Hallar el número de combinaciones

Este número es

$$C(20,4) = \frac{20!}{4!(20-4)!}$$

$$= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times \cancel{16 \times 15 \times 14 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}}{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times \cancel{(16 \times 15 \times 14 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1)}}$$

$$= 4,845$$

Ejemplo

Un grupo de 30 personas han sido entrenadas como astronautas para participar en la primera misión tripulada a Marte. ¿De cuántas formas se puede seleccionar una tripulación de seis miembros para la misión?

- $C(30,6) = 593{,}775$

Ejemplo

¿De cuántas formas se puede seleccionar una comisión para diseñar el programa del curso de matemáticas discretas?

La comisión debe ser compuesta por tres miembros del departamento de informática y cuatro del departamento de matemáticas, sabiendo que el departamento de informática tiene nueve miembros y el de matemáticas once

Según la regla del producto, la respuesta es el producto del número de 3-combinaciones de un conjunto de nueve elementos y el número de 4-combinaciones de un conjunto de once elementos. Por lo tanto:

$C(9, 3) \times C(11, 4) = 27{,}720$

Ejercicios

1. ¿Cuántos comités de tres personas diferentes se pueden elegir de entre diez personas?
2. ¿Cuántos equipos diferentes de 5 jugadores se pueden elegir a partir de ocho jugadores?
3. ¿De cuántas maneras puede una persona elegir votar a tres de los cinco candidatos de una papeleta para las elecciones al consejo escolar?
4. En una fiesta hay doce personas. Si todos se dan la mano, ¿cuántos apretones de manos diferentes hay?

Cheat Sheet - Counting Principles

Permutation

- Permutation is the arrangement of items in which **order matters**
- Number of ways of **selection and arrangement of items** in which Order Matters

$$\boxed{{}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Combination

- Combination is the selection of items in which **order does not matters** .
- Number of ways of **selection of items** in which Order does not Matters

$$\boxed{{}^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

Combinations with Repetition

TABLE 1 Combinations and Permutations with and without Repetition.

Type	*Repetition Allowed?*	*Formula*
r-permutations	No	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r-combinations	No	$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
r-permutations	Yes	n^r
r-combinations	Yes	$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$