Eliminación Gaussiana

Dr. José Lázaro Martínez Rodríguez

Introducción

- Recordar que para resolver un sistema de ecuaciones podemos, sin alterar las soluciones del sistema:
  - Intercambiar el orden de las ecuaciones.
  - Sumar algunas de sus ecuaciones.
  - Multiplicar alguna ecuación por un número distinto de 0.
- Esto es precisamente lo que se hace en el método de Gauss: se modifican las ecuaciones para obtener un sistema mucho más fácil de resolver, pero, en lugar de hacerlo sobre las ecuaciones, se hace sobre la matriz aumentada del sistema.

Eliminación Gaussiana

- La idea detrás del método de eliminación Gaussiana es precisamente utilizar las operaciones elementales hasta llevar un sistema de ecuaciones a una forma **escalonada**.
- Si finalizamos las operaciones al hallar la forma escalonada reducida (forma lo más parecida a la matriz identidad), entonces el método se denomina eliminación de Gauss-Jordan

Eliminación Gaussiana

- Una vez terminado el proceso, resolver el sistema es directo. Además de esto, veremos que
  - Si se obtiene la matriz identidad, el sistema es compatible determinado (como en el caso 1).
  - Si se obtiene alguna fila de ceros con término independiente distinto de 0, el sistema es incompatible (como en el caso 2).
  - Si se obtiene alguna fila de ceros y no estamos en el caso anterior, el sistema es compatible indeterminado (como en el caso 3).

Método

- Cuando una matriz está en su forma escalonada, los primeros elementos diferentes de cero de cada renglón reciben el nombre de elementos pivote o simplemente pivotes
- Para resolver un sistema de ecuaciones podemos seguir los siguientes pasos:
  1. Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.
  2. Use operaciones elementales de fila para llevar la matriz aumentada a una forma escalonada.
  3. Mediante sustitución regresiva, resuelva el sistema equivalente correspondiente a la matriz aumentada escalonada.

Ejemplo

- Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x \quad +2y \quad +z \quad &= 0 \\ x \qquad\qquad +z \quad &= 2 \\ y \quad +2z \quad &= 1. \end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Buscamos quitar (2,1)

Ejemplo

- Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rrrl} x & +2y & +z & =0 \\ x & & +z & =2 \\ & y & +2z & =1. \end{array}$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1}$$

Buscamos quitar (2,1)

Ejemplo

- Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x &\ +2y &\ +z &\ = 0 \\ x &\ &\ +z &\ = 2 \\ &\ y &\ +2z &\ = 1. \end{aligned}$$

La matriz aumentada es $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\left(\frac{1}{2}\right) R_2}$$

Ahora convertir (2,2) en uno

Ejemplo

- Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x \quad +2y \quad +z &= 0 \\ x \qquad\qquad +z &= 2 \\ y \quad +2z &= 1. \end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\left(\frac{1}{2}\right)R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_2}$$

Ahora quitar (3,2) para hacer matriz escalonada

Ejemplo

- Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rrrl} x & +2y & +z & =0 \\ x & & +z & =2 \\ & y & +2z & =1. \end{array}$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\left(\frac{1}{2}\right)R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Ejemplo

- Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x \quad +2y \quad +z \quad &= 0 \\ x \quad \quad +z \quad &= 2 \\ y \quad +2z \quad &= 1. \end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\left(\frac{1}{2}\right) R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Con eso se puede aplicar sustitución hacia atrás

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= 1. \end{aligned}$$

Ejercicio

- Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones con el método de Gauss

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ x + 2y - z &= -2 \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}$$

Ejemplo

$$3x + 2y + z = 1$$
$$5x + 3y + 4z = 2$$
$$x + y - z = 1$$

Ejercicio

- Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x + 3y - 2z + 2w &= 12 \\
2x - 2y - z + w &= 5 \\
3x + y - 2z - 4w &= 16 \\
x - y - z - w &= 3
\end{aligned}
$$

Otro ejemplo, con Gauss-Jordan

Ejemplo

- Resuelva el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & 1 \\ -2\,x & + & y & + & 3\,z & = & 10 \\ 3\,x & + & y & + & 2\,z & = & 3 \end{array}$$

- Teniendo en cuenta los coeficientes y las variables, la matriz aumentada queda

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

- Se debe eliminar la primera variable o término de los renglones R_2 y R_3
- Para ello restamos a R_2 el R_1 multiplicado por -2.
- Mientras que sumamos a R_3 el R_1 multiplicado por 3

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

Ejemplo

- Ahora hay que eliminar la segunda variable de R_3

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

- Para ello a R_3 le sumamos R_2 multiplicada por 4
- $R_3 \longleftarrow R_3 + 4R_2$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 19 & 38 \end{array}\right]$$

- Ya podemos despejar, pero podemos sustituir para quedarnos con “unos” en la diagonal

- $R_3 \longleftarrow \frac{1}{19} R_3$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

- Quitar (1,3) y (2,3) con
- $R_1 \longleftarrow R_1 + R_3$ y $R_2 \longleftarrow R_2 - 5R_3$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Ejemplo

- Seguimos para quitar (1,2)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

- $R_1 \longleftarrow R_1 + R_2$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

- Ajustamos coeficientes para que sean positivos
- $R_1 \longleftarrow (-1)R_1$
- $R_2 \longleftarrow (-1)R_2$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

- La solución es
- $x = -1$
- $y = 2$ $\qquad z = 2$

Ejemplo

- En resumen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\;]{\substack{R_2 \leftarrow R_2 + (-2)\,R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + 3\,R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 4\,R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 19 & 38 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 19 & 38 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{19}\,R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 + (-5)\,R_3 \\ R_1 \leftarrow R_1 + R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1 \leftarrow (-1)\,R_1 \\ R_2 \leftarrow (-1)\,R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right]$$

Ejercicio

- Obtenga la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss-Jordan
- $3y + x = 7$
- $4x - 2y = 0$

- $2x + 4y = 4$
- $3x + 2y = 22$

Caso contradictorio

- Con el siguiente ejemplo

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & 3w & = & 5 \\ 4x & + & y & + & z & + & w & = & 1 \\ 6x & + & 2y & & & + & 4w & = & 1. \end{array}$$

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Buscamos hacer ceros debajo de (1,1)

Caso contradictorio

- Con el siguiente ejemplo

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & 3w & = & 5 \\ 4x & + & y & + & z & + & w & = & 1 \\ 6x & + & 2y & & & + & 4w & = & 1. \end{array}$$

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1, R_3-3R_1}$$

Caso contradictorio

- Con el siguiente ejemplo

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & 3w & = & 5 \\ 4x & + & y & + & z & + & w & = & 1 \\ 6x & + & 2y & & & + & 4w & = & 1. \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1, R_3-3R_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & -14 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_2}$$

Ahora eliminamos términos en R3

Caso contradictorio

- Con el siguiente ejemplo

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & 3w & = & 5 \\ 4x & + & y & + & z & + & w & = & 1 \\ 6x & + & 2y & & & + & 4w & = & 1. \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1, R_3-3R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & -14 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

De la última fila obtenemos la ecuación obtenemos $0x + 0y + 0z + 0w = -5$ es decir $0 = -5$ lo que es una contradicción NO hay soluciones

Caso infinito

- Es cuando hay una igualdad de ceros
- $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 2 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Otro caso

- $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 2 & 4 & -8 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right]$

Hacemos cero debajo de (1,1), es decir, de nuestro pivote

- Aplicamos
- $R_2 \leftarrow R_2 - \left(\frac{2}{3}\right) R_1$
- $R_3 \leftarrow R_3 + \left(\frac{2}{3}\right) R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Requerimos un elemento en (2,2) así que podemos intercambiar renglones si más abajo hay uno con algún valor en la columna 2

Otro caso

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

- Cambiamos R_2 por R_3
- $R_2 \leftrightarrow R_3$
- $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$

- Hagamos 1 el elemento (3,3)
- $R_3 \leftarrow \frac{1}{-2} R_3$
- $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Otro caso

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Hagamos 0 arriba de (3,3)
- $R_1 \leftarrow R_1 + 9R_3$
- $R_2 \leftarrow R_2 + 2R_3$
- $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

- Regresamos con pivote (2,2) para hacer ceros arriba
- $R_1 \leftarrow R_1 - 6R_2$
- $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Otro caso

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Finalmente hacemos 1 el pivote

$R_1 \leftarrow \frac{1}{3} R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Así se entiende que
- $x = -2$
- $y = 3$
- $z = 1$

Ejercicio

- Resuelva la siguiente ecuación usando el método Gauss-Jordan. Indique todos los pasos

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

Ejercicio

- Resuelva la siguiente ecuación usando el método Gauss-Jordan. Indique todos los pasos

$$
\begin{aligned}
y + z - 2w &= -3 \\
x + 2y - z \phantom{{}- 3w} &= 2 \\
2x + 4y + z - 3w &= -2 \\
x - 4y - 7z - w &= -19
\end{aligned}
$$