Determinantes y regla de Cramer

Dr. José Lázaro Martínez Rodríguez

Introducción

- La regla de Cramer es un método para resolver ecuaciones lineales simultáneas. Hace uso de determinantes, por lo que es necesario conocerlos antes de proceder.

- La regla de Cramer se basa en determinantes

Determinante

- A cada matriz cuadrada se le asigna un escalar especial llamado el determinante de A, que se denota por det(A) o $|A|$
- El determinante de una matriz cuadrada es un número que se obtiene como resultado de realizar una serie de operaciones con sus elementos.
- De este valor se pueden deducir importantes propiedades de los elementos que lo componen. Tiene, además, muchas aplicaciones en la Geometría y el Álgebra.

Determinante 2x2

- El determinante de una matriz de orden 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

- Se calcula con la siguiente fórmula

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Matrices de coeficientes

- Puedes utilizar determinantes para resolver un sistema de ecuaciones lineales.
- Se utiliza la matriz de coeficientes del sistema lineal.

- **<u>Sistema Lineal</u>**

  ax+by=e
  cx+dy=f

<u>Matriz Coef.</u>

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Regla de Cramer para el sistema 2x2

- Sea A la matriz de coeficientes

- **Sistema Lineal**

  ax+by=e
  cx+dy=f

  Matriz Coef.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \text{ad - bc}$$

- Si $|A| \neq 0$, entonces el sistema tiene exactamente una solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\det A} \quad \text{y} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\det A}$$

Puntos clave

- El denominador está formado por los coeficientes de las variables (x en la primera columna, e *y* en la segunda columna).

- El numerador es el mismo que el denominador, pero las constantes sustituyen a los coeficientes de la variable que se está resolviendo.

Ejemplo - Aplicación de la regla de Cramer en un sistema de dos ecuaciones

Resuelve el sistema:

- 8x+5y= 2
- 2x-4y= -10

La matriz de coeficientes es: $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ det $\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-32) - (10) = -42$

Así que...

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -10 & -4 \end{vmatrix}}{-42} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix}}{-42}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5\\ -10 & -4\end{vmatrix}}{-42}=\frac{-8-(-50)}{-42}=\frac{42}{-42}=-1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}8 & 2\\ 2 & -10\end{vmatrix}}{-42}=\frac{-80-4}{-42}=\frac{-84}{-42}=2$$

Solución: (-1,2)

Aplicación de la regla de Cramer en un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -16 \\ 3x + 5y = 14 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (-3)(3) = 10 + 9 = 19$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -16 & -3 \\ 14 & 5 \end{vmatrix} = (-16)(5) - (-3)(14) = -80 + 42 = -38$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -16 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = (2)(14) - (3)(-16) = 28 + 48 = 76$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-38}{19} = -2 \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{76}{19} = 4$$

Evaluación de un determinante 3x3
(expandiendo a lo largo de la fila superior)

- Expansión por menores (pequeños determinantes 2x2)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-6) \;\; - (3)(3) \;\; + (-2)(4)$$

$$= -6 \quad -9 \quad -8 = -23$$

Uso de la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones

Consideremos el siguiente conjunto de ecuaciones lineales

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Uso de la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones

El sistema de ecuaciones anterior puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Uso de la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones

Defina

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$[x]=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \; and \; [B]=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Si $D \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución como se muestra a continuación (regla de Cramer)

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

Uso de la regla de Cramer
para resolver un sistema de tres ecuaciones

donde

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1

Considera las siguientes ecuaciones:

$$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 36$$
$$-3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 7$$
$$5x_1 + 3x_2 - 8x_3 = -31$$
$$[A][x] = [B]$$

Donde

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

$$[x]=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix} 36 \\ 7 \\ -31 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & -8 \end{vmatrix}=-336$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 36 & -4 & 5 \\ 7 & 5 & 7 \\ -31 & 3 & -8 \end{vmatrix}=-672$$

Ejemplo 1

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 36 & 5 \\ -3 & 7 & 7 \\ 5 & -31 & -8 \end{vmatrix} = 1008$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 36 \\ -3 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & -31 \end{vmatrix} = -1344$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-672}{-336} = 2$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1008}{-336} = -3$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-1344}{-336} = 4$$

Regla de Cramer - 3 x 3

- Considera el siguiente sistema de 3 ecuaciones con las variables *x*, *y* y *z*:

$$a_1x + b_1y + c_1z = C_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = C_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = C_3$$

Regla de Cramer - 3 x 3

- Las fórmulas para los valores de *x*, *y* y *z se muestran* a continuación. Observa que las tres tienen el mismo denominador.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & b_1 & c_1 \\ C_2 & b_2 & c_2 \\ C_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & C_1 & c_1 \\ a_2 & C_2 & c_2 \\ a_3 & C_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & C_1 \\ a_2 & b_2 & C_2 \\ a_3 & b_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 1

- Resuelve el sistema : $3x - 2y + z = 9$
- $x + 2y - 2z = -5$

  $x + y - 4z = -2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-23}{-23} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{69}{-23} = -3$$

Ejemplo 1

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-23} = 0$$

La solución es

(1, -3, 0)

Regla de Cramer

- No todos los sistemas tienen una solución definida. Si el determinante de la matriz de coeficientes es cero, no se puede encontrar una solución utilizando la regla de Cramer debido a la división por cero.
- Cuando no se puede determinar la solución, se da una de estas dos condiciones:
  - Los planos graficados por cada ecuación son paralelos y no hay soluciones.
  - Los tres planos comparten una línea (como tres páginas de un libro comparten el mismo lomo) o representan el mismo plano, en cuyo caso hay infinitas soluciones.