Permutaciones

Permutaciones

Una **permutación** de un conjunto de objetos distintos es una ordenación de estos objetos.

- Por ejemplo, algunas permutaciones de las letras *ABCD* son

ABDC	*BACD*
DCBA	*DABC*

- ¿Cuántas permutaciones son posibles?

Permutaciones

Ya que hay:

- Cuatro opciones para la primera posición,
- Tres para el segundo
  (una vez elegido el primero),
- Dos para el tercero
  (una vez elegidos los dos primeros),
- Sólo una opción para la cuarta letra
- Por el Principio Fundamental de Conteo el número de permutaciones posibles es

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

Permutaciones

Este mismo razonamiento con 4 sustituido por *n* *conduce* a la siguiente observación.

- El número de permutaciones de *n* objetos es *n*!.

Permutaciones

¿Cuántas permutaciones formadas por dos letras pueden hacerse a partir de estas mismas cuatro letras?

- Algunas de estas permutaciones son

AB	*AC*
BD	*DB*

Permutaciones

De nuevo, hay cuatro opciones para la primera posición, tres para la segunda, dos para la tercera y sólo una para la cuarta.

- Por el Principio Fundamental de Conteo, el número de tales permutaciones es

$$4 \times 3 = 12$$

Permutaciones

En general, si un conjunto tiene n elementos, el número de formas de ordenar r elementos del conjunto se denota $P(n, r)$.

- Se denomina número de permutaciones de n objetos tomados *r a la vez*.

Permutaciones de n objetos tomados r a la vez

El número de permutaciones de *n* objetos tomados *r a la vez* es

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

Permutaciones de n objetos tomados r a la vez

Hay *n* objetos y *r* posiciones para colocarlos

- Por lo tanto, hay *n opciones* para la primera posición,
  n - 1 opciones para la segunda posición, y así sucesivamente.

- La última posición se puede rellenar de *n* - *r* + 1 maneras.

Permutaciones de n objetos tomados r a la vez

Por el Principio Fundamental de Conteo,

$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2)...(n - r + 1)$$

- Esta fórmula se puede escribir de forma más compacta
  usando la notación factorial:

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)(n-r)...3 \bullet 2 \bullet 1}{(n-r)...3 \bullet 2 \bullet 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo

¿Cuantas formas existen de elegir el primer, segundo y tercer clasificado de un concurso si hay un total de 100 concursantes?

P (100, 3)=

$$= \frac{100!}{(100-3)!} = 970{,}200 \quad \text{o bien}$$

$$=100x99x98 = 970{,}200$$

P. ej. 4-Hallar el número de permutaciones

Hay seis corredores en una carrera que se completa sin empate.

- ¿De cuántas formas distintas puede completarse la carrera?
- ¿De cuántas formas distintas pueden decidirse el primer, segundo y tercer puesto?

P. ej. 4-Hallar el número de permutaciones Ejemplo a)

El número de formas de completar la carrera es el número de permutaciones de las seis corredores:

$$6! = 720.$$

Ejemplo (b)

El número de formas en que pueden decidirse las tres primeras posiciones es

$$P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!}$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3 \times 2 \times 1}}{\cancel{3 \times 2 \times 1}}$$

$$= 120$$

Ej. 5-Hallar el número de permutaciones

Un club tiene nueve miembros.

- ¿De cuántas formas pueden ser presidente vicepresidente y secretario entre los socios de este club?

- Necesitamos el número de tres miembros, *por orden*, para estos cargos de entre los nueve socios del club.

Ej. 5-Hallar el número de permutaciones

Este número es

$$P(9,3) = \frac{9!}{(9-3)!}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \cancel{\times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\cancel{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}$$

$$= 504$$

P. ej. 6-Hallar el número de permutaciones

De 20 boletos de rifa en un sombrero, se seleccionarán cuatro boletos por orden.

- El poseedor del primer boleto gana un coche,
- El segundo una moto,
- El tercero, una bicicleta,
- Y, el cuarto, un monopatín.

P. ej. 6-Hallar el número de permutaciones

¿De cuántas formas diferentes pueden concederse estos premios?

- El orden en que se eligen los boletos determina quién gana cada premio.
- Por lo tanto, tenemos que encontrar el número de maneras de seleccionar cuatro objetos, *en orden*, a partir de 20 objetos (los billetes).

P. ej. 6-Hallar el número de permutaciones

Este número es

$$P(20,4) = \frac{20!}{(20-4)!}$$

$$= \frac{20 \times 19 \times 18 \times \cancel{16 \times 15 \times 14 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}}{\cancel{16 \times 15 \times 14 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}}$$

$$= 116,280$$

Ejemplo

- Supongamos que un viajante debe visitar ocho ciudades diferentes. Debe iniciar su viaje en una ciudad prefijada, pero puede visitar las otras siete en cualquier orden.
  - ¿De cuántas formas distintas puede organizar su viaje?

$$P(7,7) = 7!$$

$$= 7x6x5x4x3x2x1$$

$$= 5040$$

ejemplo

En un grupo de 10 estudiantes, se escogerá a cinco y se les sentará en fila para una foto. ¿Cuántas disposiciones lineales son posibles?

$P(10,5) \quad =$

$= 10x9x8x7x6 = 30,240$

¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEFGH contienen la cadena ABC?

Las permutaciones de ABCDEFGH = P(8,8)

Si ABC siempre deben estar juntas entonces tenemos un grupo {ABC}DEFGH = P(6,6)

= 6! = 6x5x4x3x2x1

=720 combinaciones con la cadena ABC

ejem

La mesa directiva (presidente, secretario y tesorero) de una asociación va a elegirse de entre cinco candidatos, identificados con las letras A, B, C, D y E. Suponga que cualquiera de ellos es apto para cualquier puesto y determine el número de formas diferentes en que puede quedar integrada la mesa directiva.

$P(5,3) = 60$ formas

Ejemplo

La caja fuerte de un banco tiene dos cerraduras de combinaciones. Para abrir la caja se requiere marcar la sucesión correcta de tres números distintos en cada una de las dos cerraduras. Si una de las cerraduras tiene números del 0 al 49 y la otra del 0 al 99, ¿cuántas combinaciones distintas son posibles para poder abrir la caja?

$P(50,3)$ de la primera cerradura

$P(100,3)$ de la segunda

Por regla del producto $= P(50,3) \times P(100,3)$

¿Cuántos números telefónicos se pueden formar de cinco cifras de manera tal, que en cada número telefónico tomado por separado todas las cifras sean diferentes?

¿Cuántos dígitos hay? [0-9] = 10

Entonces P(10,5) = 30,240