Potencias de matrices, polinomios en matrices

Dr. José Lázaro Martínez Rodríguez

Potencias de matrices

- El concepto de potencias de matrices, en particular para matrices cuadradas, sirve para varios propósitos en álgebra lineal y sus aplicaciones.
  a) Representar operaciones de matrices repetidas
  b) Análisis de Sistemas dinámicos
  c) Relaciones de recurrencia

Potencias de matrices

- Sea A una matriz n-cuadrada sobre un campo K. Las potencias de A se definen como sigue:
- $A^2 = AA$
- $A^3 = A^2 A$
- $A^{n+1} = A^n A$
- $A^0 = I$

Polinomios

- También se pueden definir polinomios con la matriz A
- $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

- Donde a_i son escalares en K, $f(A)$ se define como la matriz:
$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$$

- Como se puede ver se sustituye x por A y a_0 por $a_0 I$
- Si $f(A)$ es la matriz cero, entonces A se llama cero o raíz de $f(x)$

Ejemplo

- Supongamos que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ entonces:

- $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$

- $A^3 = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$

Ejemplo

- Supongamos que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ entonces:
- si $f(A) = 2x^2 - 3x + 5$

$$f(A) = 2\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$$

- $g(A) = x^2 + 3x - 10$

Por tanto, A es un cero del polinomio g(x)

$$g(A) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices invertibles (no singulares)

- Se dice que una matriz cuadrada A es invertible o no singular si existe una matriz B tal que
- $AB = BA = I$

- Donde I es matriz identidad.
- Llamamos a dicha matriz B la inversa de A y la denotamos por A^{-1}

Matrices invertibles (no singulares)

- Supongamos que $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, A y B son inversas

$$BA = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa de una matriz 2x2

- Asuma que A es una matriz arbitraria de 2x2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- Queremos derivar una fórmula para A^{-1} (inversa de A)
- Por la notación $AB = BA = I$ requerimos 4 escalares de B de forma que:

$$\begin{array}{cccc} A & B & & I \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa de una matriz 2x2

- Lo anterior nos lleva a tener cuatro ecuaciones en dos sistemas de 2x2 de la forma:

$$ax_1 + by_1 = 1, \qquad ax_2 + by_2 = 0$$

$$cx_1 + dy_1 = 0, \qquad cx_2 + dy_2 = 1$$

- Considere el determinante de A como $|A| = ad - bc$
- Si se asume que $|A| \neq 0$ podemos resolver de forma única para las incógnitas anteriores x_1, y_1, x_2, y_2 lo que se obtiene

$$x_1 = \frac{d}{|A|}, \qquad y_1 = \frac{-c}{|A|}, \qquad x_2 = \frac{-b}{|A|}, \qquad y_2 = \frac{a}{|A|}$$

Inversa de una matriz 2x2

- En consecuencia:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d/|A| & -b/|A| \\ -c/|A| & a/|A| \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- En otras palabras, cuando $|A| \neq 0$ la inversa de una matriz 2x2 se obtiene:
  1. Intercambia los dos elementos de la diagonal.
  2. Toma los negativos de los otros dos elementos.
  3. Multiplicar la matriz resultante por $\frac{1}{|A|}$, es decir, dividir cada elemento por $|A|$
  4. En caso de que $|A| = 0$, la matriz A no es invertible

Ejemplo

- Encuentre la inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$
- Primero obtenemos $|A| = 2(5) - 3(4) = 10 - 12 = -2$
  - Dado que $|A| \neq 0$ entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

- Encuentre la inversa de $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$
- Primero obtenemos $|B| = 1(6) - 3(2) = 6 - 6 = 0$
- Dado que $|B| = 0$ la matriz no tiene inversa

- Observación: La propiedad anterior de que una matriz es invertible si y sólo si A tiene un determinante distinto de cero es cierta para matrices cuadradas de cualquier orden.
- Veremos inversa de matriz nxn mas adelante

Ejercicio

- Investigue y proporcione ejemplos de
- Matriz ortogonal
- Matriz normal
- Matriz por bloques