VERDAD, BELLEZA, PROBIDAD

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Propiedades de matrices

Dr. José Lázaro Martínez

Resumiendo

- Con matrices tenemos propiedades:
  - Matriz escalar
  - Matriz diagonal
  - Matriz identidad
  - Matriz cuadrada
  - Matriz cero
  - igualdad
- Y operaciones:
  - Suma, resta
  - Producto escalar
  - traza

Propiedades de operaciones con matrices

- Considere cualquiera matrices A, B, C(del mismo tamaño) y cualquier escalar ky k' entonces

(i)	$(A+B)+C = A+(B+C)$,	(v)	$k(A+B) = kA+kB$,
(ii)	$A+0 = 0+A = A$,	(vi)	$(k+k')A = kA+k'A$,
(iii)	$A+(-A) = (-A)+A = 0$,	(vii)	$(kk')A = k(k'A)$,
(iv)	$A+B = B+A$,	(viii)	$1 \cdot A = A$.

- El 0 en las primeras propiedades se refiere a la matriz cero

Transponer

- Si A es una matriz mxn
- A^T (transposición de A) es una matriz nxm cuya entrada (i,j) es la entrada (j-i) de A

(1,2)

$$A = \begin{bmatrix} 6 & \boxed{9} \\ 8 & 0 \\ 9 & \boxed{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Transponer}} A^T = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ \boxed{9} & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

(3,2) (2,1) (2,3)

Transponer

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

- A y B son matrices de mxn, y s es un escalar
- $(A^T)^T = A$
- $(sA)^T = sA^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$

$$2A = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 12 & 12 \end{bmatrix} \qquad (2A)^T = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad 2A^T = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 14 & 14 \end{bmatrix} \qquad (A+B)^T = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad A^T + B^T = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

- Cuál es la transpuesta de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$?

- $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

Ejemplo

- Calcula la matriz transpuesta de A, B, C. Además, obtenga $\mathrm{A} + C^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/4 & 5/3 \\ 3/5 & 1/3 & -4/5 \\ -3/2 & -1/8 & -10/3 \end{bmatrix}$$

Productos matriciales y vectoriales

Símbolo de sumatoria

- Antes de definir la multiplicación de matrices, será útil introducir primero el símbolo de suma Σ
- Supongamos que $f(k)$ es una expresión algebraica que involucra la letra k, entonces la expresión
- $\sum_{k=1}^{n} f(k)$
- Se refleja en sustituir el valor de k en pasos sucesivos que van sumando el resultado.
  - Empezando con k=1 tenemos $f(1)$
  - Cuando k=2 se acumula a lo que ya se tiene antes: $f(1) + f(2)$
  - Así mismo para k=3 $f(1) + f(2) + f(3)$
  - Se termina cuando se llegue a n incrementando uno en uno el valor de k

Ejemplo

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{k=1}^{6} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$$

También se puede expresar como:

$\sum_{m=2}^{6} \frac{m}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} = 10$

Ejemplo

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{j=2}^{5} j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 54$$

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Producto matriz-vector

$$\underset{m \times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Producto matriz-vector

$$\boxed{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}} \begin{array}{c} = \\ = \\ \\ = \end{array} \boxed{\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{array}}$$

$$Ax = b$$

$$x \longrightarrow \boxed{\text{Sistema lineal}} \longrightarrow Ax$$

Los coeficientes son A

Aspecto Fila

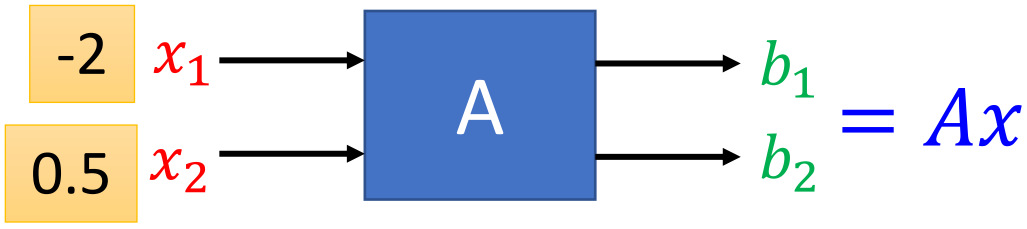
$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \boxed{a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

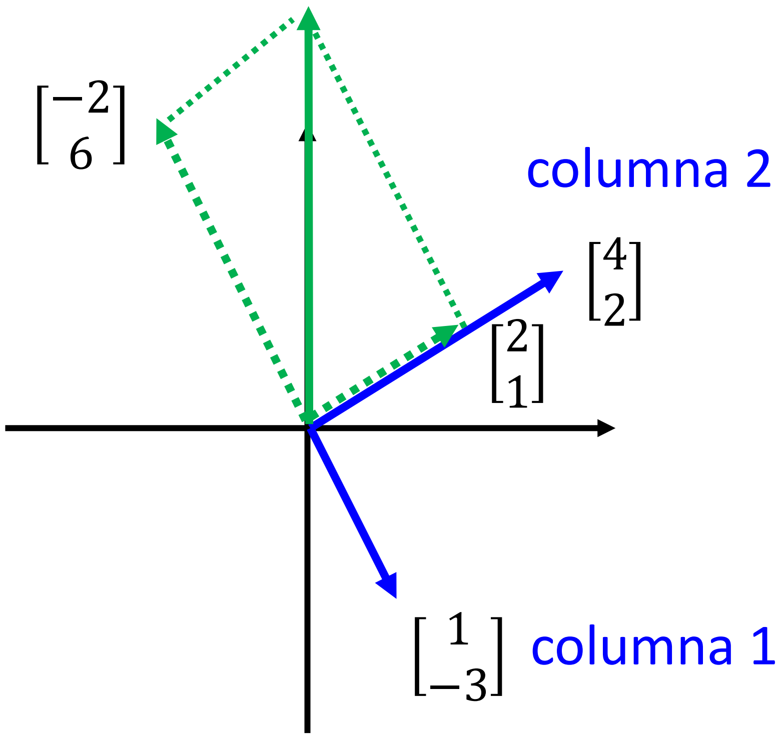
$$Ax = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n} \\ \boxed{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n} \\ \vdots \\ \boxed{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

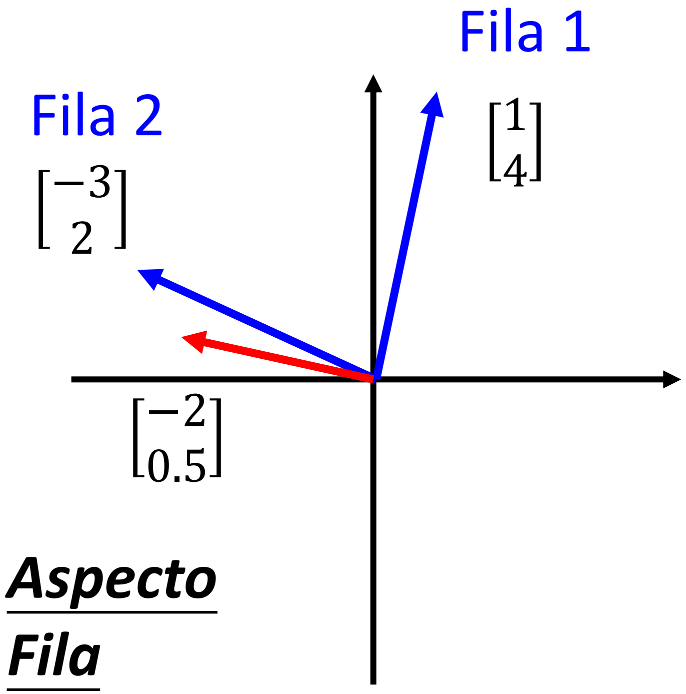
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= b_1 \\ -3x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$$





Aspecto Columna



Aspecto Fila

Propiedades del Producto matriz-vector

- A y B son matrices mxn, u y v son vectores en R^n , y c es un escalar.
- $A(u+v) = Au + Av$
- $A(cu) = c(Au) = (cA)u$
- $(A+B)u = Au + Bu$

Observaciones finales

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

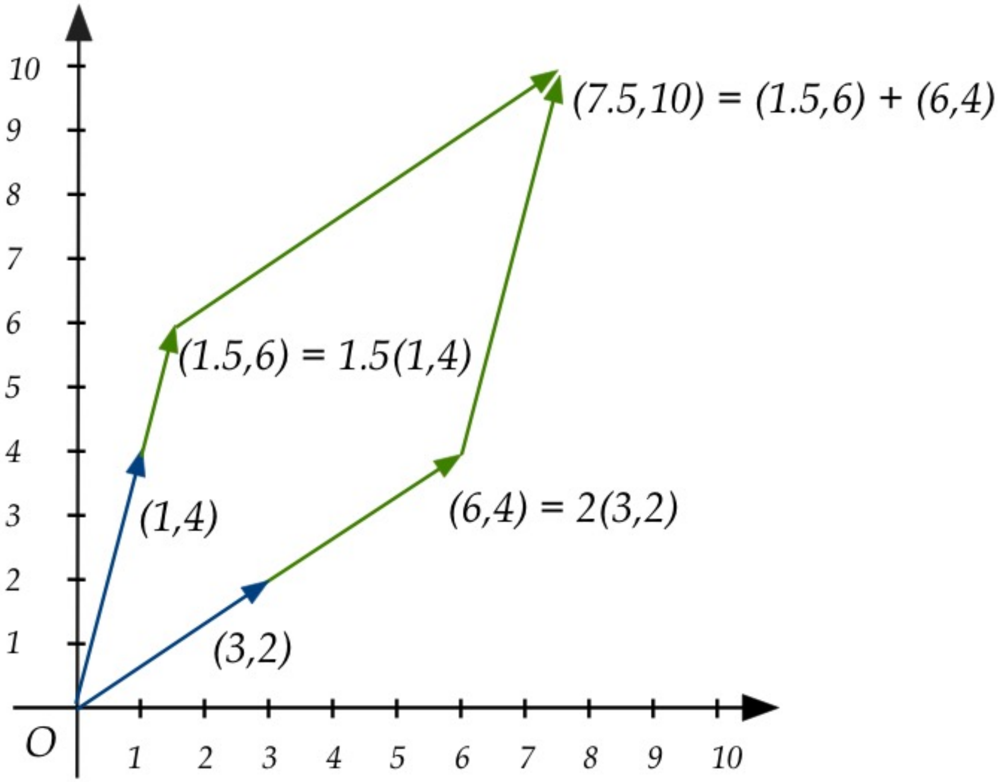
Aspecto Fila

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Aspecto Columna

Un poco de geometría

- Consideremos una combinación lineal de dos vectores



- Sería una combinación

$$\mathbf{1.5}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}+\mathbf{2}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7.5\\10\end{bmatrix}$$

- Se escribe de forma matricial

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{1.5}\\\mathbf{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7.5\\10\end{bmatrix}$$