VERDAD, BELLEZA, PROBIDAD

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Operaciones con vectores

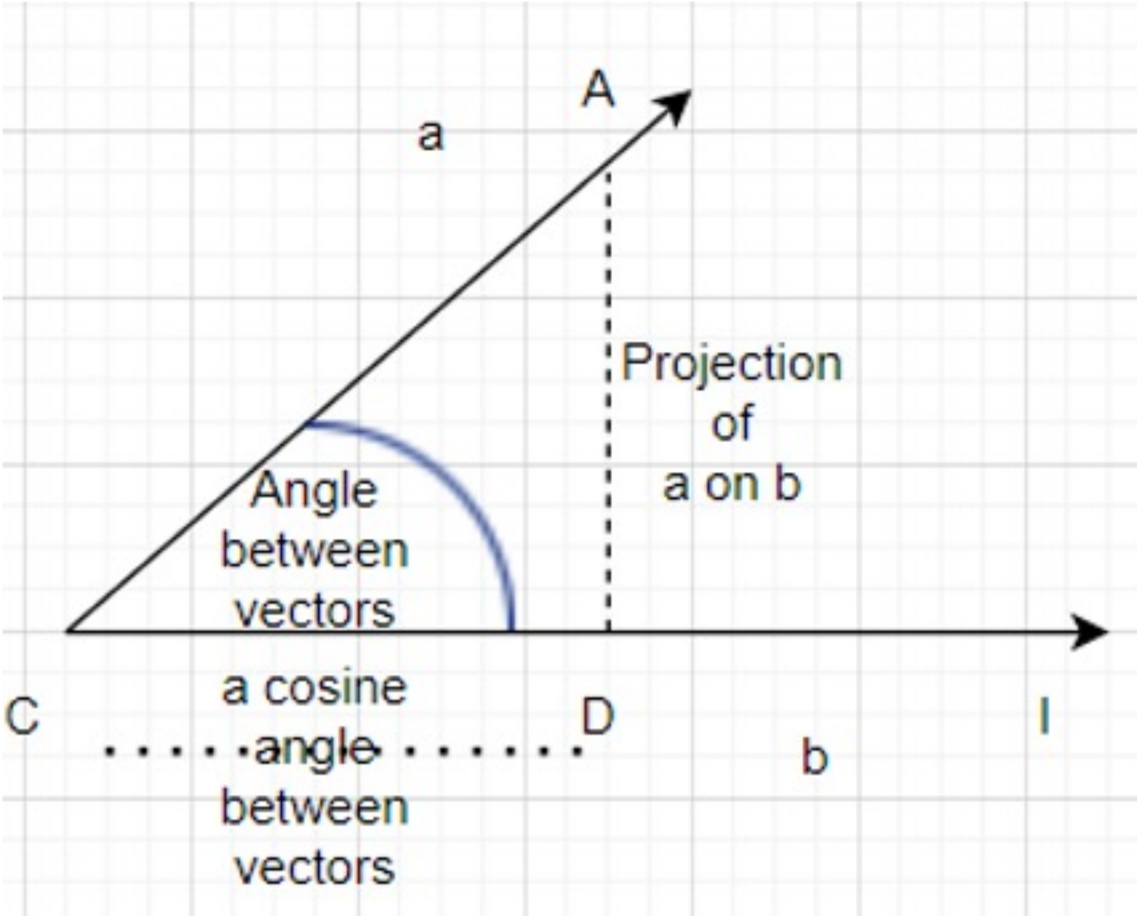
Dr. José Lázaro Martínez Rodríguez

Introducción

- …recordando
- Hemos revisado lo siguiente:
  - Concepto de Vector y sus componentes
  - Vectores de $\mathbb{R}^n$
  - Producto escalar
  - Suma de vectores
  - Conjunto de coordenadas
  - Combinación lineal
  - Obtención de combinación lineal

Introducción

- Ahora seguiremos viendo otras operaciones con vectores



Producto punto

- Consideremos dos vectores u y v en R^n, digamos

u = $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y v = $(b_1, b_2, \dots, b_n)$

El **producto punto** o producto interior o producto escalar de u y v se denota y define por

$u \cdot v$ = $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$

- Es decir, $u \cdot v$ se obtiene multiplicando los componentes correspondientes y sumando los productos resultantes.
  - Se dice que los vectores u y v son ortogonales (o perpendiculares) si su producto punto es cero, es decir, si $u \cdot v = 0$

Ejemplo

- Calcule $u \cdot v$ cuando $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

- Solución
- $u \cdot v = 1(-3) + 2(5) + (-3)(2) = 1$

Ejemplo

- Sea $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$
- $u \cdot v =$

$$= 1(4) - 2(5) + 3(-1) = -9$$

- $u \cdot w =$

$$= 2 - 14 + 12 = 0$$

Decimos que u y w son ortogonales

- $v \cdot w =$

$$= 8 + 35 - 4 = 39$$

Propiedades del producto punto

- Para cualesquiera vectores u, v, w en R^n y cualesquiera escalares k en R:

i. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

ii. $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$

iii. $u \cdot v = v \cdot u$

iv. $u \cdot u \geq 0, y\ u \cdot u = 0\ sii\ u = 0$

Proponga ejemplos para probar que esto es cierto

Ejercicios

1. Determine cuáles de los siguientes vectores son iguales
   - Sea $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $u_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Sea $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}$ encuentre:
   a) 3u-4v
   b) 2u+3v-5w
   c) u ▪ w + v ▪ w

3. Sea $u = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ $w = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ encuentre:
   a) 5u-2v
   b) -2u+4v-3w

Ejercicios

1. Encuentre el valor de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$

   a) $\begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ x + y \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 4 \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Norma (longitud) de un vector

- La norma o longitud de un vector u en R^n, denotada por $\|u\|$, se define como la raíz cuadrada no negativa de $u \cdot u$.
- En particular, si u = $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ entonces

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Ejemplo

- Sea $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

- $\|u\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 5^2 + 3^2}$
  $= \sqrt{55}$

Ejemplo

- Sea $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

- Determine la norma
- $\|u_1\|$
- $\|u_2\|$
- $\|u_3\|$

Ejemplo

- Sea $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $w = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

$$\|v\| = \sqrt{1+9+16+4} = \sqrt{30}$$

Esto no lo es, pero podemos normalizar

$$\|w\| = \sqrt{\frac{9}{36}+\frac{1}{36}+\frac{25}{36}+\frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{36}{36}} = \sqrt{1} = 1$$

Esto es un vector unitario

Normalización de vectores

- Normalizar se refiere al proceso de hacer algo “estándar” o, bueno, “normal”.
- En el caso de vectores, supongamos por ahora que un vector estándar tiene longitud 1.
- Por lo tanto, normalizar un vector es tomar un vector de cualquier longitud y, mientras sigue apuntando en la misma **dirección**, cambiar su longitud a 1, convirtiéndolo en lo que se conoce como un ***vector unitario***.
- $\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{v}{\|v\|}$

Ejemplo normalización

- $v = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$
- Verificamos su Norma
- $\|v\| = \sqrt{6^2 + (-5)^2}$
- $\quad = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} \approx 7.81$

No es unitario, normalizamos v

- $\hat{v} = (\frac{6}{\sqrt{61}}, \frac{-5}{\sqrt{61}})$ es el vector normalizado
- Comprobamos
- $\|\hat{v}\| = \sqrt{\frac{6}{\sqrt{61}}^2 + (\frac{-5}{\sqrt{61}})^2}$
- $= \sqrt{\frac{36}{61} + \frac{25}{61}} = \sqrt{\frac{61}{61}} = 1$

Lo podemos graficar para comprobar

Ejercicio

- Considere los siguientes vectores a,b y c
- $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$
- Realice las operaciones
- $\|a\|$
- $\|b\|$
- $\|c\|$
- $\|a+b\|$

¿Son vectores unitarios? De no serlos normalice