Álgebra de matrices

Dr. José Lázaro Martínez

Introducción

- En este tema se estudian las matrices y las operaciones algebraicas definidas sobre ellas.
- Estas matrices pueden verse como matrices rectangulares de elementos en las que cada entrada depende de dos subíndices (en comparación con los vectores, en los que cada entrada depende de un solo subíndice).

Matriz (matrix, vector multidimensional)

- Una matriz es un conjunto de vectores

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz

- Una matriz es un arreglo rectangular de escalares que suele presentarse de la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Las filas de dicha matriz A son las *m* listas horizontales de escalares:

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \quad (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \quad \dots, \quad (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

- y las columnas de A son las n listas verticales de escalares:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz

- Si la matriz tiene m filas y n columnas, decimos que el tamaño de la matriz es m por n, escrito m x n
  - La matriz se denomina cuadrada si m=n
  - Utilizamos $\mathcal{M}_{mxn}$ para denotar el conjunto que contiene todas las matrices cuyo tamaño es m x n

$$\begin{array}{cc} & \text{3 columnas} \\ \text{2 filas} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \mathcal{M}_{2x3}$$

2 X 3

$$\begin{array}{cc} & \text{2 columnas} \\ \text{3 filas} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \mathcal{M}_{3x2}$$

3 X 2

Filas x Columnas

Matriz

- ***<u>Índice del componente</u>***: el escalar de la fila i y la columna j se denomina entrada (i,j) de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Fila Columna

(1,2)-entrada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3,1)-entrada

(3,3)-entrada

Propiedades de matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Las **entradas diagonales** de A son a_{11}, a_{22}, a_{33}, ...,
- y si m=n (esto es, si A tiene el mismo número de renglones que de columnas), entonces A es una **matriz cuadrada**.

Propiedades de matrices

- Una matriz cuadrada cuyas entradas no diagonales sean todas cero es una **matriz diagonal**.
- Una matriz diagonal cuyas entradas diagonales sean todas iguales es una **matriz escalar**.
- Si el escalar en la diagonal es 1, la matriz escalar es una **matriz identidad (I)**.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entradas diagonales de A 2 y 4

B es matriz cuadrada

C es una matriz diagonal

D es matriz identidad

Diagonal y traza

- La diagonal o diagonal principal de A está formada por los elementos con los mismos subíndices, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots,$
- Por lo tanto, la **traza** de A escrita $tr(A)$ es la suma de los elementos en la diagonal, es decir, $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots$
- Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

- Diagonal de A = $\{1, -4, 7\}$
- tr(A)= $1 - 4 + 7 = 4$

- Diagonal de B = $\{2, 3, -4\}$
- tr(A)= $2 + 3 - 4 = 1$

Diagonal y traza

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

- $tr(A + B) = 3 - 1 + 3 = 5$
- $tr(2A) = 2 - 8 + 14 = 8$

Igualdad de matrices

- Dos matrices son iguales si sus correspondientes elementos son iguales

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 0 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

- $A \neq B$ pero $A = C$

Propiedades de matrices

- Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & x \\ 5 & 3 & y \end{bmatrix}$$

- Ni A ni B pueden ser iguales a C (sin importar cuales sean los valores de x y y),
- pues A y B son matrices de 2×2 y C es de 2×3.
- Sin embargo, A $=$ B si y sólo si a $=$ 2, b $=$ 0, c $=$ 5 y d $=$ 3.

Igualdad de matrices

- Encuentre x, y, z, t tal que
- $\begin{bmatrix} x+y & 2z+t \\ x-y & z-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

- Por definición de igualdad de matrices, las cuatro entradas correspondientes deben ser iguales. Por lo tanto,
- $x + y = 3$ $\qquad 2z + t = 7$
- $x - y = 1$ $\qquad z - t = 5$

- Lo que resulta en $x = 2\,, y = 1\,, z = 4, t = -1$

Matriz cero

- matriz cero: matriz con todas las entradas nulas, denotada por O (cualquier tamaño) u $O_{m\times n}$.
    - Por ejemplo, una matriz cero de 2 por 3 puede denotarse

$$O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + O = A$$
$$0A = O$$
$$A - A = O$$

- Matriz identidad: debe ser cuadrada
    - La diagonal es 1, todo lo demás 0

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A veces I_n se escribe simplemente como I (cualquier tamaño).

Suma de matrices

- Sean A y B dos matrices del **mismo tamaño**, digamos m x n matrices. La suma de A y B, escrita $A + B$, es la matriz que se obtiene sumando los elementos correspondientes de A y B. Es decir

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

- La suma de matrices de distintos tamaños no está definida.

Multiplicación escalar

- El producto de la matriz A por un escalar k, escrito $k \cdot A$ o simplemente kA, es la matriz obtenida al multiplicar cada elemento de A por k. Es decir,

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

- Dos matrices del mismo tamaño se pueden sumar o restar.
- La matriz puede multiplicarse por un escalar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 0 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \quad 9B = \begin{bmatrix} 54 & 81 \\ 72 & 0 \\ 81 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 10 & 5 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} \quad A - B = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -6 & -5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Y multiplicación escalar de 2A

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 0 & 2 \times 1 \\ 2 \times 3 & 2 \times 0 & 2 \times 0 \\ 2 \times 5 & 2 \times 1 & 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

- Sea A $= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \end{bmatrix}$ entonces
- $\mathrm{A} + B =?$
- $3\mathrm{A} =$
- $2\mathrm{A} - 3B =$
- $\mathrm{A} + B = \begin{bmatrix} 1+4 & -2+6 & 3+8 \\ 0+1 & 4+(-3) & 5+(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
- $3A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \end{bmatrix}$
- $2A - 3B = \begin{bmatrix} -10 & -22 & -18 \\ -3 & 17 & 31 \end{bmatrix}$

Combinación lineal de A y B

Ejercicio

- Investigue que es y proporcione ejemplos de :
- Matriz triangular
- Matriz simétrica
- Determinante de una matriz