Universidad Autónoma de Tamaulipas

VERDAD, BELLEZA, PROBIDAD

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Operaciones con conjuntos

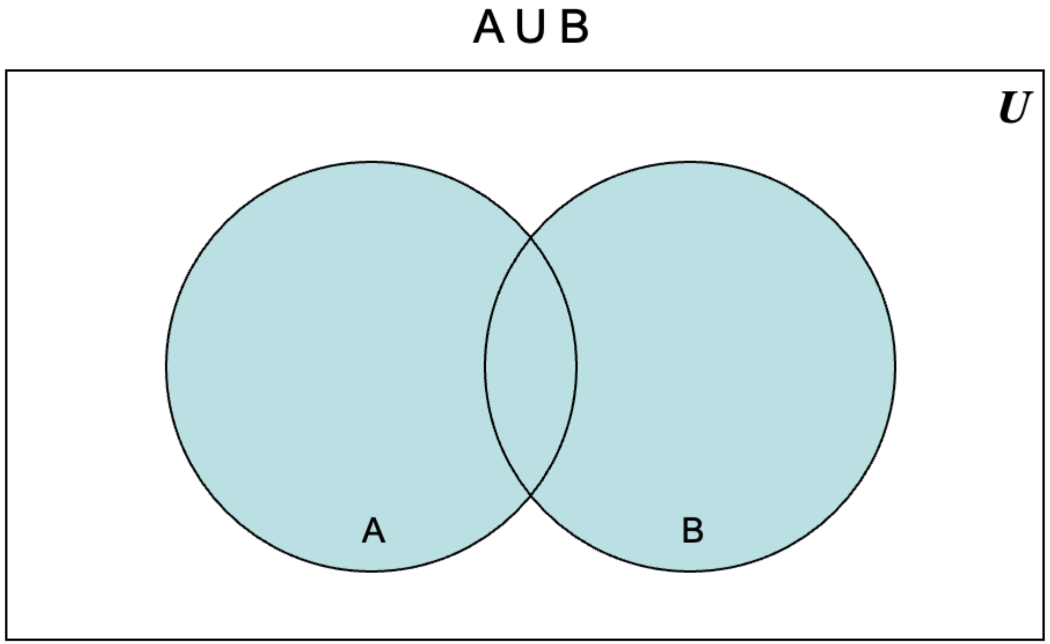
Dr. José Lázaro Martínez Rodríguez

Introducción

- Las operaciones con conjuntos también conocidas como álgebra de conjuntos, nos permiten realizar operaciones sobre los conjuntos para obtener otro conjunto. De las operaciones con conjuntos veremos las siguientes unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento.

Unión

- Sean A y B conjuntos. La unión de los conjuntos A y B, denotada por A ∪ B, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están bien en A o bien en B, o en ambos.



Unión

- La definición formal para la unión de dos conjuntos es:

$$A \cup B = \{x \mid x \in \mathrm{A} \;\vee x \in B\}$$

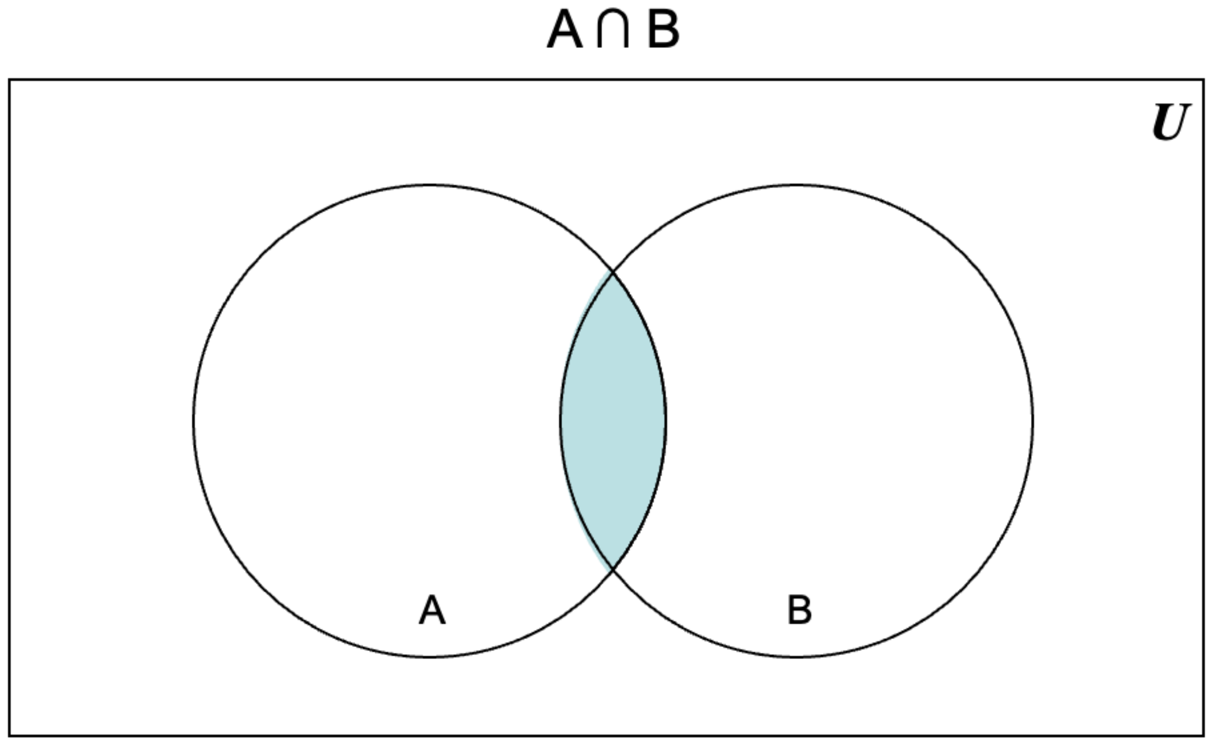
- Algunos ejemplos
  - {1, 2, 3} U {3, 4, 5} = {1, 2, 3, 4, 5}
  - {New York, Washington} U {3, 4} = {New York, Washington, 3, 4}
  - {1, 2} U ∅ = {1, 2}

Propiedades de la Unión

- Propiedades de la operación de Unión
  - A U $\varnothing$ = A — Ley de identidad
  - A U $\boldsymbol{U}$ = $\boldsymbol{U}$ — Ley de dominación
  - A U A = A — Ley idempotente
  - A U B = B U A — Ley conmutativa
  - A U (B U C) = (A U B) U C — Ley asociativa

Intersección

- Sean A y B conjuntos. La intersección de los conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están tanto en A como en B.



Intersección

- La definición formal para la intersección es:

$$A \cap B = \{x \mid x \in \mathrm{A} \ \wedge x \in B\}$$

- {1, 2, 3} ∩ {3, 4, 5} = {3}
- {New York, Washington} ∩ {3, 4} = ∅
  - No hay elementos en común
- {1, 2} ∩ ∅ = ∅
  - Cualquier conjunto intersección con el conjunto vacío da como resultado el conjunto vacío

Propiedades de la Intersección

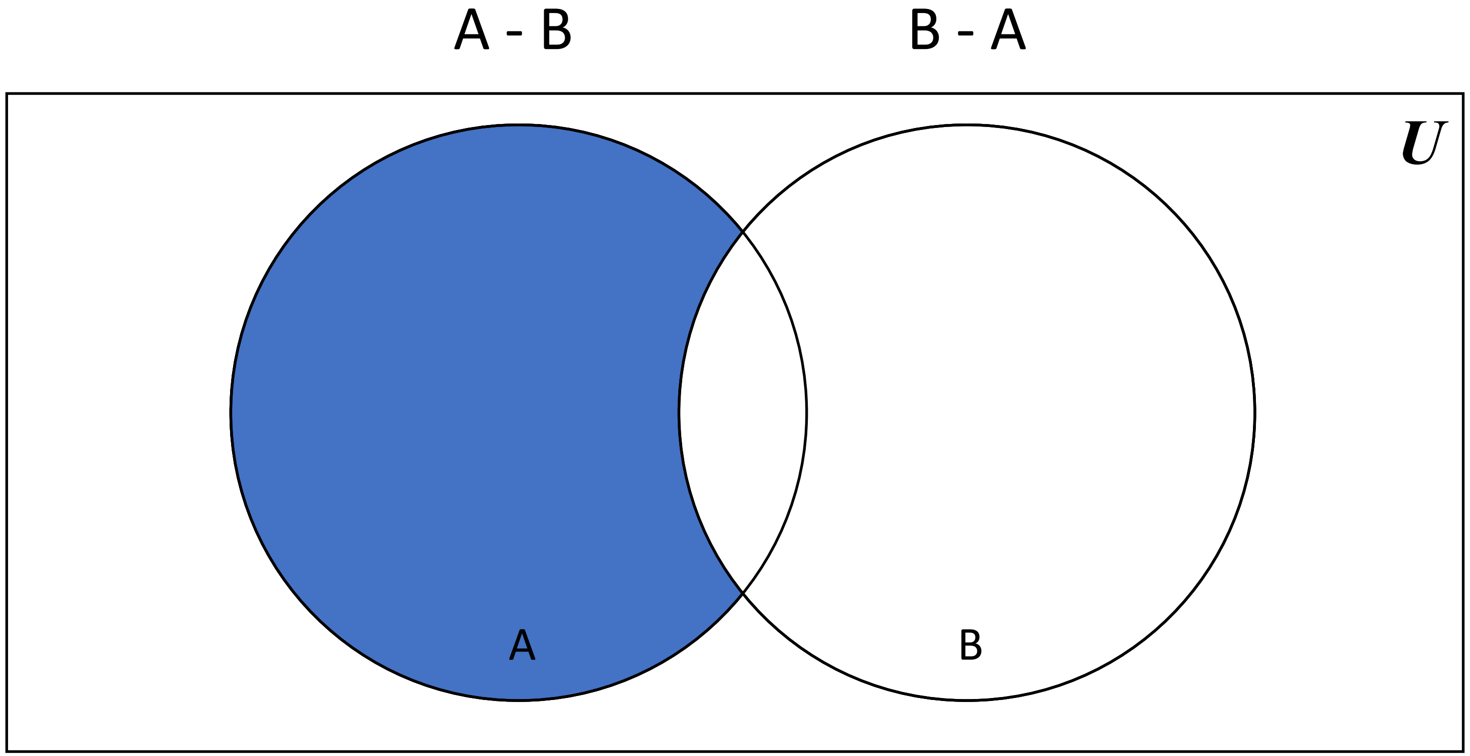
- Propiedades de la operación de intersección
  - $A \cap \boldsymbol{U} = A$ Ley de identidad
  - $A \cap \varnothing = \varnothing$ Ley de dominación
  - $A \cap A = A$ Ley Idempotencia
  - $A \cap B = B \cap A$ Ley Conmutativa
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ Ley Asociativa

Conjuntos disjuntos

- Definición formal de conjunto disjunto: dos conjuntos son disjuntos si su intersección es el conjunto vacío.
- Algunos ejemplos
- $\{1, 2, 3\}$ y $\{3, 4, 5\}$ no son disjuntos
- {Nueva York, Washington} y $\{3, 4\}$ son disjuntos
- $\{1, 2\}$ y $\varnothing$ son disjuntos
  - Su intersección es el conjunto vacío
- $\varnothing$ y $\varnothing$ son disjuntos.
  - Su intersección es el conjunto vacío

Diferencia

- Sean A y B conjuntos. La diferencia de los conjuntos A y B, denotada por A − B, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están en A, pero no en B. La diferencia de A y B se llama también complementario de B con respecto a A.



Diferencia

- Formalmente se define como

$$A - B = \{x \mid x \in \mathrm{A} \wedge x \notin B\}$$

- Algunos ejemplos
  - {1, 2, 3} - {3, 4, 5} = {1, 2}
  - {New York, Washington} - {3, 4} = {New York, Washington}
  - {1, 2} - ∅ = {1, 2}
    - La diferencia de cualquier conjunto S con el conjunto vacío será el conjunto S

Ejercicio

Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{d, e, f, g\}$, $C = \{b, c, d, e\}$. Hallar:

(a.) $A - B$

(d.) $B \cap C$

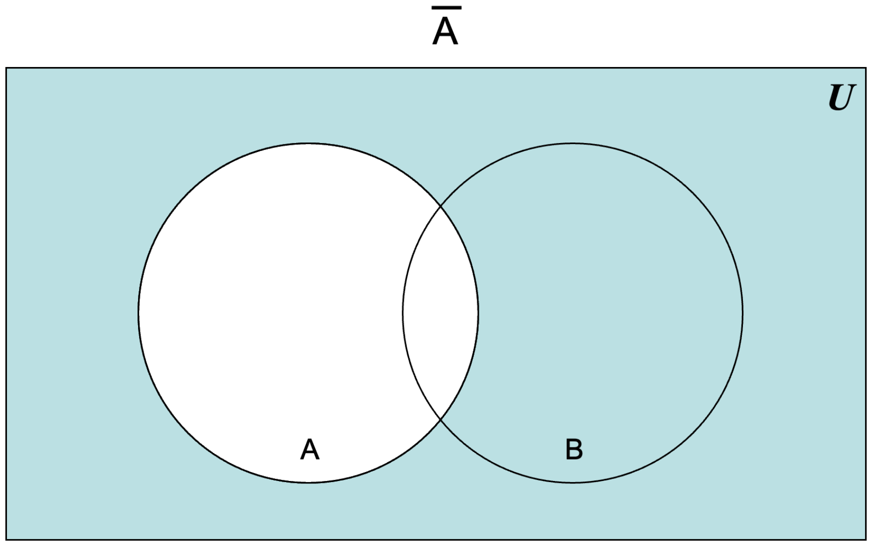
(g.) $A \cup B$

(j.) $A - (B \cap C)$

Complementario

- Sean U el conjunto universal. El conjunto complementario de A, denotado por $\bar{A}$, es el complementario de A con respecto a U. En otras palabras, el complementario del conjunto A es $U - A$.

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



Complementario

- Ejemplos
- Sea U = Z
- $\overline{\{1,2,3\}} = \{\ldots, -2, -1, 0, 4, 5, \ldots\}$
- Sea A = {a,e,i,o,u} y U = el abecedario
- $\overline{\{A\}} = \{b, c, ch, d, f\ , g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$
- Sea A el conjunto de los enteros positivos mayores que 10 (el conjunto universal es el conjunto de todos los enteros positivos). Entonces
- $\overline{\{A\}} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Propiedades complementario

- Propiedades de conjuntos complementarios
- $\bar{\bar{A}} = A$ Ley complementaria
- $A \cup \bar{A} = U$
- $A \cap \bar{A} = \varnothing$

Identidades

Tabla 1. Identidades entre conjuntos.

Identidad	*Nombre*
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	Leyes de identidad
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Leyes de dominación
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Leyes idempotentes
$\overline{(\overline{A})} = A$	Ley de complementación
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Leyes conmutativas
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Leyes asociativas
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Leyes distributivas
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Leyes de De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Leyes de absorción
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Leyes de complemento

Tablas de pertenencia

- Las identidades entre conjuntos se pueden demostrar utilizando tablas de pertenencia.
- Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto se usa un 1. Para indicar que el elemento no esta en el conjunto se usa un 0.
- Existe una gran similitud entre las tablas de pertenencia y las tablas de verdad.

Ejemplo

- Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1					
1	1	0					
1	0	1					
1	0	0					
0	1	1					
0	1	0					
0	0	1					
0	0	0					

Ejemplo

- Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1				
1	1	0					
1	0	1					
1	0	0					
0	1	1					
0	1	0					
0	0	1					
0	0	0					

Ejemplo

- Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	C	B∪C	A ∩ (B ∪ C)	A∩B	A∩C	(A ∩ B) ∪ (A ∩ C)
1	1	1	1				
1	1	0	1				
1	0	1	1				
1	0	0	0				
0	1	1	1				
0	1	0	1				
0	0	1	1				
0	0	0	0				

Ejemplo

- Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1			
1	1	0	1				
1	0	1	1				
1	0	0	0				
0	1	1	1				
0	1	0	1				
0	0	1	1				
0	0	0	0				

Ejemplo

- Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1			
1	1	0	1	1			
1	0	1	1	1			
1	0	0	0	0			
0	1	1	1	0			
0	1	0	1	0			
0	0	1	1	0			
0	0	0	0	0			

Ejemplo

- Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1		
1	1	0	1	1			
1	0	1	1	1			
1	0	0	0	0			
0	1	1	1	0			
0	1	0	1	0			
0	0	1	1	0			
0	0	0	0	0			

Ejemplo

- Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	C	B∪C	A ∩ (B ∪ C)	A∩B	A∩C	(A ∩ B) ∪ (A ∩ C)
1	1	1	1	1	1		
1	1	0	1	1	1		
1	0	1	1	1	0		
1	0	0	0	0	0		
0	1	1	1	0	0		
0	1	0	1	0	0		
0	0	1	1	0	0		
0	0	0	0	0	0		

Ejemplo

- Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	0	1	1	1		
1	0	1	1	1	0		
1	0	0	0	0	0		
0	1	1	1	0	0		
0	1	0	1	0	0		
0	0	1	1	0	0		
0	0	0	0	0	0		

Ejemplo

- Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	0	1	1	1	0	
1	0	1	1	1	0	1	
1	0	0	0	0	0	0	
0	1	1	1	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	0	1	1	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	

Ejemplo

- Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	
1	0	1	1	1	0	1	
1	0	0	0	0	0	0	
0	1	1	1	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	0	1	1	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	

Ejemplo

- Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Ejemplo

- Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	C	B∪C	A ∩ (B ∪ C)	A∩B	A∩C	(A ∩ B) ∪ (A ∩ C)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Ejercicio

- Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{0, 3, 6\}$. Obtén:
  1. $A \cup B$
  2. $A \cap B$
  3. $A - B$
  4. $B - A$
- Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Obtén:
  1. $A \cup B$
  2. $A \cap B$
  3. $A - B$
  4. $B - A$

Ejercicio

- Sea A, B y C conjuntos. Demuestra que:
  1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ejercicios

(b.) B^C

(c.) $(A - C) \cap (A - B)$

(e.) $(A \cup B) - C$

(f.) $(B \cup C) - (A - B)$

(h.) $(A - C)^C$

(i.) $(B \cap C)^C$

(k.) $(A \cup B)^C$

(l.) $A \cap B \cap C$

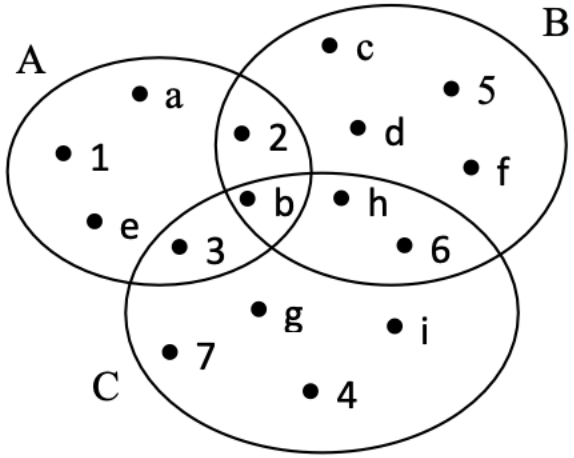
Ejercicios

1. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{d, e, f, g\}$, $C = \{b, c, d, e\}$. Hallar:

(a.)	$A - B$	(b.)	B^C	(c.)	$(A - C) \cap (A - B)$
(d.)	$B \cap C$	(e.)	$(A \cup B) - C$	(f.)	$(B \cup C) - (A - B)$
(g.)	$A \cup B$	(h.)	$(A - C)^C$	(i.)	$(B \cap C)^C$
(j.)	$A - (B \cap C)$	(k.)	$(A \cup B)^C$	(l.)	$A \cap B \cap C$
(m.)	$A \,\Delta\, B$	(n.)	$A \cap (B \,\Delta\, C)$	(o.)	$B \,\Delta\, (A \cup C)$

Ejercicio

- Determine las siguientes operaciones entre conjuntos

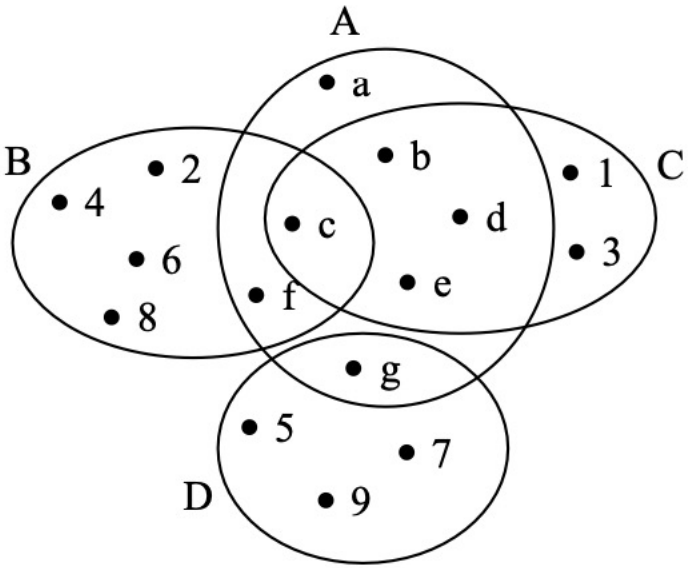


(a.) $A \cap B$

(b.) $(B \cap C)^c$

(c.) $C \cup A$

(d.) $(A - B)^c$



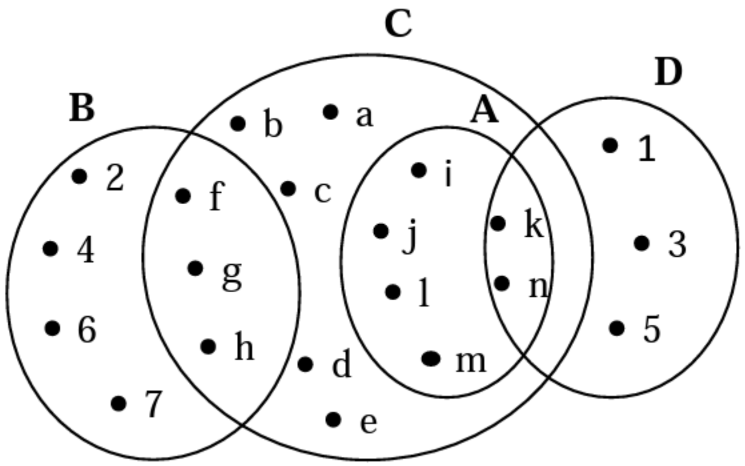
(e.) $(A \cap C) \cup B$

(f.) $(A \cup D) - D^c$

(g.) C^c

(h.) $C \Delta B$

Ejercicio



(i.) $(A \cap C) \cup B$

(j.) $(A \cap C \cap D) \cup (B \cap C)$

(k.) $(A \Delta D) \cup (B \Delta C)$

(l.) $(A - C)^c$

Ejercicio

- Representa mediante un Diagrama de Venn las siguientes operaciones entre conjuntos

(a.) $x \in (A \cap B) \cup (C \cap D)$

(b.) $y \in A \cup B \cup C$

(c.) $a \in (B \cap A) \cup C$

(d.) $z \in A \cap B \cap C$

(e.) $b \in (A \cup C) - D$

Identidades

- Se pueden establecer identidades adicionales entre conjuntos utilizando las existentes.

- Sea A y B conjuntos. Muestra que $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cup B$

$$\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = \bar{\bar{A}} \cup \bar{\bar{B}} \qquad \text{ley de Morgan}$$

$$= A \cup B \qquad \text{ley de Complemento}$$

Identidades

- Demostrar $(B \cup A) \cap \left(\overline{\bar{B} \cap \bar{A}}\right) = B \cup A$

$$(B \cup A) \cap \left(\overline{\bar{B} \cap \bar{A}}\right) = (B \cup A) \cap (B \cup A) \qquad \text{Ley de De Morgan}$$

$$= (B \cup A) \qquad \text{Ley de Idempotencia}$$

Identidades

- Se pueden establecer identidades adicionales entre conjuntos utilizando las existentes.

- Sea A, B y C conjuntos. Muestra que $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)} && \text{1ª ley de Morgan} \\
&= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) && \text{2ª ley de Morgan} \\
&= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A} && \text{2ª ley conmutativa} \\
&= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A} && \text{1ª ley conmutativa}
\end{aligned}
$$

Identidades

- Simplificar $(A \cup B) \cap \overline{(\bar{A} \cap B)}$

$(A \cup B) \cap \overline{(\bar{A} \cap B)}$	$= (A \cup B) \cap (\bar{\bar{A}} \cup \bar{B})$	2ª ley de Morgan
	$= (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$	Complementación
	$= A \cup (B \cap \bar{B})$	2ª ley distributiva
	$= A \cup \emptyset$	2ª ley de complemento
	$= A$	1ª ley de identidad

Identidades

- Simplificar

$\overline{(A \cap B)} \cap A$

- Solución
- $\overline{(A \cap B)} \cap A = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap A$ Ley de Demorgan
- $= (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{B} \cap A)$ Distributiva
- $= (\emptyset) \cup (\bar{B} \cap A)$ Complementario
- $= (A \cap \bar{B})$ Conmutativa
- $= A - B$ Caracterización diferencia

Ejemplo

- Simplifica la expresión
- $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$
  - Solución
- $= (A \cap \bar{B}) \cup [(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$ Asociativa
- $= (A \cap \bar{B}) \cup [(\bar{A} \cap (\bar{B} \cup B)]$ Distributiva
- $= (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \mathcal{U})$ Complementario
- $= (A \cap \bar{B}) \cup \bar{A}$ Identidad
- $= (A \cup \bar{A}) \cap (\bar{B} \cup \bar{A})$ Distributiva
- $= \mathcal{U} \cap (\bar{B} \cup \bar{A})$ Complemento
- $= (\bar{B} \cup \bar{A})$ Identidad
- $= (\overline{B \cap A})$ De Morgan

Ejercicios

1. Sean $A = \{a, b, c, d\}, B = \{a, b, e, i\}$
   - $A \cup B$
   - $A \cap B$
   - $A \times B$
   - $A - B$
   - $B - A$
2. Enumere los siguientes conjuntos
   - $A = \{x | x\ es\ un\ numero\ entero\ menor\ que\ 5\}$
   - $A = \{x | x\ es\ una\ potencia\ de\ 2\ y\ x\ es\ menor\ que\ 2000\}$
3. Sean $A = \{1,3,5,7,11\}, B = \{1,2,3,5\}, C = \{7,11\}, D = \{7,11,13\}$
   - Determine cuáles de estos conjuntos son subconjuntos de cuáles
4. Obtener el conjunto potencia de $E = \{a, e, i\}$

Ejercicio

- Simplifique y demuestre el resultado

1. $[\bar{A} \cap (B \cup C) \cap D] \cup \overline{[(A \cup \bar{B}) \cap B]}$
2. $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$
3. $\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \bar{B}}$
4. $\overline{A \cup (\bar{A} \cap B)}$
5. $(A \cap B) \cup [B \cap ((C \cap D) \cup (C \cap \bar{D}))]$