El principio fundamental de recuento

lazaro.martinez@uat.edu.mx

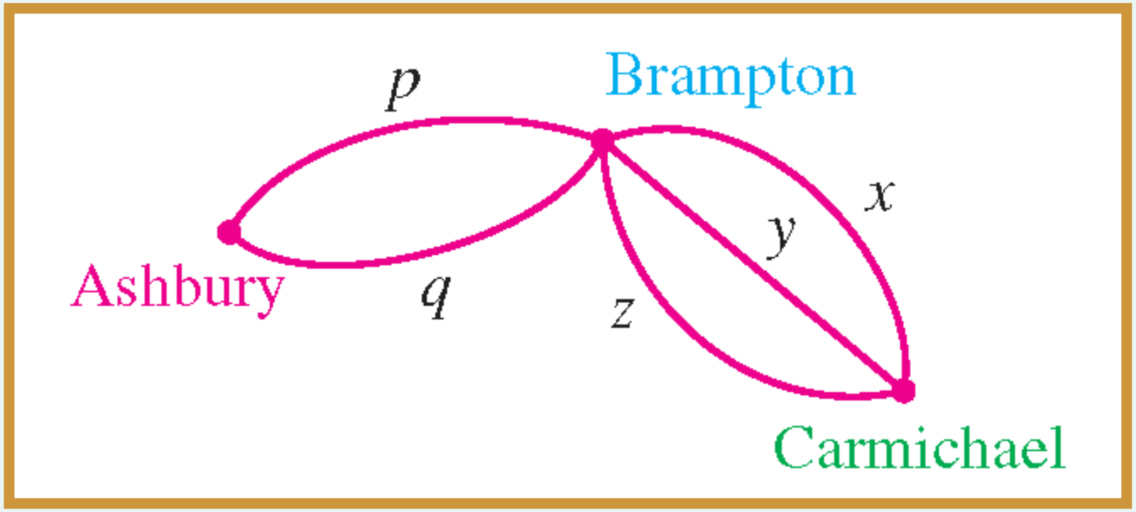
Visión general

Supongamos que hay tres ciudades:

- Ashbury, Brampton y Carmichael
- Están situados de tal forma que
  - Dos carreteras conectan Ashbury con Brampton
  - Tres carreteras conectan Brampton con Carmichael

Visión general

¿Cuántas rutas diferentes se pueden tomar para viajar de Ashbury a Carmichael pasando por Brampton?



Visión general

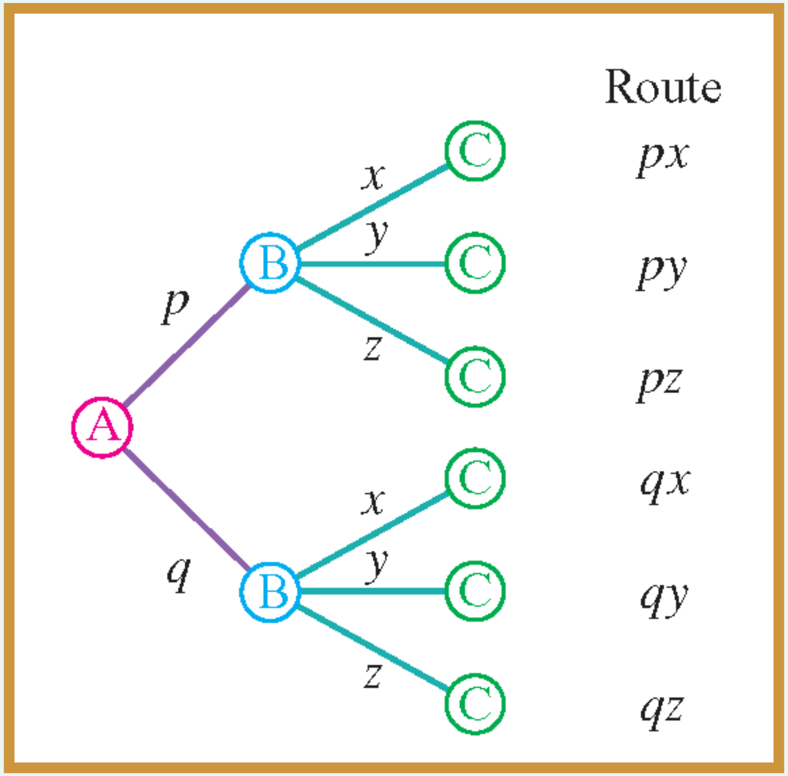
La clave para responder a esta pregunta es considerar el problema por etapas.

- En la primera etapa (de Ashbury a Brampton) hay dos opciones.
- Para cada una de estas opciones, hay tres opciones en la segunda etapa (de Brampton a Carmichael).

Visión general

Por lo tanto, el número de rutas diferentes es 2 × 3 = 6.

- Estas rutas están convenientemente enumeradas mediante un *diagrama de árbol* como en la figura.



El principio fundamental de recuento

El método que hemos utilizado para resolver este problema conduce al siguiente principio.

El principio fundamental de recuento:

- Supongamos que se producen dos acontecimientos en orden.

- Si la primera puede ocurrir de m maneras y la segunda de n maneras
(después de que haya ocurrido la primera).

- Entonces los dos sucesos pueden ocurrir en orden de $m \times n$ maneras.

Visión general

Este principio tiene una consecuencia inmediata para cualquier número de sucesos:

- Si E_1 , E_2 , ..., E_k son acontecimientos que ocurren en orden

- Y si E_1 puede ocurrir de n_1 *maneras,* E_2 en n_2 maneras, y así sucesivamente

- Entonces los sucesos pueden ocurrir en orden de $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ maneras

P. ej. 1-Utilizar el principio fundamental de recuento

Una heladería ofrece tres tipos de conos y 31 sabores.

- ¿Cuántos conos de helado individuales diferentes se pueden comprar en esta tienda?

P. ej. 1-Utilizar el principio fundamental de recuento

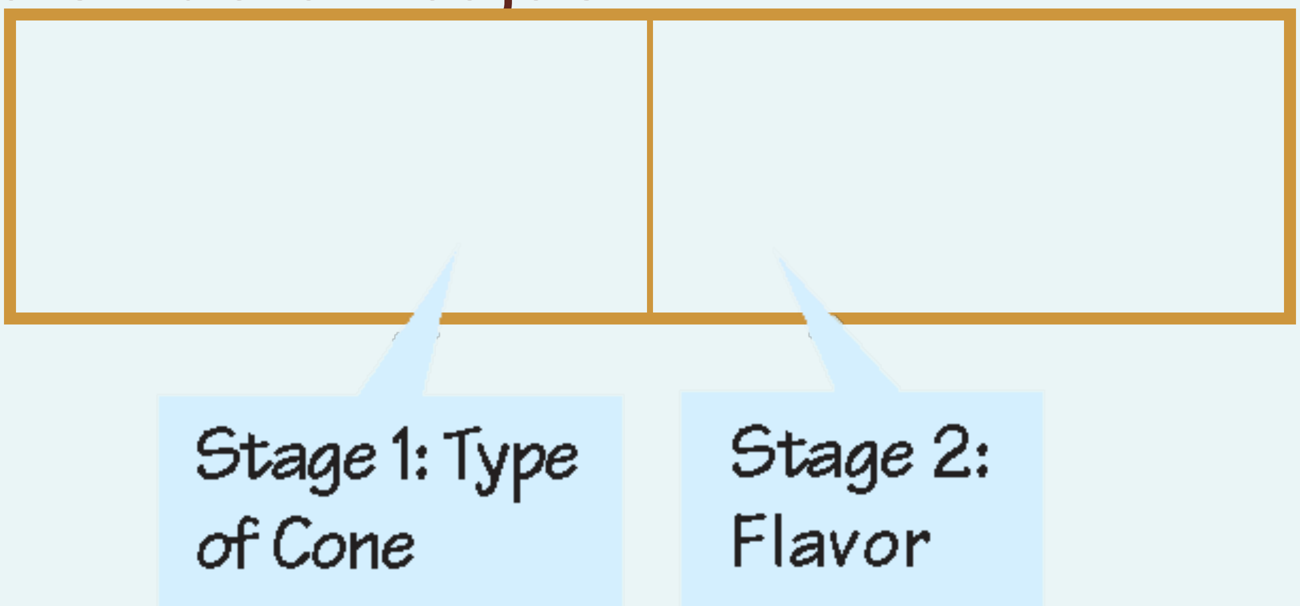
Hay dos opciones:

- Tipo de cono
- Sabor a helado

- En la primera fase, elegimos un tipo de cono.
- Y en la segunda etapa, elegimos un sabor.

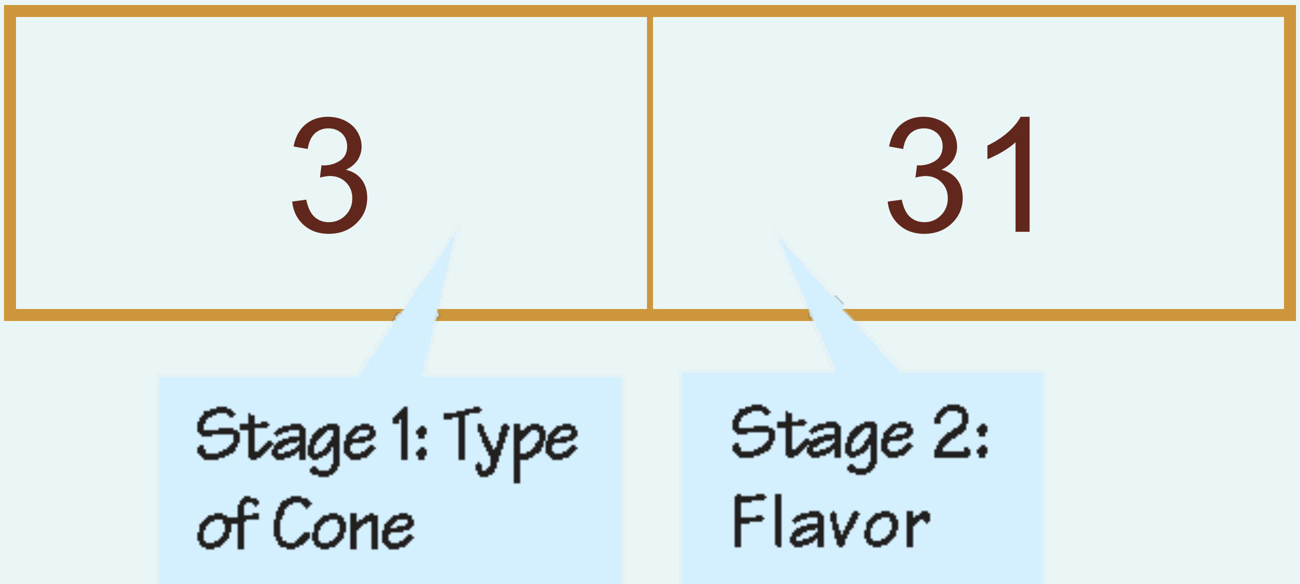
P. ej. 1-Utilizar el principio fundamental de recuento

Podemos pensar en las distintas etapas como si fueran cajas:



P. ej. 1-Utilizar el principio fundamental de recuento

La primera casilla puede rellenarse de tres maneras, y la segunda, de 31:



- Por lo tanto, según el Principio Fundamental del Recuento, hay $3 \times 31 = 93$ formas de elegir un helado de una sola porción en esta tienda.

Ej. 2-Utilizar el principio fundamental de recuento

En un determinado Estado, las matrículas de los automóviles muestran tres letras seguidas de tres dígitos.

¿Cuántas placas de este tipo son posibles si la repetición de las letras

a) ¿Está permitido?

b) ¿No está permitido?

Ej. 2-Utilizar el principio fundamental de recuento Ejemplo a)

Hay seis etapas de selección, una para cada letra o cifra de la matrícula.

- Como en el ejemplo anterior, esbozamos una caja para cada etapa:

26	26	26	10	10	10

Letters

Digits

Ej. 2-Utilizar el principio fundamental de recuento Ejemplo a)

- En la primera fase, elegimos una letra (entre 26 posibles)
- En la segunda fase, elegimos otra letra (de nuevo entre 26 opciones)
- En la tercera fase, elegimos otra letra (26 opciones)

 Ejemplo a)

- En la cuarta etapa, elegimos un dígito (de entre 10 posibles)
- En la quinta etapa, elegimos un dígito (de nuevo entre 10 opciones)
- En la sexta etapa, elegimos otro dígito (10 opciones)

Ej. 2-Utilizar el principio fundamental de recuento Ejemplo a)

Por el Principio Fundamental de Conteo, el número de matrículas posibles es

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 17{,}576{,}000$$

Ej. 2-Utilizar el principio fundamental de recuento Ejemplo (b)

Si no se permite la repetición de letras, podemos ordenar las opciones de la siguiente manera:

26	25	24	10	10	10

Letters

Digits

Ejemplo (b)

En la primera fase, tenemos 26 letras para elegir.

- Pero una vez elegida la primera letra, sólo hay 25 letras para elegir
en la segunda etapa.

- Una vez elegidas las dos primeras letras elegidas, quedan 24 letras para elegir para la tercera etapa.

- Los dígitos se eligen como antes.

Ejemplo (b)

Por el Principio Fundamental de Conteo, el número de matrículas posibles es

$$26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 10 \times 10 = 15{,}600{,}000$$

Número de subconjuntos de un conjunto

Sea S un conjunto con n elementos. Se puede elegir un subconjunto de S haciendo una de dos elecciones para cada elemento:

- Podemos elegir que el elemento esté dentro o fuera de A.
- Por el Principio Fundamental del Recuento, el número total de subconjuntos diferentes es $2 \times 2 \times \ldots \times \mathbf{2}$, donde hay n factores.

Número de subconjuntos de un conjunto

Un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos diferentes.

Ej. 3-Hallar el número de subconjuntos de un conjunto

Una pizzería ofrece la pizza básica de queso y 16 ingredientes a elegir.

- ¿Cuántos tipos de pizza se pueden pedir en esta pizzería?

Ej. 3-Hallar el número de subconjuntos de un conjunto

Necesitamos el número de subconjuntos posibles de las 16 coberturas.

- Incluyendo el conjunto vacío, que corresponde a una pizza de queso normal.
- Así, $2^{16} = 65.536$ pizzas diferentes se pueden pedir.

Regla de la suma

Si una primera tarea puede realizarse de m formas,

mientras que una segunda tarea puede realizarse de n formas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea,

entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera de **m + n** formas

Regla de la suma

La biblioteca de una universidad tiene 40 libros de texto de sociología y 50 de antropología.

Por la regla de la suma, un estudiante de esta universidad puede elegir entre 40+50 = 90 libros de texto para aprender acerca de alguno de estos temas

Regla de la suma

El principio de la suma puede extenderse a más de dos tareas, siempre y cuando se cumpla que ningún par de tareas pueda ocurrir simultáneamente.

En términos de conjuntos, se tiene que para cualesquiera A_1, A_2, ..., A_k conjuntos que son **ajenos dos a dos**. Entonces se cumple que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$$

Ejemplo

En la sección de ciencias de la computación de la biblioteca de la FIC hay 7 libros sobre C++, 6 libros sobre Java, y 5 libros sobre Python.

En consecuencia, por el principio de la suma, una alumna de la facultad de ciencias tiene 7+6+5=18 libros a elegir para comenzar a aprender algún lenguaje de programación.

Ejemplo

Una profesora de la facultad de ciencias tiene 8 libros sobre Probabilidad en su colección, mientras que uno de sus colegas tiene 5. Si denotamos por *m* al número de libros diferentes sobre Probabilidad que tienen en su posesión, se cumple que

$$8 \leq m \leq 13,$$

Ejercicios

Ejercicio

La bolsa de trabajo en Victoria se acaba de publicar

				Vacantes
25	**MULTIELECTRICO**	Chofer para camioneta de estaquita(masculino) con experiencia y licencia de manejo vigente	Preparatoria	1
26*	**SCOUTECH**	Programadores (indistintos)	Ing. En Sistemas, Lic.en Informatica,Carrera afin	5
27	**TALLER MECANICO SALDIVAR**	Mecánicos con experiencia (masculino)	Tec. Mécanico o Mecánico	1
		Ayudante de mecánico (masculino)	Preparatoria/Secundaria	1

De cuantas opciones se puede aprovechar para comenzar a trabajar

Ejercicios

En un aula tengo 6 hombres y 5 mujeres.

¿Cuántos integrantes tiene el aula?

¿De cuántas maneras puedo crear un club de ajedrez con los integrantes?

Ejercicios

El club de teatro de la FIC realizará una obra. Si 6 hombres y ocho mujeres ensayan para los papeles principales (masculino y femenino). ¿De cuantas formas se puede elegir a la pareja principal

Ejercicios

Las placas de automóviles constan de 2 letras seguidas de 4 dígitos

1. Si ninguna letra o dígito se pueden repetir, ¿cuántas placas diferentes habría?
2. ¿Y si podemos repetir letras o dígitos?
3. Si se permiten repeticiones, ¿cuántas placas tendrán solamente vocales (A,E,I,O,U) y dígitos pares? (0 es un par)

Ejercicio

Una contraseña de un sistema informático consiste en 3, 4 o 5 caracteres. Cada uno de dichos caracteres debe ser un dígito o una letra del alfabeto.

Ejemplo

Se quiere etiquetar las butacas de un auditorio con una letra y un número entero positivo menor o igual que 100. ¿Cuál es el número máximo de butacas a las que se puede asignar una etiqueta diferente?

Ejemplo

En una sala hay 32 ordenadores. Cada ordenador tiene 24 puertos. ¿Cuantos puertos elegibles diferentes hay en la sala?

Ejemplo

¿Cuántas cadenas diferentes de bits hay con longitud 7?

Cada bit puede colocarse como 0 o 1, por lo tanto son dos opciones diferentes por bit, lo que resulta en la regla del producto:

$2x2x2x2x2x2x2 = 2^7=128$

Ejemplo

- En una versión de un lenguaje, el nombre de una variable es una cadena de uno o dos caracteres alfanuméricos, y las letras mayúsculas y minúsculas no se distinguen.
- Además, un nombre de variable debe empezar con una letra y debe ser diferente de las cinco cadenas de dos caracteres que están reservadas por el lenguaje. ¿Cuántos nombres de variables distintos hay en dicho lenguaje?

solución

Sea **V** el número de nombres de variables disponibles.

Sea V_1 el número de variables compuestas por un solo caracter.

Sea V_2 el número de variables compuestas por dos caracteres.

Según el principio de la suma, $V = V_1 + V_2$, donde además, sabemos que $V_1 = 26$, pues una variable de un solo caracter debe ser una letra.

Según la regla del producto, hay 26x36 cadenas de dos caracteres que comienzan por una letra.

Sin embargo, 5 de ellas están excluidas, por tanto se tiene que **V2 = 26x36−5 = 931.** V= 26 + 231= 957

Ejemplo

Cada usuario de un ordenador tiene una contraseña, con una longitud de entre seis y ocho caracteres, cada uno de los cuales es bien un dígito o bien una letra mayúscula. Cada contraseña debe contener al menos un dígito. ¿Cuántas contraseñas distintas admite el sistema?

Sea P el número total de contraseñas y sean P6, P7 y P8, respectivamente el número de contraseñas de longitud 6, 7 y 8. Según la regla de la suma P = P6 +P7 +P8.
Para determinar P6 es necesario calcular el número de cadenas de longitud 6, incluyendo las que no contienen ningún dígito, y después restar las cadenas no validas.

P6 = $36^6 - 26^6$ = 1 867, 866 560

P7 =$36^7 - 26^7$ =70332,353920

P8 = $36^8 - 26^8$ = 2 612 282,842 880 **P =?**

Ejemplo

¿Cuántas cadenas de bits hay que tengan longitud ocho y que bien comiencen con un 1 o bien terminen con 00?

Cadenas de 8 bits que comiencen con 1 = 2^7 = 128

1	?	?	?	?	?	?	?

Cadenas de 8 bits que terminen con 00 = 2^6 = 64

?	?	?	?	?	?	0	0

Las dos tareas simultáneamente = 2^5 = 32 (estas las quitaremos del resultado)

1	?	?	?	?	?	0	0

Por lo tanto el número de cadenas de 8 bits que empiecen con 1 o terminen con 00 son 128 + 64 − 32

= 160

Ejemplo

Tengo 10 cartas diferentes y las puedo enviar por correo en 5 buzones diferentes, cuantas opciones tengo de hacerlo?

Ejemplo

Un restaurante ofrece 5 opciones de aperitivo, 10 de plato principal y 4 de postre. Un cliente puede elegir comer sólo un plato, o dos platos diferentes, o los tres platos.

¿cuántas comidas posibles diferentes ofrece el restaurante?

Ejercicio

En cierta universidad hay 18 estudiantes de matemáticas y 325 de informática.

1. ¿De cuántas formas se pueden escoger dos representantes, de forma que uno de ellos sea estudiante de matemáticas y el otro sea estudiante de informática?
2. ¿De cuántas maneras se puede escoger un representante que sea estudiante de matemáticas o informática?

Un cuestionario se compone de diez preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro posibles respuestas.

1. ¿Cuántas opciones hay en total?
2. ¿De cuántas formas puede contestar un estudiante al cuestionario si responde a todas las preguntas?
3. ¿De cuántas formas puede contestar un estudiante al cuestionario si puede dejar preguntas sin contestar?