Práctica 5 REGLA DE CRAMER

Objetivo

Que el alumno conozca e implemente la regla de cramer.

Marco teórico

La regla de Cramer es un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles y determinados, es decir, sistemas con el mismo número de ecuaciones que incógnitas y con una única solución. Se basa en el cálculo de determinantes para obtener los valores de las incógnitas.

A cada matriz cuadrada se le asigna un escalar especial llamado determinante de A, que se denota por det(A) o |A|. El determinante de una matriz cuadrada es un número que se obtiene como resultado de realizar una serie de operaciones con sus elementos de este valor se puede deducir importantes propiedades de los elementos que lo componen tienen además muchas aplicaciones en la geometría y el álgebra.

El determinante de una matriz de orden 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Se calcula con la siguiente fórmula

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Puedes utilizar determinantes para resolver un sistema de ecuaciones lineales, se utiliza la matriz de coeficientes del sistema lineal.

Sistema Lineal		**Matriz Coef.**
ax+by=e cx+dy=f	$\Rightarrow$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Ejemplo:

Sea una matriz de coeficientes

Sistema Lineal

ax+by=e

cx+dy=f

Matriz Coef.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \text{ad - bc}$$

Si $|A| \neq 0$, entonces el sistema tiene exactamente una solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\det A} \quad \text{y} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\det A}$$

Aplicación de la regla de cramer en un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -16 \\ 3x + 5y = 14 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (-3)(3) = 10 + 9 = 19$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -16 & -3 \\ 14 & 5 \end{vmatrix} = (-16)(5) - (-3)(14) = -80 + 42 = -38$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -16 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = (2)(14) - (3)(-16) = 28 + 48 = 76$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-38}{19} = -2 \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{76}{19} = 4$$

Ejemplo:

8x+5y= 2

2x-4y= -10

La matriz de coeficientes es: $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ det $\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-32) - (10) = -42$

Así que...

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -10 & -4 \end{vmatrix}}{-42} \qquad\qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix}}{-42}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -10 & -4 \end{vmatrix}}{-42} = \frac{-8-(-50)}{-42} = \frac{42}{-42} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix}}{-42} = \frac{-80-4}{-42} = \frac{-84}{-42} = 2$$

Solución: (-1,2)

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE CONJUNTO DE ECUACIONES LINEALES

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Se puede escribir en forma de matriz, que quedaría así:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Defina

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$[x]=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \; and \; [B]=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Si $D \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución como se muestra a continuación (regla de Cramer)

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

Donde nos quedaría:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Teniendo eso en cuenta resuelva lo siguiente:

Considere las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 36 \\ -3x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 3x_2 - 8x_3 &= -31 \\ [A][x] &= [B] \end{aligned}$$

Donde

$$[A]=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$[x]=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix} 36 \\ 7 \\ -31 \end{bmatrix}$$

Resultado

Al terminar esta práctica el alumno podrá identificar, analizar e implementar la regla de cramer.

Conclusión:

La regla de Cramer es un método algebraico para resolver sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de variables que ecuaciones, y es un método relativamente sencillo de entender.

Bibliografia

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebralineal/sistemas/regla-de-cramer.html

https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/algebra/metodo-gauss.html

https://www.aiu.edu/cursos/matematica/pdf%20leccion%203/lecci%C3%B3n%203.4.pdf

Mathsisfun: Resolver sistemas de ecuaciones por sustitución