Lenguajes formales y expresiones regulares

Dr. José Lázaro Martínez Rodríguez

Primero hay que aprender conceptos

Lenguajes formales

- Si queremos dar instrucciones a una computadora, tenemos que utilizar algo mucho más preciso.
- Los lenguajes con sintaxis y semántica precisas se llaman lenguajes formales.
- Un lenguaje formal se compone de palabras cuyas letras se toman de un alfabeto y están bien formadas según un conjunto específico de reglas

Alfabeto

Un alfabeto es un conjunto no vacío y finito de símbolos

- Se utiliza el símbolo ∑ (sigma) para denotar un alfabeto
- Ejemplos:
  - Binario: ∑ = {0,1}
  - Todas las letras minúsculas: ∑ = {a,b,c,..z}
  - Alfanuméricos: ∑ = {a-z, A-Z, 0-9}
  - DNA letras moleculares: ∑ = {a,c,g,t}
  - …

El alfabeto o abecedario de una lengua o idioma es el conjunto ordenado de sus letras

Cadenas (Strings)

Diferente de null

Una cadena o palabra es una secuencia finita de símbolos elegidos de Σ

- ***Cadena vacía es*** ε ***(o "epsilon")***

- Longitud de una cadena *w*, denotada por "$|w|$", es igual al *numero de (non- ε) caracteres en la cadena*
  - *E.g., x = 010100* $|x| = 6$
  - $x = 01\ \varepsilon\ 0\ \varepsilon\ 1\ \varepsilon\ 00\ \varepsilon$ $|x| = ?$

- *xy* = concatenación de dos cadenas x , y

Cadenas

- Si Σ es un alfabeto, Σ^k es el conjunto de cadenas de longitud k, tales que todos los símbolos están en Σ
- $\Sigma^0 = \{\Lambda\}$
- Si $\Sigma = \{0, 1\}$ entonces
  - $\Sigma^0 = \{\Lambda\}$
  - $\Sigma^1 = \{0, 1\}$
  - $\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$, etc.
- $\Sigma \neq \Sigma^1$ (Σ es el alfabeto y Σ^1 es el conjunto de cadenas de longitud 1)

Cadenas

- Si tenemos que $\Sigma = \{a, ab\}$ entonces
- $\Sigma^1 = ?$
- $\Sigma^2 = ?$
- $\Sigma^3 = ?$
- $\Sigma^* = ?$

Cerradura de Kleen ($\sum^*$)

- Dado un alfabeto ∑, deseamos definir un language en el cual cualquier cadena de letras del ∑ es una palabra/cadena, incluso cadenas vacías/nulas

- A este lenguaje le llamaremos **cerradura** del alfabeto

- Cerradura positiva ($\sum^+$), similar pero sin incluir cadena vacía

Conjuntos

Definición 1. Un conjunto es un grupo de objetos. Los objetos de un conjunto se llaman elementos o miembros del conjunto.

Ejemplo 1

El conjunto de enteros positivos menores que 100 se puede denotar como $\{1,2,3,...,99\}$

Definición 2. Dos conjuntos son equivalente si y sólo si tienen los mismos elementos.

Ejemplo 2

Conjunto $\{1,3,3,3,5,5,5,5\}$ es equivalente al conjunto $\{1,3,5\}$

Conjuntos

- Los conjuntos se escriben en términos de una característica.
- A = {a | a es un color del arcoíris}
- V = {v | v es una vocal}
- N = {n | n es un número arábigo}

Símbolos

- Los símbolos que frecuentemente son utilizados para hablar de conjuntos son los siguientes:
  - para todo ($\forall$),
  - existe ($\exists$),
  - igual o identidad ($=$),
  - variables u objetos individuales (x_1, x_2, x_3, ...).
  - Símbolo de pertenencia ($\in$),
  - no pertenencia ($\notin$).

Propiedades

- Una propiedad es una afirmación, que se refiere a la manera en que los objetos que forman un conjunto.
- Por ejemplo si deseáramos decir que existe un conjunto que tiene un elemento podemos escribir a ($a \in A$).

$$a \in A \Leftrightarrow a \text{ cumple } P.$$

$$\{a \mid a \text{ cumple } P\}$$

Ejemplo

- Indique la pertenencia con $\subseteq$, $\in$, $\notin$, $=$, $\neq$
- 2 ___ {2,4,6}
- {2} ___ {2,4,6}
- 1.5 ___ **Z**
- -1.5 ___ **Z**
- 15 ___ **Z**

$\in$

$\subseteq$

$\notin$

$\notin$

$\in$

Producto cartesiano

El Producto Cartesiano de dos conjuntos se define como:

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Ejemplo: $A = \{x, y\}$, $B = \{a, b, c\}$

$A \times B = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$

Y $B \times A$?

$B \times A = \{(a,x), (a,y), (b,x), (b,y), (c,x), (c,y)\}$

$(x,a) != (a,x)$

Operaciones de conjuntos

Union: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ OR } x \in B\}$

Ejemplo: $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d\}$

Intersección: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ AND } x \in B\}$

Ejemplo: $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$

$A \cap B = \{b\}$

Operaciones de conjuntos

Dos conjuntos se llaman disjuntos si su intersección es vacía, es decir, no comparten ningún elemento: $A \cap B = \emptyset$

La diferencia entre dos conjuntos A y B contiene exactamente los elementos de A que no están en B:

$A\text{-}B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Ejemplo: $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$, $A\text{-}B = \{a\}$

Operaciones de conjuntos

- A = {perro, lobo}, B = {gato, león, michito}

- $A \cup B$ = {perro, lobo, gato, león, michito}

- $A \cap B = \emptyset$

- A-B = {perro, lobo}

Conjuntos

- ¿Cuál es el conjunto de las letras minúsculas en el abecedario?
  - A= {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,r,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}
- ¿Cuál es el conjunto de vocales?
  - B={a,e,i,o,u}
  - A-B = ?
  - {b,c,d,f,g,h,j,k,l,r,m,n,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z} }

Operaciones de conjuntos

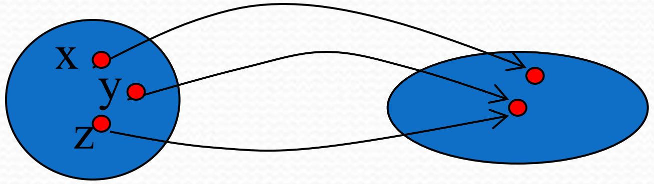
El complemento de un conjunto A contiene exactamente los elementos considerados que no están en A: -A = U-A

Ejemplo: U = **N**, B = {250, 251, 252, ...}

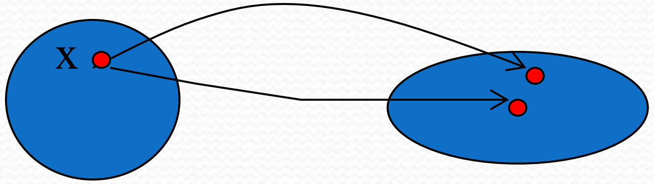
-B = {0, 1, 2, ..., 248, 249}

Funciones y relaciones

- Sean A y B los conjuntos. Una función f de A a B es una asignación de exactamente un elemento de B para cada elemento de A. Escribimos $f(a)=b$ si b es el único elemento de B asignado por la función f para el elemento a de A.
- Si f es una función de A a B, escribimos $f : A \rightarrow B$.



A function



Not a function

Ejercicios

- $A = \{2, 3, 4, 5\}$
- $B = \{4, 5, 6, 7\}$
- $C = \{6, 7, 8, 9\}$
- $D = \{8, 9, 10, 11\}$,
- encontrar

(a) $A \cup B$

(b) $A \cup C$

(c) $B \cup C$

(d) $B \cup D$

(e) $(A \cup B) \cup C$

(f) $A \cup (B \cup C)$

(g) $B \cup (C \cup D)$

(a) $A \cap B$

(b) $B \cap C$

(c) $A \cap (C \cap D)$

(d) $A \cap C$

(e) $B \cap D$

(f) $(A \cap B) \cup C$

(g) $A \cap (B \cup D)$

(h) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

(i) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

Recordando

- ¿Qué es un alfabeto?
- ¿Qué es una cadena?
- ¿Qué es un conjunto?
  - ¿Qué operaciones se pueden hacer con conjuntos?

Ejercicios

- **Si A y B son dos conjuntos tal que $A \subset B$, entonces qué es $A \cup B$?**
  -¿cómo lo demuestra?

- **Encontrar la unión, intersección y diferencia (A-B) del siguiente par de conjuntos.**

  A = El conjunto de todas las letras de la palabra BEAST

  B = El conjunto de todas las letras de la palabra TASTE

Ejercicios

- **Sea X = {2, 4, 5, 6} Z = {5, 6, 7, 8} Y = {3, 4, 7, 8}, encontrar**

  (a) $(X - Y) \cup (Y - X)$

  (b) $(X - Y) \cap (Y - X)$

  (c) $(Y - Z) \cup (Z - Y)$

  (d) $(Y - Z) \cap (Z - Y)$