VERDAD, BELLEZA, PROBIDAD
UAT
Universidad Autónoma de Tamaulipas

FIC
Facultad de Ingeniería y Ciencias

Cuantificadores anidados

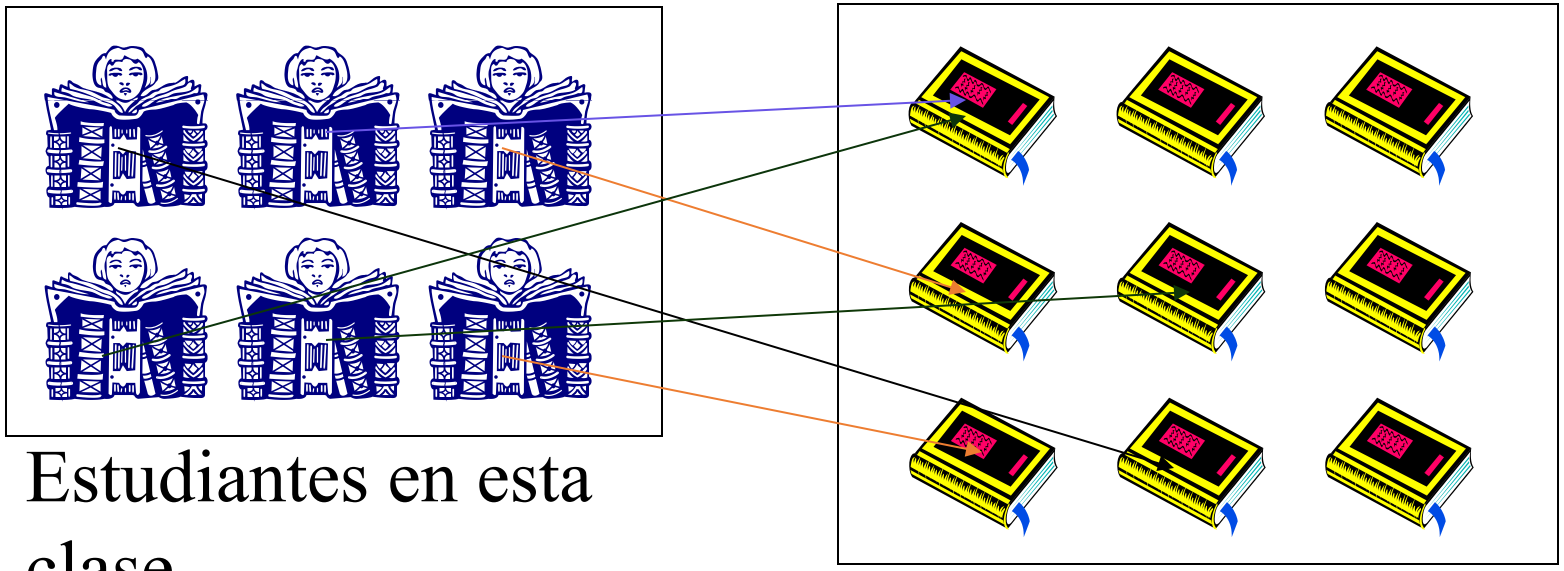
José Lázaro Martínez Rodríguez

Cuantificadores anidados

- Los cuantificadores anidados son a menudo necesarios para expresar el significado de las oraciones en lenguaje natural, así como conceptos en informática y las matemáticas.
- Ejemplo: "Todo número real tiene un inverso" es
- $\forall_x \exists_y (x + y = 0)$
- Donde los dominios de *x* y *y* son los números reales
- También podemos pensar en funciones proposicionales anidadas
- $\forall x \exists y (x + y = 0)$ puede ser $\forall x\, Q(x)$ donde $Q(x)$ es $\exists y\, P(x, y)$ donde $P(x, y)$ *es* $(x + y = 0)$

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

- Por cada estudiante en esta clase, hay un curso de computación que el estudiante ha tomado.

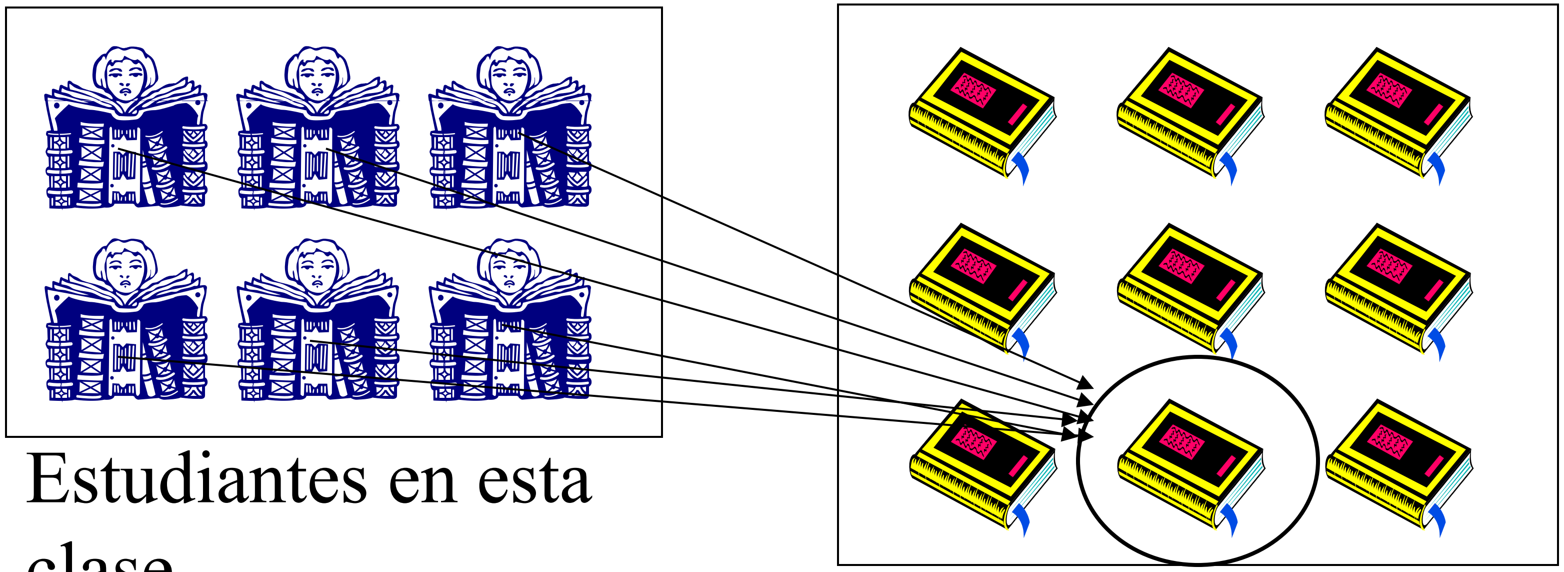


Estudiantes en esta clase

Cursos computación

$$\exists y \forall x P(x, y)$$

- Hay algún curso de computación que cada estudiante en esta clase ha tomado

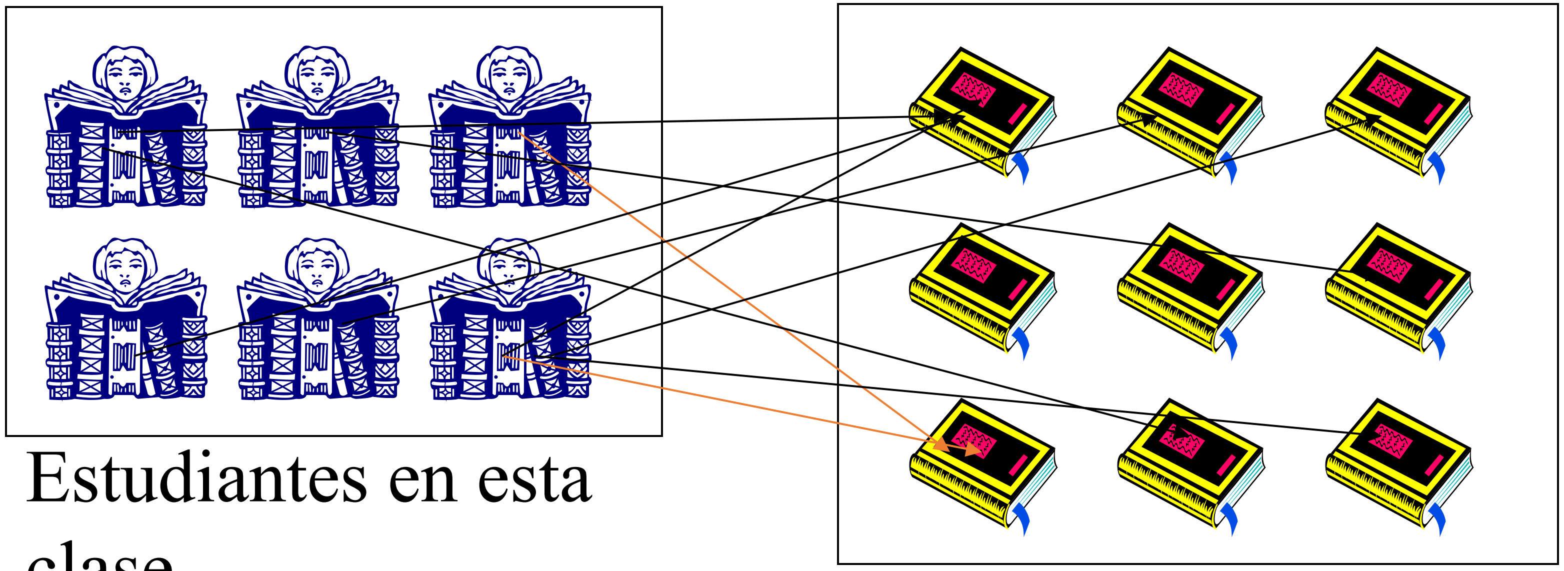


Estudiantes en esta clase

Cursos computación

$$\forall y \exists x P(x, y)$$

- Para cada curso de computación, hay algún estudiante en esta clase que ha tomado el curso

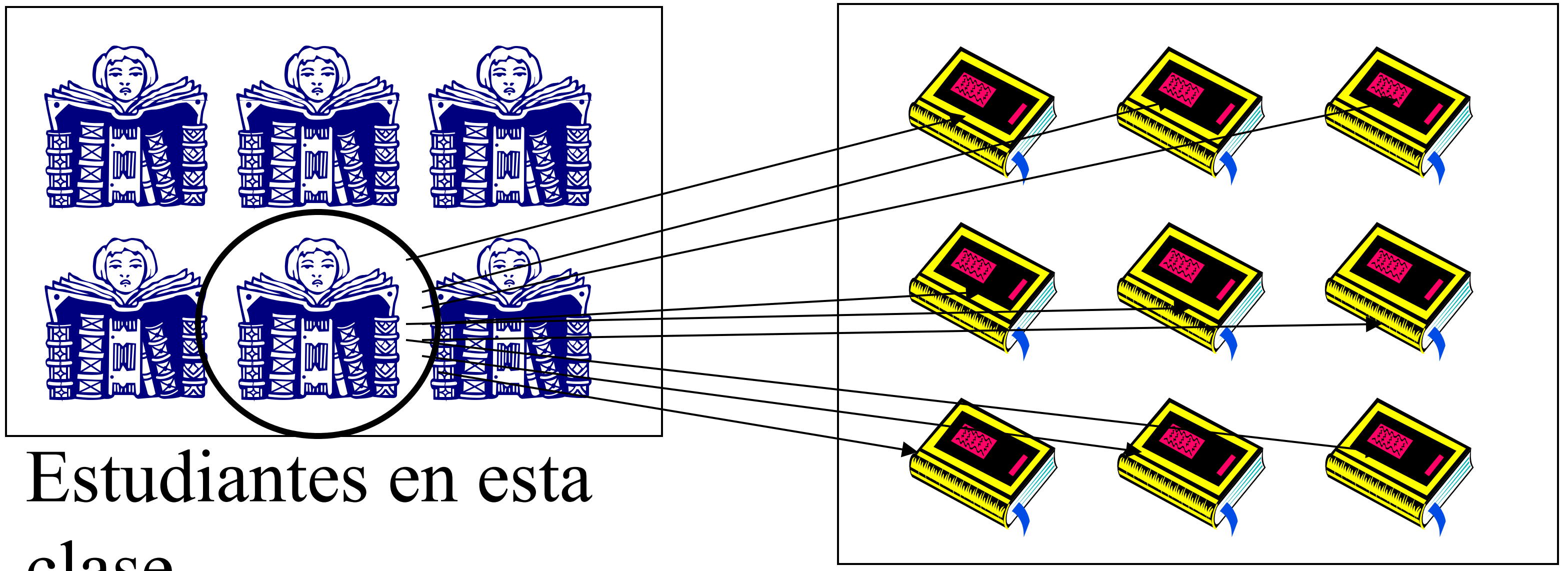


Estudiantes en esta clase

Cursos computación

$$\exists x \forall y P(x, y)$$

- Hay algún estudiante en esta clase que ha tomado cada curos de computación



Estudiantes en esta clase

Cursos computación

Preguntas sobre el orden de los cuantificadores

- Ejemplo 1: Sea *U* los números reales,
- Definimos P(x,y) : x · y = 0
- ¿Cuál es el valor de verdad de lo siguiente?
- $\forall x \forall y P(x,y)$
- $\forall x \exists y P(x,y)$
- $\exists x \forall y\, P(x,y)$
- $\exists x \exists y\, P(x,y)$

- Falso
- Verdadero
- Verdadero
- Verdadero

Preguntas sobre el orden de los cuantificadores

- Ejemplo 2: Sea *U* los números reales,
- Definimos P(x,y) : x / y = 1
- ¿Cuál es el valor de verdad de lo siguiente?
- $\forall x \forall y P(x,y)$
- $\forall x \exists y P(x,y)$
- $\exists x \forall y\, P(x,y)$
- $\exists x\, \exists\, y\, P(x,y)$

- Falso
- Verdadero
- Falso
- Verdadero

Cuantificaciones de dos variables

Statement	**Cuando verdadera?**	**Cuando Falso?**
$\forall x \forall y P(x,y)$ $\forall y \forall x P(x,y)$	*P*(*x*,*y*) es verdadera para cada par x,y.	Existe un par x, y para el que P(x,y) es falso.
$\forall x \exists y P(x,y)$	Para cada x existe un y para el que P(x,y) es verdadera.	Existe una x tal que P(x,y) es falsa para toda y.
$\exists x \forall y P(x,y)$	Hay un x para la que P(x,y) es cierta para cada y.	Para cada x existe un y para el que P(x,y) es falso.
$\exists x \exists y P(x,y)$ $\exists y \exists x P(x,y)$	Existe un par x, y para el que P(x,y) es verdadera.	*P(x,y) es falso para cada par x,y*

Traducir cuantificadores anidados

- Ejemplo 1: Traducir la declaración
- $\forall x\ (C(x) \vee \exists y\ (C(y) \wedge F(x, y)))$
- donde C(x) es "x tiene una computadora", y F(x,y) es "*x* e *y* son amigos", y el dominio tanto para x como para y consiste en todos los alumnos de tu escuela.
- Solución
- Todos los alumnos de tu escuela tienen una computadora o tienen un amigo que tiene una computadora.

Traducir cuantificadores anidados

- Ejemplo 1: Traducir la declaración
- $\exists x \forall y \forall z ((F(x, y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y,z))$

- Solución:
- Hay un estudiante ninguno de cuyos amigos son también amigos entre sí.

Traducción de enunciados matemáticos a la lógica de predicados

- Ejemplo : Traducir "La suma de dos enteros positivos es siempre positiva" en una expresión lógica.
- Solución:
  1. Reescribir el enunciado para hacer explícitos los cuantificadores y dominios implícitos:
     "Para cada dos enteros, si estos enteros son ambos positivos, entonces la suma de estos enteros es positiva".
  2. Introduzca las variables x e y, y especifique el dominio, para obtener:
     "Para todos los enteros positivos x e y, x + y es positivo".
  3. El resultado es:
     $\forall x \forall \ y((x > 0) \land (y > 0) \rightarrow (x + y > 0))$
     Donde el dominio de ambas variables está formado por todos los enteros

Traducción de lenguaje natural a expresiones lógicas

- Ejemplo: Usa cuantificadores para expresar la afirmación "Hay una mujer que ha tomado un vuelo en todas las aerolíneas del mundo".
- Solución:
  1. Sea P(w,f) "w ha tomado f " y Q(f,a) "f es un vuelo en a ."
  2. El dominio de ***w*** son todas las mujeres, el dominio de ***f*** son todos los vuelos y el dominio de ***a*** son todas las compañías aéreas.
  3. Entonces la declaración se puede expresar como:

     $\exists w \, \forall a \, \exists f \; (P(w,f) \land Q(f,a))$

Ejercicio

- Elija los predicados obvios y expréselos en lógica de predicados.
- Ejemplo 1: "Los hermanos son parientes".
  - Solución: $\forall x \, \forall y \, (B(x,y) \rightarrow S(x,y))$
- Ejemplo 2: "La hermandad es simétrica".
  - Solución: $\forall x \, \forall y \, (S(x,y) \rightarrow S(y,x))$
- Ejemplo 3: "Todo el mundo ama a alguien".
  - Solución: $\forall x \, \exists y \, L(x,y)$
- Ejemplo 4: "Hay alguien a quien todo el mundo quiere".
  - Solución: $\exists y \, \forall x \, L(x,y)$
- Ejemplo 5: "Hay alguien que ama a alguien".
  - Solución: $\exists x \, \exists y \, L(x,y)$
- Ejemplo 6: "Todo el mundo se quiere a sí mismo"
  - Solución: $\forall x \, L(x,x)$