Sección 2.3.6 ejercicio 5

a) $A = \begin{pmatrix} z_1 & u+iv \\ u-iv & z_4 \end{pmatrix}$ $\quad z_3 = u+iv$

$z_2 = z_3^* = u-iv$

$$\begin{pmatrix} z_1 & u-iv \\ u+iv & z_4 \end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_0} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma_3} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_2} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}$$

Es fácil ver que $c = v$ y que $d = u$

Por el lado de a y b tenemos:

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_4 \end{pmatrix}$$

$a + b = z_1 \qquad a = z_1 - b \longrightarrow a = \frac{z_1 + z_4}{2}$

$a - b = z_4 \longrightarrow z_1 - 2b = z_4$

$b = \frac{z_1 - z_4}{2}$

$$\begin{pmatrix} z_1 & u-iv \\ u+iv & z_4 \end{pmatrix} = \frac{z_1+z_4}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{z_1-z_4}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusión Las matrices de Pauli forman base para este espacio vectorial

b) Para demostrar que son ortogonales, el producto interno entre σ_i y σ_j con $i \neq j$ debe ser 0

$\langle \sigma_1^T \sigma_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad Tr\langle \sigma_1^T \sigma_2 \rangle = 0$

$\langle \sigma_1^T \sigma_3 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Tr\langle \sigma_1^T \sigma_3 \rangle = 0$

$\langle \sigma_3^T \sigma_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad Tr\langle \sigma_3^T \sigma_2 \rangle = 0$

$\langle \sigma_3^T \sigma_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Tr\langle \sigma_3^T \sigma_1 \rangle = 0$

$$\langle \sigma_2^T \sigma_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad Tr = 0$$

$$\langle \sigma_2^T \sigma_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad Tr = 0$$

Podemos ver que $Tr\langle \sigma_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$ siempre es igual a 0, y teniendo en cuenta:

$\sigma_0 \sigma_i = \sigma_i \sigma_0 = \sigma_i \qquad i = 1, 2, 3$ podemos decir:

$Tr\langle \sigma_i^T \sigma_0 \rangle = Tr\langle \sigma_0^T \sigma_i \rangle = 0$ → Esta igualdad es usada en este caso.

Conclusión: Es una base ortogonal solo para las matrices de Pauli

c) Subespacio de Matrices reales

Para que H tenga solo entradas reales, debemos anular el coeficiente de σ_2 para así tener un subespacio generado por las matrices

$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\} \qquad \dim H_2^{\mathbb{R}} = 3$

Subespacio de matrices imaginarias

En este caso, el único coeficiente que no anulamos es el de σ_2, quedando así un subespacio generado por este mismo de $\dim = 1$