Sección 2.7.5 ejercicio 10

a) $P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ $\quad q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$

$p+q = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i+b_i) x_i$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda p = \lambda \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda a_i) x_i$

$a_i + b_i,\ \lambda a_i \in P_{n-1}$ Es un espacio vectorial

b) No es un espacio vectorial ya que no es cerrado respecto a la multiplicación por un número real

$P(x) = 3x$ $\quad \lambda = \frac{1}{2}$ $\quad \lambda P(x) = \underset{\sim}{\frac{3}{2}} x$ no es entero

c) 1. Misma demostración del punto a)
Es un subespacio vectorial

2. $P(x) = a_0 x^2 + a_1 x^4 + a_2 x^6 + \ldots + a_i x^n$

Siendo n un número par

Contiene al 0: $0x^2 + 0x^4 + \ldots 0x^n$

Cerrado bajo la suma $P_1(x) = a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_i x^n$

$P_2(x) = b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots + b_i x^n$

$P_1 + P_2 = (a_1 + b_1) x^2 + (a_2 + b_2) x^4 + \ldots + (a_i + b_i) x^n$

Cerrado producto $\lambda P(x)$

$= (\lambda a_1) x^2 + (\lambda a_2) x^4 + \ldots + (\lambda a_i) x^n$

Es un subespacio vectorial

C.3

$q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$a_n \neq 0 \quad n > 1$

$P(x) = x\,q(x)$

Contiene al 0 $\quad 0 \cdot q(x) = 0$

Cerrado suma $\quad P_1(x) = x\,q_1(x)$

$P_2(x) = x\,q_2(x)$

$P_1 + P_2 = x\,q_1 + x\,q_2 = x(q_1 + q_2)$

$q_1 + q_2 \in P_{n-1}$

Cerrado producto $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda p(x) = \lambda\, x\, q(x) = x(\lambda q(x))$

$\lambda q(x) \in P_{n-1}$

Es un subespacio vectorial

C.4

$q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$p(x) = (x-1)\, q(x)$

Contiene el 0: $(x-1)(0) = 0$

Cerrado suma: $P_1 = (x-1)\, q_1(x)$
$P_2 = (x-1)\, q_2(x)$

$P_1 + P_2 = (x-1)\, q_1(x) + (x-1)\, q_2(x)$

$= (x-1)\,(q_1(x) + q_2(x))$

$q_1(x) + q_2(x) \in P_{n-1}$

Cerrado producto: $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda p(x) = \lambda (x-1)\, q(x) = (x-1)(\lambda q(x))$

$\lambda q(x) \in P_{n-1}$

Es un Subespacio Vectorial

Es un subespacio vectorial

Sección "2.2.4" ejercicio "6"

a.) $|a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle$ $\qquad |b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle$

$|a\rangle + |b\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle$ Es cerrada bajo la suma

Conmutativa: $|b\rangle + |a\rangle = (b^\alpha + a^\alpha)|q_\alpha\rangle$

ya que $a^\alpha, b^\alpha \in \mathbb{R}$ podemos decir que heredan la conmutatividad, por lo tanto, la operación es conmutativa

Asociatividad $|c\rangle = c^\alpha |q_\alpha\rangle$

$(|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle = |a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle)$

$[(a^\alpha + b^\alpha) + c^\alpha]|q_\alpha\rangle = [a^\alpha + (b^\alpha + c^\alpha)]|q_\alpha\rangle$

Mismo análisis que el anterior, es asociativa

Continuación a.

elemento neutro $|0\rangle = 0^{\alpha}|q_\alpha\rangle \qquad 0^{\alpha}=0$

$|a\rangle + |0\rangle = (a^{\alpha}+0)|q_\alpha\rangle = a^{\alpha}|q_\alpha\rangle = |a\rangle$

elemento simétrico $|-a\rangle = (-a)^{\alpha}|q_\alpha\rangle = -a^{\alpha}|q_\alpha\rangle$

$|a\rangle + |-a\rangle = (a^{\alpha}-a^{\alpha})|q_\alpha\rangle = 0^{\alpha}|q_\alpha\rangle = |0\rangle$

cerrado bajo el producto por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda|a\rangle = \lambda a^{\alpha}|q_\alpha\rangle \qquad \lambda a^{\alpha} \in \mathbb{R}$

- $\lambda(\beta|a\rangle) = (\lambda\beta)|a\rangle$

$\Rightarrow \lambda(\beta a^{\alpha}|q_\alpha\rangle) = (\lambda\beta)a^{\alpha}|q_\alpha\rangle$

$= \lambda\beta a^{\alpha}|q_\alpha\rangle = \lambda\beta a^{\alpha}|q_\alpha\rangle$ //

- $\lambda(|a\rangle + |b\rangle) = \lambda(a^{\alpha}|q_\alpha\rangle + b^{\alpha}|q_\alpha\rangle)$

$= \lambda(a^{\alpha}+b^{\alpha})|q_\alpha\rangle = (\lambda a^{\alpha} + \lambda b^{\alpha})|q_\alpha\rangle$

$= \lambda a^{\alpha}|q_\alpha\rangle = \lambda b^{\alpha}|q_\alpha\rangle = \lambda|a\rangle + \lambda|b\rangle$ //

- $1|a\rangle = 1a^{\alpha}|q_\alpha\rangle = a^{\alpha}|q_\alpha\rangle = |a\rangle$

Conclusión: Es un espacio Vectorial

b $|b\rangle = b_0 + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle$

$= b_0 + b^1\hat{i} + b^2\hat{j} + b^3\hat{k}$

$|r\rangle = r^0 + r^1\hat{i} + r^2\hat{j} + r^3\hat{k}$

$|b\rangle \odot |r\rangle = b_0 r_0 + b_0 r^1\hat{i} + b_0 r^2\hat{j} + b_0 r^3\hat{k} + \ldots$

$\ldots + b_1\hat{i} r_0 + b_1\hat{i} r^1\hat{i} + b_1\hat{i} r^2\hat{j} + b_1\hat{i} r^3\hat{k} + b_2\hat{j} r_0 + \ldots$

$\ldots + b_2\hat{j} r^1\hat{i} + b_2\hat{j} r^2\hat{j} + b_2\hat{j} r^3\hat{k} + b_3\hat{k} r^0 + b_3\hat{k} r^1\hat{i} \ldots$

$\ldots + b_3\hat{k} r^2\hat{j} + b_3\hat{k} r^3\hat{k}$

$= b_0 r_0 + b_0 r^1\hat{i} + b_0 r^2\hat{j} + b_0 r^3\hat{k} + b_1\hat{i} r_0 - b_1 r_1 + b_1 r^2\hat{k} \ldots$

$\ldots + b^1 r^3\hat{j} + b_2 r_0\hat{j} + b_2 r_1\hat{k} + b_2 r_2 + b_2 r_3\hat{i} + b_3 r^0 + \ldots$

$\ldots + b_3 r^1\hat{j} + b_3 r^2\hat{i} + b_3 r^3$

Continuación b

agrupamos escalares

$d^0 = b_0 r_0 - b_1 r_1 - b_2 r_2 - b_3 r_3$

Componente $\hat{i}$ $\quad d^1 = b_0 r^1 + b_1 r^0 + b_2 r^3 - b_3 r^2$

Componente $\hat{j}$ $\quad d^2 = b_0 r^2 + b_2 r^0 - b_1 r^3 + b_3 r^1$

Componente $\hat{k}$ $\quad d^3 = b_0 r^3 + b_3 r^0 + b_1 r^2 - b_2 r^1$

$d^0 = b_0 r_0 - b \cdot r$

$d = d^0 + d^1 \hat{i} + d^2 \hat{j} + d^3 \hat{k}$

$= b_0 r + b r^0 + b \times r$ //

c) $|b\rangle \odot |r\rangle = (b_0 r_0 - b \cdot r) + (r^0 b + b^0 r + b \times r)|q\rangle$

$d^0 = b_0 r_0 - b_i r_i = a|q_0\rangle$ ①

$d = \underbrace{b_0 r^i + b^i r^0}_{\text{simétrica}} + \varepsilon_{ijk} b_i r_j \rightarrow$ antisimétrica

En la parte simétrica

$b_0 r^i + b^i r^0 = S^{(0j)} = S^{(j0)}$

de modo que $S^{(\alpha j)} \delta^0_\alpha |q_j\rangle$ ②

Si desarrollamos y eda: $\alpha = 0$ se anula todo

$\alpha = 1,2,3 \quad j = 1 \rightarrow b_0 r^1 + b^1 r^0$ Componente $\hat{i}$

$j = 2 \rightarrow b_0 r^2 + b^2 r^0$ Componente $\hat{j}$

$j = 3 \rightarrow b_0 r^3 + b^3 r^0$ Componente $\hat{k}$

En la parte antisimétrica $\quad A^{[jk]i} = \varepsilon_{ijk}$

③ $A^{[jk]i} b_i r_j = \varepsilon_{ijk} b_i r_j$

① + ② + ③ $= |b\rangle \odot |r\rangle$ //

d.

$d = b_0 r_0 - b_i r_i$ → parte escalar del producto

$S^{(ij)} = b^0 r^i + r^0 b^j$ → simetría entre los coeficientes b y r

$A^{[jk]i} = \varepsilon^{ijk}$ → parte antisimétrica

- $P: b \to -b \,,\, r \to -r$ (1)

$d^0 \to b^0 r^0 - (-b)\cdot(-r) = b^0 r^0 = -br = d^0$

Es invariante

$d \to r^0(-b) + b^0(-r) + (-b) \times (-r)$

$= -(r^0 b + b^0 r) + b \times r$

Para que fuera un vector debería cumplir $d \to -d$

$-d = -(r^0 b + b^0 r) - b \times r$ lo cual no concuerda

Y para que sea pseudovector debe mantenerse todo igual al hacer la transformación (1)

Conclusión: No es ninguna de los 2

e. Relación para matrices de Pauli

$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (i,j,k = 1,2,3)$

$q_0 = I \qquad q_k = -i\sigma_k \quad (k = 1,2,3)$

$q_i q_j = (-i\sigma_i)(-i\sigma_j) = (-i)^2 \sigma_i \sigma_j = -\sigma_i \sigma_j$

$= -(\delta_{ij} I + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k) = -\delta_{ij} I - i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

$q_k = -i\sigma_k$

$= -\delta_{ij} I + \varepsilon_{ijk} q_k = q_i q_j$

Con esto podremos comprobar que cuando $i=j$ el resultado es $-I$, lo cual satisface la tabla de multiplicación

Continuación e.

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} \quad z = x + iy \quad w = a + ib \quad z^* = x - iy \quad w^* = a - ib$$

$$\begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix} = \overset{1}{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}} + \overset{2}{\begin{pmatrix} iy & 0 \\ 0 & -iy \end{pmatrix}} + \overset{3}{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}} + \overset{4}{\begin{pmatrix} 0 & ib \\ ib & 0 \end{pmatrix}}$$

$1 = xI \quad 2 = y(i\sigma_3) \quad 3 = a(i\sigma_2)$

$4 = b(i\sigma_1) \longrightarrow xI + yi\sigma_3 + ai\sigma_2 + bi\sigma_1$

$-i\sigma_k = q_k$

$= xI - yq_3 - aq_2 - bq_1$ { Son una representación de los cuaterniones

f. $\langle q_1 | q_1 \rangle = \langle q_2 | q_2 \rangle = \langle q_3 | q_3 \rangle = -1$

$$q_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

$$q_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I$$

$$q_i^2 = -I$$

$$q_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I$$

Se satisface la relación

y la relación

$$-\delta_{ij} I + \varepsilon_{ijk} q_k = q_i q_j$$

g

$|a\rangle^* \odot |b\rangle = (a^0 - a^\alpha |q_\alpha\rangle)(b^0 + b^\alpha |q_\alpha\rangle)$

$= (a^0 b^0 - a_i b_i, \; a^0 b^\alpha + b^0 a^\alpha + \varepsilon_{ijk} a_i b_j)$

Esto no cumple con la definición de producto interno ya que da un cuaternión y no un escalar.

Conclusión: No está bien definido el producto interno

h $\widehat{\langle a|b\rangle} = |c\rangle$

$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[\,|c\rangle - |q_1\rangle \odot |c\rangle \odot |q_1\rangle\,]$

$= \frac{1}{2}[\,|c\rangle - (c_0|q_1\rangle - c_1 + c_2|q_3\rangle - c_3|q_2\rangle) \odot |q_1\rangle\,]$

$= \frac{1}{2}[\,|c\rangle - (-c_0 - c_1|q_1\rangle + c_2|q_2\rangle + c_3|q_3\rangle)\,]$

$= \frac{1}{2}[\,|c\rangle + c_0 + c_1|q_1\rangle - c_2|q_2\rangle - c_3|q_3\rangle\,]$

$= \frac{1}{2}[\,2(c_0 + c_1|q_1\rangle)\,] = c_0 + c_1|q_1\rangle \in \mathbb{C}$

Comprobamos las propiedades de producto interno

1. $|a\rangle \in \mathbb{H}$

$\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}[\,\widehat{\langle a|a\rangle} - |q_1\rangle \odot \widehat{\langle a|a\rangle} \odot |q_1\rangle\,]$

$\widehat{\langle a|a\rangle} = |a\rangle^* \odot |a\rangle = (a_0 - a_i|q_i\rangle)(a_0 + a_i|q_i\rangle)$

$= a_0^2 - (-a^i a_i) + a^0(-a) + a^0 a + \varepsilon_{ijk} a_i a_j$

$= a_0^2 + a_i^2$

$\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}[\,a_0^2 + a_i^2 - |q_1\rangle \odot (a_0^2 + a_i^2) \odot |q_1\rangle\,]$

$= \frac{1}{2}[\,a_0^2 + a_i^2 + (-a_0^2|q_1\rangle - a_i^2|q_1\rangle) \odot |q_1\rangle\,]$

$= \frac{1}{2}[a_0^2 + a_i^2 + (a_0^2 + a_i^2)]$

$= a_0^2 + a_i^2 \geq 0$ //

2. $\overline{\langle a|b\rangle} = |c\rangle = (c^0, c^i|q_i\rangle)$

$\overline{\langle b|a\rangle} = |c\rangle^* = (c^0, -c^i|q_i\rangle)$

$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[|c\rangle - |q_1\rangle \odot |c\rangle \odot |q_1\rangle]$

$= c_0 + c_1|q_1\rangle$

$\langle b|a\rangle = \frac{1}{2}[|c\rangle^* - |q_1\rangle \odot |c\rangle^* \odot |q_1\rangle]$

$= \frac{1}{2}[|c\rangle^* - (c_0|q_1\rangle + c_1 - c_2|q_3\rangle + c_3|q_2\rangle) \odot |q_1\rangle]$

$= \frac{1}{2}[|c\rangle^* - (-c_0\rangle + c_1|q_1\rangle - c_2|q_2\rangle - c_3|q_3\rangle)]$

$= \frac{1}{2}[2(c_0 - c_1|q_1\rangle)] = c_0 - c_1|q_1\rangle = \langle b|a\rangle^*$

3 $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in \mathbb{H}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$\langle a|\alpha b + \beta c\rangle = \frac{1}{2}[\overline{\langle a|\alpha b + \beta c\rangle} - |q_1\rangle \odot \overline{\langle a|\alpha b + \beta c\rangle} \odot |q_1\rangle]$

$\overline{\langle a|\alpha b + \beta c\rangle} = |a\rangle^* \odot |\alpha b + \beta c\rangle$

$= [a^0(\alpha b^0 + \beta c^0) - a^i(\alpha b + \beta c)_i, \alpha(a^0 b^i - b^0 a^i) + \ldots$

$\ldots + \varepsilon_{ijk} a_j (\alpha b + \beta c)_k]$

$= \alpha(a^0 b^0 - a^i b_i) + \beta(a^0 c^0 - a^i c_i), \alpha(a^0 b^i + b^0 a^i) + \beta(a^0 c^i + c^0 a^i)$

$\ldots + (\alpha \varepsilon_{ijk} a_j b_k) + (\beta \varepsilon_{ijk} a_j c_k)$

$= \alpha[a^0 b^0 - a^i b_i, a^0 b^i + b^0 a^i + \varepsilon_{ijk} a_j b_k] + \beta[a^0 c^0 - a^i c_i, a^0 c^i + c^0 a^i$

$+ \ldots \varepsilon_{ijk} a_j c_k]$

$= \alpha \overline{\langle a|b\rangle} + \beta \overline{\langle a|c\rangle}$

$\langle a | \alpha b + \beta c \rangle$

$= \frac{1}{2}[\alpha \overline{\langle a|b\rangle} + \beta \overline{\langle a|c\rangle} - |q_1\rangle \odot (\alpha \overline{\langle a|b\rangle} + \beta \overline{\langle a|c\rangle}) \odot |q_1\rangle]$

$= \frac{1}{2}[\alpha \overline{\langle a|b\rangle} + \beta \overline{\langle a|c\rangle} - |q_1\rangle \odot \alpha \overline{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle - |q_1\rangle \odot \beta \overline{\langle a|c\rangle} \odot |q_1\rangle]$

$= \alpha \langle a|b\rangle + \beta \langle a|c\rangle$

4 $\langle \alpha a + \beta b | c\rangle = \langle c | \alpha a + \beta b\rangle^*$

$= (\alpha \langle c|a\rangle + \beta \langle c|b\rangle)^*$

Usando: $(z+w)^* = z^* + w^* \; : z, w \in \mathbb{C}$

$(zw)^* = z^* w^* \; : z, w \in \mathbb{C}$

$(\alpha \langle c|a\rangle + \beta \langle c|b\rangle)^* = \alpha^* \langle c|a\rangle^* + \beta^* \langle c|b\rangle^*$

$\langle \alpha a + \beta b | c\rangle = \alpha^* \langle a|c\rangle + \beta^* \langle b|c\rangle$ //

5 $\langle a|0\rangle = \frac{1}{2}[\overline{\langle a|0\rangle} - |q_1\rangle \odot \overline{\langle a|0\rangle} \odot |q_1\rangle]$

$= \frac{1}{2}[(a^* \odot 0) - |q_1\rangle \odot (a^* \odot 0) \odot |q_1\rangle]$

$= \frac{1}{2}[0 - |q_1\rangle \odot 0 \odot |q_1\rangle] = 0$

$\langle 0|a\rangle = \frac{1}{2}[\overline{\langle 0|a\rangle} - |q_1\rangle \odot \overline{\langle 0|a\rangle} \odot |q_1\rangle] = 0$ //

i $\sqrt{\langle a|a\rangle} = \| |a\rangle \| = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle}$

$= \sqrt{\overline{\langle a|a\rangle}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}$

1. Ya que $a_0^2 + a_1^2 \geq 0$ entonces $\sqrt{a_0^2 + a_1^2} \geq 0$

1 $\sqrt{a_0^2 + a_1^2} = 0 \iff |a\rangle = 0$

2. $\alpha \in \mathbb{C}$

$\| \alpha |a\rangle \|^2 = \overline{\alpha |a\rangle} \odot (\alpha |a\rangle) = (\overline{|a\rangle \alpha})(\alpha |a\rangle) = \overline{|a\rangle} (\overline{\alpha} \alpha) |a\rangle$

$= |\alpha|^2 (\overline{|a\rangle} |a\rangle) \;\rightarrow\; \| \alpha |a\rangle \| = |\alpha| \, \| |a\rangle \|$ //

3. $\|a+b\|^2 = \langle a+b | a+b \rangle$

$= \langle a|a\rangle + \langle a|b\rangle + \langle b|a\rangle + \langle b|b\rangle$

$= \|a\|^2 + \|b\|^2 + \langle a|b\rangle + \langle a|b\rangle^*$

$= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2|\langle a|b\rangle|$

Por desigualdad C-S $\rightarrow$ $|\langle a|b\rangle| \leq \|a\| \, \|b\|$

$= \|a+b\|^2 \leq \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\|$

$\|a+b\|^2 \leq (\|a\| + \|b\|)^2$

$= \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ //

Conclusión: Es una buena definición de norma

j $|\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle^*}{\|a\|^2}$

$|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = \dfrac{|a\rangle^*}{\|a\|^2} \odot |a\rangle$ $\qquad$ $|a\rangle^* \odot |a\rangle = \langle a|a\rangle$

$= \dfrac{\langle a|a\rangle}{\|a\|^2} = \dfrac{\|a\|^2}{\|a\|^2} = |q_0\rangle = 1$ //

k $|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{H}$ Cerradura

$|a\rangle \odot |b\rangle = (\underbrace{a^0 b^0 - a^i b_i}_{\text{Parte escalar}}, \underbrace{a^0 b + b^0 a + \epsilon_{ijk} a^i b^j}_{\text{Parte Compleja}})$

$= |c\rangle \in \mathbb{H}$ Es un Cuaternión.

Asociatividad Un cuaternión se puede ver como una matriz de la forma

$\begin{pmatrix} z & \omega \\ -\omega^* & z^* \end{pmatrix}$ $\quad z, \omega \in \mathbb{C}$

Entonces
$|a\rangle \rightarrow A$
$|b\rangle \rightarrow B$
$|c\rangle \rightarrow C$

Continuación k

$\rightarrow (|a\rangle \odot |b\rangle) \odot C = (AB)C = A(BC)$

$= |a\rangle \odot (|b\rangle \odot |c\rangle)$ // ya que las matrices son asociativas

Elemento neutro

$|a\rangle \odot |q_0\rangle = (a_0 + a^i |q_i\rangle) \odot |q_0\rangle$

$= (a_0 |q_0\rangle + a^i |q_i\rangle |q_0\rangle)$ Recordando la tabla de multiplicación $|q_i\rangle \cdot |q_0\rangle = |q_i\rangle$

$= (a_0 |q_0\rangle + a^i |q_i\rangle) = |a\rangle$ //

Elemento inverso Demostrado en el ejercicio j

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

	1	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
1	1	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	$\hat{i}$	-1	$\hat{k}$	$-\hat{j}$
$\hat{j}$	$\hat{j}$	$-\hat{k}$	-1	$\hat{i}$
$\hat{k}$	$\hat{k}$	$\hat{j}$	$-\hat{i}$	-1

l. $|v'\rangle = |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle$

$\| |v'\rangle \|^2 = |v'\rangle \odot |v'\rangle^*$

$= (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle) \odot (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle)^*$

$= (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle) \odot (|a\rangle^* \odot |v\rangle^* \odot |\bar{a}\rangle^*)$

$= (|v\rangle \odot |v\rangle^*) \odot (|\bar{a}\rangle \odot |\bar{a}\rangle^*) \odot (|a\rangle \odot |a\rangle^*)$

$= \|v\|^2 \, \|a\|^2 \, \|\bar{a}\|^2$

$\|\bar{a}\|^2 = \bar{a} \odot \bar{a}^* = \frac{a}{\|a\|^2} \odot \frac{a^*}{\|a\|^2} = \frac{(a \odot a^*)^*}{\|a\|^4} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|^4} = \frac{1}{\|a\|^2}$

$\| |v'\rangle \|^2 = \|v\|^2 \, \|a\|^2 \left(\frac{1}{\|a\|^2}\right)$

$\| |v'\rangle \|^2 = \| |v\rangle \|^2$ //