## Demostración

$$A^{i'}_{k} A^{j}_{i'} = \delta^{j}_{k}$$

$$A^{i'}_{k} A^{j}_{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x_{k}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x_{i'}} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x_{k}}$$

Si $j = k = 1$ — Por ejemplo

$$x^{1} = x \implies \frac{\partial x}{\partial x^{1}} = 1$$

$$\delta^{j}_{j} = \delta^{1}_{1} = 1$$ se cumple

Si $j = 1$, $k = 2$

$$x^{1} = x, \quad x^{2} = y \implies \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

$$\delta^{j}_{k} = \delta^{1}_{2} = 0$$ también se cumple

Por lo tanto $A^{i'}_{k} A^{j}_{i'} = \delta^{j}_{k}$ //

Caso especial $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Consideremos un vector unitario con una base ortonormal de la siguiente forma

$$V = \cos\alpha \, \hat{e}_x + \cos\beta \, \hat{e}_y + \cos\gamma \, \hat{e}_z$$

Como $\|V\|^2 = 1$ y la base es ortonormal:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = V \cdot V = 1 \, //$$

4. $(x,y) \to (-y,x)$ $\quad A$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1$

$A^T A = I$

A es una rotación por tanto los componentes son verdaderos

$$(x,y) \to (x,-y) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\det(A) = -1$

$A^T A = I$

A es una reflexión y es ortogonal son componentes verdaderos

$(x,y) \to (x-y, x+y)$

$\det(A) = 2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$A^T A \neq I$

No es ortogonal - componentes no verdaderos

$(x,y) \to (x+y, x-y)$

$\det A = -2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$A^T A \neq I$

No es ortogonal - componentes no verdaderos

2.a $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

$[\nabla(\phi\psi)]_i = \partial_i(\phi\psi)$

Teniendo en cuenta:

$$\frac{\partial}{\partial r}(\phi(r)\psi(r)) = \phi'(r)\psi(r) + \psi'(r)\phi(r)$$

entonces:

$$\psi(\partial_i\phi) + \phi(\partial_i\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi_{//}$$

2.d $\nabla\cdot(\nabla\times a) = \partial_i(\varepsilon_{ijk}\partial_j a_k)$

$= \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j a_k$

$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ es antisimétrica

$\partial_i\partial_j a_k = \partial_j\partial_i a_k$ es simétrica

$\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j a_k = -\varepsilon_{jik}\partial_j\partial_i a_k$

La única forma para que esto se cumpla es si es igual a 0, por lo tanto:

$\nabla\cdot(\nabla\times a) = 0$

¿Qué puedo decir de $\nabla\times(\nabla\cdot a)$?

$\nabla\cdot a = \partial_i a_i$ es un escalar

$\nabla\times(\nabla\cdot a) = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\partial_i a_i)$

No es posible ya que el rotacional actúa sobre vectores, no sobre escalares

2f $\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a$

$[\nabla \times a]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_i a_j$

$[\nabla \times (\nabla \times a)_i]_k = \varepsilon_{mnk} \partial_m (\varepsilon_{ijk} \partial_i a_j)$

$= \varepsilon_{mnk} \varepsilon_{ijk} \partial_n \partial_i a_j$

$= (\delta^i_m \delta^j_n - \delta^i_n \delta^j_m) \partial_m \partial_i a_j$

$= \delta^i_m \delta^j_n \partial_n \partial_i a_j - \delta^i_n \delta^j_m \partial_m \partial_i a_j$

$= \partial_j \partial_i a_j - \partial_n \partial_n a_j$

$= \partial_i (\partial_j a_j) = \nabla(\nabla \cdot a)$

$(\partial_n \partial_n) a_j = \nabla^2 \cdot a$ //

2) a $\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha(i\sin\alpha) + \dots$

$\dots + 3\cos\alpha(i\sin\alpha)^2 + (i\sin\alpha)^3$

$= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha - i\sin^3\alpha$

$= (\cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha) + i(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha)$

Partiendo de la fórmula de De Moivre comparamos la parte real y la imaginaria

$\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha$ //

b. parte im

$\sin(3\alpha) = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha$ //

5) a $\sqrt{2i}$ $\quad 2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\sqrt{2e^{i\pi/2}} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{2k\pi + \pi/2}{2}\right)}$ $\quad k = 0, 1$

$k=0 \rightarrow \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad k=1 \Rightarrow \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$

b $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$ $\quad 1-\sqrt{3}i = 2^{i\frac{5\pi}{2}}$

$\Rightarrow \sqrt{2}e^{i\left(\frac{2k\pi + 5\pi/2}{2}\right)}$ $\quad k = 0, 1$

$k=0 \rightarrow \sqrt{2}e^{i5\pi/6}$ $\quad k=1 \rightarrow \sqrt{2}\, e^{i\frac{17\pi}{2}}$

c $(-1)^{1/3}$ $\quad -1 = e^{i\pi}$

$\Rightarrow e^{i\left(\frac{2\pi k + \pi}{3}\right)}$ $\quad k = 0, 1, 2$

$k=0 \rightarrow e^{i\pi/3}$ $\quad k=1 \rightarrow e^{i\pi}$ $\quad k=2 \rightarrow e^{i\frac{5\pi}{6}}$

d

d $(8)^{1/6} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{k\pi}{6}}$ $k=0,1,2,3,4,5$

$0 \to \sqrt{2}$ $3 \to \sqrt{2} e^{i\pi}$

$1 \to \sqrt{2} e^{i\pi/3}$ $4 \to \sqrt{2} e^{i4\pi/3}$

$2 \to \sqrt{2} e^{i2\pi/3}$ $5 \to \sqrt{2} e^{i5\pi/3}$

e $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i} \to (8-8\sqrt{3}i) - 16 e^{i4\pi/3}$

$2e^{i\left(\frac{2k\pi + 4\pi/3}{4}\right)}$ $k=0,1,2,3$

$0 \to 2e^{i\pi/3}$ $2 \to 2e^{i4\pi/3}$

$1 \to 2e^{i5\pi/6}$ $3 \to 2e^{i11\pi/6}$

6. a $\log(-ie) = \log(e^{1+i(-\pi)/2 + 2n\pi})$

$= 1 - i\,\pi/2$ para $n=0$

b) $\log(1-i) = \log(\sqrt{2} e^{i(-\pi/4 + 2n\pi)})$

$= \ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2n\pi)$ para $n \in \mathbb{Z}$

$= \frac{1}{2}\ln(2) - i\frac{\pi}{4}$ para $n=0$

c) $\log(e) = \log(e^{1+i2n\pi}) = 1 + i2n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$

d) $\log(i) = \log(e^{i(\pi/2 + 2n\pi)}) = i(\pi/2 + 2n\pi)$

$= i\pi(1/2 + 2n)$ para $n \in \mathbb{Z}$

Powered by CamScanner