Estatística aplicada
Licenciatura em Engenharia Informática

Lino Costa

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia
lac@dps.uminho.pt

Revisto em 2022/2023

Sumário

Conceitos de probabilidades

1. Conceito de probabilidade
2. Espaços amostrais
3. Operações com acontecimentos
4. Acontecimentos mutuamente exclusivos
5. Partição do espaço amostral
6. Probabilidade de um acontecimento
7. Probabilidade da união e interseção de acontecimentos
8. Probabilidade condicional
9. Acontecimentos independentes
10. Teorema de Bayes

Espaços amostrais

Experiência
qualquer processo de observação ou medida

Resultado
resultado da experiência

Espaço amostral (S)
conjunto de todos os resultados possíveis duma experiência

- **Espaço amostral discreto** - conjunto de resultados finito (ou infinito contável)
- **Espaço amostral contínuo** - conjunto de resultados infinito e inumerável

Elemento ou ponto amostral
cada resultado do espaço amostral

Acontecimento (A) (ou evento)
subconjunto do espaço amostral de uma experiência aleatória

Espaços amostrais

Exemplo 1

Experiência

lançamento de uma moeda

Resultado

cara ou coroa

Espaço amostral discreto (S)

$S = \{C, c\}$

Elemento ou ponto amostral

C (cara); c (coroa)

Acontecimento (A)

$A = \{C\}$ (sair cara)

Espaços amostrais

Exemplo 2

Experiência

tempo de vida de uma lâmpada (em horas)

Resultado

tempo de vida (X)

Espaço amostral contínuo (S)

$S = \{x : x \geq 0\}$

Elemento ou ponto amostral

$x \in \{x : x \geq 0\}$

Acontecimento (A)

$A = \{x : x > 5000\}$ (tempo de vida superior a 5000 horas)

Operações com acontecimentos

União ($A \cup B$)

combina todos os resultados de A e B, i.e., é o acontecimento em S que contém todos os elementos que estão em A, em B ou em ambos

Interseção ($A \cap B$)

inclui os resultados comuns a A e B, i.e., é o acontecimento em S que contém todos os elementos que estão em A e B

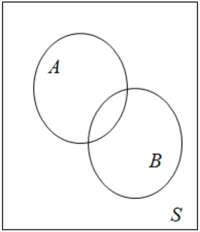
Complementar ($\bar{A}$)

contém todos os resultados que não estão em A, i.e., é o acontecimento em S que contém todos os elementos de S que não estão em A

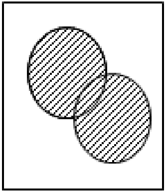
Postulados de Boole

1. para cada par de acontecimentos A e B no espaço amostral S, há um único evento $A \cup B$ e um único evento $A \cap B$ em S
2. Lei comutativa: $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$
3. Lei associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. Lei distributiva: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ e $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
5. Leis de Morgan: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ e $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
6. $A \cap S = A$, $A \cup \emptyset = A$
7. $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = S$

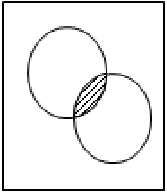
Diagramas de Venn



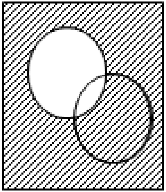
Um retângulo representa o espaço amostral S onde se podem representar acontecimentos individuais (e.g., A e B)



$A \cup B$

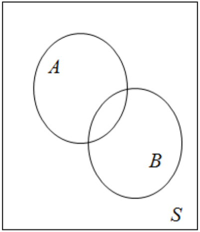


$A \cap B$

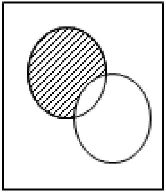


$\bar{A}$

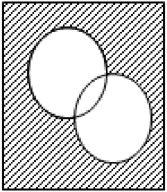
Diagramas de Venn



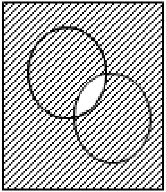
Um retângulo representa o espaço amostral S onde se podem representar acontecimentos individuais (e.g., A e B)



$A \cap \bar{B}$



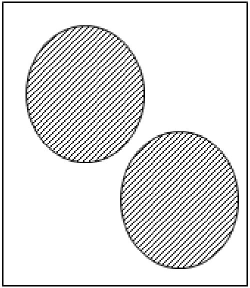
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$



$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

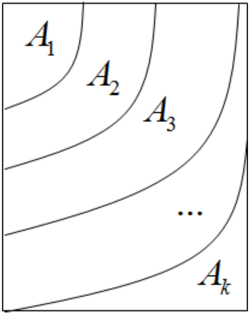
Acontecimentos mutuamente exclusivos

A e B são acontecimentos mutuamente exclusivos se não têm resultados comuns, i.e., $A \cap B = \emptyset$



Partição do espaço amostral

$A_1, A_2, A_3, \ldots A_k$ acontecimentos mutuamente exclusivos constituem uma partição do espaço amostral S, se $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k = S$



Probabilidade de um acontecimento

Lei de Laplace

Se, numa experiência aleatória, o espaço amostral inclui N resultados com iguais probabilidades $\frac{1}{N}$ (resultados equiprováveis), dos quais um deve ocorrer e n são considerados favoráveis (ou "sucesso"), então a probabilidade de se obter "sucesso" (A) é dada por $\frac{n}{N}$, i.e.,

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

em que n é o número de casos favoráveis e N é o número de casos possíveis

Exemplo 3

Qual a probabilidade de tirar um ás de um baralho de cartas?

- a probabilidade de tirar cada uma das 52 cartas é igual a $\frac{1}{52}$
- $N = 52$ e $n = 4$
- $P(A) = \frac{4}{52}$

Probabilidade de um acontecimento

Lei dos grandes números

Para um grande número de repetições de uma experiência aleatória, a frequência relativa de um acontecimento é um valor aproximado da probabilidade do acontecimento.

Exemplo 4

Lançou-se um dado 100 vezes, tendo-se registado 15 vezes o valor "6". Indique uma aproximação à probabilidade de sair "6".

- $P(A) \approx \frac{15}{100}$

Se o dado for equilibrado e lançado aleatoriamente (sair cada uma das faces do dado são acontecimentos equiprováveis), qual a probabilidade de sair "6"?

- $N = 6$ e $n = 1$
- $P(A) = \frac{1}{6}$

Probabilidade de um acontecimento

Propriedades

Para um qualquer acontecimento A de um espaço amostral S,

- $P(S) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$, onde $A_1, A_2, A_3, \ldots$ são acontecimentos mutuamente exclusivos
- $P(\emptyset) = 0$

Exemplo 5

Se uma moeda equilibrada é lançada duas vezes com faces H (coroa) e T (cara), qual a probabilidade de obter pelo menos uma coroa?

- $S = \{HH, HT, TH, TT\}$
- $A = \{HH, HT, TH\}$
- $P(A) = P(HH) + P(HT) + P(TH) = \frac{3}{4}$

Probabilidade de um acontecimento

Exemplo 6

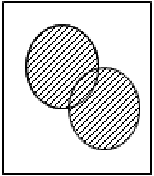
Um dado está viciado por forma que num lançamento a ocorrência de números ímpares seja duplamente mais provável do que números pares. Se o acontecimento A é definido como a ocorrência um número maior que 3 num único lançamento, calcule $P(A)$.

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{4, 5, 6\}$
-

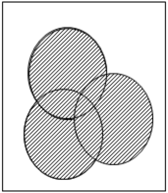
face	1	2	3	4	5	6
probabilidade	$2p$	p	$2p$	p	$2p$	p

- $P(S) = 1$ logo $2p + p + 2p + p + 2p + p = 9p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{9}$
- $P(A) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

Probabilidade da união de acontecimentos



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Probabilidade condicional

A probabilidade condicional $P(B|A)$ é a probabilidade de ocorrência do acontecimento B dado que ocorreu o acontecimento A:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \text{ onde } P(A) > 0$$

Exemplo 7

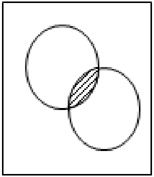
Considere o dado viciado do Exemplo 6. Qual é a probabilidade de que o número de pontos do dado viciado seja um quadrado perfeito?

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 4\}$ (quadrado perfeito)
face	1	2	3	4	5	6
probabilidade	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
- $P(B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$

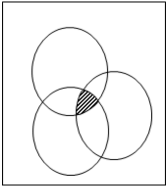
E qual a probabilidade que seja um quadrado perfeito dado que é maior que 3?

- $A = \{4, 5, 6\}$ (maior do que 3) e $B \cap A = \{4\}$ (quadrado perfeito e maior do que 3)
- $P(B \cap A) = \frac{1}{9}$, $P(A) = \frac{4}{9}$ e $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}$

Probabilidade da interseção de acontecimentos



$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$



$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

Probabilidade da interseção de acontecimentos

Exemplo 8

Uma caixa contém 20 fusíveis dos quais 5 são defeituosos. Se 3 fusíveis são selecionados e removidos sucessivamente sem reposição, qual a probabilidade de que os 3 fusíveis sejam defeituosos?

- primeira extração: $P(D_1) = \frac{5}{20}$
- segunda extração: $P(D_2|D_1) = \frac{4}{19}$
- terceira extração: $P(D_3|D_1 \cap D_2) = \frac{3}{18}$
- $P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) = P(D_1)P(D_2|D_1)P(D_3|D_1 \cap D_2) = \frac{1}{114}$

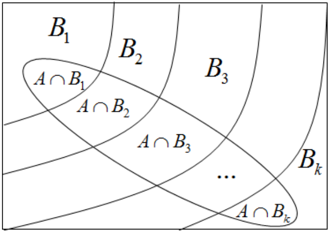
Probabilidade condicional

- **Regra da multiplicação**

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

- **Probabilidade total**

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_k)P(B_k) \end{aligned}$$



Independência

Dois acontecimento são independentes se a ocorrência ou não ocorrência de qualquer um deles não afecta a probabilidade de ocorrência do outro.

Independência de 2 acontecimentos

Dois acontecimentos A e B são independentes se e só se

- $P(A|B) = P(A)$
- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Independência de k acontecimentos

Os acontecimentos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são independentes se e só se a probabilidade da interseção de quaisquer destes eventos igualar o produto das respetivas probabilidades

- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) \quad \ldots$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \quad \ldots$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_k)$

Teorema de Bayes

Se os acontecimentos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ são mutuamente exclusivos e constituem uma partição do espaço amostral S, então para qualquer acontecimento A em S,

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j \cap A)}$$

$$= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j)P(A|B_j)} \quad \text{com} \quad i = 1, \ldots, k$$

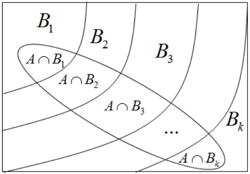
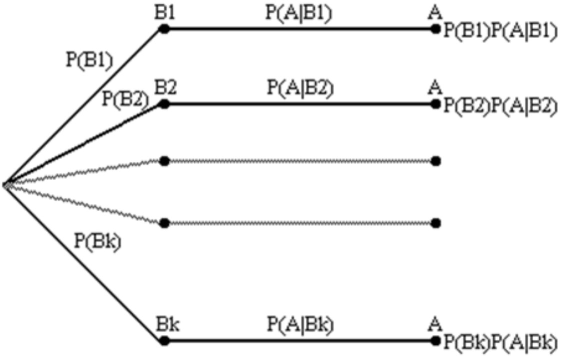


Diagrama em árvore

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j)P(A|B_j)} \quad \text{com} \quad i = 1, \ldots, k$$



Teorema de Bayes

Exemplo 9

Considere 3 fábricas A, B e C, que produzem um determinado produto em lotes de 100, 200 e 300 peças, respetivamente. Um lote de cada fábrica é selecionado e as peças são misturadas. Suponha que a probabilidade de se encontrar peças defeituosas em cada uma das fábricas seja respetivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se uma peça ao acaso, calcule as seguintes probabilidades:

- ser defeituosa;
- ser da fábrica A, sabendo que a peça é defeituosa.

- $D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$
- $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$
- $P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)$
- $P(D) = \frac{1}{6}\ \frac{10}{100} + \frac{2}{6}\ \frac{5}{100} + \frac{3}{6}\ \frac{1}{100} = \frac{10+10+3}{600} = \frac{23}{600}$
- $P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)}$
- $P(A|D) = \frac{\frac{1}{6}\ \frac{1}{10}}{\frac{1}{6}\ \frac{10}{100}+\frac{2}{6}\ \frac{5}{100}+\frac{3}{6}\ \frac{1}{100}} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{23}{600}} = \frac{10}{600}\ \frac{600}{23} = \frac{10}{23}$