Modelos de Computación
Relación de Problemas Número 1*

1. Escriba programas en L, utilizando macros libremente, que calculen a las siguiente funciones:

- $f(x) = 4x$
- $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 2$
- $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$
- $f(x) = x!$
- $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_1 = x_2 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$

2. Para el programa de suma desarrollado en clase, evalúe y dé por escrito las computaciones completas correspondientes a las siguientes descripciones instantánes iniciales. Flexibilice el modelo semántico tanto como sea necesario para poder tratar con las macros involucradas.

- $(1, \langle x_1 = 2, x_2 = 4, z = 0, y = 0 \rangle)$
- $(1, \langle x_1 = 0, x_2 = 3, z = 0, y = 0 \rangle)$
- $(1, \langle x_1 = 6, x_2 = 0, z = 0, y = 0 \rangle)$
- $(1, \langle x_1 = 0, x_2 = 0, z = 0, y = 0 \rangle)$

3. Para el programa de "resta" desarrollado en clase, evalúe y dé por escrito las computaciones completas correspondientes a las siguientes descripciones instantánes iniciales. Flexibilice el modelo semántico tanto como sea necesario para poder tratar con las macros involucradas.

- $(1, \langle x_1 = 4, x_2 = 2, z = 0, y = 0 \rangle)$
- $(1, \langle x_1 = 2, x_2 = 2, z = 0, y = 0 \rangle)$
- $(1, \langle x_1 = 1, x_2 = 3, z = 0, y = 0 \rangle)$

- $(1, \langle x_1 = 0, x_2 = 0, z = 0, y = 0 \rangle)$

4. Para el programa de multiplicación desarrollado en clase, evalúe y dé por escrito las computaciones completas correspondientes a las siguientes descripciones instantánes iniciales. Flexibilice el modelo semántico tanto como sea necesario para poder tratar con las macros involucradas.

- $(1, \langle x_1 = 2, x_2 = 4, z = 0, y = 0 \rangle)$
- $(1, \langle x_1 = 1, x_2 = 1, z = 0, y = 0 \rangle)$
- $(1, \langle x_1 = 6, x_2 = 0, z = 0, y = 0 \rangle)$
- $(1, \langle x_1 = 0, x_2 = 0, z = 0, y = 0 \rangle)$

5. Dada la siguiente función, escriba un programa en L que la calcule sin usar macros:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_1 \neq x_2 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

6. Dado el siguiente programa escrito en L, ¿qué función calcula?

7. Pruebe que para cada función parcialmente computable $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ existe un número $m \geq 0$ tal que f es computada por infinitos programas de longitud mayor que m.

8. Escriba un programa en L que calcule la función $f(x) = x \bmod 3$.

9. Considere un lenguaje de clase `repeat-until`, con una nomenclatura de variables igual a L, pero con un conjunto de instrucciones dado por la siguiente lista

```
V=0
V=W
V++
V--
REPEAT
P
UNTIL(V≠0)
```

donde P es cualquier bloque de sentencias, excepto la propia `repeat-until`. Se pide:

- Desarrollar un modelo semántico del lenguaje.
- Desarrollar el concepto de función $RU - computable$.
- Utilizando tal concepto, probar que $x + y$ y $x * y$ son funciones $RU - computables$.

10. Considere un lenguaje de clase `while`, con una nomenclatura de variables igual a L, pero con un conjunto de instrucciones dado por la siguiente lista

```
X=0
X++
X--
WHILE (X≠0)
P
```

donde P es cualquier bloque de sentencias, excepto otra sentencia `while`. Se pide:

- Desarrollar un modelo semántico del lenguaje.
- Desarrollar el concepto de función $while-computable$.
- Utilizando tal concepto, probar que $x+y$ y $x*y$ son funciones $while-computables$.

11. Desarrolle demostraciones de la computabilidad de los predicados $=, \neq$.

12. Sea L^* un lenguaje de programación que extiende a L permitiendo instrucciones de la forma $V \leftarrow k$, para cualquier $k \geqslant 0$. Estas instrucciones tienen el efecto evidente de ajustar el valor de V a k. Desarrolle un modelo semántico de $L^* - computabilidad$, y demueste que es equivalente al modelo que el propio lenguaje L establece.

13. Para cada número $k \geqslant 0$,. sea f_k la función constante $f_k(x) = k$. Muestre que f_k es computable para todo k.

14. Un programa P se dice *directo* si no contiene instrucciones de bifurcación. Demuestre que si la longitud de un programa directo P es igual a k, entonces $\psi_P^{(1)}(x) \leq k$, para todo x.

15. Demuestre que si P es directo y computa a f_k, la longitud de P es al menos k.