ANALYSE I
NOTES DE COURS
JOSHUA FREEMAN

ADAPTÉ DE A. LACHOWSKA

Date: 7 février 2023.

Table des matières

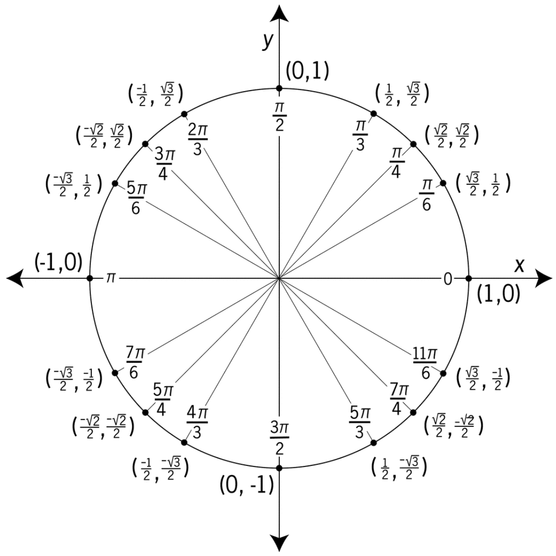


FIGURE 1. Le cercle trigonométrique

INTRODUCTION

0.1. **Une ou deux formules de trigonométrie à connaître.**

$$sin(x \pm y) = sin(x)cos(y) \pm cos(x)sin(y),$$
$$cos(x \pm y) = cos(x)cos(y) \mp sin(x)sin(y).$$

0.2. **Définitions.**

Définition 0.1 (Fonction réciproque)**.** Si $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$, on dit que f et f^{-1} sont réciproques.

Pour toute fonction $fE \to F(F, E \subset \mathbb{R})$, on a :

Définition 0.2 (Ensemble de définition)**.** $D(f) = \{x \in E : \exists f(x)\}$

Définition 0.3 (Ensemble image)**.** $f(D) = \{y \in F : \exists x \in D(f), f(x) = y\}$

Définition 0.4 (Surjectivité)**.** $\forall y \in F, \exists x \in D_f, f(x) = y$

Définition 0.5 (Injectivité)**.** $\forall x_1, x_2 \in D_f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Définition 0.6 (bijectivité)**.** Une fonction bijective est injective et surjective.

Exercice 0.1.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ est-elle surjective ? Non, elle n'est pas surjective : x^2 n'est jamais négative.
(2) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$ est-elle injective ? Non, car -1 et 1 ont la même image mais sont différents. Si on avait $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, alors f serait bien injective.

Définition 0.7 (Fonction réciproque d'une bijection)**.** Une autre manière de définir une fonction réciproque est par l'équation

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

1. Nombres réels

1.1. Théorie des ensembles naïve.

Définition 1.1. Un **ensemble** est une collection d'objets définis et distincts.

Définition 1.2. Y est un sous-ensemble de $X \iff b \in Y \Rightarrow b \in X \iff Y \subset X$ (on a donc $Y \not\subset X \iff \exists b \in X, b \notin Y$)

1.1.1. *Opérations ensemblistes.* Soient $X, Y, Z \subset \mathcal{U}$.

(1) Réunion $X \cup Y = \{a \in \mathcal{U}, a \in X \vee a \in Y\}$
   (a) Exemple : $X = \{a, b, c\}; Y = \{c, d, e\}$, on a $X \cup Y = \{a, b, c, d, e\}$
(2) Intersection : $X \cap Y = \{a \in \mathcal{U}, a \in X \wedge a \in Y\}$
   (a) Dans l'exemple donné précedemment, $X \cap Y = \{c\}$
(1) Différence : $X \setminus Y = \{a \in \mathcal{U}, a \in X \wedge a \notin Y\}$
   (a) **Attention :** $X \setminus Y \neq Y \setminus X$, en général.

Proposition 1.1. *$X, Y, Z \subset \mathcal{U}$. Alors $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$.*

Démonstration. À gauche, on a :

$$\{a \in \mathcal{U}, a \in X \wedge a \notin (Y \cap Z)\}$$

$$\boxed{= \{a \in \mathcal{U}, a \in X \wedge (a \notin Y \vee a \notin Z)\}}$$

À droite, on a :

$$\{a \in \mathcal{U}, a \in (X \setminus Y) \vee a \in (X \setminus Z)\}$$

$$= \{a \in \mathcal{U}, (a \in X \wedge a \notin Y) \vee (a \in X \wedge a \notin Z)\}$$

$$\boxed{= \{a \in \mathcal{U}, a \in X \wedge (a \notin Y \vee a \notin Z)\}}$$

□

1.2. Différents ensembles. [À la recherche des nombres réels]

Les nombres naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$ sont munis d'addition, multiplication, et de relation d'ordre.

1.2.1. *Axiome du bon ordre.* Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ contient un plus petit élément.

1.2.2. *Axiome de récurrence (équivalent).* Soit $S \subset \mathbb{N}$ tel que :

(1) $0 \in S$,
(2) $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$,

Alors $S = \mathbb{N}$.

Les entiers naturels : $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2...\}$. Tout $x \in \mathbb{Z}$ possède un élément y réciproque par rapport à l'addition. On l'appelle **l'opposé**. Notation : $y = -x$

Les nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Tout $x \neq 0$ a un réciproque y par rapport à la multiplication. On l'appelle l'**inverse**. Notation : $x \cdot y = 1$.

1.3. **Ensemble réel.**

Proposition 1.2. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. *(*$x = \sqrt{2} \iff x > 0 \wedge x^2 = 2$*)*

Démonstration. Supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$, tel que q est le plus petit.
Alors :

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$
$$\Rightarrow 2q^2 = p^2$$

. Donc p^2 est pair, donc p est pair et s'écrit $p = 2k, k \in \mathbb{Z}$ Donc :

$$\sqrt{2} = \frac{2k}{q}.$$
$$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$$
$$\Rightarrow q^2 = 2k^2$$

Donc q^2 est pair, donc q est pair et s'écrit $q = 2j, j \in \mathbb{Z}$. Or, si q est pair et p est pair, q n'est pas le plus petit possible. $\perp$ $\square$

1.3.1. *Définition axiomatique de* $\mathbb{R}$. .

(1) $\mathbb{R}$ est un corps : ensemble muni d'addition, multiplication, et satisfaisant les axiomes suivants, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:
   (a) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité)
   (b) $x + y = y + x$ (commutativité)
   (c) $\exists 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = x$ (élément neutre)
   (d) $\forall x\ in\mathbb{R}, \exists y, x + y = 0$ (élément réciproque)
   (e) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (associativité)
   (f) $x \cdot y = y \cdot x$ (commutativité)
   (g) $\exists 1 \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x \wedge 1 \neq 0$ (élément neutre)
   (h) $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}, \exists y, x \cdot y = 1$ (élément réciproque)
   (i) On note aussi que la multiplication et l'addition sont commutatives entre elles.

(2) $\mathbb{R}$ est un corps ordonné : $\exists$ une relation d'ordre $\leq$ telle que pour tout triplet d'éléments $x, y, z \in \mathbb{R}$:
   (a) $x \leq y$ ou $y \leq x$ si les deux sont vrais, $y = x$.
   (b) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
   (c) $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitivité)
   (d) $0 \leq x$ et $0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$

(3) $\mathbb{R}$ est un corps complet :
   Axiome de la borne inférieure. Pour tout sous-ensemble S non-vide de $\mathbb{R}_+^*$, il existe un nombre $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ tel que :
   (a) $a \leq x$ pour tout x dans S
   (b) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément x_ϵ dans S tel que $x_\epsilon - a \leq \epsilon(\iff a + \epsilon \geq x\epsilon)$ En gros, il existe toujours un nombre plus proche que a pour tout mini nombre epsilon (par exemple, on peut infiniment se rapprocher de 1 sans l'atteindre dans $\mathbb{R}$, contrairement aux entiers, ou on peut se rapprocher au max de 1 (0 ou 2) de 1 avant de l'atteindre.

   Dans ce cas précis, le plus petit élément de S plus proche de 0 sans l'atteindre est appelé **infimum**.

$$\boxed{\text{Alors } \mathbb{R} \text{ est un corps commutatif, ordonné, et complet.}}$$

1.3.2. *Borne inférieure et supérieure.*

Définition 1.3. Soit $S \subset \mathbb{R}, S \neq \varnothing$. On dit que $b \in \mathbb{R}(a \in \mathbb{R})$ est un majorant (un minorant) de S quand pour tout x de S, on a $x \leq b(x \geq a)$ Si S est majoré et minoré, S est **borné**.

Définition 1.4. Soit S un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$. Un nombre réel b (respectivement a) vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\forall x \in S, x \leq b(x \geq a)$
(2) $\forall \epsilon > 0$, il existe un élément $x_\epsilon \in S$ tel que $b - x_\epsilon \leq \epsilon$ $(a - x_\epsilon \geq \epsilon)$

a est alors l'infimum, et b est le supremum. On écrit aussi $b = supS$, et $a = infS$ Autrement dit, le supremum est la borne superieure, et l'infimum la borne inferieure.

Exercice 1.1. $S = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Montrer que

(1) $\forall a \in S, a \in]0, 1]$
(2) 0 est l'infimum de S.
(3) 1 est le supremum de S

Théoreme 1. *Dans $\mathbb{R}$, tout sous ensemble minoré possède un unique infimum, et tout sous-ensemble majoré possède un unique supremum.*

Démonstration. Montrons l'existence d'infimums et de supremums pour un sous-ensemble réel respectivement minoré et majoré :

(1) Soit $S \subset \mathbb{R}_+^* \Rightarrow a \in \mathbb{R}, a = infS$ par l'axiome de la borne inferieure.
(2) Soit $S \subset \mathbb{R} : \exists t \in \mathbb{R}.x \geq t \forall x \in S$. Or $t \leq 0$. (S est minoré par $t, t \leq 0$). Alors on peut juste considérer $S_1 = \{x - t + 1, x \in S\} \subset \mathbb{R}_+^*$ Selon l'axiome de la borne inférieure, il existe $a_1 = infS_1$. Quid de $a = a_1 + t - 1$? On a en fait $a = infS$.
   (a) Exercice : Vérifier les propriétés de l'infimum.
(3) Soit $S \subset \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{R} : x \leq p \forall x \in S$. L'ensemble S est majoré par $p \in \mathbb{R}$. Considérons $S_2 = \{y \in \mathbb{R} : y = -x, x \in S\}$ Alors on a S_2 minoré par $-p$, et, par (2), S_2 a un infimum a_2. Enfin, on a $a = -a_2 = \sup(S)$
   (a) Exercice : Vérifier les propriétés de a.

Enfin, montrons que si $\inf S$ existe (respectivement $\sup S$), alors il est le plus grand majorant (respectivement plus grand minorant) de S. En particulier, montrons que inf S et sup S sont uniques (s'ils existent). Supposons qu'il existe sup S et $b \in \mathbb{R}, b < \sup S$, et b est un majorant de S. Alors il existerait $\epsilon = \frac{\sup S - b}{2} > 0$ (sup $S > b$). Donc $\sup S - \epsilon > b \geq x, x \in S$. On a donc $\sup S - x > \epsilon, x \in S$ ↯. Cela contredit la définition de supremum, car il n'existerait aucun $x_\epsilon \in S$ tel que $\sup S - x \leq \epsilon$. Donc, dans un premier temps, le sup S est le plus petit majorant de S et il est unique.

□

Exercice : Cas de l'infimum.

Exercice 1.2. Comment trouver $\sup S, \inf S$ pour un sous-ensemble réel donné ?

(1) Intervalles bornés :

$$\sup[a, b] = \sup]a, b[= \sup[a, b[= \sup]a, b] = b$$

$$\inf[a, b] = \inf]a, b[= \inf[a, b[= \inf]a, b] = a$$

Exercice : démontrer (mais ce ne sera pas à l'examen).

Théoreme 2. *Propriété d'Archimède. $\forall x > 0, y \geq 0, x, y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^*, n \cdot x > y$. Autrement dit, si on fait un nombre suffisament grand de petits pas, on peut toujours dépasser n'importe quelle grande distance.*

Démonstration. (1) Montrons que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré.
Supposons que $\mathbb{N}$ est majoré. Alors $\exists \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$, et pour $\epsilon = \frac{1}{2} \exists n \in \mathbb{N}$;

$$\sup \mathbb{N} - n \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sup \mathbb{N} \leq n + \frac{1}{2} < n + 1$$

On a donc, avec $m = n + 1 \in \mathbb{N}$,

$$sup \mathbb{N} < m \in \mathbb{N} \lightning$$

(2) Soit $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}_+$. Alors $\exists n \in \mathbb{N}, n > \frac{x}{y} \iff nx > y$

□

On dit aussi que $\mathbb{R}$ est un corps **Archimédien**. Il découle du théorème sus-dit le théorème suivant.

Théoreme 3. *Pour tout couple $x < y, x, y \in \mathbb{R}$, il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}, x < r < y$. Autrement dit, $\mathbb{Q}$* ***est dense dans*** *$\mathbb{R}$.*

Autrement dit, dans n'importe petit intervalle entre deux nombres réels non égaux se trouve un nombre rationnel.

Démonstration. Par la propriété d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{N}^* : n(y - x) > 1$, donc

$$x < x + \frac{1}{n} < y,$$

ce qui implique

$$\frac{nx}{x} < \frac{nx + 1}{n} < y.$$

Or

$$\frac{nx}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \leq \frac{nx + 1}{n},$$

avec $\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$ toujours rationnel. On a donc, enfin :

$$x < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} < y.$$

□

Exercice 1.3.

(1) Montrer la proposition suivante : soient $r < q, r, q \in \mathbb{Q}$. Alors Il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$(irrationnel) tel que $r < x < q$. (corrigé dans le Douchet 1.3.7)

(2) Trouver l'infimum et le supremum, s'ils existent, de $S = \{x > a\} =]a, +\infty[$. Solution vite fait : $\exists \inf S = a$(cf s.-f. 1), mais pas de sup.

(3) Trouver l'infimum et le supremum, s'ils existent, de $S = \left\{\frac{3n-2}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \subset \mathbb{R}$. Corrigé :

  (a) $\frac{3n-2}{n} = 3 - \frac{2}{n}$. Or $\frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}$ pour tout entier naturel positif n, et donc

$$3 - \frac{2}{n+1} > 3 - \frac{2}{n}.$$

  Il s'ensuit que $S = \left\{\frac{3n-2}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est croissante, et donc le plus petit élément de l'ensemble est obtenu pour $n = 1$, c'est-à-dire $3 - \frac{2}{1} = 1$ est le plus petit élément. Or, on a aussi que $3 - \frac{2}{n}$ est majoré par 3, car $\lim(\frac{1}{n}) = 0$. Il s'ensuit que $1 \leq x < 3$ pour $x \in S$, et S est borné. Donc S a bien un infimum et un supremum. Reste à les determiner.

  (b) Premièrement comme S est fermé à gauche, on peut prendre sa borne inférieure comme infimum (cf sf 1). On a donc $\inf S = 3 - \frac{2}{n}\big|_{n=1} = 1$

  (c) Enfin, Il faut démontrer que $\sup S = 3$.

(i) $2 > x, \forall x \in S. 3 > 3 - \frac{2}{n} \forall n \in \mathbb{N}^*$

(ii) Soit $\epsilon > 0$. Il faut trouver $x_\epsilon \in S, 3 - x_\epsilon \leq \epsilon$. On a, comme $x_\epsilon \in S$,

$$3 - \left(3 - \frac{2}{n}\right) \leq \epsilon \iff \frac{2}{3} \leq n, n \in \mathbb{N}^*$$

puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, il existe un entier naturel positif n tel que $n \geq \frac{2}{\epsilon}$ quel que soit $\epsilon > 0$. Donc $\boxed{\sup S = 3}$

Remarque 1.1. Si $\inf S \in S$, (respectivement $\sup S \in S$) S possède un minimum (respectivement maximum), et $\min S = \inf S$ (respectivement $\max S = \sup S$).

2. Suites de nombres réels

2.1. Exemples de suites, raisonnement par récurrence.

Définition 2.1. Une suite de nombres réels est une application $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie pour tout nombre naturel plus grand qu'un certain n_0

Définition 2.2. Une suite est majorée (resp. minorée) s'il existe un nombre réel M(resp. m) tel que $a_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ ($a_n \geq m \forall n \in \mathbb{N}$. On dit que la suite (a_n) est bornée quand elle est majorée et minorée.

Remarque 2.1. (a_n) est bornée si et seulement si il existe $X \geq 0$ tel que $|a_n| \leq X \forall n \in \mathbb{N}$

Définition 2.3. Une suite (a_n) est croissante (strictement croissante) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} > a_n)$.
Une suite (a_n) est décroissante (strictement décroissante) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} \leq a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$.
Une suite (a_n) est dite monotone (strictement monotone) si elle est (strictement) croissante ou décroissante.

2.1.1. *Raisonnement par récurrence.* Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel n, tel que $P(n_0)$ est vraie (initialisation), et que pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \implies P(n+1)$. Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque 2.2. Généralisation : $P(n_0)$ jusqu'à $P(n_0+k)$ sont vraies (init) et $P(n)$ jusqu'à $P(n+k)$ implique $P(n+k+1)$. Alors $P(n)$.

Proposition 2.1. *$P(n) = (f_n \geq n \forall n \geq 0)$, où (f_n) est la suite de Fibonnaci.*

Démonstration. $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$. On a donc bien $P(0)$ et $P(1)$ et P est bien initialisée. Or, admettons $P(k)$ et $P(k+1)$. On a

$$f_{k+1} + f_k = f_{k+2}.$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$f_{k+1} \geq k+1 \wedge f_k \geq k.$$

Ce qui implique

$$f_{k+1} + f_k \geq 2k+1.$$

Ce qui revient à

$$f_{k+2} \geq 2k+1.$$

Or, comme $2k+1 \geq k+2$,

$$f_{k+2} \geq k+2.$$

Ce qui implique

$$(P(k) \wedge P(k+1)) \implies P(k+2).$$

Donc P est héréditaire sur son domaine de définition. Donc P est vraie. □

2.2. Limites de suite.

Définition 2.4 (Convergence)**.** On dit que la suite (x_n) est convergente et admet pour limite le nombre l, si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel qu'on aie, pour tout $n \geq n_0, |x_n - l| \leq \epsilon$.

On ecrit $\lim\limits_{n\to\infty} = l$.

Remarque 2.3. $|x_n - l| \leq \epsilon \iff -\epsilon \leq x_n - l \leq \epsilon \iff l - \epsilon \leq x_n \leq l + \epsilon$

Définition 2.5 (Divergence)**.** Une suite qui ne converge pas est divergente.

Exercice 2.1. Montrer la convergence de $\frac{1}{n+1}$ en 0.

Démonstration. $\left|\frac{1}{n+1} - l\right| \leq \epsilon, \forall \epsilon > 0, l = 0, \iff n \geq \frac{1}{\epsilon} - 1$; or, comme $\mathbb{N}$ n'est pas borné (on peut aussi le montrer avec Archimède), $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq \frac{1}{\epsilon} - 1$. De surcroît, on a, pour tout entier naturel $n > n_0$ le fait que $n \geq \frac{1}{\epsilon} - 1$. □

Remarque 2.4. On peut aussi trouver n_0 explicitement. Par exemple, $n_0 = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor \implies n_0+1 = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1 > \frac{1}{\epsilon}$. Donc $n \geq n_0 \implies n+1 \geq n_0+1 > \frac{1}{\epsilon} \iff \frac{1}{n+1} < \epsilon \forall n \geq n_0$. Par la définition de la convergence, on aurait montré la convergence de $\frac{1}{n+1}$ en 0.

Exercice 2.2.

(1) Montrer que, pour $p \in \mathbb{Q}_+^*, \lim \frac{1}{n^p} = 0$
(2) $\forall x, y \in \mathbb{R} m \in \mathbb{N}^* (0 < x \leq y \implies x^m \leq y^m \text{ et } x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}})$

Par récurrence. Soit $P(n)$ la proposition définie pour tout $n > 0$ par :

$$P(n) = (0 < x \leq y \implies x^n \leq y^n \text{ et } x^{\frac{1}{n}} \leq y^{\frac{1}{n}}).$$

Considérons $0 < x \leq y$. du fait que $z^1 = z^{\frac{1}{1}} = z \forall z \in \mathbb{R}$, on a bien $P(1)$, et P est initialisée en 1. De plus, si on admet $P(k)$ vrai (ce qu'on peut faire ayant démontré l'existence d'un tel k à l'instant), on a :

$$\begin{aligned} 0 < x \leq y &\implies x^k \leq y^k \text{ et } x^{\frac{1}{k}} \leq y^{\frac{1}{k}} \\ &\implies x \cdot x^k \leq x \cdot y^k \text{ et } x^{\frac{1}{k}} \leq y^{\frac{1}{k}} \\ &\implies x^{k+1} \leq x \cdot y^k \text{ et } \end{aligned}$$

Or $x \leq y \implies xy^k \leq yy^k$. Donc $P(n)$ est héréditaire (du moins pour les pouissances non fractionnaires, l'autre partie est à revoir)
La preuve du cours :

□

Proposition 2.2 (unicité de la limite)**.** *Soit (a_n) convergente. Si a et b sont des limites de (a_n), alors $a = b$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Puisque a est la limite de $(a_n), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Puisque b est la limite de $(a_n), \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq m_0, |a_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Donc $\forall n \geq max(n_0, m_0)$,

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \overset{\substack{\text{inégalité} \\ \text{triangulaire}}}{\leq} |a - a_n| + |a_n - b|.$$

$$|a - b| \leq \epsilon.$$

En d'autres termes, la distance entre a et b est plus petite que tout nombre positif ; elle est donc nulle ! $a = b$. □

Théoreme 4 (Inégalité triangulaire)**.** $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Démonstration. $\forall x, y \in \mathbb{R} x \leq |x|$ et $-y \leq |y|, y \leq |y|$ et $-y \leq |y|$. En considérant $(x + y) \geq 0$, on a déjà $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.En considérant $(x + y) \leq 0$, on a aussi $|x + y| = -x - y \leq |x| + |y|$. Donc, dans les deux cas, l'inégalité triangulaire est vraie. □

Exercice 2.3. Montrer, par l'absurde, que $(-1)^n$ diverge. Solution : Supposons qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |n - l| < \epsilon$. En pariculier, pour $\epsilon = \frac{1}{4}$. Or, $a_n = (-1)^n$ est telle que $a_{2k} = 1$ et $a_{2k+1} = -1, \forall k \geq 0$. En partant des inégalités $-\frac{1}{4} \leq 1 - l \leq \frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{4} \leq -1 - l \leq \frac{1}{4}$, on arrive à une contradiction ($l \in [\frac{5}{4}, \frac{3}{4}] \cap [-\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}]$, ce qui implique $l \in \emptyset$)

Proposition 2.3 (Toute suite convergente est bornée)**.**

Démonstration. Soit $\lim_{n \to \infty} a_n = l \in \mathbb{R}. \epsilon = 1 \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |a_n - l| \leq 1 \iff l - 1 \leq a_n \leq l + 1$. Or, en considérant $S = \{a_i, i < n_0\}$ on voit que S est fini et donc $\exists \max(S), \min(S)$ Donc (a_n) est bornée par $\min(\min(S), l - 1)$, et $\max(\max(S), l + 1)$, □

2.3. Opérations algébriques sur les limites.

Proposition 2.4. *Soit (a_n) et (b_n) convertgentes telles que $lima_n = a, limb_n = b$ Alors*

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a \pm b$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}, \impliedby b \neq 0$

(cf DZ §2.33 pour les démos mais on fait quand même une esquisse de preuve ci-après pour le plaisir)

Démonstration. (1) Soit $\epsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2}$ $\exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq m_0, |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

$$\forall n \geq \max(n_0, m_0), |a_n + b_n - (a+b)| - |a_n - a + b_n - b| \overset{\Delta}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

Remarque 2.5. (1) On n'a pas que si la somme de deux suites est convergente, alors les deux suites le sont aussi. Mais on a qu'elles sont soit toutes deux divergentes, soit toutes deux convergentes.

Démonstration. Si b_n converge, alors on a que $a_n = (a_n + b_n) - b_n$, converge par Prop3.3.1 (1). □

(2) Soient $(a_n), (b_n)$ telles que $\lim(a_n - b_n) = 0$. Alors soit les deux suites convergent et ont la même limite, soit elles divergent. (EXERCICE, suivre 1)

(3) (linéarité de la limite) Si a_n converge vers a et b_n convege vers b, alors $\lim pa_n + qb_n = pa + qb$. Idée : $\lim a_n = a \implies \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, p > 0 \implies |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{p} \implies -\frac{\epsilon}{p} \leq a_n - a \leq \frac{\epsilon}{p} \implies |pa_n - pa| \leq \epsilon \implies \lim(pa_n) = pa$

(4) Soit $(a_b \cdot b_n)$ convergente. Si b_n converge vers un réel non nul, alors $a_n = \frac{a_n b_n}{b_n}$ converge par la proposition 2.3.1 (3). Si b_n converge vers zéro, alors a_n peut converger ou diverger.

(5) Si $\lim a_n = 0$, alors $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ est divergente si elle existe.

Démonstration. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} n \forall n > n_0, |a_n - 0| \leq \epsilon \iff |a_n| \leq \epsilon \iff |\frac{1}{a_n}| \geq \frac{1}{\epsilon}$. Soit $M > 0, \epsilon = \frac{1}{M} \implies \forall n \geq n_0, \left|\frac{1}{a_n}\right| \geq M$ Donc a_n n'est pas bornée, et est donc divergente □

Proposition 2.5 (Quotient de deux suites polynomiales)**.** *Soient $x_n = \sum^p a_i n^i, a_i \in \mathbb{R}, a_p \neq 0, p, q \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \sum^q b_i n^i, b_i \in \mathbb{R}, b_q \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \begin{cases} 0 & si\ p < q \\ \frac{a_p}{b_q} & si\ p = q \\ divergente & si\ p > q \end{cases}$$

Démonstration. $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i n^i}{\sum_{i=0}^{q} b_i n^i} = \frac{n^p}{n^q}\frac{\sum_{i=0}^{p} a_i n^{i-p}}{\sum_{i=0}^{q} b_i n^{i-q}} = \frac{n^p}{n^q}\frac{u_n}{v_n}$, avec u_n et v_n ce qu'il y a à l'intérieur. Considérons $\lim \frac{u_n}{v_n}$. Comme tout converge vers zéro sauf a_p et b_q, $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a_p}{b_q}$. Or, si $p < q, \lim \frac{n^p}{n^q} = \lim \frac{1}{n^{q-p}} = 0$. Si $p = q, \lim \frac{n^p}{n^p} = \lim 1 = 1 \implies \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a_p}{b_q}$. Si $p > q$, $\lim \frac{n^p}{n^q} = \lim \frac{1}{n^{q-p}}$ =l'inverse d'une suite dont la limite est zéro, ce qui, par ce qu'on vient de montrer, est divergent. $\implies$ □

2.4. **Relation d'ordre.**

Proposition 2.6. *Soit* (a_n) *et* (b_n) *deux suites convergentes,* $\lim a_n = a \wedge \lim b_n = b$*. Supposons qu'il existe* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq m_0, a_n \geq b_n$*. Alors* $a \geq b$*.*

Preuve par l'absurde. Supposons que $b > a$. Soit $\epsilon = \frac{b-a}{4}$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, a - \epsilon \leq a_n \leq a + \epsilon$ et $a - \epsilon \leq b_n \leq b+\epsilon \forall n \geq 0. \forall n \geq n_0, a_n \leq a+\epsilon = a+\frac{b-a}{4} < a+\frac{b-a}{2} = b-\frac{b-a}{2} = b-\epsilon \leq b_n. \implies \forall n \geq n_0, a_n < b_n$Mais par la condition, $\forall n \geq m_0, a_n \geq b_n$.Alors $\forall n \geq \max(m_0, n_0)$, on a $a_n < b_n$ et $a_n \geq b_n$, ce qui est contradictoire. □

Théoreme 5 (Théorème des gendarmes pour les suites)**.** *Soient* $(a_n), (b_n), (c_n)$*, trois suites telles que*

(1) $\lim a_n = \lim c_n = l$
(2) $\exists k \in \mathbb{N}, n \geq k \implies a_n \leq b_n \leq c_n$*.*

Alors $\lim b_n = l$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, -\epsilon \leq a_n - l \leq \epsilon \wedge -\epsilon \leq c_n - l \leq \epsilon$. D'autre part, $\forall n \geq k, a_n - l \leq b_n - l \leq c_n - l$. On a donc $\forall n \geq \max(n_0, k), -\epsilon \leq a_n - l \leq b_n - l \leq c_n - l \leq \epsilon. \implies -\epsilon \leq b_n - l \leq \epsilon \iff |b_n - l| \leq \epsilon \iff \lim b_n = l$

□

Exercice 2.4.

(1) Mq $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1) = x^n - 1$.
(2) Soit $a_0 = 1, a_n = \sqrt[n]{a}, a > 0, n \geq 1$. Quelle est la limite de (a_n) ? Solution (par disjonction de cas) :
Soit a >1. $x = \sqrt[n]{a} > 1 \implies 0 < \sqrt[n]{a} - 1 = \frac{a-1}{a^{\frac{n-1}{n}} a^{\frac{n-2}{n}} + ... + a^{\frac{1}{n}} + 1}$. Comme le dénominateur est $> n$, $\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$. On a alors $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n} \forall n \geq 2$ Par le théorème des gendarmes, $\lim \sqrt[n]{a} - 1 = 1$, et $\lim a_n = 0$ quand $a > 1$. Soit, d'autre part, $a < 1$. Soit alors $b = \frac{1}{a}$. Par ce que nous venons de montrer, $lim \sqrt[n]{b} = 1$. En divisant des deux côtés par $\sqrt[n]{b}$, on trouve $lim \sqrt[n]{a} = 1$, aussi. Ainsi, $\lim a_n = 1$
(3) **(Suite géométrique).** $a_n = a_0 r^n, a_0 \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0, r \in \mathbb{R}$. Trouver les limites des suites géométriques selon les valeurs de r (valeur absolue plus petite que 1, égal à 1, ou valeur absolue plus grande que 1 [dans ce cas on montrera qu'il diverge]).
Solution :
   (a) Soit $r > 1$. Alors $r = x + 1, x > 0$. Alors $r^n = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Donc dans comme $x > 0, r^n \geq 1 + \binom{n}{1} x$, Et enfin $r^n \geq 1 + nx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or, par la propriété d'Archimède, $\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N} : 1 + nx > M$ Eh oui ! !
   Or, considérons $|a_0 r^n| = |a_0(1+x)^n|$. On a alors que $|a_0(1+x)^n| \geq |a_0|(1+nx) > |a_0|M$; Donc la suite géométrique n'est pas bornée et elle diverge quand $r > 1$.
   (b) Soit $0 < r < 1$. On pose $q = \frac{1}{r} \geq 1$. Par (a), $\forall M > 0 \exists n_0, \forall n \geq n_0, q^n > M. \implies \frac{1}{q^n} < \frac{1}{M}. \implies \frac{|a_n|}{|a_0|} < \frac{1}{M}$. Soit $\epsilon > 0$. Fixons $M = \frac{|a_0|}{\epsilon}. q^n > \frac{a_0}{\epsilon} \forall n \geq n_0 \implies r^n < \frac{\epsilon}{|a_0|} \forall n \geq n_0. \implies |a_0 r^n| < \epsilon \forall n \geq n_0$, et donc $lim |a_n| = 0$ et $\lim a_n = 0$.
   (c) Enfin, si $r = 1$, c'est une suite constante qui converge vers a_0
   (d) Notons aussi que, pour $r < 0$, Si $r < 1$ alors a_n diverge par (a) et que, sinon, a_n converge vers 0 par un (b).
(4) Calculer la limite de $a_n = \frac{5^n}{n!}$. Intuition : le factoriel croit plus vite que l'exponentiel.

Démonstration. Soit $n > 6. a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{5}{k}$. Soit $M = \prod_{k=1}^{5} \frac{5}{k}$. On a $\frac{a_n}{M} = \prod_{k=6}^{n} \frac{5}{k}$, produit dont il est facile de remarquer que tous les termes sont inférieurs à $\frac{5}{6}$, et qui est donc inférieur à $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}$. Donc

$a_n \leq M\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}$. Aussi remarque-t-on $a_n \leq M\left(\frac{6}{5}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^n \forall n > 6$. Calculons $\lim M\left(\frac{6}{5}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Comme $M\left(\frac{6}{5}\right)^5$ est une constante, $\lim M\left(\frac{6}{5}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^n = M\left(\frac{6}{5}\right)^5 \lim\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ par (3). Donc, comme a_n est minoré par zéro et majoré par $\left(\frac{5}{6}\right)^n$, par le théorème des gendarmes, $\lim a_n = 0$. □

Remarque 2.6. On tire une première liste de 3 limites à connaître et savoir utiliser (beaucoup plus important que de savoir tout démontrer) :

(1) $\forall a > 0, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(2) limite de suites géométriques selon la valeur de la raison

(3) $\forall p > 0, \lim_{n\to\infty} = \frac{p^n}{n!} = 0$

Exercice 2.5.

(1) Mq $\lim x_n = l \in \mathbb{R} \implies \lim |x_n| = |l|$. Solution basée sur la deuxième inégalité triangulaire $(||a| - |b|| \leq |a-b|)$, cf [DZ §1.4.4]

(2) $lim|x_n| = 0 \implies lim x_n = 0$

Théoreme 6 (Critère de d'Alembert)**.** *Soit* (a_n) *une suite telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$.

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \geq 0 \implies \lim a_n = \begin{cases} 0 & si\ \rho < 1 \\ divergente & si\ \rho > 1 \\ On\ ne\ peut\ rien\ dire & si\ \rho = 1 \end{cases}$$

2.5. **Limites infinies.**

Définition 2.6. On dit que $(a_n) \to +\infty$ si $\forall A > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, a_n \geq A$ (respectivement $b_n, -\infty$ et $b_n \leq -A$)

Exercice 2.6. Mq limite de $\sqrt{n} - \sqrt{n+2}$ est 0. Indice : multiplier et diviser par le conjugué.

Remarque 2.7. Les suites $cos(n)$ et $sin(n)$ divergent.

Démonstration. Supposons qu'il existe une limite réelle l. Or, pour tout n, si on considère les 5 valeurs de cosinus allant de $cos(n)$ à $cos(n+4)$, il y a dans ces valeurs des valeurs négatives et positives (pas toutes de même signe) Donc, comme c'est pour tout entier naturel n, il existe un nombre infini de valeurs positives et négatives dans la suite. Donc la limite ne peut être ni négative, ni positive. Donc elle doit être nulle. Or le même argument nous dit que si la limite de sin existe, elle est aussi égale à 0. Donc, en faisant un peut d'opérations sur les limites, on a $\lim(sin^2 + cos^2) = 0$. ↯ C'est absurde puisqu'on sait très bien que la limite de $(sin^2 + cos^2)$ est 1 car $(sin^2 + cos^2) = 1$. Cqfd □

Théoreme 7. *Toute suite croissante (respectivement décroissante) majorée (respectivement minorée) converge vers son supremum (respectivement infimum). Toute suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) diverge vers* $+\infty$ *(respectivement* $-\infty$*)*

démonstration dans [DZ §2.4.1]

2.6. **Le nombre e.**

Remarque 2.8. On a deux limites caractéristiques en rapport avec le nombre e :

(1) $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$

(2) $\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = e^{-1}$

2.7. **Sous-suites de Cauchy.**

Proposition 2.7 (convergence d'une sous-suite). *Si* $lim a_n = l$, *toute sous-suite* (a_{n_k}) *converge aussi vers* l.

Théoreme 8 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). *Dans toute suite bornée, il existe une sous-suite convergente.*

Définition 2.7. La suite (a_n) est dite de Cauchy quand, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ et $m \geq n_0, |a_n - a_m| \leq \epsilon$. En gros, quand, pour n'importe quel petite distance, il existe un terme de la suite à partir duquel la distance entre tous les termes est plus petite que cette mini-distance.

Proposition 2.8. *Une suite est de Cauchy si et seulement si elle est convergente.*

Démonstration. démonstration avec Bolzano-Weierstrass, on va dans les deux sens mais j'ai pas envie d'aller plus loin que ça. □

Remarque 2.9. $\lim(a_{n+k} - a_n) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ fixé **n'implique pas** que (a_n) est une suite de Cauchy.

Exercice 2.7. Montrer la remarque précédente grâce à la suite $a_n = \sqrt{n}$. Solution : En multipliant par le conjugué, on voit que $\lim(a_{n+k} - a_n) = 0$ pour tout k naturel fixé. Or elle diverge, donc, par ce qu'on vient de démontrer, elle n'est pas de Cauchy (ça diverge). Explication : $k \in \mathbb{N}, \lim(a_{n+k} - a_n) = 0 \implies \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_{n+k} - a_n| \leq \epsilon$, avec k fixé. Ici, n_0 peut dépendre de k. Dans l'exemple de la racine carrée, si on augmente k, on obtient n_0 toujours plus grand qu'un ϵ donné.
Or, pour Cauchy, $n_0 \in \mathbb{N}$ est le même et pour toute différence $m - n = k$.

3. Séries numériques

3.1. Définition et exemples.

Définition 3.1. La série de terme général a_n est un couple.

(1) la suite (a_n)
(2) la suite des sommes partielles $S_n \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k$

Définition 3.2. Une série $\sum_{k=0}^{n} a_k$ converge si la suite des sommes partielles (S_n) converge.

Exercice 3.1. (1) Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} n$ diverge.

(2) **(Série géométrique).** Montre la convergence et trouver la limite de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ (C'est 2, pas 0, fais gaffe)
(3) Montrer que
   (a) $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \Longleftarrow |r| < 1$
   (b) divergente sinon.
(4) **(Série harmonique).** Montrer que la série $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge.
   Exemple de solution : Supposons $\exists \lim S_n = S \in \mathbb{R}$. En considérant la sous-suite des S_{2n}, on voit qu'elle est divergente. Donc, selon notre supposition et le fait que toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite, on doit avoir que $\lim S_{2n} - S_n = 0$. Or $S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, ce qui tend vers $\frac{1}{2}$ par hypothèse donc $0 \geq \frac{1}{2}$. C'est absurde. Donc notre hypothèse est fausse, S_n ne converge pas, elle diverge. □
(5) Montrer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ Solution : en regroupant les termes consécutifs pairs et impairs à partir du deuxième, et voir que chaque j-ème couple est plus petit que le un demi puissance j, on s'aperçoit qu'on peut montrer l'inégalité suivante : $S_n < 1 + \frac{1}{2} S_n$, ce qui nous donne que S_n est strictement inférieure à 2. Comme elle est aussi croissante, elle converge.

   Remarque 3.1. (a) La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ est convergente pour tout $p > 1$. (Série 7)
   (b) **(pas partie du cours mais juste pour le plaisir).** Cette série est égale à l'évaluation de la fonction zêta de Riemann en 2, $\zeta(2) = \frac{\pi}{6}$
   (c) **(pas partie du cours mais juste pour le plaisir).** La fonction zêta de Riemann est définie comme étant la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, convergente pour tout $p > 1$. On peut démontrer par exemple la limite énoncée avant (Moodle Zeta2.pdf), $\zeta(2k) = C_k(\pi)^{2k}, C_k \in \mathbb{Q}, \zeta(2k)$ transcendant $\forall k \geq 1$, démontré par Euler. Mais pour les nombres impairs, est-ce que zêta est transcendante, rationnelle, ou pas ? ? Il a fallu 200 ans pour qu'Apéry prouve qu'en 3, c'était bien transcendant.

(6) **facultatif.** $\prod_{ppremier} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \cdot \zeta(s) = 1, s \geq 2 \in \mathbb{N}$. Indice : $\frac{1}{2^s}\zeta(s) =?$. Solution sur moodle dans Zeta2.pdf (lien cliquable).

Définition 3.3 (Convergence absolue)**.** Une série est dite absolument convergente si la série de ses valeurs absolues converge.

Proposition 3.1. *Une série absolument convergente est convergente.*

Proposition 3.2 (Condition nécessaire). *Si une série* $\sum a_n$ *converge, alors* $\lim a_n$ *est nulle.*

Exercice 3.2.

(1) Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$ diverge, grâce à la contraposée de la proposition ci-avant.

Remarque 3.2. $\lim a_n = 0 \not\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_n$ converge.

3.2. **Critères de convergence.**

Proposition 3.3 (Critère de Leibnitz pour les séries alternées). *Soit* a_n *une suite, telle que*

(1) $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |a_{n+1}| \leq |a_n|$ *(elle décroît en valeur absolue)*

(2) $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, a_{n+1} \cdot a_n \leq 0$. *(le signe alterne)*

(3) $\lim |a_n| = 0$.

Alors La série associée à a_n *converge.*

Exercice 3.3. (Série harmonique alternée). Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente par le critère de Leibnitz.

Proposition 3.4 (Critère de comparaison pour les séries à termes **non-négatifs.**). *Soit* (a_n) *et* (b_n) *deux suites telles que* $\exists k \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq b_n \forall n \geq k$. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *(respectivement* a_n*) converge (respectivement diverge), alors* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *(respectivement* b_n*) converge (respectivement diverge)*

Exercice 3.4. Considérons $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{cos(n!)}{(n+1)^2}$. Montrer qu'elle est convergente par le critère de comparaison. (indice : $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{cos(n!)}{(n+1)^2}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$

Remarque 3.3. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ possède que des termes de même signe, et que la suite des sommes partielles est majorée si les termes sont positifs ou minorée si les termes sont négatifs, alors la série est convergente.

Proposition 3.5 (Critère de d'Alembert). *Soit* (a_n) *une suite telle que* $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, *et* $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \in \mathbb{R}$. *Alors* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge absolument si* $\rho < 1$ *et diverge si* $\rho > 1$

Proposition 3.6 (Critère de Cauchy (de la racine)). *Soit* (a_n) *telle qu'il existe* $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = \rho \in \mathbb{R}$.*Alors* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge absolument si* $\rho < 1$ *et diverge si* $\rho > 1$.

Remarque 3.4. (1) Si $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ et $\lim \sqrt[n]{a} = l$, alors $l = r$.

(2) Parfois $\lim \sqrt[n]{a}$ est définie et pas celle du critère de d'Alembert (exemple dans série 7).

(3) $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, alors on ne sait pas... d'autres méthodes sont à utiliser.

Exercice 3.5 (Si $\rho = 1$, d'autres méthodes sont à utiliser.)**.**

(1) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$. On a $\lim \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = 1$ et la série diverge.

(2) Soit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. On a $\lim \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = 1$ et la série converge.

(3) Prouver la convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ grâce au critère de d'Alembert.

Remarque 3.5. On peut en déduire que $\lim \frac{5^n}{n!} = 0$. Astuce importante :

Si calculer la limite d'une suite est trop difficile, on peut montrer que la série associée converge.

(4) Trouver la limite des suites $\frac{x^k}{k!}$ avec un paramètre $x \in \mathbb{R}$ (on verra plus tard que la série associée converge carrément vers la fonction exponentielle).

(5) Trouver la convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{nx}{3n-1}\right)^{2n-1}$, $x \in \mathbb{R}$. Indice : Critère de Cauchy puis disjonction de cas.

Solution : par le critère de Cauchy on a que $|x| < 3 \implies$ la série converge absolument, et $|x| < 3 \implies$ la série diverge. Qu'en est-il de $x_{1,2} = 3, -3$?

(a) Soit $x = 3$. Alors $\lim \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim \frac{1}{\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n-1}} = \lim \frac{\left(1-\frac{1}{3n}\right)}{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{2}{3}}} = e^{\frac{2}{3}} \neq 0$. Donc la série diverge.

(b) Soit $x = -3$. Alors $\lim \left(\frac{-3n}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim(-1)^{2n-1} \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n-1} = -\lim \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n-1} = -e^{\frac{2}{3}}$. Donc la série associée diverge aussi ! !

4. Fonctions réelles

4.1. Définitions et propriétés de base.

Définition 4.1. Une fonction $f : E \to F, E, F \subset \mathbb{R}$ est une application qui donne pour tout élément $x \in D(f) = E$, un élément $y = f(x) \in F$

Définition 4.2. Le graphique de f est l'ensemble des points sur le plan $\mathbb{R}^2$ avec les coordonnées $(x, f(x))$

Remarque 4.1. Si la fonction est donnée par une formule, alors $D(f)$ est par définition les plus grand sous-ensemble de$\mathbb{R}$ où l'expression $f(x)$ est bien définie.

Propriétés de base.

(1) croissance stricte $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$. Notation : $f \uparrow$ (quand c'est pas strict c'est $\leq$)
(2) décroissance stricte $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$. Notation : $f \downarrow$ (quand c'est pas strict c'est $\geq$)
(3) Monotonie (stricte) : si une fonction est (strictement) croissante/décroissante.
(4) f est paire si
   (a) $x \in D(f) \implies -x \in D(f)$ ($D(f)$ est symétrique) et
   (b) $f(-x) = f(x) \forall x \in D(f)$
(5) f est impaire si
   (a) $x \in D(f) \implies -x \in D(f)$ ($D(f)$ est symétrique) et
   (b) $-f(x) = f(x) \forall x \in D(f)$
(6) $f : E \to F$ est périodique si $\exists p \in \mathbb{R}^*, \forall x \in E$
   (a) $x + p \in E$
   (b) $f(x + p) = f(x)$

   p est la période de f. On remarque que f périodique $\implies (x \in E \implies x + nP \in E \forall n \in \mathbb{N}) \implies E$ n'est pas borné.
(7) Maximum et minimum local d'une fonction : $f : E \to F, x_0 \in E \implies f(x)$ admet un max(min) local au point x_0, s'il existe $\delta > 0 \forall x \in D(f), |x - x_0| \leq \delta \implies f(x) \leq f(x_0)$(respectivement $f(x) \geq f(x_0)$)

   Remarque 4.2. (a) S'il existe un minimum ou un maximum de f, alors f est minorée (respectivement majorée) sur l'ensemble d'existence de ce minimum/max.
   (b) Une fonction bornée sur E n'atteint pas forcément son minimum/maximum sur E. Exemple : $f(x) = x^2 + 3$ sur $E = (0, 1)$ n'atteint ni son minimum ni son maximum.
(8) $f : E \to F$ est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
(9) $f : E \to F$ est injective si $\forall y \in F, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
(10) $f : E \to F$ est bijective si $\forall y \in F, \exists! x, f(x) = y$.

   Remarque 4.3. Si $f : E \to F$ n'est pas surjective dans l'ensemble donné, il faut réduire F.
   Si elle n'est pas injective, il faut réduire E.
(11) si f est bijective, on peut définir la fonction f^{-1} la fonction réciproque, par la formule $y = f(x), x \in E \iff x = f^{-1}(y), y \in F$

Remarque 4.4. Important : on définit par convention les ensembles de départ suivants pour les fonctions trigonométriques : $\boxed{([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \text{ pour } \sin(x) \text{ et } tan(x), ([0, \pi]) \text{ pour } \cos(x) \text{ et } \cot(x)}$.(les parenthèses ouvertes sont pour tan et cotan, qui ne sont pas bien définis aux bornes).

Exercice 4.1.

(1) La fonction $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ est-elle injective ? Sinon, choisir un bon domaine pour qu'elle le soit. Pareil pour la bijection.

(2) $g(x) = 2sin(1-x^2)$. Trouver le plus grand ensemble de définition où g est bijective, puis donner sa réciproque et le domaine de définition de celle-ci. Résolution $y = 2sin(1-x^2) \implies -\frac{\pi}{2} \leq 1-x^2 \leq \frac{\pi}{2} \implies -\frac{\pi+2}{2} \leq -x^2 \leq \frac{\pi-2}{2} \implies$. Or x^2 n'est pas injective ; comme elle est positive, on peut conclure que $0 \leq x^2 \leq \frac{2+\pi}{2}$.Il faudra donc faire attention quand on voit $\sqrt{\frac{\pi+2}{2}} \geq x \geq -\sqrt{\frac{\pi-2}{2}}$ à bien choisir une moitié de l'intervalle pour assurer la bijectivité de x^2. On peut choisir l'une comme l'autre bien sur, et avoir $x \in [0, \sqrt{\frac{\pi+2}{2}}$ par exemple. Sur ce domaine la fonction est bijective. On peut alors résoudre $2sin(1-x^2) = y$ pour trouver y, ce qui donne éventuellement $x = +\sqrt{1 - arcsin(\frac{y}{2})}$, puisque x est positif. on a trouvé notre réciproque ; aussi trouve-t-on $D(f^{-1}) = f(D) = \left[f(0), f(\sqrt{\frac{\pi+2}{2}})\right] \implies f^{-1} : [-2, 2\sin 1] \to \left[0, \sqrt{\frac{\pi+2}{2}}\right]$

4.2. **Limite d'une fonction.**

Définition 4.3 (Voisinage d'un point)**.** Une fonction $f : E \to F$ est définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\exists \delta > 0, \{x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_0| < \delta \subset E\}$

Remarque 4.5. f n'est pas forcément définie en x_0,dans le cas où elle est définie au voisinage de ce dernier (cf $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ au voisinage de 0)

Définition 4.4 (Limite)**.** Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage de x_0 admet pour limite le nombre réel l lorsque $x \to x_0 \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E 0 < |x - x_0| \leq \delta, |f(x) - l| \leq \epsilon$ Attention : ϵ peut dépendre de δ

Exercice 4.2. Soit $f(x) = 3x + 1, x_0 = 1$. Mq $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 4$.

Proposition 4.1 (Caractérisation d'une limite d'une fonction à partir d'une limite de suite.)**.** *Soit* $f : E \to F, \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \iff$ *pour toute suite* $(a_n) \subset \{x \in E, x \neq x_0\}, \lim a_n = x_0 \implies \lim f(a_n) = l$

Remarque 4.6. Le "toute suite" dans la caractérisation est très important : par exemple $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \implies \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas mais la suite $a_n = \frac{1}{n}$, on a que $\lim a_n = 0$ et $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. Clairement un piège qui tombera à l'examen.

Corollaire 4.1. *Soit* $f : E \to F$ *définie au voisinage de* x_0. *Supposons que* $\forall (a_n) \in E \setminus x_0, \lim a_n = x_0$, *la suite* $(f(a_n))$ *converge. Alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *existe.*

Exercice 4.3. Mq $f(x) = x^p, p \in \mathbb{N}^* \implies \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0^p, \forall x_0 \in \mathbb{R}$. Solution : Soit $(x_n) \to x_0$ une suite arbitraire convergente vers $x_0, x_n \neq x_0 \forall n \in \mathbb{N}$. Soit $(a_n) = x_n - x_0 . \forall n \in \mathbb{N}, \lim a_n = \lim x_n - x_0 = 0$. Or $\lim f(x_n) = \lim f(x_0 + a_n) = \lim (x_0 + a_n)^p = \lim \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_n^k x_0^{p-k}$. On a donc, le premier terme plus une suite qui converge vers zéro fois une constante, dont la limite est donc le premier terme : x_0^p □

Proposition 4.2 (Unicité des limites)**.** *Une limite est unique. это превосходно*

Démonstration. idée : à partir des suites □

Proposition 4.3 (Critère de Cauchy pour les fonctions)**.** $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in \{x \in E, 0 < |x - x_0| \leq \delta\} \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$

Démonstration. (CF [DZ §4.2.8] pour la démo) □

Proposition 4.4 (Opérations algébriques sur les limites)**.** $f : E \to \mathbb{R}, g : E \to \mathbb{R}, \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R} \implies$

(1) la limite d'une combinaison linéaire des fonctions est la combinaison linéaire des limites

(2) la limite du produit est égal au produit des limites

(3) la limite du quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ est égale au quotient des limite ***si*** $l_2 \neq 0$***, et, au voisinage de*** $x_0, g(x) \neq 0$

Démonstration directe par la caractérisation à partir des suites.

Théoreme 9 (Théorème des deux gendarmes pour les fonctions)**.** *Soit $f, g, h : E \to F$,*

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$

(2) $\exists \alpha > 0, \forall x \in \{x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \alpha\}$, *on a* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Alors $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$

Remarque 4.7. On montre grâce à cela que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

Théoreme 10 (Limite de la composée de deux fonctions)**.** *Soit $f : E \to F$, $\underset{x\to x_0}{f(x)} = y_0, g : G \to H; \underset{x\to y_0}{g(x)} = l$. Supposons que $f(E) \subset G$ et $\exists \alpha > 0, 0 < |x - x_0| < \alpha \implies f(x) \neq y_0$, autrement dit il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x) \neq y_0$. (au cas où g est pas définie en x_0). Alors $\lim\limits_{x\to x_0} g \circ f = l$*

Exercice 4.4.

(1) Mq $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1-cos2x}{3x^2+sin^2x} = \frac{1}{2}$. Indice : Formule trigonométrique puis diviser par x^2 en haut et en bas.

(2) Mq $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-1} = -\frac{1}{2}$ en multipliant en haut et en bas par le conjugué.

(3) Mq $\lim\limits_{x\to 1} \frac{sin(x-1)^2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{1}{2}$. Indice : $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$

(4) Mq $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ n'est pas défini.

(5) Mq $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$. Indice : 2 gendarmes.

Définition 4.5 (Limites lorsque x tend vers $+\infty$)**.** On dit que $f : E \to F$ est définie au voisinage de $\pm\infty$ quand $\exists \alpha \in \mathbb{R},]\alpha, \pm\infty[\subset E$

Définition 4.6. Elle définit une limite de $f : E \to F$ au voisinage de $\pm\infty$ et dit que dans ce cas, f admet une **asymptote horizontale**.

Exercice 4.5. Mq $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ En cherchant, $\forall \epsilon > 0, \alpha \in \mathbb{R}, x \geq \alpha \implies |\frac{1}{x^2}| \leq \epsilon$. Solution : $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$

Définition 4.7 (Limites infinies)**.** Soit $f : E \to F$ définie au voisinage de x_0. On dit qu'elle tend vers $+\infty$ quand $\forall A > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| \leq \delta \implies f(x) \geq A$. (réciproquement pour $-\infty$)

Exercice 4.6. Mq $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ en trouvant le bon δ

Définition 4.8. $f : E \to F$ définie au voisinage de $\pm\infty$ tend vers $\pm\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$ si même chose que avant avec toujours plus grand/plus petit qu'un très grand /très petit nombre.

Définition 4.9 (Limite à droite et à gauche)**.** $f : E \to F$ est définie à droite (à gauche) de x_0 s'il existe un voisinage à droite (à gauche) où la fonction est définie. On peut alors parler de limite à droite (à gauche) si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : 0 < x - x_0 \leq \delta (0 < x_0 - x \leq \delta)$

4.3. **Fonctions exponentielle et logarithmique.**

Définition 4.10. On définit $e^x \overset{def}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. (on peut vérifier qu'elle converge par le critère de d'Alembert.

Proposition 4.5. *Important :*
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Définition 4.11 (Fonction logarithmique)**.** Définition de la fonction log...

4.4. **Fonctions continues.**

Définition 4.12. Condition de continuité en un point $x = x_0$: $\begin{cases} 1. & \exists \lim_{x\to x_0} \\ 2. & f(x) \text{ est bien définie en } x_0 \\ 3. & \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

Exercice 4.7.

(1) Mq $f(x) = x^p$ est continue sur $\mathbb{R}$ (Solution : $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{x\to a} x^p = a^p$.

(2) Toute fonction rationnelle de polynômes est continue sur son domaine de def

(3) $f(x) =^p \sqrt{x}$ est continue sur son domaine.

(4) Mq sin est continue sur $\mathbb{R}$. Indice : Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{x\to a} \sin x = \sin a$. Solution : $|\sin x - \sin a| = |\sin \frac{x+a+x-a}{2} - \sin \frac{x+a-x+a}{2}| = ... = 2|\sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}|$. en majorant le deuxième terme multiplie par 1, on voit que $2|\sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}| \leq 2|\sin \frac{x-a}{2}$, ce qui est plus petit que $|x-a|$ en utilisant le fait que $\lim_{x\to 0} \sin x = x$, ce qui nous donne enfin que $|\sin x - \sin a|$ est majoré par $|x-a|_{x\to a} \to 0$ et donc $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{x\to a} \sin x = \sin a$.

Proposition 4.6 (Critère de Cauchy pour les fonctions continues)**.** *$f : E \to F$ définie au voisinage de $x = x_0$ et en x_0. Alors $f(x)$ est continue en $x = x_0 \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x_2 \in \{x \in E : |x - x_0| \leq \delta\}$, on a $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$.*

Définition 4.13. $f : E \to F$ est dite continue à droite (à gauche) en $x_0 \in E$ si $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (respectivement $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$)

Remarque 4.8. f est continue en $x = x_0 \iff$ elle est continue à droite et à gauche en x_0.

Exercice 4.8. Étudier la continuité de $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \Longleftarrow x \geq 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \Longleftarrow x < 0 \end{cases}$ en $x = 0$. Indice : on étudie sa continuité à gauche et à droite et on trouve qu'il y a la même limite (1).

Proposition 4.7 (Opérations sur les fonctions continues)**.** *Si f et g sont continues en x_0, alors*

(1) Une combinaison linéaire est continue

(2) Le produit des fonctions est continu

(3) Le quotient des fonctions est continu si $g(x_0) \neq 0$

Proposition 4.8 (Prolongement par continuité d'une fonction en un point)**.** *Soit $f : E \to F$ une fonction telle que f n'est pas définie en c mais $\lim_{x\to c} f(x)$ existe. alors on peut la prolonger en une fonction $E \cup \{c\} \to \mathbb{R}$; $\hat{f}(x) \overset{def}{=} \begin{cases} f(x) & \Longleftarrow x \in E \\ \lim_{x\to c} f(x) & \Longleftarrow x = c \end{cases}$*

Exercice 4.9 (Type examen)**.** (1) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Trouver, s'il existe, la fonction $\hat{f}$ prolongée par continuité de f en 0. (Indice : $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$)

(2) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{e^{2x}-1}$ sur $[-4, 0[\cup]0, \infty[$. Même chose en $x = 0$. (Indice : multiplier en haut et en bas par $2x$.

4.5. **Fonctions continues sur un intervalle.**

Définition 4.14. une fonction $f : I \to F$, où I est un intervalle **ouvert** non vide est continue sur I si f est concitnue en tout point $x \in I$. Pour un intervalle ferme, il faut que ce soit le cas pour l'intervalle ouvert, et continue à gauche au point limite de droite et à droite au point limite de gauche de l'intervalle.

Théoreme 11. *Soit $a > b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$. Alors $f(x)$ atteint son infimum et son supremum sur $[a, b]$. Autrement dit, une fonction continue sur un intervalle compact atteint son minimum et son maximum.*

Remarque 4.9.
(1) Une fonction non continue sur un intervalle fermé borné n'atteint pas son sup et son inf. (par exemple $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue en $x = 0$, et f n'atteint pas son sup=2
(2) une fonction continue sur un intervalle ouvert borné n'atteint pas son sup et inf.

Théoreme 12 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $a < b \in \mathbb{R}$; $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint son sup, son inf, et toute valeur comprise entre les deux.[DZ §4 3.22]*

Corollaire 4.2. *Soit $a < b \in \mathbb{R}$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$ Alors il existe au moins un point $c \in [a, b] : f(c) = 0$.*

Exercice 4.10.
(1) Montrer que l'équation $\sin x + \frac{1}{x-4} = 0$ possède au moins deux solutions sur $[0, \pi]$. (indice : appliquer le TVI en divisant l'intervalle par deux)
(2) Montrer l'existence d'une solution de $\cos x = x$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Corollaire 4.3. *Soit $f : \underset{ouvert}{I} \to \mathbb{R}$ une fonction* ***continue strictement monotone****. Alors $f(I)$ est aussi un intervalle ouvert.*

Corollaire 4.4. *Toute fonction* ***injective continue*** *sur un intervalle ouvert, ou fermé borné, est strictement monotone.*

Corollaire 4.5. *Toute fonction* ***bijective continue*** *sur un intervalle admet une fonction réciproque qui est continue et strictement monotone. (dem [DZ §4.3])*

5. Calcul différentiel

5.1. Fonctions dérivables.

Définition 5.1. Une fonction $f : E \to F$ est dite dérivable en $x_0 \in E$ si $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0}{x-x_0} = f'(x_0) \in F$. Cette limite est appelée la dérivée de f en x_0.

Remarque 5.1. Si f est dérivable en $x = x_0$, on peut écrire $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)$, où $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. On voit que $r'(x)$ tend vers 0 quand $x \to x_0$.On dit que f est différentiable en x_0.

Proposition 5.1. *Une fonction dérivable en un point est continue en ce point.*

Remarque 5.2. La réciproque est fausse : $|x|$ n'est pas dérivable en zéro elle a pas la même dérivée à gauche et à droite.

Définition 5.2 (Dérivée à droite)**.** $f'_d(x_0) \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, et à gauche $f'_g(x_0) \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Remarque 5.3. On peut introduire la dérivée infinie. Si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, on peut quand même dire que dans ce cas, le graphique de la fonction admet une tangente verticale. (par exemple une sigmoïde parfaitement droite centrée en zéro).

Exercice 5.1 (Limite remarquable)**.** Montrer que $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$. Indice : $\lim_{x\to 0} \log(1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1$ et log est continue

Exercice 5.2 (Exercices de limites.)**.** Trouver la valeur du paramètre $b \in \mathbb{R}$ telle que la fonction donnée admet un prolongement par continuité en $x = 0$. $f :]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[, f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+3x+3x^2)}{2x\cos x}, & x > 0 \\ \frac{\sqrt{1+x^2}-(1-x)}{bx}, & x < 0 \end{cases}$.

ENsuite, trouver la dérivabilité en 0 de $f(x) = \begin{cases} x\log x, & x > 0 \\ \sin x e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ x, & x = 0 \end{cases}$ Indice : on calcule les dérivées à gauche et à droite et on compare (si elles existent).

Enfin, la même chose pour $f(x) = \begin{cases} x(1 + x^2)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ \sin |x|, & x \leq 0 \end{cases}$.

Enfin, Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}$ telles que la série converge absolument : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{c}{n}}{\left(\log(1+\frac{1}{n})\right)^c \sqrt{n}}$

Proposition 5.2 (Dérivée de la réciproque)**.** *Soit $f : I \to F$ une fonction bijective continue sur I et dérivable en $x_0 \in I$, telle que $f'(x_0) \neq 0$. Alors la fonction réciproque $f^{-1} : F \to I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et*

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

Corollaire 5.1. *On en déduit que la dérivée d'une fonction $f : I \to F$ bijective continue, et dont la réciproque est continue et dérivable, alors $\forall x \in F (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)}\Big|_{y=f-1(x)}$*

Exercice 5.3. Calculer la dérivée de $\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$ (Montrer que c'est $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ grâce au fait que $\sin y = \pm\sqrt{1 - \cos^2 y}$ et que ici $\arccos \in [0, \pi]$

Définition 5.3 (Trigonométrie hyperbolique)**.** Savoir les dérivées de *argsinh* et *argcosh* et leur domaines.

5.2. Théorème des accroissements finis.

Proposition 5.3. *Si $f : E \to F$ est dérivable en $x_0 \in E, f(x)$ admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$. En gros la dérivée s'annule quand la fonction change de signe.*

Remarque 5.4. La réciproque est fausse : $f(x) = x^3$. en $x_0 = 0$ la dérivée est nulle mais f n'a pas d'extremum local.

Définition 5.4 (Point stationnaire)**.** Si $f : E \to F$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un point stationnaire de f.

Notons que les points d'extrema d'une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont parmi les suivants :

$$\begin{cases} \text{les points stationnaires} & f'(x_0) = 0 \\ \text{Les bornes} & x = a, x = b \\ \text{Les points } x \in]a, b[\text{où } f \text{ n'est pas dérivable} & \end{cases}$$

Théoreme 13 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to F$ telle que*

(1) $f : [a, b] \to F$ est continue
(2) f est dérivable sur l'intervalle ouvert
(3) $f(a) = f(b)$

Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Théoreme 14 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit f continue sur $[a, b]$ telle que f est dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists c \in [a, b], f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*

Exercice 5.4. Démontrer que l'équation $x + \log x = 0$ admet exactement une solution réelle. Solution : $f(x) = x + \log x$

Théoreme 15 (Bernoulli-l'Hospital)**.** *$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur l'intervalle fermé et dérivables sur l'intervalle ouvert, alors $\exists c \in [a, b] \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$*

5.3. **Règle de Bernoulli-l'Hospital.**

Théoreme 16. *Soit f, g comme dans le théorème 15, telles qu'ils aient la même limite indéterminée en a^+. Alors $\lim_{x \to a^+} \frac{f}{g} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'}{g'}$*

5.4. **Développements limités et formules de Taylor.**

Théoreme 17 (Formule de Taylor)**.** *Soit $f : I \to F$ une fonction $(n + 1)$ fois dérivable sur I. Alors $\forall x \in I, \exists a \in I, \exists u$ entre a et x tel que $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}$. Les termes jusqu'au dernier exclus sont le polynôme de Taylor, et le dernier est le reste de Taylor.*

Définition 5.5 (Développement limité)**.** $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de $x = a$. S'il existe des $a_0, a_1 \cdots, a_n, \forall x \in E, x \neq a, f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + (x - a)^n \epsilon(x)$, ou ϵ est une fonction qui tend vers zéro en a, alors on dit que f admet un développement limité d'ordre n autour de $x = a$

Proposition 5.4. *Si $f : E \to F$ admet un DL d'ordre n autour de $x = a$, celui-ci est unique.*

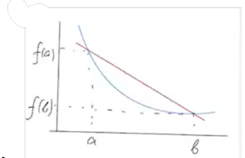
5.5. **Étude de fonctions.**

Proposition 5.5 (Condition suffisante pour extremum local)**.** *Soit $f : I \to F, f \in C^n, n \equiv 0 \mod 2, f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0 \neq f^{(n)}(c)$. Alors $f^{(n)}(c) > 0 \implies f$ admet un minimum local en c. $f^{(n)}(c) < 0 \implies f$ admet un maximum local en c.*

Définition 5.6 (Point d'inflexion)**.** Soit $f : E \to F$ une fonction dérivable en $a \in E$. Considérons la différence $\varphi(x) = f(x) - l(x)$ entre f et sa tangente au point $a, l(x)$. On appelle a point d'inflexion dans le cas où φ change de signe en a.

Proposition 5.6 (Condition suffisante pour avoir un point d'inflexion)**.** *$f : I \to F, f \in C^n, n \equiv 1 \mod 2, n > 1$, et $f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \neq f^{(n)}$, alors a est un point d'inflexion de f.*

Définition 5.7. Une fonction est convexe en un intervalle si pour tout $a < b$ elle est inférieure à la corde dressée par $f(a), f(b)$ (la droite passant par f(a) et f(b).



Proposition 5.7. *La convexité de f sur I est donné par le signe de sa dérivée sur cet intervalle.*

Proposition 5.8. *Si $f : E \to F \in C^n$ sur un intervalle ouvert contenant $x = a$, alors la formule de Taylor nous fournit le DL d'ordre n de f autour de $x = a$.*

Exercice 5.5. Trouver le DL d'ordre n de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ autour de $x = 0$. Indice : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si $|x| < 1$. Trouver $\epsilon(x)$ et calculer sa limite en x_0.

Proposition 5.9 (Opérations algébriques sur les DL)**.** *Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$ admettant un DL autour de $x = a$. Alors $f(x) = \sum_0^n a_i(x-a)^i + (x-a)^n \epsilon_1(x)$, et $g(x) = \sum_0^n b_i(x-a)^i + (x-a)^n \epsilon_2(x)$. Alors*

(1) toute combinaison linéaire de f et g admet un DL d'ordre n autour de $x = a$ (combinaison linéaire correspondante des DL)

(2) pareil pour le produit : tous les termes d'ordre $\leq n$ dans le produit des deux polynômes.

(3) Si $b_0 \neq 0, g(x) \neq 0$ sur E, alors le quotient possède un DL (quotient des polynômes par division polynomiale)

(4) $g \circ f$ admet un DL d'ordre n autour de $x = a$ si $P^n_{g \circ f}(x) =$ calcule le DL de g en a puis la DL de f en $g(a)$ et on les compose.

Exercice 5.6. Calculer le DL de $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ en utilisant les propriétés énumérées ci-dessus d'ordre 4 autour de $x = 0$. Méthode 1 : $f(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})$. Méthode 2 : $f(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1+x}$ Méthode 3 (best) : division polynomiale. Méthode 4 : par identification on pose $\frac{1}{1-x^2} = a_0 + \cdots + a_4x^4 + x^4\epsilon(x)$ et on trouve le polynôme associé en enlevant le ϵ.

Exercice 5.7. Calculer la limite de $\frac{\sin^2 x - x^2}{e^x - x - 1}$ en zéro avec des DL.

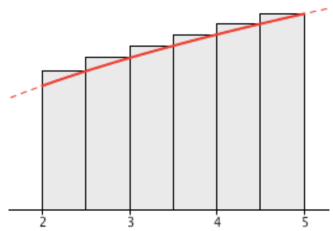
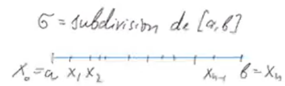


Figure 2. Somme de Darboux supérieure

6. Calcul intégral

6.1. **Somme de Darboux.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ; soit $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < x_n = b\}$ un ensemble ordonné dénombrable de points choisis dans $[a, b]$, qu'on définira comme une *subdivision* de $[a, b]$.



En particulier, on définit les **subdivisions régulières** : ce sont des subdivisions avec le même écart entre chaque élément ordonné. On définit également le **pas** $\mathcal{P}(\sigma)$, maximum des écarts entre chaque élément.

Alors $\overline{S}_\sigma(f) \overset{def}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(x_k x_{k-1})$, où $M_k = \max\limits_{[x_k, x_{k-1}]} f(x)$, est la somme de Darboux supérieure de f relativement à σ (dans une somme de Darboux inférieure, on a un $m_x = \min\limits_{[x_k, x_{k-1}]} f(x)$)

Remarque 6.1. On a que $m(b-a) \leq \underline{S}_\sigma(f) \leq \overline{S}_\sigma(f) \leq M(b-a)$, où $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$

Proposition 6.1. *Soit* $\overline{S}(f) \overset{def}{=} \inf\{\overline{S}_\sigma(f)\}$,$\underline{S}(f) \overset{def}{=} \sup\{\underline{S}_\sigma(f)\}$, *pour toutes subdivisions* σ *de* $[a, b]$. *Alors si* f *est continue sur* $[a, b]$, *alors* $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ *=l'integrale de Riemann de notre fonction ! !*

Définition 6.1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $a < b$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \overline{S}(f) = \underline{S}(f)$$

est l'intégrale de Riemann de la fonction f sur $[a, b]$.

Définition 6.2 (opposé d'une intégrale)**.** L'opposé d'une intégrale de a à b est l'intégrale de b à a.

Proposition 6.2 (Propriétés de l'intégrale)**.** *Soit* $a < b, f(x)$ *continue sur* $[a, b]$ *et* $c \in [a, b]$.

(1) Relation de Chasles.

(2) $m(b-a) \leq \underline{S}_\sigma(f) \leq \overline{S}_\sigma(f) \leq M(b-a)$ *pour toute subdivision. On a donc* $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

(3) Théorème de la moyenne : il existe c tel que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. *En gros, iil existe une valeur de la fonction dans l'intervalle* $[a, b]$ *tel que le rectangle avec pour hauteur* $f(c)$ *et longueur* $c - a$ *est égale à l'aire sous la courbe.*

Démonstration. $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. $\implies$ $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$. Puisque f est continue sur $[a, b]$ par le TVI il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \implies \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ □

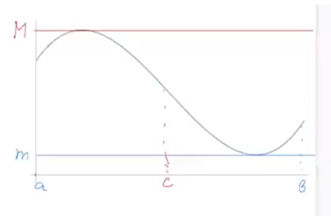


FIGURE 3. Inégalité de Darboux

(4) *Linéarité.*

(5) *(Intégrale fonction de ses bornes). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $g, h : I \to [a,b]$ dérivabls sur I. Alors*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt\right) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

Démonstration.

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = \int_{h(x)}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{g(x)} f(t)dt$$

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = -\int_{a}^{h(x)} f(t)dt + \int_{a}^{g(x)} f(t)dt$$

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = -F(h(x)) + F(g(x))$$

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

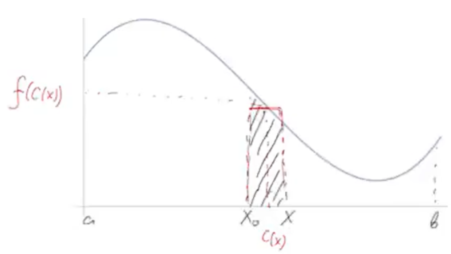
□

6.2. **Relation entre intégrale et primitive sur *[a,b]*.** Rappel : Une primitive $F(x)$ d'une fonction continue f sur $[a,b]$ est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $F'(x) = f(x) \forall x \in]a,b[$.

Proposition 6.3 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Soit $a < b, f$ une fonction continue sur $[a,b]$. Alors la fonction définie comme $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de $f(x)$ sur $[a,b]$ telle que $F(a) = 0$*

Démonstration. Soit $x_0 \int]a,b[$. Considérons $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left(\int\limits_a^x f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt\right) = \frac{1}{x-x_0}\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right)$.

Par le théorème de la moyenne, $\exists c(x)[x_0, x]$, $\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = f(c)$.



Or $F'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} f(c(x)) = f(x_0)$ (par continuité). $\implies F'(x_0) = f(x_0) \forall x \in]a,b[$ (pour la vérification de la continuité aux bornes, voir [DZ §7.1.13])

□

Corollaire 6.1. *Soit $a < b, f$ continue sur $[a, b]$. Si g est une primitive de f sur $[a, b]$, alors on a $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.*

Démonstration. On sait que $F = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$. Alors $F = g + C$ sur $[a, b] \implies g(b) - g(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$. □

6.3. **Techniques d'intégration.**

Proposition 6.4 (Formule de changement de variable)**.** *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue , $\varphi[\alpha, \beta]$ continûment dérivable sur $I \supset [\alpha, \beta]$. Alors* $\boxed{\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$

Exercice 6.1. $\int \frac{dx}{\sin x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2(x)} \overset{u=\cos}{=} -\int \frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) = \frac{1}{2}\log|1-u| - \frac{1}{2}\log|1+u| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$

Remarque 6.2. Parfois, deux expressions différentes sont égales, **à une constante près.** Par exemple, $\frac{1}{\cos^2 t} = \tan^2 +1$.

Proposition 6.5 (Formule d'intégration par parties)**.** *$g, f : I \to \mathbb{R}$ continûment dérivables. $[a, b] \subset I$. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

On écrit aussi, de manière plus compacte,

$$\int_a^b fdg = fg|_a^b - \int_a^b gdf$$

Remarque 6.3. $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \implies d(f(x)) = f'(x)dx$

6.3.1. *Intégration des fonctions rationnelles.*

Proposition 6.6. *Pour chaque fonction rationnelle, la primitive s'exprime en termes de fonctions élémentaires.*

(1)

$$\int \underset{a\neq 0}{\frac{dx}{ax+b}} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C$$

(2)

$$\int \underset{a\neq 0}{\frac{dx}{(ax+b)^k}} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{(ax+b)^k} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{(ax+b)^k} = \frac{1}{a}\frac{1}{-(ax+b)+1}(ax+b)^{-k+1} + C$$

(3)

$$\int \underset{a\neq b}{\frac{(cx+d)dx}{(x-a)(x-b)}} = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}\right)dx = A\log|x-a| + B\log|x-b| + C;$$

avec coefficients tels que $A(x-a)+B(x-b) = cx+d \implies \begin{cases} -Ab - Ba = d \\ A + B = c \end{cases} \implies A = \frac{ac-d}{a-b}, B = \frac{d-cb}{a-b}$

(4)

$$\int \underset{p^2-4q<0}{\frac{dx}{x^2+px+q}} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{=c^2>0}} \overset{u=x+\frac{p}{2}}{=} \int \frac{du}{u^2+c^2} = \frac{1}{c^2}\int \frac{cd\left(\frac{u}{c}\right)}{\left(\frac{u}{c}\right)^2+1} \overset{t=\frac{u}{c}}{=} \frac{1}{c}\int \frac{dt}{t^2+1}.$$

On a donc

$$\int \underset{p^2-4q<0}{\frac{dx}{x^2+px+q}} = \frac{1}{c}\arctan t + C = \frac{\arctan \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

(5)

$$\int \underset{p^2-4q<0}{\frac{xdx}{x^2+px+q}} = \int \frac{\left(x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\right)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{=c^2>0}} \overset{u=x-\frac{p}{2}}{=} \int \frac{(u+\frac{p}{2})du}{u^2+c^2} = \int \frac{udu}{u^2+c^2} - \frac{p}{2}\int \frac{du}{d^2+c^2}.$$

La deuxième partie de la somme ayant déjà été calculée, on peut se concentrer uniquement sur $\int \frac{udu}{u^2+c^2}$. *On a :*

$$\int \frac{udu}{u^2+c^2} \underset{dt=2udu}{\overset{t=u^2+c^2}{=}} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\log|t| + C = \frac{1}{2}\log|u^2+c^2| + C = \frac{1}{2}\log|x^2+px+q| + C.$$

En conclusion,

$$\int \underset{p^2-4q<0}{\frac{xdx}{x^2+px+q}} = \frac{1}{2}\log|x^2+px+q| + \frac{\arctan \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$$

(6) *Notons premièrement que* $x = \tan t \implies 1+x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}$ *et* $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$. *Ensuite, on a que*

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{\cos^{2n}(t)dt}{\cos^2 t} = \int \cos^{2(n-1)} dt,$$

qui s'exprime en fonction des fonctions d'angles multiples, qui sont, elles faciles à intégrer.

7. Intégrales généralisées

7.1. Intégrales généralisées sur un intervalle borné.

Définition 7.1. Soit $a < b$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée par la limite

$$\int_a^{b-} f(t)dt = \lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$$

si la limite existe. Sinon, l'intégrale généralisée est divergente.

Proposition 7.1 (Critère de comparaison)**.** *Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\exists c \in]a, b[, 0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [c, b[$. Alors si $\int_a^{b-} g(x)dx$ converge (resp $\int_a^{b-} f(x)dx$ diverge), alors $\int_a^{b-} f(x)dx$ converge (resp $\int_a^{b-} g(x)dx$ diverge). C'est bien sûr similaire pour l'intervalle $]a, b]$*

Exercice 7.1 (Intégrale utile pour les comparaisons)**.**

$$\int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \overset{\alpha\neq 1}{=} -\int_{b-a}^{0+} \frac{du}{u^\alpha} = \int_{0+}^{b-a} \frac{du}{u^\alpha} = \frac{1}{-\alpha+1} u^{1-\alpha}\Big|_{0+}^{b-a}.$$

On peut ensuite calculer la divergence par disjonction de cas $\alpha = 1, \alpha < 1, \alpha > 1$: On voit qu'elle diverge si $\alpha \geq 1$ et qu'elle converge vers $\frac{(b-\alpha)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ sinon.

Corollaire 7.1. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue, et supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to b-} (b-x)^\alpha f(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{b-} f(t)dt$ converge $\iff \alpha < 1$.*

Démonstration. Soit $l > 0$. Alors $\exists x \in [a, b[, \forall x \in [c, b[, \frac{1}{2}l \leq (b-x)^\alpha f(x) \leq \frac{3}{2}l$. Alors par le critère de comparaison, on a $\int_a^{b-} f(t)dt$ converge $\iff \alpha < 1$ (car on a les deux). $\square$

Exercice 7.2.

(1) Trouver la convergence de $\int_0^{1-} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$. Indice : $\frac{1}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t+t^2))}}$. Solution : $\lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{1-x^3}} = \lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{(1-t)(1+t+t^2))}} = \lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1+t+t^2))}}$. On voit ici facilement que $\alpha = \frac{1}{2}$ est la seule solution pour que la limite soit finie. Or ici $\alpha < 1$. Conclusion : notre intégrale converge (même si on ne peut pas la calculer explicitement sans définir la fonction hypergéometrique) !

Définition 7.2. Soit $a < b, f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue et $c \in]a, b[$ arbitraire. Alors on définit l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b-} f(t)dt \overset{def}{=} \int_{a+}^{c} f(t)dt + \int_c^{b-} f(t)dt,$$

qui converge quand et seulement quand les deux intégrales convergent.

7.2. Intégrales généralisées sur un intervalle non borné.

Définition 7.3. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_a^{\infty} f(t)dt \overset{def}{=} \lim_{x\to +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

si la limite existe. Si la limite n'existe pas, l'intégrale généralisée diverge. Similairement, on définit pour $-\infty$.

Proposition 7.2 (Critère de comparaison)**.** *Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x > c$ pour $c > a$, alors*

$$\int_a^{\infty} g(x)dx \text{ converge} \implies \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ converge},$$

et

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ diverge} \implies \int_a^{\infty} g(x)dx \text{ diverge}.$$

(à noter que ce critère est juste le critère de comparaison des séries mais déguisé)

Corollaire 7.2. *Soit* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *continue, et* $\beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} f(x)x^\beta = l \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. *Alors* $\int_a^\infty$ *converge* $\iff \beta > 1$.

Définition 7.4. Soit f une fonction continue sur $]a, \infty[$. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{\infty} f(t)dt \overset{def}{=} \int_{a+}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{\infty} f(t)dt, c \in]a, \infty[$$

converge quand et seulement quand les deux intégrales généralisées convergent.

Définition 7.5. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors on définit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)dt, c \in \mathbb{R}$$

qui converge quand et seulement quand les deux intégrales convergent.

Exercice 7.3. On se pose comme problème de prouver la convergence puis determiner la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}.$$

(1) Premièrement, par le critère de comparaison série-intégrale, on voit que $\zeta(2)$ converge et donc notre intégrale aussi.

(2) Deuxièmement,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2 + \sqrt{5}^2} \underset{dx=du}{\overset{u=x+2}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + \sqrt{5}^2} \underset{\frac{du}{\sqrt{5}}=dt}{\overset{t=\frac{u}{\sqrt{5}}}{=}} \frac{1}{\sqrt{5}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan t|_{-\infty}^{+\infty}$$

Enfin, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{5}}}$$

Annexe A. Nombres complexes

[DZ, Annexe B]

Exercice A.1. Dériver, à partir des axiomes de $\mathbb{R}$, [DZ § 1.1.3], que $x^2+1=0$ n'a pas de solution réelle.

On définit $\mathbb{C} = a + ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2$

Proposition A.1. $z = a+ib \neq 0 \implies z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

Exercice A.2.

(1) Démontrer la proposition.
(2) Vérifier la distributivité dans les complexes ($\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$)

...

$$\boxed{\mathbb{C} \text{ est un corps commutatif (et complet, mais on n'en parlera pas vraiment)}}$$

Remarque A.1. $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné.

On remarque aussi que comme $a+ib = r(cos(\phi) + isin\phi$, on peut obtenir l'argument ϕ selon le signe de a et b :

(1) $a > 0 \implies \phi = arctan\frac{b}{a}$
(2) $a < 0 \implies \phi = arctan\frac{b}{a} + \pi$
(3) $a = 0 \implies \begin{cases} \phi = \frac{\pi}{2} & \text{si } b > 0 \\ \phi = \frac{3\pi}{2} & \text{si } b < 0 \end{cases}$

Remarque A.2. L'argument de z n'est défini que pour $z \neq 0$.

Exercice A.3.

(1) calculer la forme :
   (a) polaire de $z_a = 1 - i$ (indice : $arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$)
   (b) cartesienne de $3e^{i\frac{5\pi}{6}}$
(2) Montrer que la mutliplication de deux nombres complexes de même norme correspond à une rotation, et quantifier cette rotation en fonction des arguments de ces deux nombres.

Proposition A.2 (Formule de Moivre)**.** $\forall \rho > 0, \phi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, \rho^n e^{in\phi} = (\rho e^{i\phi})^n$

Démonstration. (par récurrence)

(1) Soit $P(n)$ =la formule de Moivre, la proposition A.0.2 définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
(2) Avec $n = 1$, on a $\rho e^{i\phi} = \rho e^{i\phi}$ qui est bien vraie. Il s'ensuit que $P(1)$ est vraie, et $P(n)$ est bien initialisée sur $\mathbb{N}^*$
(3) Supposons $P(n)$. On a alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\rho^k e^{ik\phi} = (\rho e^{i\phi})^k.$$

On a donc, par $P(k)$,

$$(\rho e^{i\phi})^k \cdot (\rho e^{i\phi}) = \rho^k e^{ik\phi} \cdot \rho e^{i\phi},$$

ce qui implique nécessairement

$$(\rho e^{i\phi})^{k+1} = \rho^k \rho \cdot e^{ik\phi} e^{i\phi},$$

et enfin

$$(\rho e^{i\phi})^{k+1} = \rho^{k+1} e^{i(k+1)\phi}.$$

<u>Conclusion :</u> P est héréditaire sur $\mathbb{N}^*$

<u>Conclusion :</u> Nous avons bien démontré P par récurrence. □

Exercice A.4. (1) Trouver $z^{15} = -6^{15}$, avec $z = 3 + 3\sqrt{3}i$ avec la formule de Moivre.

Proposition A.3 (Racines des nombres complexes)**.** $w = se^{i\phi}, w \in \mathbb{C}^* \implies \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \{s^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, ..., n-1\}$$

Démonstration. Soit $z = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in \mathbb{R}$. Supposons que $z^n = w \implies r^n e^{in\theta = se^{i\phi}}$. Ce qui implique

$$r^n = s > 0 \iff r = s^{\frac{1}{n}}, \text{ et } n\theta = \phi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

On a donc

$$\theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

Or on a que $k = 0 \implies \theta = \frac{\phi}{n}$, et $k = n \implies \theta = \frac{\phi}{n} + 2\pi$. (et ainsi de suite à chaque multiple de n).

$$\implies \text{L'ensemble de tous les thetas est } \left\{\frac{\phi + 2k\pi}{n}, \textit{k variant de 0 à n-1}\right\}.$$

Enfin, on a

$$\{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \{s^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, ..., n-1\}$$

□

Remarque A.3. Il y a exactement n racines de z non nulles.

A.0.1. *Racines carrées.* Si $z^2 = se^{i\phi}, s > 0$, on a :

$$S = \{z = \sqrt{s}e^{i\frac{\phi+2k\pi}{2}}, k = 0, 1\}$$

$$= \{\sqrt{s}e^{i\frac{\phi}{2}}, \sqrt{s}e^{i(\frac{\phi}{2}+\pi)}\}.$$

Or $e^{i\pi} = -1$, donc

$$S = \{\sqrt{s}e^{i\frac{\phi}{2}}, -\sqrt{s}e^{i\frac{\phi}{2}}\}$$

Exercice A.5.

(1) Résoudre $(-1 + i) = z^3, z \in \mathbb{C}$

(2) (QCM type examen) Soit $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$. Alors l'équation $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = z$ possède

  (a) Exactement 2 solutions dans $\mathbb{C}^*$

  (b) Exactement 3 solutions dans $\mathbb{C}^*$

  (c) Une infinité de solutions dans $\mathbb{C}^*$

  (d) Au moins une solution avec $|z| > 1$

  Indice : prendre les formes polaires. Solution : Soit $z \neq 0, z = \rho e^{i\phi} \implies \left(\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = z \implies \rho = e^{3i\phi}\right)$. Comme les normes des deux termes, à gauche et à droite, sont égales (et égales à 1), on a $\rho = 1$, et enfin $e^{3i\phi} = 1 = e^{2k\pi i}, \overset{2.0.3}{\implies} S_\phi = \{\frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2\}$. On a alors $S_z = \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$

A.0.2. *Équations polynomiales dans* $\mathbb{C}$.

Équations quadratiques. Dans $\mathbb{C}$, ce sont les équations de la forme $az^2+bz+c, a,b,c,z \in \mathbb{C}, a \neq 0$. On a encore $z = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Comme on est dans $\mathbb{C}$, il existe toujours une solution.

Théoreme 18 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Tout polynôme* $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, n = \deg(P) \in \mathbb{N}, z_k, a_k \in \mathbb{C}$*, s'écrit sous la forme* $P(z) = a_n \prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$*, où les* z_k *sont des nombres complexes, peut-être avec des répétitions.*

Remarque A.4. Le nombre de répétitions d'une racine donnée s'appelle sa **multiplicité**. On remarque aussi que le TFA n'est pas vrai dans $\mathbb{R}$.

Exercice :

(1) Écrire $P(x) = (x^2+4x+8)(x^2+7)$ en forme factorisée.
(2) Est-ce que le polynôme $z^2+(1-i)z-i$ est divisible par (z-i) ? (Réponse : évaluer le polynôme en i, et la réponse est oui.)

Polynômes à coefficient dans $\mathbb{R}$.

Proposition A.4. *Si* $z \in \mathbb{C}$ *est une racine de* P *à coefficients réels, alors* $\overline{z}$ *l'est aussi.*

Démonstration. On va démontrer que $P(z) = 0 \implies P(\overline{z}) = 0$ si P est à coefficients réels. Admettons $P(z) = 0$. Alors

$$P(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k.$$

Or, comme $a_k \in \mathbb{R}$, on a $\overline{a_k} = a_k$, et

$$P(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{z}^k,$$

ce qui implique

$$P(\overline{z}) = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k};$$

de surcroît, on a

$$P(\overline{z}) = \overline{P(z)}.$$

Il s'ensuit que

$$P(\overline{z}) = 0.$$

Ainsi, si z est une racine d'un polynôme à coefficients réels, $\overline{z}$ aussi. □

Conclusion. Tout polynôme non-constant à coefficients réels peut être factorisé en produit des polynômes à coefficients réels de degré 1 ou 2.

Exercice A.6.

(1) Montrer que x^2+4x+8 peut être écrit comme $(x+2+2i)(x+2-2i)$ sur $\mathbb{C}$
(2) Sous ensembles du plan complexe.
   (a) Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}, r > 0$. Considérons $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ et montrer que cet ensemble est un cercle de rayon r, centré en (x_0, y_0)
   (b) Décrire géométriquement l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, \left(\frac{z}{|z|}\right)^3 = i\}$ (montrer qu'il s'agit de 3 demi-droites).

Annexe B. Séries entières

[DZ, annexe C]

B.1. Rayon de convergence.

Définition B.1 (Série entière)**.** L'expression $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ est dite série entière. On définit le domaine de convergence $D \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} | \text{La série converge}\}$. Quand la série entière converge, on peut définir $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$

Théoreme 19 (Rayon de convergence)**.** *Soit la série entière* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$. *Il existe* $r : 0 \leq r \leq +\infty$,

(1) $\forall x, |x - x_0| < r$, *la série converge absolument*
(2) $\forall x, |x - x_0| > r$, *la série diverge.*

[Preuve DZ]

Remarque B.1. (1) D est un intervalle qui contient toujours le point x_0 (?)
(2) la convergence de la série entière en $x = x_0 \pm r$ doit être analysée séparément.
(3) $r \neq 0, r \in \mathbb{R}_+ \implies D =$ l'intervalle $x_0 \pm r$ ouvert, semi-ouvert de chacun des côtés ou fermé. Si $r = 0, D = \{x_0\}$

Proposition B.1 (Calcul du rayon de convergence)**.** *Soit* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *une série entière de rayon de convergence* r. *Alors*

(1) Supposons $\forall k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0$. *Alors* $\lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = l$ *avec* $0 \leq l \leq +\infty \implies r = \frac{1}{l}$. *Autrement dit,* $r = \lim \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$
(2) Si $\lim |a_k|^{\frac{1}{k}} = l$ *avec* $0 \leq l \leq +\infty$. $\implies r = \frac{1}{l}$ *Autrement dit,* $r = \lim |a_k|^{-\frac{1}{k}}$

Exercice B.1. Trouver le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{n2^k}$. Puis, trouver son domaine D de convergence. Indice et idée de résolution : Avec Cauchy par exemple, on trouve $r = 2$, ce qui nous donne tout de suite que l'intervalle ouvert ± 2 sera compris dans D. Que se passe-t-il aux bornes ? On voit facilement que ça diverge à droite car on a la série harmonique ; similairement à gauche on obtient la série harmonique alternée qui elle **converge** (par le critère de **Leibniz** sur les séries alternées).

B.2. Série de Taylor.

Soit $f : \underset{ouvert}{I} \to \mathbb{R}, f \in C^\infty$, et $x_0 \in I$. Alors on définit la série de Taylor au point x_0 : $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$. En particulier, on définit la série de McLaurin : $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}$.

Exercice B.2. Soit $f(x) = \log x$.

(1) Trouver le rayon et le domaine de convergence de la série de Taylor de f au point x_0.
(2) Trouver l'ensemble $E \subset D, f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ (l'ensemble où la série converge vers $f(x)$).

Rappels : Préliminairement, rappelons $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{polynôme de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{Reste de Taylor}}$, où u est entre x et x_0. On voit donc que la série converge vers f si et seulement si le reste tend vers 0.Tout d'abord notons que $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Ensuite, posons $y = x-1$; on a que la série de MacLaurin de $\log(1+y)$ en $y=0$ (donc la série de Taylor de $\log(x)$ en $x=1$) est donnée par $y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots$. Passons maintenant au corrigé.

Corrigé B.1.

(1) $\lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{k+1}{(-1)^{k+2}} \right| = \lim \frac{k+1}{k} = 1$. On a donc que $r=1$. Que se passe-t-il aux bornes ?

(a) Si $x=0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{k} = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique).

(b) Si $x=2$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(1)^k}{k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, qui converge. En conclusion, $D =]0,2]$

(2) Notons que $\lim |R_n(x)| = \lim \left| \frac{(-1)^{n+2} n!}{u^{n+1}} \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \lim \frac{1}{n+1} \left| \frac{x-1}{u} \right|^{n+1}$, qui est une limite difficile que nous apprendrons à appréhender par la suite.

Remarque B.2. La série de Taylor d'une fonction f peut converger sans converger vers f. Par exemple, $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ est telle que $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \pm \lim_{x \to 0^\pm} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|}$, ce qui est égal à $\pm \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t}}{t^{-\frac{1}{2}}} = \pm \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{e^t} \overset{BL}{=} 0$. Aussi a-t-on $\underset{x\neq 0}{f'(x)} = \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$. D'une manière similaire on trouve $f''(0) = 0, f'''(0) = 0 \cdots$. On peut donc écrire la série de Taylor de f en $x=0$ qui est égale à zéro ! Clairement, elle converge, mais pas vers f.

B.3. **Primitive et dérivée d'une fonction définie par une série entière.**

Définition B.2 (Primitive)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. La fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est primitive de f si $F'(x) = f(x)$ sur $]a,b[$.

Théoreme 20. *Les deux séries entières* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ *et* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$ *ont le même rayon de convergence.*

Théoreme 21. *Si* $r > 0$, *alors* $f(x) \overset{def}{=} \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ *est continue sur* $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Théoreme 22. *Si* $r > 0$, *alors* $F(x) \overset{def}{=} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$ *est une primitive de* f *sur* $]x_0 - r, x_0 + r[$, *telle que* $F(x_0) = 0$. *[DZ Annexe C]*

Corollaire B.1. *Les deux séries entières* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *et* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ *ont le même de convergence (on voit que la première est la primitive de la deuxième). De plus, si* $r > 0$, $f(x) \overset{def}{=} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *est continûment dérivable sur* $]x_0 - r, x_0 + r[$ *et* $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$.

Remarque B.3. Attention : aux bornes, les domaines de convergence des fonctions ne sont pas toujours les mêmes.

Grâce à ce corollaire, on prouve par exemple que $\log x$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur le domaine de convergence des séries associées.