ANALYSE II
NOTES DE COURS
JOSHUA FREEMAN

ADAPTÉ DE A. LACHOWSKA

(1) Les démonstrations à connaître pour l'examen sont en vert.
(2) Pour toute remarque d'erreur, remarque générale ou autre besoin de contact, merci de me joindre à l'adresse joshua.freeman@epfl.ch

Date: 7 février 2023.

Table des matières

1. Équations différentielles ordinaires

1.1. Définitions et exemples.

Définition 1.1. Une équation différentielle ordinaire est une expression $E(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$, où E est une expression fonctionnelle, $n \in \mathbb{N}^*, y = y(x)$ est une fonction inconnue de x.On cherche un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n telle que l'équation donnée est satisfaite $\forall x \in I$.

Exercice 1.1 (Équation à variables séparées.)**.** On cherche à résoudre $y' = -y$. Solution : On note d'abord que $y = 0$ est solution. Ensuite, pour $y \neq 0$, on note que $y' = y \implies \frac{dy}{dx} = -y \implies \frac{dy}{y} = -dx \implies \int \frac{dy}{y} = \int -dx \implies \log|y| = -x + C_1, C_1 \in \mathbb{R}. \implies |y| = e^{-x}e^{C_1} = C_2 e^{-x}, C_2 > 0. \implies y = \pm C_2 e^{-x}$. Comme $y = 0$ est aussi solution, $y = Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ est solution générale de cette équation.

Terminologie. $E(x, y, \cdots, y^{(n)}) = 0$ sera noté par $(*)$ équation différentielle (ED).

Définition 1.2. Un nombre naturel $n \in \mathbb{N}_+$ est l'ordre de l'équation $(*)$ si n est l'ordre maximal de dérivée de $y(x)$ dans l'équation.

Définition 1.3. Si $(*)$ est un polynôme linéaire en $y, y', \cdots y^{(n)}$, alors l'équation est dite linéaire.

Définition 1.4. Si l'expression $(*)$ ne contient pas de x, l'équation $(*)$ est dite autonome.

Définition 1.5. La solution générale d'une équation différentielle est l'ensemble des solutions de cette équation.

Définition 1.6. Résoudre le problème de Cauchy (ED avec des conditions initiales) pour une équation donnée $(*)$, c'est trouver l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$, telle que $(*)$ est satisfaite sur I <u>et</u> que $y(x_0 = b_0, y(x_1) = b_1 \cdots$ pour des conditions initiales données, dépendant du type de l'équation.

Exercice 1.2. Résoudre le problème de Cauchy pour $y'' = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1, y(2) = 4$. Solution : on part de la solution générale $y = C_1 x + C_2$ obtenue en intégrant deux fois, valable pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ensuite on utilise la première condition initiale pour trouver $C_2 = 1, C_1 = \frac{3}{2}.y = \frac{3}{2}x + 1$ est la solution particulière satisfaisant les conditions initiales.

1.2. Équations différentielles à variables séparées (EDVS).

Définition 1.7. $f(y) \cdot y' = g(x)$ est une EDVS où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$, et $g : J \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $J \subset \mathbb{R}$. Explication : on peut alors séparer les variables en notant informellement

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx.$$

Une fonction $y : J' \subset J \to I$ de classe C^1 satisfaisant l'équation $f(y)y' = g(x)$ est solution.

Théoreme 1 (Existence et unicité d'une solution des EDVS)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0 \forall y \in I$. Soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout couple $(x_0 \in J, b_0 \in I)$, l'équation $f(y)y' = g(x)$ admet une solution $y : J' \subset J \to I$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = b_0$. Aussi, si $y_1 : J_1 \to I$ et $y_2 : J_2 \to I$ sont deux solutions satisfaisant la même condition initiale, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in J_1 \cap J_2$.*

Démonstration.

Existence

Soit
$$F(y) = \int_{b_0}^{y} f(t)dt = F(y) - F(b_0).$$
Alors $F(b_0) = 0$ par définition de $F(y)$. Aussi a-t-on que F est dérivable et monotone, car par hypothèse, $F'(y) = f(y) \neq 0$ et est continue sur I. On en déduit que $F(y)$ est bijective sur I comme fonction continue monotone sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Soit
$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$
De la même manière, $G(x_0) = 0$ et G est dérivable sur J.
Soit
$$y(x) = F^{-1}(G(x))$$
définie au voisinage de $x_0 \in J$ (F est inversible sur $I \ni b_0$) Montrons que $y(x)$ est solution de l'équation $f(y)y' = g(x)$, et la condition $y(x_0) = b_0$. On le voit en notant que
$$F(y(x)) = G(x) \implies f(y)y' = g(x),$$
et les conditions initiales peuvent être vérifiées simplement en calculant $y(x_0)$.

$\square$

Définition 1.8 (Solution maximale)**.** Une solution maximale de l'EDVS avec la condition initiale $y(x_0) = b_0$, $x_0 \in J, b_0 \in I$, est une fonction $y(x)$ de classe C^1 satisfaisant l'équation, la condition initiale, et qui est définie sur le plus grand intervalle possible. Le théorème sur les EDVS nous dit que si $f(y) \neq 0$ sur I, alors il existe une unique solution maximale. Toute solution avec la même condition initiale est une restriction de la solution maximale.

1.3. **Équations différentielles linéaires du premier ordre (EDL1).**

Définition 1.9. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Une équation de la forme $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$, où $p, f : I \to \mathbb{R}$ sont continues est une équation différentielle linéaire du premier ordre. Une solution est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaisant l'équation.

1.3.1. *Méthode de résolution d'EDL1.* Considérons $y'(x) + p(x)y(x) = 0$, l'équation homogène associée à l'ELD1 $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$. Alors, par disjonction de cas, soit $y = 0 \forall x \in \mathbb{R}$, soit $\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x)$. Ceci est une EDVS qui a pour solution maximale $y = Ce^{-P(x)}, C \in \mathbb{R}, P$ une primitive de $p(x)$.

1.3.2. *Principe de superposition de solutions.* Soit $I \subset \mathbb{R}, p, f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ continues. Supposons $v_1 : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est une solution de l'équation
$$y' + p(x)y = f_1(x),$$
et $v_2 : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est une solution de l'équation
$$y' + p(x)y = f_2(x).$$
Alors toute combinaison linéaire réelle $v \overset{def}{=} c_1v_1 + c_2v_2$ est une solution de l'équation $y' + p(x)y = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$. On peut vérifier cela en remplaçant v dans l'équation.

1.3.3. *Méthode de résolution par variation de constante.*
On cherche une solution particulière de $y' + p(x)y(x) = f(x); p, f \underset{continues}{:} I \to \mathbb{R}$, ansatz $v(x) = C(x)e^{-P(x)}, P' = p$ sur I. Reste à déterminer $C(x)$. Si v est solution de l'équation, $v' + p(x)v(x) = f(x) \implies \cdots \implies C' =$

$f(x)e^P \implies C = \int f(x)e^{P(x)}dx$. On en déduit une solution particulière de l'équation $y' + p(x)y(x) = f(x)$, à savoir $\boxed{v(x) = \left(\int f(x)e^{P(x)}dx\right) e^{-P(x)},}$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$.

Exercice 1.3.

(1) Vérifier que $v(x)$ l'équation $v'(x) + p(x)v(x) = f(x)$

(2) Trouver une solution particulière de $y' + y = 5x + 1$ avec la méthode de variation de constante.

Proposition 1.1. *Soient $p, f : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Supposons que $v_0 : I \to \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation $y' + p(x)y(x) = f(x)$. Alors la solution générale de cette équation est $v(x) = v_0(x) + Ce^{(P(x)}, \forall C \in \mathbb{R}$, où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I*

Démonstration.

On va montrer que toute solution de cette équation est de la forme $v(x) = v_0(x) + Ce^{(P(x)}$. Soit $v_1(x)$ une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$. On a aussi une solution particulière de la même équation : $v_0(x)$. Alors, d'après le principe de superposition des solutions, la fonction $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x) - f(x) = 0$. Il s'agit de l'équation homogène associée : une EDVS de solution $v(x) = Ce^{-P(x)}, C \in \mathbb{R}$ arbitraire. Ainsi $v_1(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$ pour un C arbitraire. Comme v_1 était solution arbitraire, on obtient que l'ensemble des solutions de l'équation $y' + p(x)y(x) = f(x)$ est $v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}, C \in \mathbb{R}, x \in I$.

□

Exercice 1.4. Résoudre cette équation : $y' = (x + y)^2$. Solution : Soit $z = x + y$. Alors $z' = y' + 1 \implies \frac{z'}{z^2+1} = 1 \implies \int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx \implies \tan^{-1}(z) = x + C, C \in \mathbb{R} \implies z = \tan(x + C), C \in \mathbb{R} \implies y = \tan(x + C) - x, C \in \mathbb{R}$

1.4. Équations différentielles linéaires du second ordre (EDL2).

Définition 1.10. Soit I un intervalle ouvert. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation de la forme :

$$y''(x) + p(x)y(x) + q(x)y(x) = f(x),$$

où $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ sont continues.

Définition 1.11 (homogénéité)**.** Une équation différentielle linéaire du second ordre est une équation linéaire comme précédemment, juste avec $f(x) = 0 \forall x$.

La solution de cette équation doit être de classe $C^2(I, \mathbb{R})$.

1.4.1. *EDL2 homogène à coefficients constants.*

On se pose l'équation suivante :

$$y'' + py' + qy = 0 p, q \in \mathbb{R}$$

$$\iff y'' - (a + b)y' + aby = 0, a, b \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

où a et b sont les racines de l'équation quadratique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Pour résoudre (1), on fait le changement de variable :

$$(\underbrace{y'(x) - ay(x)}_{z(x)})' - b\,\underbrace{(y'(x) - ay(x))}_{z(x)} = 0,$$

$$\iff z' - bz = 0,$$

ce qui est une EDVS. En résolvant (je passe les étapes) on trouve

$$y' - ay = Ce^{bx}, C \in \mathbb{R},$$

ce qui est une EDL1. On trouve, en additionnant partie homogène et partie particulière :

$$y = \begin{cases} A\frac{e^{bx}}{b-a} + Be^{ax}, A, B \in \mathbb{C}. & \Longleftarrow b \neq a \\ e^{ax}(A + Bx), A, B \in \mathbb{C} & \Longleftarrow b = a \end{cases}$$

Si $a \neq b$ sont des racines complexes (pas réelles), alors $a = \overline{b}$. Donc on peut réecrire notre solution comme $C_1e^{ax} + C_2e^{\overline{a}x} = Ce^{ax} + \overline{C}e^{\overline{a}x}$ pour avoir une solution réelle. On a alors $C = \frac{1}{2}(C_3 - iC_4) \implies \overline{C} = \frac{1}{2}(C_3 + iC_4), C_3, C_4 \in \mathbb{R}. \implies y = \cdots = C_3e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_4e^{\alpha x}\sin(\beta x), a = \alpha + i\beta$ est la solution réelle générale de l'équation.

1.4.2. *Résumé : les équations différentielles homogènes linéaires du deuxième degré (EDL2) à coefficients constants.* Soit

$$y'' + py' + qy = 0 p, q \in \mathbb{R}.$$

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ les racines de l'équation $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Alors la solution générale de cette équation est :

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} C_1e^{ax} + C_2e^{bx}, & \Longleftarrow a \neq b, a, b \in \mathbb{R} \\ C_1e^{ax} + C_2xe^{bx}, & \Longleftarrow a = b, \\ C_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2e^{\alpha x}\sin(\beta x) & \Longleftarrow a = \alpha + i\beta = \overline{b} \notin \mathbb{R} \end{cases}.}$$

Par exemple, pour l'équation $y'' + 2y' + y = 0$, où $a = b = -1$, on a la solution générale donnée par $y = e^{-x}(A + Bx), A, B \in \mathbb{R}$

Les coefficients ne sont pas toujours constants. Considérons désormais l'équation

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, p, q : I \to \mathbb{R}, continues \tag{2}$$

Observations :

(1) La solution aura aussi deux constantes arbitraires
(2) Si $y_1(x)y_2(x)$ sont deux solutions de cette EDL2 homogène, alors $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x), A, B \in \mathbb{R}$ est également solution (c'est une conséquence du fait que l'équation soit linéaire).

Théoreme 2. *Une EDL2 homogène admet une* ***unique solution*** $y(x) : I \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *telle que* $y(x_0) = t$ *et* $y'(x_0) = s$, *pour* $x_0 \in I, (s, t) \in \mathbb{R}^2$

Pas de démonstration :"(

Définition 1.12. Deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes s'il n'existe pas de constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $y_2 = cy_1$, ou $y_1 = cy_2$.

Cette définition permet d'interpréter un peu mieux le théorème 2 : Une EDL2 homogène admet exactement deux solutions linéairement indépendantes.

Supposons que $v_1(x)$ est solution de l'équation (2). Supposons également qu'elle ne s'annule jamais. Comment trouver une autre solution de (2) à partir de v_1, linéairement indépendante de cette dernière ? Ansatz : $v_2(x) = c(x)v_1(x)$, telle que $c(x)$ n'est pas constante (sinon ce serait linéairement dépendant). Alors : $\frac{c''}{c'} = -p(x) - 2\frac{v_1'}{v_1}$, ce qui est une EDVS en considérant c' comme variable. Ceci revient, après intégration, à

$$\log|c'(x)| = -P(x) - 2\log|v_1| + \log C = \log\frac{Ce^{-P(x)}}{v_1^2(x)}, C \in \mathbb{R}_+^*.$$

On obtient donc

$$c'(x) = C_1\frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}, C_1 \in \mathbb{R}^*.$$

Enfin,

$$c(x) = \int C_1\frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}dx + C_2, C_1 \in \mathbb{R}^*, C_2 \in \mathbb{R}$$

tel que $v_2(x) = c(x)v_1(x)$ est solution, ce qui nous donne, en choisissant $C_1 = 1, C_2 = 0$, une solution :

$$\boxed{v_2(x) = c(x)v_1(x) = v_1(x)\int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}dx}$$

Attention, ceci bien sûr ne marche que pour $v_1 \neq 0 \forall x \in I$ (I le plus grand intervalle où ça marche, après si on constate qu'on peut coller les solutions pour que $I = \mathbb{R}$ on peut)

1.4.3. *Caractérisation de deux solutions d'une EDL2 linéairement indépendantes.*

Définition 1.13 (Caractérisation)**.** Une caractérisation est une proposition équivalente à une définition.

Définition 1.14. Si v_1, v_2 sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, alors la fonction $W[v_1, v_2] : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$W[v_1, v_2] = det\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix},$$

cette combinaison linéaire s'appelle le Wronskien de v_1 et v_2.

Par exemple, dans le cas de l'équation $y'' + 2y' + y = 0$, dont on sait déjà que la solution est $y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}, W[e^{-x}, xe^{-x}] = e^{-2x}$.

Remarque 1.1. Le Wronskien de d'une équation ne dépend pas des solutions qu'on utilise pour le produire, du moment qu'elles sont linéairement indépendantes ce sera le même.

Proposition 1.2. *Soit $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Alors* $\underbrace{v_1(x), v_2(x) \textit{sont linéairement indépendantes}}_{P}$ <u>*si et seulement si*</u> $\underbrace{W[v_1, v_2] \textit{ne s'annule pas dans } I.}_{Q}$

$Q \implies P$ puis $P \implies Q$

1) par contraposée. Admettons que v_1 et v_2 soient linéairement dépendantes. On aurait alors $\exists c \in \mathbb{R}, v_1 = cv_2$ (sans perte de généralité). Alors $W[v_1, v_2] = det\begin{pmatrix} cv_2(x) & v_2(x) \\ cv_2'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = 0$. On a bien $\neg P \implies \neg Q$. On a bien $Q \implies P$. $\square$

2) par contraposée. Admettons que le Wronskien s'annule sur I. Donc $\exists x_0 \in I, v_1v_2' - v_1'v_2 = 0 \implies$ le noyau de $A \overset{def}{=} \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix}$ est non trivial $\implies \exists u \neq 0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, Au = 0$. Or $v(x) = av_1 + bv_2$ est une solution de l'équation $y'' + py' + qy = 0$, comme combinaison linéaire de deux solutions. On a donc que $v(x_0) = v'(x_0) = 0$. Par le théorème (2) d'existence et d'unicité d'une solution d'une EDL2 homogène, cette équation admet une seule solution satisfaisant les conditions données $(v(x_0) = v'(x_0) = 0.)$ D'autre part, puisque la solution triviale satisfait les conditions données, alors on a que $v(x) = 0$. Ainsi, $v_1 = -\frac{b}{a}v_2$ (si $b \neq 0$, sinon on voit par disjonction des trois cas possibles on voit que ça ne change rien) et v_1, v_2 sont linéairement dépendantes. On a bien $\neg Q \implies \neg P$. On a bien $P \implies Q$. $\square$

Théoreme 3. *Soient $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $y''+py'+qy = 0$. Alors la solution générale de cette équation est de la forme*

$$v(x) = C_1v_1(x) + C_2v_2(x), C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soit $\tilde{v}(x)$ une solution de l'équation donnée. Fixons un $x_0 \in I$. On nomme $\tilde{v}(x_0) = a_0 \in \mathbb{R}$, et $\tilde{v}'(x_0) = b_0$. Soient $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes. Alors par la caractérisation (Proposition 1.2) on sait que $W[v_1, v_2] \neq 0$ sur I, et en particulier $W[v_1, v_2](x_0) \neq 0$. Donc $A = \begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix}$ est bijective, et il existe un unique vecteur $u = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ tel que $Au = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$. Considérons la fonction $v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$. Alors

(1) v est une solution de l'équation donnée.

(2) $v(x_0) = a_0, v'(x_0) = b_0$ (ceci nous est donné par l'équation $Au = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$).

par le théorème 2 sur l'unicité d'une solution avec des conditions données, cette solution est unique. Ainsi, $\tilde{v} = v$. Ainsi $\tilde{v}$ est une combinaison linéaire de deux solutions linéairement indépendantes. □

1.4.4. *Équation complète.* Considérons l'équation complète (1) : $y'' + py' + qy = f(x)$

Proposition 1.3. *Si $v(x)$ est une solution de (1) et $u(x)$ est une solution de l'équation homogène associée : $y'' + py' + qy = f(x)$, alors $v + u$ est une solution de (1).*

1.4.5. *Variation de constante.* On cherche une solution particulière de (1) supposant qu'on connaît deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$. Ansatz, on se donne la forme de la solution : $v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$, où $c_1, c_2 \in C^1$ inconnues sur I.
$v_0'(x) = c_1'v_1 + v_1'c_1 + c_1v_1' + c_2v_2'$. C'est une longue expression ! Dans l'esprit du raisonnement par analyse-synthèse qu'est l'ansatz, on suppose que $c_1'v_1 + v_1'c_1 = 0$. On a donc $v_0' = c_1v_1' + c_2v_2' \implies v_0'' = c_1v_1'' + c_1'v_1 + c_2'v_2' + c_2v_2''$. Si on réinjecte cette information dans l'équation (1), on a :

$$c_1'v_1' + c_2'v_2' + c_1v_1'' + c_2v_2'' + pc_1v_1' + pc_2v_2' + qc_1v_1 + qc_2v_2 = f.$$

Or, comme $c_1(v_1'' + pv_1' + qv_1) = 0$, et $c_2(v_2'' + pv_2' + qv_2) = 0$, on a

$$c_1'v_1' + c_2'v_2' = f.$$

On se retrouve enfin avec deux conditions sur c_1, c_2, grâce à celle supposée au début dans l'état d'esprit de l'ansatz : $\begin{cases} c_1'v_1 + c_2'v_2 = 0 \\ c_1'v_1' + c_2'v_2' = f(x) \end{cases} \iff A\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$. Or A est inversible comme son déterminant (le Wronskien de v_1 et v_2) est non nul. On a donc $\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$. Comme $A^{-1} = \frac{1}{v_1v_2' - v_2v_1'}\begin{pmatrix} v_2' & -v_2 \\ -v_1' & v_1 \end{pmatrix}$, On a :$\begin{cases} c_1' = \frac{-v_2 f}{v_1v_2' - v_2v_1'} \\ c_2' = \frac{v_1 f}{v_1v_2' - v_2v_1'} \end{cases}, \implies \begin{cases} c_1 = \int \frac{-v_2 f}{W[v_1,v_2]}dx \\ c_2 = \int \frac{v_1 f}{W[v_1,v_2]}dx \end{cases}$ (par simplification on prendra que les constantes d'intégration sont nulles). On en déduit une solution particulière de l'équation (1) : $v_0(x) = v_1 \int \frac{-v_2 f}{W[v_1,v_2]}dx + v_2 \int \frac{v_1 f}{W[v_1,v_2]}dx$. Enfin, par le principe de superposition des solutions, une solution sera de la forme :

$$\boxed{v(x) = C_1v_1 + C_2v_2 + v_1 \int \frac{-v_2 f}{W[v_1, v_2]}dx + v_2 \int \frac{v_1 f}{W[v_1, v_2]}dx, C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Exercice 1.5. Trouver la solution générale de l'équation $y'' - \frac{1}{x(\log(x)-1)}y' + \frac{1}{x^2(\log(x)-1)}y = \log(x) - 1$.
Solution : Déjà on remarque que les fonctions p, q, f sont dérivables et continues de $I \to \mathbb{R}$ à condition que $I =]e, +\infty[$.

(1) Pour commencer, il faut deviner une solution non nulle de l'équation homogène associée. En fait on peut facilement deviner $v_1(x) = x$ et voir qu'il s'agit d'une solution de l'équation homogène associée.

(2) Ensuite trouvons une autre solution de l'équation homogène associée, linéairement indépendante de la première. Pour ceci il faut d'abord déterminer $P(x) = \int -\frac{1}{x(\log(x)-1)}dx = \int \frac{-d(\log(x)-1)}{\log(x)-1}$. On a donc $P(x) = -\log(\log(x)-1)$. Ceci nous amène, grâce à la variation de constante encadrée en rouge en début de page 5, à conclure que
$$v_2 = x\int \frac{e^{\log(\log(x)-1)}}{x^2}dx = x\int \frac{\log(x)-1}{x^2}dx = x\int \frac{\log(x)}{x^2}dx - x\int \frac{1}{x^2}dx = -\log(x)$$

(3) On peut écrire une solution générale pour cette équation :
$$v(x) = C_1x + C_2\log(x) + x\int \frac{\log(x)f}{W[x,-\log(x)]}dx - \log(x)\int \frac{xf}{W[x,-\log(x)]}dx,$$
ce qui implique, en prenant en compte le fait que $W[x, -\log(x) = \log(x) - 1 = f$,
$$v(x) = C_1x + C_2\log(x) + x\int \log(x)dx - \log(x)\int xdx = C_1x + C_2\log(x) + x^2 + \log(x)\frac{x^2}{2},$$
en prenant pour simplifier des constantes d'intégration nulles (la deuxième partie de la somme s'agit d'une solution particulière).

1.4.6. *Méthode des coefficients indéterminés.* pour $y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x), p, q \in \mathbb{R}$.
En principe on peut trouver une solution de manières qu'on connaît déjà, mais dans certains cas il est possible de trouver une solution particulière plus vite par la méthode des coefficients indéterminés. Soit $y'' + py' + qy = f(x), p, q \in \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}$ continue.

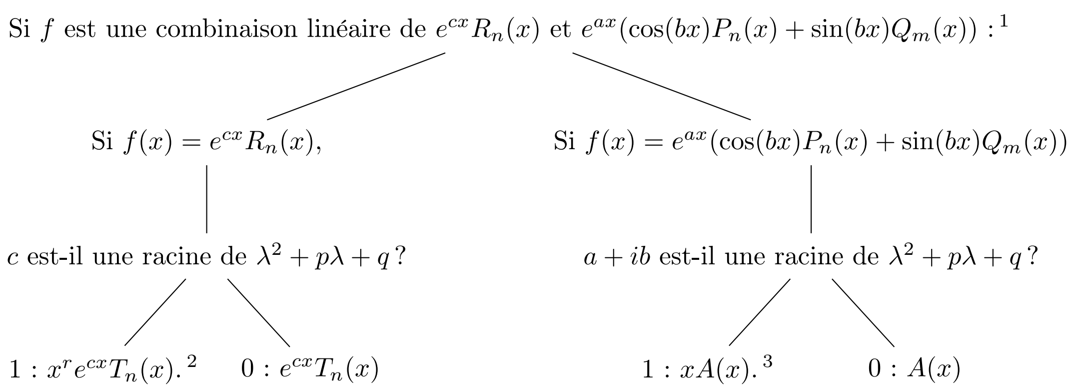


Figure 1. Ansatzs de solutions particulières à coefficients indéterminés

Remarque 1.2. Dans le cas où les deux premières branches sont vérifiées, il faut diviser f en deux parties, utiliser l'arbre, puis utiliser le principe de superposition de solutions.

Remarque 1.3. Cet arbre donne des solutions particulières. Avec les formules en page 4 qui donnent des solutions générales de l'équation homogène associée, le compte est bon.

1. tels que R_n, P_n, Q_m sont des polynômes de degrés n, m, et $c, a, b \in \mathbb{R}$
2. r est la multiplicité de la racine $\lambda = c$,T_n est un polynôme inconnu de degré n.
3. $A(x) = e^{ax}(T_N(x)\cos(bx) + S_N(x)\sin(bx))$, où $N = \max(n, m), T_N$ et S_N sont des polynômes inconnus de degré N.

2. Espace $\mathbb{R}^n$

2.1. Définitions.

Définition 2.1. $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble de tous les n-tuples ordonnés de nombres réels $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$. $\mathbb{R}^n$ est muni de deux opérations : l'addition de vecteurs $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, \cdots x_n + y_n)$. On définit également la multiplication par un scalaire $\lambda\overline{x} = (\lambda x_1, \cdots \lambda x_n)$. Ces opérations satisfont la présence d'élément neutre multiplicatif, additif, l'associativité de la multiplication ainsi que de l'addition, et la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Définition 2.2. On introduit également le produit scalaire $\langle\overline{x}|\overline{y}\rangle$, et la norme $\sqrt{\langle\overline{x}|\overline{x}\rangle}$. Cette dernière fait de $\mathbb{R}^n$ un ensemble normé (en l'occurrence, un espace vectoriel normé).

Proposition 2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** $||\langle\overline{x}|\overline{y}\rangle|| \leq ||\overline{x}|| \cdot ||\overline{y}||$

Existence

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitraire. Alors

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i\lambda + y_i)^2,$$

et on a

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(2\lambda x_i) + \sum_{i=1}^{n}(y_i)^2.$$

Avec $a = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2, b = 2\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i), c = \sum_{i=1}^{n}(y_i)^2$, on a

$$a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0.$$

Donc notre équation a au plus une racine réelle, et

$$b^2 - 4ac \leq 0,$$

ce qui donne

$$4\left(\left(\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)^2\right) \leq 0,$$

ce qui implique

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)\right)^2,$$

et on a enfin

$$||\overline{y}||^2||\overline{x}||^2 \geq \langle\overline{x}|\overline{y}\rangle^2, \implies \boxed{||\overline{y}|| \cdot ||\overline{x}|| \geq |\langle\overline{x}|\overline{y}\rangle|}$$

□

Proposition 2.2 (Inégalité triangulaire)**.** *On a que*

$$||\overline{x} + \overline{y}|| \leq ||\overline{x}|| + ||\overline{y}||.$$

Démonstration. $||\overline{x} + \overline{y}||^2 = \langle\overline{x}|\overline{x}\rangle + 2\langle\overline{x}|\overline{y}\rangle + \langle\overline{y}|\overline{y}\rangle$, alors que

$$(||\overline{x}|| + ||\overline{y}||)^2 = \langle\overline{x}|\overline{x}\rangle + 2||\overline{x}|| \cdot ||\overline{y}|| + \langle\overline{y}|\overline{y}\rangle.$$

Par Cauchy-Schwarz, on a bien $||\overline{x} + \overline{y}|| \leq ||\overline{x}|| + ||\overline{y}||$ □

Proposition 2.3 (Inégalité triangulaire inverse)**.** *On a que*

$$||\overline{x} - \overline{y}|| \geq \big|||\overline{x}|| - ||\overline{y}||\big|$$

Définition 2.3 (distance)**.** On définit la distance entre $\overline{x}$ et $\overline{y}$ comme étant $d(x,y) = ||\overline{x} - \overline{y}||$. On note la commutativité de cette dernière, et le fait que $d(\overline{x},\overline{y}) \leq d(\overline{x},\overline{z}) + d(\overline{z},\overline{y})$

2.2. **Topologie dans $\mathbb{R}^n$.**

Définition 2.4. $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$, soit $B(\overline{x},\delta) = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n : ||\overline{x} - \overline{y}|| < \delta\}$. Alors $B(\overline{x},\delta) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé la boule ouverte de centre $\overline{x}$ et rayon δ.

Définition 2.5. $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert quand

(1) $E = \emptyset$
(2) $E \neq \emptyset$ et $\forall \overline{x} \in E, \exists \delta > 0, B(\overline{x},\delta) \subset E$.

Définition 2.6. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. Alors $\overline{x} \in E$ est un point intérieur de E s'il existe $\delta > 0, B(\overline{x},\delta) \subset E$. L'ensemble des points de E est appelé l'intérieur de E. Notation : $\overset{\circ}{E}$.

On voit que $\overset{\circ}{E} \subset E$. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. Alors $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{E} = E$

Exercice 2.1.

(1) Montrer que la boule ouverte $B(\overline{x},\delta) = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n : ||\overline{x} - \overline{y}|| < \delta\}$ est un sous-ensemble ouvert. Réponse : $, \forall \overline{y} \in E, B(\overline{y}, \delta - d(\overline{x},\overline{y})) \subset E$.
(2) Montrer que $E = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \forall 1 \leq i \leq n\}$ est ouvert. Réponse : avec $\delta = \min(x_i)$, on a bien que la boule de centre $\overline{x}$ et de rayon δ est contenue dans E.
(3) Soit $n \geq 2, E = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_i > 0, 2 \leq i \leq n\}$ Montrer que ceci n'est pas un ensemble ouvert. Idée de la réponse : on peut prendre n'importe quel vecteur de cet ensemble et voir que toute boule centrée dessus ne sera pas comprise dans E (il y a des points négatifs dans les boules de rayon non nul si on force une coordonnée à être nulle).

Proposition 2.4 (Quelques propriétés des ensembles ouverts)**.**

(1) l'union de deux sous-ensembles ouverts est ouvert.
(2) toute intersection finie de sous-ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

Remarque 2.1. Pour une intersection infinie, cette propriété est fausse en général.

Définition 2.7. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble. Alors E est fermé dans $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire $CE = \mathbb{R}^n \setminus E$ est ouvert.

Exercice 2.2.

(1) Montrer que le complémentaire d'une boule ouverte est fermé. Réponse : c'est trivial par définition.
(2) Montrer que $E = \{\overline{x}\} \subset \mathbb{R}^n$ est fermé. Réponse : on prend le complémentaire de E, c'est à dire $\mathbb{R}^n - \overline{x}$. Pour tout élément de ce complémentaire on peut trouver un rayon (notamment la distance entre ce point et $\overline{x}$) tel que la boule ouverte centrée en cet élément du complémentaire soit incluse dans ce dernier. Ainsi, CE est ouvert, et E est fermé.
(3) Montrer que $E = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ est fermé. Réponse : on a juste à prendre la distance entre un élément donné de CE et l'espace vectoriel $x_1 = 0$ pour trouver une boule ouverte comprise dans ce dernier. Ainsi voit-on que CE est ouvert, et donc E est fermé.
(4) Montrer que $E = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_i > 0, 2 \leq i \leq n\}$n'est ni ouvert ni fermé. Premièrement on a déjà montré qu'il n'était pas ouvert. Toutefois est-il fermé ? Prenons pour cela son complémentaire, $CE = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0 \implies \exists i, 2 \leq i \leq n, x_i \leq 0.\}$ Remarquons que le point trivial $\overline{x}, x_i = 0$ est dans CE. Or, sur ce point, toute boule ouverte aura des points intérieurs $\overline{y}$ tels que $y_1 = 0$ et tout le reste est strictement positif, i.e. CE n'est pas ouvert. Ceci montre que E n'est ni ouvert, ni fermé.

Remarque 2.2. Les deux seuls ensembles ouverts et fermés à la fois sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.5 (Propriétés des sous-ensembles fermés)**.**

(1) Toute intersection de sous-ensembles fermés est un sous-ensemble fermé.

(2) L'union fini de sous-ensembles fermés est fermé.

Définition 2.8 (Adhérence)**.** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. Alors l'intersection de tous les sous-ensembles fermés contenant E est appelée l'adhérence de E. Notation : $\overline{E}$.

Remarque 2.3. Si un sous-ensemble est fermé, $E = \overline{E}$. Il sera l'élément commun à tous les ensembles fermés qui le contiennent.

Définition 2.9 (Frontière)**.** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide et non égal à $\mathbb{R}^n$. Alors $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point de frontière de E si toute boule ouverte de centre $\overline{x}$ contient au moins un point de E et au moins un point de CE. L'ensemble des points frontière forme la frontière de E. Notation ∂E

Exercice 2.3.

(1) Soit $E = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$. On peut voir que E est ouvert car on a juste a prendre le minimum des coordonnées pour rayon. Mais quelle est l'adhérence ? On peut voir instinctivement que $\overline{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$. On voit donc facilement que la frontière de $\partial E = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \exists i, x_i = 0, x_j \geq 0 \forall j \neq i\}$.

Proposition 2.6 (Propriétés de la frontière)**.**

(1) $\partial E \cap \overset{\circ}{E} = \emptyset$

(2) $\overset{\circ}{E} \cup \partial E = \overline{E}$

(3) $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$.

(4) $\partial \emptyset = \partial \mathbb{R}^n = \emptyset$ *(définition).*

Pourquoi faut-il distinguer les sous-ensembles ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$? Car il y a un fort lien entre la topologie de $\mathbb{R}^n$ et les propriétés des limites de suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ (et ceci est indispensable pour comprendre l'analyse de cet espace).

Définition 2.10 (Suite)**.** Une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n, f(k) = \overline{x}_k$.

Définition 2.11 (limite de suite)**.** Une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est convergente et admet pour limite $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, si, $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, d(\overline{x}_k, \overline{x}) \leq \varepsilon$. Autrement dit, $\overline{x}_k$ appartient à l'adhérence de la boule ouverte de centre $\overline{x}$ et de rayon ε.

Remarque 2.4. $\lim \overline{x}_k = \overline{x} \iff$ chacune des composantes de $\overline{x}_k$ converge vers la composante correspondantes en $\overline{x}$.

Démonstration. $\forall k \geq k_0$, on a que $||\overline{x}_k - \overline{x}|| \leq \varepsilon$. Ceci implique que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} (x_{j,k} - x_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon.$$

Comme somme d'éléments positifs, on voit que les distances entre les composantes sont, elles aussi, plus petites que des ε_j. Et cela pour n'importe quel petit ε_j □

Proposition 2.7 (Propriétés)**.**

(1) La limite d'une suite $\overline{x}_k$*, si elle existe, est unique.*

(2) Toute suite convergente $\{\overline{x}_k\}$ *est bornée (c'est-à-dire qu'elle est continue dans une boule fermée centrée en l'origine)*

Démonstration. Soit $\lim \overline{x}_k = \overline{x}$. Alors $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0, ||\overline{x}_k - \overline{x}|| \leq \varepsilon$. Donc il existe un nombre fini de points à l'extérieur de cette boule dans laquelle tous les points sont à partir de k_0. On donc trouver une borne en prenant $M =$ le point le plus éloigné de l'origine, ou le point sur la frontière de la boule le plus éloigné de l'origine (c'est pas très clair tout ça...). □

Théoreme 4 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *De toute suite bornée de $\mathbb{R}^n$ on peut extraire une sous-suite convergente (Pas de démonstration, mais on utilise le théorème déjà démontré dans $\mathbb{R}$).*

Quel est le lien entre les suites convergentes dans $\mathbb{R}^n$ et la topologie de ce dernier ?

Théoreme 5. $\underbrace{\textit{Un sous-ensemble non-vide } E \textit{ de } \mathbb{R}^n \textit{ est fermé}}_{P}$ *si et seulement si* $\underbrace{\textit{toute suite } \{\overline{x}_k\} \textit{ d'éléments de ce sous-ensemble qui converge a pour limite un élément de } E.}_{Q}$

$P \implies Q$ puis $Q \implies P$

$P \implies Q$ *par l'absurde.* Supposons qu'il existe une suite $\{\overline{x}_k\}$ d'éléments de E (fermé) convergeant vers un élément $\overline{y}$ extérieur à E. Alors, comme CE est ouvert, il existe une boule ouverte de rayon $\delta > 0$ et centrée sur $\overline{y}$ telle que $B(\overline{y}, \delta) \subset CE$. Or, $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, d(\overline{x}_k, \overline{y}) \leq \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, on a une boule fermée de rayon ε et de centre $\overline{y}$ qui contient une infinité de x_k, boule fermée contenue dans une boule ouverte contenue dans CE. Les $\overline{x}_k$ à l'intérieur de cette boule ne sont donc pas dans E : une contradiction. □

$Q \implies P$ *par contraposée.* Soit E un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$ **non fermé** (faute à ne pas faire : dire qu'il est ouvert). Alors CE n'est pas ouvert. Ceci amène l'existence d'un point $\overline{y}$ dans CE autour duquel aucune boule ouverte n'est entièrement dans CE, i.e. $\exists \overline{y} \in CE, \forall \delta > 0, \exists \overline{x} \in E, \overline{x} \in B(\overline{y}, \delta)$. En particulier pour $\delta \in \mathbb{N}$, et comme dans ce cas $\delta > \frac{1}{\delta}$, on a $\exists \overline{y} \in CE, \forall k \in \mathbb{N}, \exists \overline{x}_k \in E, \overline{x}_k \in B(\overline{y}, \frac{1}{k})$. Or la limite de $\{x_k\}$ que nous venons de construire, converge vers $\overline{y}$. Ainsi $Q \implies P$. □

Remarque 2.5. Pour construire l'adhérence $\overline{E}$ d'un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$, il faut et il suffit d'ajouter les limites de toutes suite convergentes d'éléments de E.

Définition 2.12. Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact s'il est fermé et borné.

Exercice 2.4.

(1) Montrer que la boule fermée $\overline{B(\overline{x}, \delta)}$ est compacte. Réponse : bien sûr elle est fermée, et elle est bornée car elle est continue dans une boule fermée centrée sur l'origine, notamment $\overline{B(\overline{0}, ||\overline{x}|| + \delta)}$

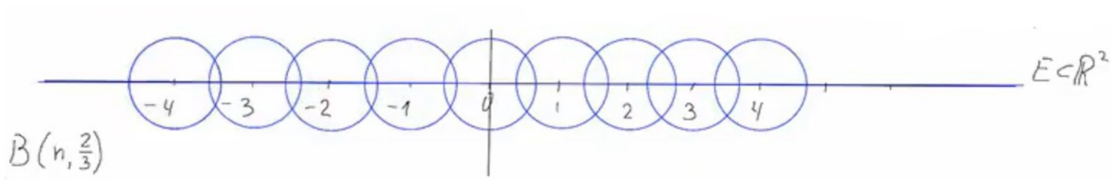
(2) Montrer que $E = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : n \geq 2, x_1 = 0\}$ n'est pas compact. Réponse : on voit facilement que cet ensemble est fermé. Mais, soit une boule fermée centrée en l'origine, de rayon $M > 0$, $\overline{B(\overline{0}, M)}$. Alors il existe un élément de E, particulièrement $\overline{x}_M = (0, M+1, M+1 \cdots, M+1)$ qui n'est pas dans la boule fermée. Ainsi aucune boule fermée centrée en l'origine ne contient E, et E n'est pas borné. Il s'ensuit que E n'est pas compact sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.13 (Recouvrement)**.** Un recouvrement de E est une réunion de sous-ensemble ouverts tels que E est un sous-ensemble de cet union.

Théoreme 6 (Heine-Borel-Lebesgue)**.** *Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact $\iff$ de tout recouvrement de E par des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ on peut extraire une famille finie d'ensembles qui recouvrent E. Autrement dit, de tout recouvrement on peut extraire un recouvrement fini.*

Exercice 2.5 (Intuition pour Heine-Borel-Lebesgue)**.**

(1) Une droite E de $\mathbb{R}^n$ est fermée mais pas bornée $\implies$ pas compacte. Montrer qu'on ne peut pas extraire un recouvrement fini du recouvrement suivant : $E \subset \underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup} B(n, \frac{2}{3})$. Réponse intuitive : le recouvrement est illustré ici :



Dessiné par A. LACHOWSKA

On voit bien qu'on ne peut pas se séparer même d'un seul des éléments du recouvrement de base, et donc qu'on ne peut pas former de recouvrement fini.

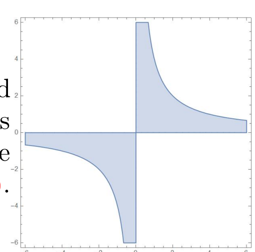
Exercice 2.6 (Exercice type-Examen)**.** Quelques exemples sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$: ouvert, fermé, ni ouvert ni fermé ?

(1) Soit $A \subset \mathbb{R}^2, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 > \sin(x + y) \geq -2\}$
   (a) A est ouvert.
   (b) A est fermé.
   (c) A n'est ni ouvert, ni fermé.
   (d) A est ouvert et fermé.
   (e) aucune des réponses ci-dessus.
(2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{xy} < 2\}$
   (a) B est ouvert.
   (b) B est fermé.
   (c) B n'est ni ouvert, ni fermé.
   (d) B est ouvert et fermé.
   (e) aucune des réponses ci-dessus.

Réponses :

(1) On remarque $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \neq \sin(x + y)\} \implies A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \equiv -y \mod \pi\}$. Maintenant soit $\overline{x}$ un point dans A. Soit δ la distance entre ce point et le point $\overline{y}$ le plus proche tel que $y_1 + y_2$ est un multiple de π. Alors la boule ouverte $B(\overline{x}, \delta)$ est comprise dans A. On a donc réponse (a) : A est ouvert.

(2) Comme y, x sont positifs on peut voir que $y < \frac{4}{x}$ quand $x > 0$ et $y > \frac{4}{x}$ quand $x > 0$. Essentiellement, on a donc une courbe hyperbolique remplie sans les bords (bien sûr dans le cas ou $x = 0$, y est arbitraire donc la droite verticale fait partie de cet ensemble. On voit facilement que B n'est ni ouvert ni fermé : réponse (c).



3. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles : limites et continuité

3.1. Définitions et exemples.

Définition 3.1. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non-vide. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est une application qui envoie chaque point de E vers un unique élément de $\mathbb{R}$. E est le domaine définition de f et $f(E) \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble image.

Exercice 3.1. Que décrit l'équation $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$? Réponse : attention ce n'est pas une boule. Effectivement, on a bien que $||z|| \leq 1$ pour tous les points de cette fonction, mais on a aussi que la fonction racine carrée est toujours positive. Ainsi c'est d'une **hémi**sphère qu'il s'agit.

Définition 3.2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$, et $c \in f(E)$. Alors $\mathcal{N}_f(c) = \{\overline{x} \in E : f(\overline{x}) = c\} \subset E$ est appelé l'ensemble du niveau de f pour $c \in \mathbb{R}$.

3.2. Limites et continuité.

Définition 3.3 (Limite)**.** Soit f ne fonction définie au voisinage de $\overline{x}_0$ (mais par forcément en $\overline{x}_0$. (autrement dit $\exists \delta > 0 E(\overline{x}_0, \delta) \subset E \cup \{\overline{x}_0\}$). On dit que cette fonction admet comme limite le nombre réel l lorsque $\overline{x}$ tend vers $\overline{x}_0$ si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $\overline{x} \in E$ et $0 < ||\overline{x} - \overline{x}_0|| \leq \delta$ on a $|f(\overline{x}) - l| \leq \varepsilon$. On note

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = l.$$

Définition 3.4. Soit $\overline{x}_0 \in E$ un point intérieur de E. Alors $f : E \to \mathbb{R}$ est continue en $\overline{x} = \overline{x_0}$ si et seulement si la limite en x_0 de f est égale à $f(\overline{x}_0)$.

Théoreme 7 (Caractérisation de la limite à partir des suites convergentes)**.** *Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage du point $\overline{x}_0$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $\overline{x} \to \overline{x}_0 \iff$ pour toute suite d'éléments $\{\overline{a}_k\}$ de $\{\overline{x} \in E : \overline{x} \neq \overline{x}_0\}$ qui converge vers $\overline{x}_0$, la suite $\{f(\overline{a}_k\}$ converge vers l.*

$$\underbrace{\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = l}_{P} \iff \underbrace{\forall \{\overline{a}_k\} \subset E \setminus \{\overline{x}_0\} \lim_{k \to \infty} \overline{a}_k = \overline{x}_0 \implies \lim_{k \to \infty} f(\overline{a}_k) = l}_{Q}$$

$P \implies Q$. Supposons P. Alors on a que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, ||\overline{x} - \overline{x}_0|| \leq \delta \implies |f(\overline{x}) - l| \leq \varepsilon$. Soit une suite $\{\overline{a}_k\} \subset E \setminus \{\overline{x}_0\} : \lim_{k \to \infty} \overline{a}_k = \overline{x}_0$. Alors on a que $\forall \delta > 0, \exists k_0, \forall k \geq k_0, ||\overline{a}_k - \overline{x}_0|| \leq \delta$ ce qui implique, selon notre présupposition, que dans ce voisinage $|f(\overline{a}_k) - l| \leq \varepsilon$. □

$Q \implies P$ *par contraposée.* Supposons que la limite de f n'est pas l. Alors $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists \overline{x}_\delta |f(\overline{x}_\delta) - l| > \varepsilon \wedge ||\overline{x}_\delta - \overline{x}_0|| \leq \delta$. Soit $\delta = \frac{1}{k} > 0$. Alors on a une suite convergente vers $\overline{x}_0$ telle que toutes les normes $|f(\overline{x}_k - l|$ sont plus grandes qu'un ε donné qui existe. Cela veut dire qu'elles ne peuvent pas être plus petites qu'un epsilon arbitraire : on a donc bien une suite qui converge vers $\overline{x}_0$ mais dont la limite de $f(\overline{x}_k)$ n'est pas l. □

Remarque 3.1. Ceci est très pratique pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point. Il suffit de trouver deux suites qui convergent vers le point en question et telles que la limites de elles composées par f n'est pas la même.

Proposition 3.1 (Opérations algébriques sur les limites)**.**

(1) Combinaison linéaire de limites

(2) produit de limites

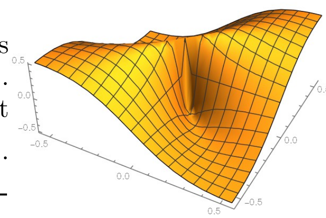
(3) Si $l_2 \neq 0$ alors on a le quotient des limites.

On démontre avec ce qu'on sait sur les suites. □

Corollaire 8. *Tous les polynômes et toutes les fonctions rationnelles sont continus sur leur domaines de définition.*

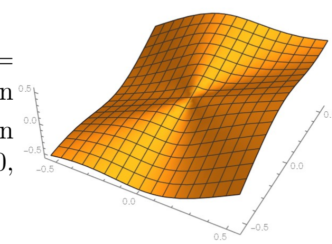
Exercice 3.2.

(1) On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \Longleftarrow (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Si elle existe, quelle est la limite de cette fonction en $(0,0)$? Réponse : montrons que la limite n'existe pas. Considérons d'abord $\overline{a}_k = (\frac{1}{k}, 0) \to (0,0)$. En remplaçant dans f on trouve que la limite de $f(\overline{a}_k)$ est 0. Or, soit $b_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$. On a $f(\overline{b}_k) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} \to \frac{1}{2} \neq 0$. Il n'y a donc pas de limite en $(0,0)$. Intuitivement, on voit sur le graphique à droite que cela dépend de l'approche qu'on prend à la fonction : il y a différentes valeurs possibles en $(0,0)$.



(2) On considère $\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \Longleftarrow (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \Longleftarrow \text{sinon} \end{cases}$. On va chercher à montrer que sa limite en $(0,0)$ est 0, par passage aux coordonnées polaires puis par définition de la limite.

(a) *(Par changement de variable polaire).* On remplace $x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi)$, où $r \geq 0$ et $0 < \varphi \leq 2\varphi$. En remplaçant dans la fraction on trouve $\frac{r^3(\cos^3(\varphi)+\sin^3(\varphi))}{r^2} = r(\cos^3(\varphi) + \sin^3(\varphi))$. Or, par la définition de la limite, on a que si et seulement si notre fonction tend vers 0, $r \to 0$. OR $-2 \leq \cos^3\varphi + \sin^3\varphi \leq 2 \implies$
$$\underbrace{-2r}_{\to 0} \leq r(\cos^3(\varphi) + \sin^3(\varphi)) \leq \underbrace{2r}_{\to 0}.$$
On a donc bien, par le théorème des gendarmes, que $f \to 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$, peu importe la direction.



Remarque 3.2. (1) On ne peut pas juste calculer une limite en considérant les limites par rapport à chaque variable ; il faut que ce soit en même temps et de tous les côtés.

(2) **À condition que** la limite existe, et que les limites par rapport à chaque vairable existent,
$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)) = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$$

(3) (Important pour les VF) L'existence de la limite d'une fonction multivariable en un point n'implique pas l'existence des limites de cette fonction si on ne fait que tendre différentes composantes.

Théoreme 9 (Théorème des gendarmes.)**.** *Soient $f, g, h : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$, telles que*

(1)
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} g(\overline{x}) = l$$

(2)
$$\exists\alpha > 0 : \forall x \in \{x \in E : 0 < ||\overline{x} - \overline{x}_0|| \leq \alpha\}, f(\overline{x}) \leq h(\overline{x}) \leq g(\overline{x}),$$

Alors $\lim_{\overline{x}_0} h(\overline{x}) = l$.

Démonstration. Soient $\{\overline{a}_k\} \subset E$ une suite arbitraire qui tend vers $\overline{x}_0$. Alors (1) $\implies \lim f(\overline{a}_k) = \lim g(\overline{a}_k) = l$. De plus, ce fait et (2) impliquent ensemble qu'il existe un terme à partir duquel $f(\overline{a}_k) \leq h(\overline{a}_k) \leq g(\overline{a}_k)$. Par le théorème des gendarmes pour les suites, on a que $h(\overline{a}_k)$ converge vers l. Par la caractérisation pour les limites par les suites, comme $\overline{a}_k$ est arbitraire, on a bien que h converge en l quand $x \to \overline{x}_0$ □

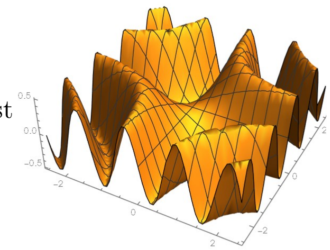
Exercice 3.3.

(1) Considérons $f(x,y) = \begin{cases} xy\log(|x|+|y|) & \Longleftarrow (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \Longleftarrow \text{sinon} \end{cases}$. Réponse. On a $0 \leq |f(x,y) - 0| \leq |xy|(|x|+|y|+1)$. Donc f, en zéro, est majoré par une fonction qui tend vers 0, et minorée par 0 (en valeur absolue).

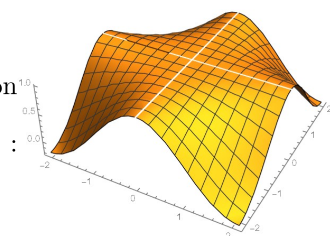
Proposition 3.2 (Continuité d'une fonction composée)**.** *Soient $A \xrightarrow{\overline{g}} B \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, telles que $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^p$, telles que $g_1(\overline{x}), \cdots, g_p(\overline{x})$ sont continues en $\overline{a} \in A$, et $f(\overline{y})$ est continue en $(g_1(\overline{a}), \cdots, g_p(\overline{a}))$, alors $f \circ g(\overline{x})$ est continue en $\overline{a}$.*

Exercice 3.4.

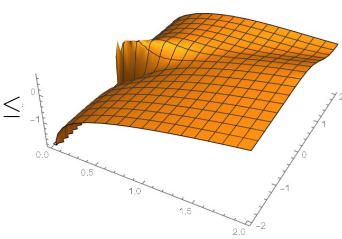
(1) Montrer la continuité de $h(x,y) = \sin(xy)\cos(xy)$ sur $\mathbb{R}^2$. Cette fonction est continue dans $\mathbb{R}^2$ car c'est une composition de fonctions continues.



(2) Montrer la continuité de $h(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & x \neq 0 \\ 1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2$. Cette fonction est continue dans $\mathbb{R}^2$ car c'est une composition de fonctions continues : $\frac{\sin(x)}{x}, xy$.



(3) Trouver la limite en $(1,0)$ de $f(x,y) = \frac{(x-1)^2\log(x)}{(x-1)^2+y^2}$. Réponse : $0 \leq |f(x,y)| \leq |\log(x)|$. Or les deux tendent vers 0 en $(1,0)$.



3.3. **Maximum et minimum d'une fonction sur un compact.**

Définition 3.5. Soit $fE \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$. Alors si $M \in \mathbb{R}$ satisfont

(1) $f(\overline{x}) \leq M \forall x \in E$

(2) $M \in f(E)$.

Alors M est le minimum de f sur E. Similairement on définit le minimum.

Exercice 3.5. (1) Soit $f(x,y) = \sin(x^2+y)$. Par la définition, le maximum est 1, et le minimum est -1.

Théoreme 10. *Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^2$ atteint son maximum et son minimum.*

Démonstration. On montre qu'elle est bornée, puis qu'elle atteint son min et son max.

(1) Supposons que notre fonction n'est pas bornée. $\exists\{\overline{x}_k\} \in E, |f(\overline{x}_k)| \geq k \forall k \in \mathbb{N}$.Or on a aussi que $\{\overline{x}_k\} \in E$ est une suite bornée (car E est compact). Par Bolzano-Weierstrass, on peut trouver une sous-suite convergente $\{x_{k_p}\} \to \overline{x}_0, \in E$ puisque E est fermé. Or, puisque f est continue, $\lim f(\overline{x}_{k_p}) = f(x_0)$. OR on avait construit notre suite telle que $|f(\overline{x}_k)| \geq k \forall k \in \mathbb{N}$, elle croit indéfiniment. Ceci n'est pas logique avec le fait que $f(\overline{x}_{k_p})$ ait une limite. **Absurde :** notre fonction est forcément bornée.

(2) On sait que $f(E)$ est un sous-ensemble borné $\implies \exists M = \sup(f(E)), m = \inf(f(E))$. Donc $\exists\{\overline{a}_k\}, \{\overline{b}_k\} \in E, \lim f(\overline{a}_k) = m, \lim f(\overline{b}_k) = M$. Comme ces deux suites sont bornées, on peut en sortir des sous-suites convergentes $\{\overline{a}_{k_p)}\} \to \overline{a}, \{\overline{b}_{k_p)}\} \to \overline{b}$. Puisque E est compact (en particulier parce qu'il est fermé), $\overline{a} \in E, \overline{b} \in E$. OR comme f est continue, $\lim f(\overline{a}_{k_p}) = f(\overline{a}) \implies f(\overline{a}) = m$ (question : pourquoi $a_k \to m \implies a_{k_p} \to m$?),$\lim f(\overline{b}_{k_p}) = f(\overline{b}) \implies f(\overline{b}) = M$. Donc f atteint son infimum et son supremum (on peut donc parler de minimum et de maximum).

□

Remarque 3.3. En analyse 1 on avait qu'une fonction continue sur un intervalle compact atteignait son minimum, son maximum, mais aussi **toutes les valeurs intermédiaires**. En multivariable, pour que f atteigne toutes les valeurs intermédiaires, il faut aussi toute valeur intermédiaire, il suffit que l'ensemble E soit compacte et **connexe par chemins** (entre n'importe quel deux points de E il existe un chemin qui les connecte qui passe uniquement par E).

4. Calcul différentiel de fonctions de plusieurs variables réelles

4.1. Dérivées partielles et gradient.

Définition 4.1 (Dérivées partielles)**.** Soit $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert. Soit $g(s) = f(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, s, a_{k+1}, \cdots, a_n)$, où $\overline{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in E$. Alors on a g fonction d'une seule variable ; $g : D = \{s \in \mathbb{R} : (a_1, a_2, \cdots s, a_{k+1}, \ldots a_n) \in E\} \to \mathbb{R}$. Alors si g est dérivable en $a_k \in D$, on dit que le $k-$ième dérivée partielle de f en $\overline{a} \in E$ est égale à $g'(a_k)$. On note $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) = D_k f(\overline{a}) = g'(a_k)$. Autrement dit,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{t\to 0} \frac{g(a_k + t) - g(a_k)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{a} + t\overline{e}_k) - f(\overline{a})}{t},$$

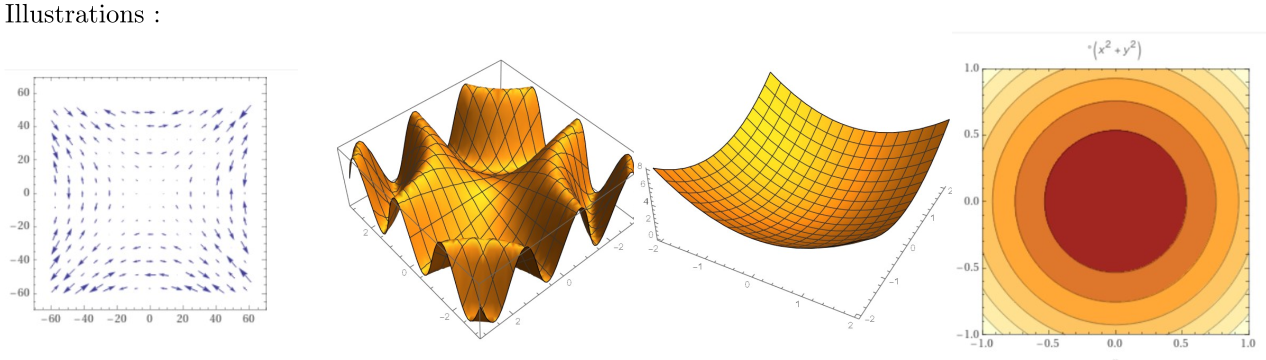
où $\overline{e}_k = (0, 0, \cdots 1, \cdots 0)$ n'a qu'un 1 à la k-ième place.

Définition 4.2 (Gradient)**.** Si toutes les dérivées partielles existent en $\overline{a} \in E$, écrites $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$, alors on définit le gradient de f en $\overline{a}$ comme

$$\nabla f(\overline{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{a}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{a})\right)$$

Exercice 4.1 (Comment visualiser le gradient ?)**.**

(1) Soit $f(x, y) = \sin(x, y)$. En dérivant partiellement par rapport à x, y on trouve $\nabla f = (y\cos(xy), x\cos(xy))$. Chacune des images de ∇f est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, ce qui implique qu'on puisse représenter ∇f comme un champ de vecteurs, comme illustré ci-après : le gradient montre la direction de la plus grande pente de la fonction.
(2) De la même manière, en travaillant avec $f(x, y) = x^2 + y^2$. On peut visualiser son gradient comme suit.
(3) Illustrations :



Définition 4.3 (Dérivée directionnelle)**.** Soit $E \subset \mathbb{R}^n, \overline{a} \in E, \overline{v} \in \mathbb{R}^n, \overline{v} \neq 0$. La droite passant pas $\overline{a}$ en direction de $\overline{v}$ admet (par Chasles) la paramétrisation $\overline{l}(t) = \overline{a} + t\overline{v}, \forall t \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $f : E \to \mathbb{R}$, et soit $g(t) = f(\overline{a} + t\overline{v})$ une fonction d'une seule variable de $\{t \in \mathbb{R} : \overline{a} + t\overline{v} \in E\} \to \mathbb{R}$. Si g est dérivable en $t = 0$, alors on dit qu'il existe la dérivée directionnelle de f en $\overline{a}$ suivant le vecteur $\overline{v}$. On la définit comme

$$D_f(\overline{a}, \overline{v}) = \frac{\partial f}{\partial \overline{v}}(\overline{a}) \stackrel{def}{=} \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \stackrel{def}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{a} + t\overline{v}) - f(\overline{a})}{t}$$

Remarque 4.1.

(1) Si $\overline{v}$ est un vecteur de la base orthonormale de notre espace, alors la dérivée $Df(\overline{a}, \overline{e}_i) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{a}+t\overline{e}_i)-f(\overline{a})}{t}$. Ceci est égal à $\frac{\partial f}{\partial \overline{v}}$ par définition. Si toutes les dérivées directionnelles existent alors toutes les dérivées partielles existent aussi.
(2) Considérons $Df(\overline{a}, \lambda\overline{v})$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

$$Df(\overline{a}, \lambda\overline{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{a} + t\lambda\overline{v}) - f(\overline{a})}{t} = \lambda \lim_{s\to 0} \frac{f(\overline{a} + s\overline{v})}{s} = \boxed{\lambda D_f(\overline{a}, \overline{v})}.$$

On en déduit qu'il suffit de calculer la dérivée directionnelle pour $||\overline{v}|| = 1$.

4.2. **Dérivabilité et la différentielle.**

Définition 4.4. Soit $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n, \overline{a} \in E$. On dit que f est dérivable au point $\overline{a}$ s'il existe une transformation linéaire $L_{\overline{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et une fonction $r : E \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(\overline{x}) = f(\overline{a}) + L_{\overline{a}}(\overline{x} - \overline{a}) + r(\overline{x})\ \forall \overline{x} \in E,$$

et

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \frac{r(\overline{x})}{||\overline{x} - \overline{a}||} = 0.$$

Alors $L_{\overline{a}}$ s'appelle la différentielle de f au point $\overline{a}$. On écrit $L_{\overline{a}} = df(\overline{a})$

Remarque 4.2. Une transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction $T(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha T(\overline{x}) + \beta T(\overline{y})$.

Remarque 4.3.

(1) Une fonction d'une seule variable $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$, est dérivable en $a \in I$ s'il existe $l \in \mathbb{R}$ et une fonction $r : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = f(a) + l(x - a) + r(x) \forall x \in I,$$

et

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{|x - a|} = 0$$

(2) Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une transformation linéaire ; posons $\overline{l} = (L(\overline{e}_1), L(\overline{e}_2), L(\overline{e}_n))$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Alors $L(\overline{v} \in \mathbb{R}^n) = v_1 L(\overline{e}_1) + v_2 L(\overline{e}_2) + \cdots + v_n L(\overline{e}_L)$ peut s'écrire comme le produit scalaire de $\overline{v}$ et $\overline{l}$.

Théoreme 11. *Soit $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n, \overline{a} \in E, f$ dérivable en $\overline{a}$, de différentielle $L_{\overline{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Alors*

(1) f est continue en $\overline{a}$.

(2) Pour tout vecteur $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$ non nul, la dérivée directionnelle existe et

$$Df(\overline{a}, \overline{v}) = L_{\overline{a}}(\overline{v})$$

(3) Toutes les dérivées partielles existent de f en $\overline{a}$, et

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{x}_k}(\overline{a}) = L_{\overline{a}}(\overline{e}_k),$$

Ce qui implique que le gradient existe et est donné par $\nabla f(\overline{a}) = (L_{\overline{a}}(\overline{e}_1), \cdots, L_{\overline{a}}(\overline{e}_n))$.

(4) Pour tout $\overline{v} \in \mathbb{R}^{n*}, L_{\overline{a}}(\overline{v}) = Df(\overline{a}, \overline{v}) = \langle \nabla f(\overline{a}), \overline{v} \rangle$

*(5) Pour tout $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$ de longueur 1, on a $Df(\overline{a}, \overline{v}) \leq ||\nabla f(\overline{a})||$, et $Df(\overline{a}, \frac{\nabla f(\overline{a})}{||\nabla f(\overline{a})||}) = ||\nabla f(\overline{a})|| \implies$ le gradient donne la direction de la **plus grande** pente de f en $\overline{a}$ (si $\nabla f(\overline{a}) \neq 0$)*

Démonstration.

(1) f est dérivable en $\overline{a} \implies f(\overline{x}) = f(\overline{a}) + L_{\overline{a}}(\overline{x} - \overline{a}) + r(\overline{x})\ \forall \overline{x} \in E, et \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \frac{r(\overline{x})}{||\overline{x}-\overline{a}||} = 0$. On a donc que, avec le fait que $L_{\overline{a}}(0) = 0$ comme elle est linéaire :

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = f(\overline{a}) + \underbrace{L_{\overline{a}}(\overline{x} - \overline{a})}_{\to 0} + \underbrace{r(\overline{x})}_{\to 0} = f(\overline{a}),$$

on a donc que f est continue.

(2) Soit $\overline{v} \in \mathbb{R}^{n*}$ Soit $g(t) = f(\overline{a} + t\overline{v}) : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$. Recall

$$D_f(\overline{a}, \overline{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \overset{def}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{a} + t\overline{v}) - f(\overline{a})}{t},$$

et que, grâce au fait que f est dérivable en $\overline{a}, f(\overline{a} + t\overline{v}) = f(\overline{a}) + L_{\overline{a}}(t\overline{v}) + r(\overline{a} + t\overline{v}), et\ L_{\overline{a}}(t\overline{v}) = tL_{\overline{a}}(\overline{v})$

$$D_f(\overline{a}, \overline{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{L_{\overline{a}}(t\overline{v}) + r(\overline{a} + t\overline{v})}{t} = L_{\overline{a}}(\overline{v}) + \lim_{t\to 0} \frac{r(\overline{a} + t\overline{v})}{t}.$$

Or on sait que $\lim_{t\to 0} \frac{r(\overline{a}+t\overline{v})}{||t\overline{v}||} = 0$. Donc

$$D_f(\overline{a},\overline{v}) = L_{\overline{a}}(\overline{v}) + \operatorname{sgn}(t)||\overline{v}|| \lim_{t\to 0} \frac{r(\overline{a}+t\overline{v})}{||t\overline{v}||} = \boxed{L_{\overline{a}}(\overline{v})}$$

(3) $\frac{\partial f}{\partial \overline{x}_k}(\overline{a}) = Df(\overline{a},\overline{e}_k) = L_{\overline{a}}(\overline{e}_k) \implies \exists \nabla f(\overline{a}) = (L_{\overline{a}}(\overline{e}_1), \cdots, L_{\overline{a}}(\overline{e}_n))$.

(4) trivial vu les propriétés précédentes.

(5) Soit $||\overline{v}|| = 1. \implies Df(\overline{a},\overline{v}) = \langle \nabla f(\overline{a}), \overline{v}\rangle$. Comme $\overline{v}$ est de norme 1 et que le produit scalaire est maximal quand les vecteurs sont colinéaires, il faut que $\overline{v} = \frac{\nabla f(\overline{a})}{||\nabla f(\overline{a})||}$ pour que $Df(\overline{a},\overline{v})$ soit maximal, et sinon il sera plus petit.

□

4.3. **Application : Plan tangent à la surface** $z = f(x)$**.** Soit $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$ dérivable en tout point de E. Soit $\overline{a}$ un point du graphique de f. On cherche une équation du plan tangent en $\overline{a}$. Soit $F(x,y,z) = z - f(x,y) : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^3$. Cette fonction est aussi dérivable bien sûr. $F(x,y,z) = 0$ est à la surface du graphique $\iff z = f(x,y)$. Or $\nabla F = (-\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{a}), -\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{a}), 1) \neq 0$ donne la direction orthogonale au plan tangent à la surface en $\overline{a}$ (effectivement, à la surface, F est constante, en particulier elle est nulle). Donc, pour obtenir l'équation de ce plan on écrit

$$\langle \nabla F(\overline{a}), (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\rangle = 0,$$

pour $z_0 = f(x_0, y_0)$. On en déduit une formule (à mémoriser) :

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle}$$

est l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

Exercice 4.2. Soit $f(x,y) = \sin(xy)$ dérivable sur $\mathbb{R}^2$. Trouver une équation du plan tangent en le point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$. Réponse : On a $\nabla f(x_0,y_0) = (y_0 \cos(x_0y_0), x_0\cos(x_0)y_0)$, et donc l'équation du plan tangent est $z = \sin(x_0y_0) + \cos(x_0y_0)(y_0(x-x_0) + x_0(y-y_0))$. À noter que les vecteurs normaux sont retrouvables comme ci-dessus grâce à $\nabla F = (-\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{a}), -\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{a}), 1)$.

Théoreme 12 (Deuxième théorème sur la dérivabilité)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : E \to \mathbb{R}, \overline{a} \in E$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$, toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ existent sur $B(\overline{a},\delta)$ et sont* ***continues*** *en $\overline{a}$. Alors f est dérivable en $\overline{a}$.*

4.4. **Dérivées partielles d'ordre supérieur à** 1**.**

Définition 4.5. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables telle que $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ existe pour chaque variable, en tout point de $E \subset \mathbb{R}^n$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{x}), \overline{x} \in E$$

est la fonction dérivée partielle.

Définition 4.6. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ existe $\forall \overline{x} \in E$. Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ admet à son tour une dérivée partielle par rapport à une autre variable ou bien la même, x_i, on pose $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$.

Remarque 4.4. Dans la notation du livre l'ordre de variables est inversé.

Théoreme 13 (Théorème de Schwartz)**.** *Soit $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n, \overline{a} \in E$, telle que les dérivées partielles secondes*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \ et\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

de f existent et sont continues en $\overline{a}$ (ou au voisinage de ce dernier). Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Définition 4.7. Une fonction est dite de classe C^p si toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leq p$ existent et sont continues sur son ensemble de définition.

Définition 4.8 (Matrice Hessienne)**.** Pour une fonction $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n, f$ dérivable deux fois :

$$Hess(f)(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overline{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overline{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\overline{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\overline{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\overline{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overline{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\overline{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overline{a}) \end{pmatrix}$$

Remarque 4.5. Si $f \in C^2$ sur E, par le théorème de Schwartz, cette matrice est symétrique.

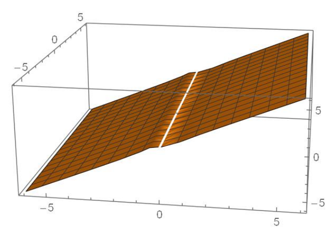
Remarque 4.6 (Méthodes de vérification de la dérivabilité d'une fonction donnée)**.**

(1) Si ses dérivées partielles premières existent et sont continues en un point donné, alors f est dérivable en ce point.

(2) Par la définition :
- Si le gradient de la fonction n'existe pas, alors thm 1 implique que f n'est pas dérivable.
- Si le gradient existe, alors on applique la définition de dérivabilité : posons $r(\overline{x}) = f(\overline{x}) - f(\overline{a}) - \langle \nabla f(\overline{a}), \overline{x} - \overline{a} \rangle$. Alors si et seulement si $\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \frac{r(\overline{x})}{||\overline{x} - \overline{a}||} = 0, f$ est dérivable en $\overline{a}$ par définition.

Exercice 4.3.

(1) Montrer que la fonction $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0, \forall y \in \mathbb{R} \\ 0 & , x = 0 \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$ est dérivable en $(0, y_0), \forall y_0 \in \mathbb{R}$.



Réponse : Premièrement, on voit que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \Longleftarrow \ x \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

la limite de $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas en 0, ceci implique qu'au moins une des deux dérivées partielles n'est pas continue. En calculant la deuxième on trouve $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n$, et ainsi par la méthode deux

$$r(\overline{x}) = f(\overline{x}) - \underbrace{f(0,y_0)}_{0} - \langle \underbrace{\nabla f(0,y_0)}_{0}, \overline{x} - (0,y_0) \rangle = f(\overline{x}).$$

Or

$$\left| \frac{f(\overline{x})}{||\overline{x} - (0,y_0)||} \right| = \left| \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{polaires}{\overset{coord.}{=}} r\cos^2(\varphi) \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi avons-nous que $\frac{r(\overline{x})}{||\overline{x} - (0,y_0)||} \underset{\overline{x} \to (0,y_0)}{\longrightarrow} 0$, et f est dérivable une fois en $(0, y_0)$ par définition (et donc dérivable sur $\mathbb{R}^2$, car les autres valeurs ne posent pas de problème), mais pas de classe C^1.

Remarque 4.7. Le plan tangent au graphique d'une fonction est défini seulement si elle est dérivable. Effectivement, si $f(x_0, y_0)$ n'est pas dérivable en (x_0, y_0), le plan donné par la formule en page 19 n'est pas tangent même si le gradient existe.

Remarque 4.8. Attention, il faut aussi vérifier ce qui se passe aux autres points de $\mathbb{R}^2$ que l'origine.

Résumé des propriétés. Soit $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n, \overline{a} \in E$.

$$\underset{\text{sur } E}{\text{Classe } C^2} \underset{\not\Longleftarrow}{\overset{def}{\Longrightarrow}} \underset{\text{sur } E}{\text{Classe } C^1} \underset{\not\Longleftarrow}{\overset{thm2}{\Longrightarrow}} \underset{\text{en } \overline{a}\in E}{\text{Dérivable}} \underset{\not\Longleftarrow}{\overset{thm\,1}{\Longrightarrow}} Df(\overline{a},\overline{v}) \text{ existent} \underset{\not\Longleftarrow}{\overset{def}{\Longrightarrow}} \text{le gradient existe.}$$

$$\text{Schwartz} \Downarrow \not\Uparrow \qquad\qquad \Downarrow \not\Uparrow$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad\qquad \text{Continuité en } \overline{a}$$

4.5. **Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m, m \geq 1$.**

Définition 4.9 (Dérivée partielle)**.** La $k-$ème dérivée partielle d'une fonction $\overline{f} : E \to \mathbb{R}^m, E \subset \mathbb{R}^n$, en $\overline{a} \in E$, est

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_k}(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\overline{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\overline{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\overline{a}) \end{pmatrix},$$

Si chacune des fonctions $f_1, \cdots f_m$ admet une dérivée partielle en $\overline{a}$ par rapport à x_k.

Définition 4.10 (Dérivée directionnelle)**.** Soit $\overline{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$. Alors la dérivée directionnelle le long de $\overline{v}$ de $\overline{f} : E \to \mathbb{R}^m, E \subset \mathbb{R}^n$, est donnée par la définition

$$D\overline{f}(\overline{a},\overline{v}) = \begin{pmatrix} Df_1(\overline{a},\overline{v}) \\ Df_2(\overline{a},\overline{v}) \\ \vdots \\ Df_m(\overline{a},\overline{v}) \end{pmatrix},$$

si les dérivées directionnelles ci-dessus existent.

Définition 4.11 (Limite)**.** $\overline{f} : E \to \mathbb{R}^m, E \subset \mathbb{R}^n$ admet $\overline{l} \in \mathbb{R}^m$ pour limite quand $\overline{x} \to \overline{a} \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, ||\overline{a} - \overline{x}||_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \implies ||\overline{f}(\overline{x}) - \overline{l}||_{\mathbb{R}^m} \leq \varepsilon.$$

En particulier, la limite d'une fonction vectorielle se calcule composante par composante.

Définition 4.12 (Dérivabilité)**.** Une fonction $\overline{f} : E \to \mathbb{R}^m, E \subset \mathbb{R}^n$, est dérivable au point $\overline{a} \in E$ s'il existe une application linéaire $\overline{L_{\overline{a}}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et une fonction $\overline{r} : E \to \mathbb{R}^m$ telles que

$$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{a}) + \overline{L_{\overline{a}}}(\overline{x} - \overline{a}) + \overline{r}(\overline{x}),$$

et

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \frac{\overline{r}(\overline{x})}{||\overline{x} - \overline{a}||}.$$

$\overline{L_{\overline{a}}}$ est appelée la différentielle de $\overline{f}$ au point $\overline{a}$.

Proposition 4.1. $\overline{f} : E \to \mathbb{R}^m, E \subset \mathbb{R}^n$ *est dérivable en* $\overline{a}$ *si et seulement si chaque composante est dérivable en* $\overline{a}$, *et* $\overline{L_{\overline{a}}}(\overline{v}) = \begin{pmatrix} L_1, \overline{a}(\overline{v}) \\ L_2, \overline{a}(\overline{v}) \\ \vdots \\ L_m, \overline{a}(\overline{v}) \end{pmatrix}$, *où* $L_{i,\overline{a}}(\overline{v})$ *est la différentielle de* f_i *en* $\overline{a}$ *suivant* $\overline{v}$.

Définition 4.13 (Matrice Jacobienne)**.** Si $\overline{f} : E \to \mathbb{R}^m, E \subset \mathbb{R}^n$ possède toutes ses dérivées partielles en $\overline{a} \in E$, alors on définit sa matrice jacobienne (matrice de Jacobi) est définie comme :

$$\mathcal{J}_{\overline{f}}(\overline{a}) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{a}) & \ddots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overline{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overline{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\overline{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overline{a}) \end{pmatrix}$$

Remarque 4.9. Dans le DZ, on utilise parfois la notation $D_{\overline{f}}(\overline{a})$. On peut remarquer aussi que chacune des colonnes est une dérivée partielle de la fonction, et chaque ligne est un gradient d'une composante de la fonction. On remarque aussi que :

(1) Si $\overline{f}$ est dérivable, alors la matrice jacobienne contient comme colonnes les différentielles de ses composantes selon chaque coordonnée.
(2) Si $\overline{f}$ est dérivable, alors $D\overline{f}(\overline{a}, \overline{v}) = \mathcal{J}_{\overline{f}}(\overline{a})\overline{v}$

Définition 4.14 (déterminant de Jacobi)**.** Lorsque $m = n$, on définit le déterminant de Jacobi comme le déterminant de la matrice jacobienne.

Remarque 4.10. Par définition, si on prend le jacobien de gradient d'une fonction, on obtient l'hessien de cette fonction.

4.6. Applications des matrices Jacobiennes, dérivées d'une fonction composée.

Théoreme 14. *Soient $\overline{g} : A \to \mathbb{R}^p, A \subset \mathbb{R}^n, g(A) \subset B \subset \mathbb{R}^p : \overline{f} : B \to \mathbb{R}^q$. Autrement dit $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\overline{g}} \mathbb{R}^p \xrightarrow{\overline{f}} \mathbb{R}^q$. Supposons que $\overline{a} \in A, b = \overline{g}(\overline{a}) \in B : \overline{g}$ est dérivable en $\overline{a}$ avec la différentielle $L_{\overline{a}}(\overline{g})$, et $\overline{f}$ est dérivable en $\overline{b}$ avec la différentielle $L_{\overline{b}}(\overline{f})$. Alors $\overline{f} \circ \overline{g} = \overline{f}(\overline{g}(\cdot))$ est dérivable en $\overline{a}$ et on a :*

(1) $L_{\overline{a}}(\overline{f} \circ \overline{g}) = L_{\overline{b}}\overline{f} \circ L_{\overline{a}}\overline{g}$
(2) $\mathcal{J}_{\overline{f} \circ \overline{g}}(\overline{a}) = \mathcal{J}_{\overline{f}}(\overline{g}(\overline{a})) \cdot \mathcal{J}_{\overline{g}}(\overline{a})$

Idée de preuve. On ne s'intéresse qu'à la propriété 1. L'idée est de voir que, comme $\overline{g}$ est dérivable au point $\overline{a}$, $\overline{f}(\overline{g}(\overline{x})) = \overline{f}(\overline{g}(\overline{a}) + \overline{L}_{\overline{a}}(\overline{g})(\overline{x} - \overline{a}) + \overline{r}_{\overline{g}}(\overline{x})) = \overline{f}(\overline{g}(\overline{a})) + L_{\overline{b}}\overline{f}(L_{\overline{a}}(\overline{g})(\overline{x} - \overline{a}) + \overline{r}_{\overline{g}}(\overline{x})) + \overline{r}_{\overline{f}}(\overline{g}(\overline{x}))$. Par la linéarité de $L_{\overline{b}}(\overline{f})$, on trouve $\overline{f}(\overline{g}(\overline{x})) = \overline{f}(\overline{g}(\overline{a})) + L_{\overline{b}}(\overline{f})(L_{\overline{a}}(\overline{g})(\overline{x} - \overline{a})) + L_{\overline{b}}(\overline{f})(\overline{r}_{\overline{g}}(\overline{x})) + \overline{r}_{\overline{f}}(\overline{g}(\overline{x}))$. Or $L_{\overline{b}}(\overline{f})(L_{\overline{a}}(\overline{g})(\overline{x} - \overline{a}))$ est exactement ce que l'on cherche : la différentielle existe, il faut ensuite l'extraire. □

Remarque 4.11. La deuxième est une conséquence de la première traduite en termes de matrices, et $n = p = q \implies |\mathcal{J}_{\overline{f} \circ \overline{g}}(\overline{a})| = \mathcal{J}_{\overline{f}}(\overline{g}(\overline{a}))| \cdot |\mathcal{J}_{\overline{g}}(\overline{a})|$

Application : changement de variable. Soit $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\overline{h}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\overline{g}} \mathbb{R}^n$. Si $\overline{h}$ est un changement de variables (un difféomorphisme, une fonction inversible et dérivable C^1), et $\overline{g}$ sa fonction réciproque, alors $\mathcal{J}_{\overline{g} \circ \overline{h}} = \mathbb{I}_{n \times n}$. Supposons que $\overline{h}$ et $\overline{g}$ soient dérivables. Alors la matrice jacobienne de $\overline{h}$ est l'inverse de la matrice jacobienne de $\overline{g}$, et le produit des déterminants est 1. Similairement, si une bijection $\overline{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dérivable en $\overline{a}$, $|\mathcal{J}_{\overline{g}}(\overline{a})| \neq 0$.

4.7. Dérivée d'une intégrale fonction d'un paramètre.

Théoreme 15. *Soit $f : [a, b] \times \underset{ouvert}{I} \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $[a, b] \times I$. Alors $g(y) = \displaystyle\int_a^b f(x, y)dx$ est de classe C^1 sur I et on a, $\forall y \in I$,*

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

Démonstration.

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{y-y_0}\int_a^b(f(x,y)-f(x,y_0))dx.$$

Or, par le théorème des accroissements finis, il existe un point $\tilde{y}\in[a,b]$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\tilde{y})=\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}$. On obtient alors

$$\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,\tilde{y})dx\underset{y\to y_0\Rightarrow\tilde{y}\to y_0}{\longrightarrow}\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx=g'(y_0).$$

□

On peut notamment combiner ceci à l'analyse 1 : le théorème fondamental du calcul intégral nous disait que

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^t f(y)dy\right)=f(t),$$

pour obtenir le théorème suivant (TOUJOURS une question à l'examen là-dessus) :

Théoreme 16. *Soient $g,h,k:I\to\mathbb{R},I\subset\mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables, et $f:\overset{x}{J_1}\times\overset{y}{J_2}\to\mathbb{R},J_1,J_2$ ouverts, telles que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur J_2, et $k(I)\subset J_2$. Alors*

$$F(t)=\int_{h(t)}^{g(t)}f(x,k(t))dx$$

est continûment dérivable sur I et on a

$$\boxed{F'(t)=f(g(t),k(t))\cdot g'(t)-f(h(t),k(t))\cdot h'(t)+k'(t)\cdot\int_{h(t)}^{g(t)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,k(t))dx}$$

Idée de démonstration. En considérant la fonction $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},F=\displaystyle\int_h^g f(x,k)dx;(g,h,k):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,t\to(g(t),h(t),k(t))$. On est donc dans la situation du théorème sur une fonction composée car on peut composer les deux fonctions. Par le théorème de la matrice Jacobienne de la fonction composée, on a :

$$\frac{dF}{dt}(t)=\mathcal{J}_{F\circ(g,h,k)(t)}=\mathcal{J}_{F(g,h,k)}\cdot\mathcal{J}_{(g,h,k)}=\nabla F(g,h,k)\cdot\begin{pmatrix}g'(t)\\h'(t)\\k'(t)\end{pmatrix},$$

et donc

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial g}g'(t)+\frac{\partial F}{\partial h}h'(t)+\frac{\partial F}{\partial k}k'(t).$$

Or, par le théorème fondamental du calcul intégral, $\frac{\partial F}{\partial g}=f(g(t),k(t))$. De la même manière, $\frac{\partial F}{\partial h}=-f(h(t),k(t))$. Enfin, par le théorème 15 sur les intégrales fonction d'un paramètre, on a :
$\frac{\partial F}{\partial k}=\displaystyle\int_h^g\frac{\partial f}{\partial y}(x,k(t))dx$. On a donc

$$F'(t)=f(g(t),k(t))g'(t)-f(h(t),k(t))h'(t)+\int_h^g\frac{\partial f}{\partial y}(x,k(t))dx\cdot k'(t)$$

□

Application : Le gradient et le Laplacien en coordonnées polaires.

Définition 4.15. Soit $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n, f \in C^2(E)$. Alors la fonction $\Delta f : E \to \mathbb{R}$ est telle que

$$\Delta f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Cette fonction est le Laplacien de f.

Exercice 4.4. Calculer le Laplacien de $f(x, y) = xy + 3x^3$. Réponse : en sommant les dérivées partielles on trouve $\Delta f = 18x$

Proposition 4.2. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f \in C^2$. Soit $\tilde{f} = f \circ g(r, \varphi)$ le changement de variable en coordonnées polaires. Alors*

$$\nabla f(x, y) = \left(\cos(\varphi)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}, \sin(\varphi)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\varphi)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right),$$

et

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}.$$

Démonstration. Premièrement, $\tilde{f}(r, \varphi) = f \circ g(r, \varphi), g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$. On a donc $\mathcal{J}_g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$. On remarque aussi que $\mathcal{J}_{f \circ g}(r, \varphi) = \nabla \tilde{f}(r, \varphi)$ car $\tilde{f}$ est une fonction vers $\mathbb{R}$. De plus, par la formule de cours, on a $\mathcal{J}_{\tilde{f}} = \mathcal{J}_f(x, y) \cdot \mathcal{J}_g(r, \varphi) = \nabla f(x, y) \cdot \mathcal{J}_g(r, \varphi)$. Ceci implique

$$\nabla f(x, y) = \nabla \tilde{f} \cdot \left(\frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & r\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}\right).$$

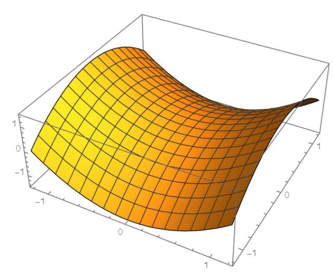
En développant on retrouve la première partie de la proposition. La deuxième sera faite en série. □

Exercice 4.5. Calculer le Laplacien de $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}), f(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$. Réponse : ce serait beaucoup trop long en coordonnées cartésiennes, donc on passe en polaires : $\tilde{f} = \frac{\sin\varphi}{r}$. On a alors directement $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} = \frac{-\sin(\varphi)}{r}$, et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = -\frac{\sin(\varphi)}{r^2}$; $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} = \frac{2\sin(\varphi)}{r^3}$. Ceci nous donne $\Delta f(x, y) = 0$

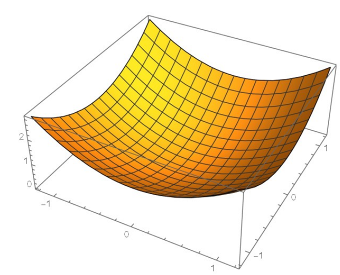
Définition 4.16. Une fonction dont $\Delta f = 0$ est **harmonique**.

Exercice 4.6.

(1) Montrer que $x^2 - y^2$ est harmonique. Réponse : $2 - 2 = 0$.



(2) Montrer que $x^2 + y^2$ n'est pas harmonique. Réponse : $2 + 2 = 4 \neq 0$.



Proposition 4.3. *Une fonction harmonique, sur un compact, atteint son minimum et maximum sur la frontière du domaine. (pas de démo)*

4.8. **Formule de Taylor à plusieurs variables.**

Théoreme 17. *Soit* $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n, \exists \varepsilon > 0, f \in C^{p+1}(]\overline{a} - \varepsilon, \overline{a} + \varepsilon[)$*. Alors il existe* $\delta > 0, \forall \overline{x} \in B(\overline{a}, \delta) \cap E, \exists 0 < \theta < 1, f(\overline{x}) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \cdots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta)$*, où* $F : I \to \mathbb{R}, I \supset [0,1], F(t) = f(\overline{a} + t(\overline{x} - \overline{a}))$*. En gros* $F = f($*La droite partant de* $\overline{a}$ *dans la direction de* $\overline{x} - \overline{a})$

Démonstration. $f(\overline{x}) = F(1), f(\overline{a}) = F(0); F(t) \in C^{p+1}(I).F'(0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(\overline{a} + t(\overline{x} - \overline{a}))}{t} = Df(\overline{a}, (\overline{x} - \overline{a})$. Grâce à analyse 1 on trouve la formule de Taylor pour $F(t)$, fonction d'une seule variable :

$$F(t = 1) = F(0)(1 - 0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0)(1 - 0)^2 + \cdots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0)(1 - 0)^p + \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta)(1 - 0)^{p+1}$$

Or comme $F(1) = f(\overline{x})$, on a trouvé une formule pour f □

Cas particulier : $n = 2$. $\overline{a} = (a, b), \overline{x} = (x, y); f \in C^{p+1}(E), p \geq 2, f(x, y) : E \to \mathbb{R}$. On cherche le polynôme d'ordre p autour de $(a, b).F(t) = f(\overline{a} - t(\overline{x} - \overline{a})) = f \circ \overline{g}(t), g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \overline{g}(t) = (\overline{a} + t(\overline{x} - \overline{a}))$. On a donc $F'(t) = \mathcal{J}_F = \mathcal{J}_f(\overline{g}(t)) \cdot \mathcal{J}_{\overline{g}(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{g}(t)) & \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{g}(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{g}(t))(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{g}(t))(y - b)$. En particulier

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{a}) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{a}) \cdot (y - b)$$

Qu'en est-il de $F''(0)$? $F''(t) = \frac{\partial F'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{g}(t))\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{g}(t))\frac{\partial g_2}{\partial t}\right)$, or on sait que $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{g}(t))\frac{\partial g_1}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{g}(t))\right)\frac{\partial g_1}{\partial t}$, car $\frac{\partial g_1}{\partial t}$ est constant par rapport à t. Or $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{g}(t))\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{g}(t)) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{g}(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial t} \end{pmatrix}$, par composition. De le même manière on trouve

$$F''(t) = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{g}(t))\left(\frac{\partial g_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{g}(t))\left(\frac{\partial g_2}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial g_1}{\partial t}\right)}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{g}(t))\right)\frac{\partial g_1}{\partial t}} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{g}(t))\left(\frac{\partial g_2}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{g}(t))\left(\frac{\partial g_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial g_2}{\partial t}\right)}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{g}(t))\right)\frac{\partial g_2}{\partial t}}$$

Par le théorème de Schwartz comme $f \in C^{p+1}, p \geq 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, et on peut simplifier comme

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{g}(t))(x - a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{g}(t))(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{g}(t))(y - b)^2,$$

ce qui donne

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{a})(x - a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{a})(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{a})(y - b)^2.$$

D'une façon similaire on obtient les dérivées plus élevées :

$$F^{(p)}(0) = \sum_{i=0}^{p} \frac{\partial^p f}{\partial x^k \partial y^{p-k}} \cdot \binom{p}{k}(x - a)^p(y - b)^{p-k}.$$

Souvent on utilise l'approximation de Taylor d'ordre 2 :

$$f(\overline{x}) = f(\overline{a}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{a})(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{a})(y-b)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{a})(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{a})(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{a})(y-b)^2\right)$$
$$+\underbrace{\varepsilon(||\overline{x}-\overline{a}||^2)}_{\text{reste}}$$

Exercice 4.7.

(1) Calculer le polynôme de Taylor de e^{-x+2y^2+1} d'ordre 2 autour de $(0,1)$. Réponse : on met l'exposant sous une forme qui va vers 0 quand $\overline{x} \to \overline{a}$: $e^{-x+2y^2+1} = e^{-x+2((y-1)+1)^2+1} = e^3 e^{-x+2(y-1)^2+4(y-1)}$. Ensuite on utilise le développement limité de e^x en 0 pour obtenir $f(x,y) \underset{0,1}{=} e^3(1 + (-x + 2(y-1)^2 + 4(y-1)) + \frac{1}{2}(-x+2(y-1)^2+4(y-1))^2) + \varepsilon(||\overline{x}-\overline{a}||^2) = \cdots = e^3(1 - x + 4(y-1) + \frac{1}{2}x^2 + 10(y-1)^2 - 4x(y-1)) + \varepsilon(||\overline{x}-\overline{a}||^2)$

Cas $n = 3$. Soit $f(x,y,z)$ autour du point $(a,b,c) \in E \subset \mathbb{R}^3$, $f \in C^3(E)$. Soit $g(t) = \begin{pmatrix} a+t(x-a) \\ b+t(y-b) \\ c+t(z-c) \end{pmatrix}$. Soit $F = f \circ g$ Alors on a, par composition des jacobiennes, $F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}(g(t)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial t}$, ce qui implique

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{a})(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{a})(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(\overline{a})(z-c).$$

De la même manière on trouve

$$f(\overline{x}) = f(\overline{a}) + \langle \nabla f(\overline{a}), (x-a, y-b, z-c)\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla\langle \nabla f(\overline{a}), (x-a, y-b, z-c)\rangle, (x-a, y-b, z-c)\rangle + \varepsilon(||\overline{x}-\overline{a}||^2)$$

Deux méthodes pour calculer les développements limités.

(1) La formule de Taylor en plusieurs variables avec les dérivées nécessaires
(2) Les développements limités connus en une variable.

Exercice 4.8.

(1) Trouver le polynôme de Taylor d'ordre 2 de $f(x,y) = \frac{\sin(x+\frac{1}{y})}{1+x}$ autour du point $(0,1)$. Rappel : $\frac{1}{1+x} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k x^k$

4.9. **Extrema d'une fonction de plusieurs variables.**

Définition 4.17. Soit $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$. Alors $\overline{a} \in E$ est un point stationnaire de f si et seulement si

$$\nabla f(\overline{a}) = \overline{0}.$$

Définition 4.18. $f : E \to \mathbb{R}$ admet un max (min) local au point $\overline{a}$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(\overline{x}) \leq f(\overline{a})$ $(f(\overline{x}) \geq \overline{a})$ pour tout $\overline{x} \in E \cap B(\overline{a}, \delta)$.

Exercice 4.9.

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2 \implies \nabla f(x,y) = (2x, 2y) \implies \overline{0}$ est un point stationnaire.
(2) $f(x,y) = x^2 \implies \nabla f(x,y) = (2x, 0) \implies \forall b \in \mathbb{R}, (0,b)$ est point stationnaire.

Remarque 4.12. Ces points sont des minima locaux.

Proposition 4.4 (Condition nécessaire pour un extremum local)**.** *Soit $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$, admettant un extremum local au point $\overline{a} \in E$, tel que les dérivées partielles en $\overline{a}$ existent. Alors $\overline{a}$ est un point stationnaire de f.*

Démonstration. Soit $g_i(x) = f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n)$. Alors $\nabla f(\overline{a})$ existe $\implies$ $g_i(x)$ est dérivable en $a_i = x$ et admet un extremum local en ce point. Grâce au cours d'analyse 1, on conclut que $g_i'(a_i) = 0, = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})$. Comme ceci est vrai pour toutes les variables on a $\nabla f(\overline{a}) = \overline{0}$. □

Remarque 4.13.

(1) La réciproque est fausse : $\nabla f(\overline{a}) = \overline{0} \not\Longrightarrow f$ admet un extremum local en ce point. Contre exemple : $x^2 - y^2$, $\overline{0}$, point stationnaire, n'est pas un extremum local.

(2) Même si f admet un minimum (max) local le long de toute droite passant par $\overline{a}$, cela n'implique pas que f admet un min (max) local en $\overline{a}$. (voir Exemple 13.4.3 DZ)

Définition 4.19. $\overline{a}$ est un point critique de $f : E \to \mathbb{R}$ si
- ou $\overline{a}$ est un point stationnaire
- ou au moins une des dérivées partielles de f n'existe pas en $\overline{a}$.

Remarque 4.14. Si $\overline{a} \in E$ est un point de max (min) local, alors $\overline{a}$ est un point critique.

Théoreme 18 (Condition suffisante pour l'existence d'un extremum local)**.** *Soit $f : E \to \mathbb{R}, f \in C^2(E), \overline{a} \in E$ un point stationnaire : $\nabla f(\overline{a}) = \overline{0}$. Soit*

$$Hess_f(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overline{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overline{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\overline{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\overline{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\overline{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overline{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\overline{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overline{a}) \end{pmatrix}.$$

Alors
- *Si toutes les valeurs propres de $Hess_f(\overline{a})$ sont strictement positives, alors f possède un min local en $\overline{a}$*
- *Si toutes les valeurs propres de $Hess_f(\overline{a})$ sont strictement négatives, alors f possède un max local en $\overline{a}$*
- *Sinon, $\overline{a}$ n'est pas un point d'extremum local.*

Remarque 4.15. (1) Comme $f \in C^2(E)$, par le théorème de Schwartz on a que la Hessienne est symétrique $\implies$ $\text{Hess}_f(\overline{a})$ est diagonalisable à l'aide d'une matrice orthogonale O. On peut dire aussi $\text{Hess}_f(\overline{a}) = ODO^T$, O orthogonale, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ diagonale. Donc il existe un changement de variables linéaire orthogonal $(x_1, \cdots, x_n) \to (y_1, \cdots, y_n)$ tel que la matrice hessienne devient diagonale avec ses valeurs propres sur la diagonales. Alors par la formule de Taylor on peut écrire (supposons $f \in C^3$)

$$f(\overline{y}) - f(\overline{a}) \approx \frac{1}{2}\left(\lambda_1(y_1 - a_1)^2 + \lambda_2(y_2 - a_2)^2 + \cdots + \lambda_n(y_n - a_n)^2\right) + \varepsilon(||\overline{a} - \overline{a}||^2),$$

car les premières dérivées sont 0 (le gradient est nul) $\Longrightarrow$ Si toutes les valeurs propres sont strictement positives, alors $f(\overline{y}) - f(\overline{a}) \geq 0 \implies \overline{a}$ est un pont de min local. On voit aussi bien que si toutes les valeurs propres sont strictement négatives, alors $f(\overline{y}) - f(\overline{a}) \leq 0$ et $\overline{a}$ est un point de max local. De surcroît, sinon, on peut toujours se donner une direction dans laquelle tous les termes sont zéros sauf celui qui est négatif, pareil pour le positif, et donc on n'a pas de max (min) local.

(2) Cas $n = 2$: Les conditions du théorème sur la matrice hessienne sont équivalentes aux conditions suivantes : Soit $\mathrm{Hess}_f(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}(\overline{a}) \triangleq \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$

(1) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \iff |\mathrm{Hess}_f(\overline{a})| > 0, r > 0$.
(2) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \iff |\mathrm{Hess}_f(\overline{a})| > 0, r < 0$.
(3) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \iff |\mathrm{Hess}_f(\overline{a})| < 0$.

Démonstration. Le determinant et la trace sont des invariants de similitude. Or, étant symétrique, cette matrice est orthodiagonalisable, et donc diagonalisable. Dans sa diagonale se trouvent ses valeurs propres. Ce raisonnement nous dit que $\lambda_1\lambda_2 = rt - s^2$. De la même manière, $\lambda_1 + \lambda_2 = r + t$. Alors le troisième cas est trivial et on n'a pas besoin de le montrer. Toutefois on a, dans le cas où le déterminant est strictement positif :

(1) que les valeurs propres sont de même signe (et uniquement dans ce cas le sont-elles)
(2) que le produit $rt > 0$, dans la mesure où $rt > s^2$, et donc que r, t **sont aussi de même signe**.

Le signe de la trace permet alors de déterminer le signe ; et il suffit même de vérifier un seul des deux r, t. Ce raisonnement suit une équivalence. □

Résumé du cas $n = 2$.

(1) Si $rt - s^2 > 0, r > 0$ alors le point auquel le déterminant est pris est un minimum local.
(2) Si $rt - s^2 > 0, r < 0$, alors le point est un maximum local.
(3) Si le déterminant est négatif, les valeurs propres sont de signes différents $\implies$ on n'a ni un maximum, ni un minimum local.
(4) Si le déterminant est nul on n'a pas de conclusion.

cas $n = 3$: conditions équivalentes aux conditions suffisantes. Soit

$$\mathrm{Hess}_f(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overline{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overline{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\overline{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\overline{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(\overline{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(\overline{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(\overline{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(\overline{a}) \end{pmatrix}.$$

On considère les 3 sous matrices en partant du coin haut gauche en notant Δ_n le déterminant de la sous-matrice $n \times n, n = 1, 2, 3$. On a alors :

(1) Si les trois sont strictement positifs (matrice définie positive), $\overline{a}$ est un point de minimum de f.
(2) Si $\Delta_1 < 0, \Delta_2 >, \Delta_3 < 0$, (définie négative) $\overline{a}$ est un point de maximum de f.
(3) Autrement, si $\Delta_3 \neq 0$, le point $\overline{a}$ n'est ni un maximum, ni un minimum.

Exercice 4.10. Trouver les points critiques de $f(x, y) = y^3 + 3y^2 - 4xy + x^2$, et, pour chacun, déterminer si il s'agit de minimum ou maximum. Réponse : comme $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, les points critiques sont des points stationnaires et on a juste à trouver les points où $\nabla f = \overline{0}$. On trouve ainsi les points $\overline{0}$ (pas d'extremum local, déterminant négatif) et $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ (minimum local, déterminant de $4 > 0$ et $r = 2 > 0$).

Minimum et maximum d'une fonction continue sur un compact. On rappelle le théorème : Une fonction sur un sous-ensemble compact $D \subset \mathbb{R}^n$ atteint son minimum et son maximum. Comment trouver ces derniers ?

(1) Trouver les points critiques $\{\overline{c}_i\}$ de f sur $\mathring{D}$ (l'intérieur de D). Calculer les valeurs de $f(\overline{c}_i)$.
(2) Trouver les points $\{\overline{d}_j\}$ de minimum et maximum de $f(\partial D)$ (de f sur la frontière de D). Calculer les images correspondantes.

(3) Choisir, en triant, le minimum et le maximum, et le point correspondant.

Exercice 4.11. Trouver, sur le disque $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$, les extrema absolus (par opposition à locaux) de $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2y + 3$. Réponse : les points critiques sont les points stationnaires comme la fonction est continûment dérivable sur le compact, et la fonction atteint son min et max sur l'ensemble donné car c'est un compact.

(1) Dans l'intérieur on ne trouve que $f(0, \frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$.
(2) Sur la frontière, en utilisant $\tilde{f}(y), x^2 = 4 - y^2$ définie sur $[-2, 2]$ on trouve $f(\sqrt{3}, 1) = 6$ et $f(-\sqrt{3}, 1) = 6$, et on n'oublie pas $\tilde{f}(-2) = f(0, -2) = 15$; $\tilde{f}(2) = f(0, 2) = 7$
(3) on a minimum et maximum absolu en comparant les valeurs précédentes.

4.10. **Théorème des fonctions implicites.**

Définition 4.20. Une surface (ligne) de niveau $C \in \mathbb{R}$ d'une fonction $F(x, y, z)$ $(F(x, y))$ est la surface (ligne) définie par $F = C$ Par exemple on les retrouve sur les cartes géographiques.

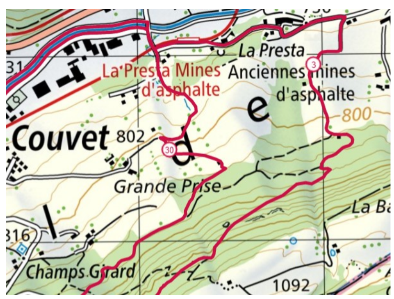


FIGURE 2. Lignes de Niveau sur une Carte

Remarque 4.16 (préliminaires)**.** Si on a une fonction $F(x, y)$ et qu'on veut trouver l'exprimer pour un niveau donné (souvent 0) selon un degré de liberté en moins $F(x, f(x)) = 0$ autour d'un point donné, il y a quelques remarques qu'on peut déjà faire sur la fonction sans avoir à trouver la fonction $y = f(x)$ autour du point $\overline{a}$ explicitement, si elle existe et que F est C^1 :

(1) On a sa dérivée : en remarquant $F(x, f(x)) = F(u, v)$ où $u = x, v = f(x)$, on retrouve $\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))f'(x)$ ainsi a-t-on
$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))},$$
si, au point $\overline{a}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ n'est pas 0.

Théoreme 19 (Fonctions implicites, TFI)**.** *Soit $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n, f \in C^1$ au voisinage du point $\overline{a} = (a_1, \cdots, a_n)$, tel que*

(1) $F(\overline{a}) = 0$
(2) $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\overline{a}) \neq 0$

Alors il existe un voisinage $B(\check{a}, \delta)$ de $\check{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et une fonction $f : B(\check{a}, \delta) \to \mathbb{R}$ telle que

(1) $a_n = f(a_1, \cdots, a_{n-1})$
(2) $F(x_1, \cdots, x_{n-1}, f(x_1, \cdots x_{n-1})) = 0 \forall (x_1, \cdots x_{n-1}) \in B(\check{a}, \delta)$.
De plus, $f \in C^1$ dans un voisinage de $\check{a}$, et

(3)

$$\frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1,\cdots,x_{n-1}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_p}(x_1,\cdots,x_{n-1},f(x_1,\cdots,x_{n-1}))}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1,\cdots,x_{n-1},f(x_1,\cdots x_{n-1}))}$$

Cas $n=2$. Soit $F(x,y)\in C^1, F(a,b)=0, \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$. Alors $F(x,y)=0$ définit localement $y=f(x)$ telle que

(1) $f(a)=b$
(2) $F(x,f(x))=0$ pour tout x dans un voisinage de $x=a$
(3) $f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$

Exercice 4.12. Soit $F(x,y,z)=x\cos(y)+y\cos(z)+z\cos(x)-1$. Considérons $\overline{a}=(0,0,1)$

(1) Vérifier que $F(\overline{a})=0$
(2) Vérifier que $F(x,y,z)$ définit une fonction $z=f(x,y)$ autour de $\overline{a}$, telle que $F(x,y,f(x,y))=0$.
(3) Trouver $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Réponse :

(1) $1-1=0$✓
(2) $\frac{\partial F}{\partial z}=\cos(x)-y\sin(z)$. Évalué en $(0,0,1)$ on a 1 donc la fonction $y=f(x)\in C^1$ est bien définie au voisinage du point $\overline{a}$. ✓
(3) En utilisant les formules données on obtient 1 pour $\frac{\partial f}{\partial x}$. Puis pour $\frac{\partial f}{\partial y}$: $-\frac{\cos(z)-x\sin(y)}{\cos(x)-y\sin(z)}\Big|_{(0,0,1)}=-\cos 1$

Application : équation d'un (hyper)plan tangent. Soit $F(x_1,\cdots,x_n)\in C^1(E\in\subset\mathbb{R}^n)$. $\overline{a}\in\mathbb{R}^n, F(\overline{a})=0$. Si il existe une coordonnée selon laquelle la dérivée partielle de f en $\overline{a}$ n'est pas nulle, alors $\nabla F(\overline{a})\neq\overline{0}$, et selon le théorème des fonctions implicites l'équation $F(\overline{x})=0$ définit une (hyper)surface donnée par une fonction qui exprime $x_i=f(...)\in C^1$ en fonction de toutes les autres variables. Donc, si $\nabla F(\overline{a})\neq\overline{0}$, on écrit l'équation de l'(hyper)plan tangent à la surface du niveau $F(\overline{x})=0$ au point $\overline{a}$. On a donc $\nabla F(\overline{a},\overline{v})=0 \iff \overline{v}$ est tangent à la (hyper)surface de niveau (le gradient est orthogonal à la surface de niveau, où la fonction ne change pas) $\iff \langle\nabla F(\overline{a}),\overline{v}\rangle=0\forall\overline{v}\in$ l'(hyper)plan tangent à $F(\overline{x})=0$ au point $\overline{a}$.

$$\overline{v}=(\overline{x}-\overline{a})\perp\nabla F(\overline{a}).$$

On en déduit l'équation de l'(hyper)plan tangent à $F(\overline{x})=0$ au point $\overline{a}$ tel que $F(\overline{a})=0$:

$$\langle\nabla F(\overline{a}),\overline{x}-\overline{a}\rangle=0$$

Exercice 4.13 (suite de l'exercice 4.12.)**.**

(1) En faisant simplement $\langle\nabla F(\overline{a}),\overline{x}-\overline{a}\rangle$, on obtient $z=1-x-y\cos(1)$, qu'on peut vérifier comme étant $f(0,0)+\langle\nabla f(0,0),(x-0,y-0)\rangle$.
(2)

Cas $n=3$, retrouvons la formule du plan tangent. Considérons $F(x,y,z)=z-f(x,y)\implies\frac{\partial f}{\partial z}=1$, on n'a donc en aucun cas le gradient qui est nul. On peut donc trouver la surface de niveau au point $(a,b,f(a,b))$ $(F(a,b,f(a,b))=0)$. Par la TFI, on a alors l'équation du plan tangent, donné par le fait que $\nabla F=(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},1)$,

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-a)+z-f(a,b)=0,$$

et on retrouve (beaucoup plus facilement cette fois) l'équation de plan tangent au graphique d'une fonction :

$$z=f(a,b)+\langle\nabla f(a,b),(x-a,y-b)\rangle$$

4.11. **Extrema liés : Méthode des multiplicateurs de Lagrange.**

Théoreme 20 (Condition nécessaire pour un extremum sous contrainte, à $n = 2$)**.** *Soient les fonctions $f, g : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^2, f \in C^1$. Supposons que f admette un extremum en $(a, b) \in E$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$, et $\nabla g(a, b) \neq O$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

Démonstration. Supposons, sans perte de généralité, que $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Alors, comme (a, b) satisfait $g(x, y) = 0$, $g(a, b) = 0$. Par le TFI, $\exists y = h(x), y \in C^1$ au voisinage de $x = a$, telle que la dérivée de h est

$$h'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x))},$$

et $g(x, h(x)) = 0$. Si (x, y) satisfait la contrainte au voisinage de (a, b), alors on peut remplacer $y = h(x)$ dans l'expression $f(x, y)$ pour obtenir une fonction d'une seule variable $f(x, y) = f(x, h(x))$. Alors, pour trouver les extrema locaux de f, on cherche les points tels que$f'(x, h(x)) = 0$. Or on a

$$f'(x, h(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} h'(x).$$

Donc, si (a, b) est un point d'extremum sous la contrainte, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) h'(a).$$

Or on a aussi $h'(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}$ et donc

$$\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) = 0$$

Par définition de dépendance linéaire, on voit que $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)$ dépend linéairement de $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, et en relisant différement on voit que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ dépend linéairement de $\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)$. □

Remarque 4.17. Géometriquement, $g(x, y) = 0$ est une courbe de niveau (cf figure 2) telle que $\nabla g(x, y) \perp$ à la courbe sur la courbe car la fonction ne change pas sur celle-ci et le gradient donne le sens de la plus grande variation. Si (a, b) est un extremum local de $f(x, y)$ sur la courbe, la dérivée directionnelle dans la direction d'un vecteur tangent à la courbe est nulle (car continuer à se déplacer dans le sens de la courbe depuis l'extremum ne mène qu'à l'extremum). On a alors que soit le gradient de f est nul (auquel cas $\lambda = 0$), soit il est perpendiculaire à la courbe sans être nul. Dans ce dernier cas on a $\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$

Théoreme 21 (Généralisation)**.** *Soit $f, g_1, \cdots, g_m : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n, \in C^1, m \leq n - 1$. Soit $\overline{a} \in E$ un extremum de f sous les contraintes $g_1(\overline{x}) = \cdots = g_m(\overline{x}) = 0$. Supposons que les vecteurs $\nabla g_1(\overline{a}) \cdots \nabla g_m(\overline{})$ sont linéairement indépendants. Alors il existe un vecteur $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \cdots \lambda_m)$ tel que*

$$\boxed{\nabla f(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla g_k(\overline{a})}$$

Remarque 4.18. En particulier, si on cherche l'extremum de $f(\overline{x})$ sous la contrainte $g(\overline{x}) = 0$, On obtient

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{x}) = \lambda \nabla g(\overline{x}) \\ g(x) = 0 \end{cases},$$

si $\nabla g(\overline{x}) \neq 0 \forall \overline{x} : g(\overline{x}) = 0$

Remarque 4.19. Parfois, il faut travailler pour montrer que la ou le contrainte(s) définissent un compact dans $\mathbb{R}^m$, et que f est continue, pour pouvoir dire que f atteint son min et max aux points stationnaires par le théorème des multiplicateurs de Lagrange.

5. Calcul intégral de fonctions de plusieurs variables

5.1. Intégrale sur un pavé fermé.

Définition 5.1. Un pavé fermé est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, en particulier le produit cartésien de n intervalles fermés bornés :

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n], a_i < b_i \forall i = 1 \cdots n$$

Définition 5.2. Le volume d'un pavé fermé est défini comme

$$|P| = \prod_{1 \leq i \leq n} (b_i - a_i)$$

Définition 5.3. Soit σ_j une subdivision de l'intervalle de $[a_j, b_j], a_j < b_j$.

$$\sigma_j = \{a_j = x_0^j < x_1^j < \cdots < x_{n_j}^j = b_j\}.$$

Alors $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ est appelé une subdivision de P.

$D(\sigma)$ est la collection des pavés engendrés par la subdivision. $P = \cup_{Q \in D(\sigma)} Q$ Soit $f : P_{\text{pavé fermé}} \to \mathbb{R}$ bornée sur P. Alors on définit les sommes de Darboux de f sur P.

Définition 5.4. Soit $D(\sigma)$ une collection des pavés fermés engendrés par la subdivision σ. Alors

$$\underline{S}_\sigma(f) \triangleq \sum_{Q \in D(\sigma)} m(Q)|Q|,$$

où $m(Q) = \inf_{\overline{x} \in Q}(f(\overline{x})$. Similairement,

$$\overline{S}_\sigma(f) \triangleq \sum_{Q \in D(\sigma)} M(Q)|Q|,$$

où $m(Q) = \sup_{\overline{x} \in Q}(f(\overline{x})$. Aussi définit-on

$$\underline{S}(f) \triangleq \sup\{\underline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ est une subdivision de } P\}$$

la somme de Darboux inférieure pour $f(\overline{x})$ sur P;

$$\overline{S}(f) \triangleq \inf\{\overline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ est une subdivision de } P\}$$

la somme de Darboux supérieure pour $f(\overline{x})$ sur P;

Proposition 5.1 (Propriétés des sommes de Darboux)**.**

(1) Soit $\tau = \sigma_1 \cup \sigma_2$, réunion de 2 subdivisions de P. Alors $\underline{S}_\sigma(f) \leq \underline{S}_\tau(f); f : P \to \mathbb{R}$ bornée.

(2) $\overline{S}_{\sigma_2} \geq \overline{S}_\tau(f)$

(3) $\underline{S}_\tau(f) \geq \overline{S}_\tau(f)$ par définition.

De ces trois propriétés on déduit $\underline{S}_{\sigma_1}(f) \leq \underline{S}_\tau(f) \leq \overline{S}_\tau(f) \leq \overline{S}_{\sigma_2}(f)$, ce qui implique

$$\underline{S}_{\sigma_1} \leq \overline{S}_{\sigma_2}.$$

Pour tout couple de subdivisions σ_1, σ_2. En prenant supremum et infimum des deux côtés on trouve

$$\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f).$$

Définition 5.5 (Intégrale)**.** Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé, $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable sur P si et seulement si la somme de Darboux inférieure de $f$est égale à la somme de Darboux supérieure de f :

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f).$$

Dans ce cas, l'intégrale de f sur P est définie par

$$\int_P f(\overline{x}) d\overline{x} = \int \int \cdots \int f(x_1, x_2, \cdots x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

Exercice 5.1. Déterminer par la définition si la fonction $f(\overline{x}) = C \in \mathbb{R}$ est intégrable sur P un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$.
Réponse : Soit σ une subdivision de P. Considérons $\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q\in D(\sigma)} m(Q)|Q| = \sum_{Q\in D(\sigma)} M(Q)|Q| = C\sum_{Q\in D(\sigma)} |Q| = C|P| = \overline{S}_\sigma(f)$; donc la fonction constante est bien intégrable, et l'intégrale est $C \cdot |P|$.

Théoreme 22. *Toute fonction continue est intégrable sur un pavé fermé.*

Idée de preuve. Soit $f : P \subset \mathbb{R}^n, P$ un pavé fermé ; une fonction continue. Alors

1. f est bornée sur P. Effectivement, P est un compact (borné et fermé) et une fonction continue sur un compact atteint son minimum et son maximum.
2. Intégrabilité : Soit $\varepsilon > 0$. Si f est continue sur P, alors
$$\forall \overline{x}_0 \in P, \exists \delta_{\overline{x}_0} : ||\overline{x} - \overline{x}_0|| \leq \delta_{\overline{x}} \implies |f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
On considère le recouvrement de P par les boules ouvertes $B(\overline{x}_0, \delta_{\overline{x}_0})$. Alors
$$P \subset \bigcup_{\overline{x}_0\in P} B(\overline{x}_0, \delta_{\overline{x}_0}).$$
Or, par le théorème de Heine-Borel-Lebesgue, il existe un sous-recouvrement fini :
$$P \subset \bigcup_{\overline{x}_j\in P} B(\overline{x}_j, \delta_{\overline{x}_j}).$$
Si $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in B(\overline{x}_j, \delta_j) \implies |f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_j)| \leq |f(\overline{x}_j) - f(\overline{x}_j)| + |f(\overline{x}_j) - f(\overline{x}_2)| \leq 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ En particulier, $(\max_Q f - \min_Q f) \leq \varepsilon$ pour tout Q correspondant à un recouvrement fini. Après ceci on a
$$\overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q\in D(\sigma)} (\max_Q(f) - \min_Q(f)) \cdot |Q| \leq \varepsilon \sum_{Q\in D(\sigma)} |Q| = \varepsilon|P|.$$
Or d'une part $\overline{S}_\sigma \geq \overline{S}(f)$, et d'autre part $\underline{S}_\sigma \leq \underline{S}(f)$. Donc $\overline{S}(f) - \underline{S}(f) \leq \overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) \leq \epsilon|P|$, où $\epsilon > 0$ est arbitraire. Ceci implique que $\overline{S}(f) = \underline{S}(f) \implies f$ est intégrable sur P.

□

Proposition 5.2. *Soit $f : P \to \mathbb{R}, P$ pavé fermé ; une fonction bornée et intégrable sur P; est telle que la fonction est bornée : $|f(x)| \leq k$. Alors on a*
$$-k|P| \leq \int_P f(\overline{x})d\overline{x} \leq k|P|$$

Définition 5.6. On définit le volume de l'ensemble sous la surface $z = f(x, y)$ pour une fonction f définie sur un pavé fermé à termes positifs comme
$$V \triangleq \int\int_P f(x, y)dxdy$$

Théoreme 23 (Fubini)**.** *Soit $f : \underset{\text{pavé fermé}}{P} \to \mathbb{R}^n, P \subset \mathbb{R}^n$. Alors P s'écrit $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ qu'on appelle $x_1 \times x_2 \cdots x_n$. Alors f est intégrable sur P et on a :*
$$\int_P f(\overline{x})d\overline{x} = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \cdots, x_n)dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n,$$
Important : on peut échanger l'ordre sur un pavé fermé

cas $n = 2$. Soit $f : P = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continue. Alors
$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Idée de preuve. Trouver une subdivision de P assez fine telle que $P = \bigcup_{ij} P_{ij}$ et telle que $f(x,y) \approx C_{ij} \in \mathbb{R}$ sur P_{ij} ; en gros des carrés assez petits pour que le fonction soit constante. en divisant en un cadrillage de x_i et y_j, on a
$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \sum_j \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)dx \right) dy = \sum_{i,j} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{i_j} f(x,y)dxdy,$$
ce qui, en vertu de la constante de la fonction sur carrés du cadrillage de x_i, y_j, est égal à
$$\sum_{i,j} c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i,j} c_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$
□

5.2. **Intégrale sur un ensemble borné.**

Définition 5.7. Soit $E \subset P \subset \mathbb{R}^n$ (comme E est borné, il appartient à un pavé fermé) ; $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.Posons
$$\hat{f}(\overline{x}) = \begin{cases} f(\overline{x}) & \Longleftarrow \overline{x} \in E, \\ 0, & \Longleftarrow \overline{x} \in P \setminus E \end{cases}.$$
La fonction f est intégrable sur E si $\hat{f}$ est intégrable sur P. Dans ce cas on pose
$$\int_E f(\overline{x})d\overline{x} \triangleq \int_P \hat{f}(\overline{x})d\overline{x}$$

Remarque 5.1.

(1) La définition ne dépend pas du choix de pavé fermé autour de E.

(2) Condition suffisante d'intégrabilité : Si $f : E \to \mathbb{R}$ est bornée sur E, continue sur $\overset{\circ}{E}$, et la frontière de ∂E est assez régulière, alors $f(\overline{x})$ est intégrable sur E (DZ §14.2).

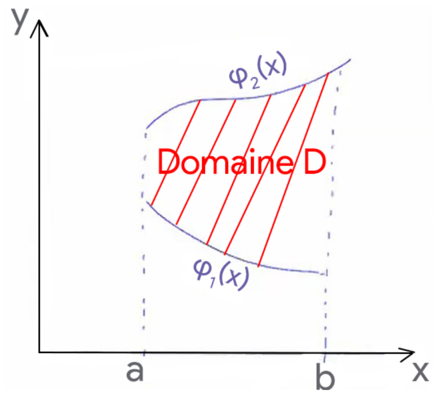
Définition 5.8 (Mesure nulle)**.** Une courbe est "assez régulière" quand elle est de de mesure nulle : $\forall \epsilon > 0$, on peut choisir un recouvrement de la frontière de volume total $\leq \epsilon$. En pratique, dans ce cours on n'étudiera que des domaines réguliers.

Théoreme 24 (Fubini pour les domaines réguliers)**.**

(1) Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}, \varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues à valeurs réelles, telles que
$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x) \forall x \in]a,b[.$$
Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\}$ un domaine régulier de type 1. Alors pour toute fonction $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$, on a
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

(2) Soir $[c,d] \subset \mathbb{R}, \psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues telles que $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ sur $]c,d[$. Soir $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, \phi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$ un domaine régulier de type 2. Alors pour toute fonction continue $f : D \to \mathbb{R}$, on a
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

En somme, comme bornes d'intégration double on a à l'intérieur il y a ce qui varie, et à l'extérieur ce qui ne varie pas.



Domaine d'intégrabilité dans le cas 1

Remarque 5.2. Si le domaine n'est pas régulier de type 1 ou 2, on divise le domaine en parties de type 1 et de type 2, et on additionne.

Théorème de Fubini pour les intégrales triples. Soit $[a,b]$ un intervalle, $a < b; \phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues,

$$\phi_1(x) < \phi_2(x) \forall x \in]a,b[$$

On définit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\}$. Soient $G, H : \overline{D} \to \mathbb{R}$ continues, $G(x,y) < H(x,y) \forall (x,y) \in D$. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D; G(x,y) < z < H(x,y)\}$. Si $f : \overline{E} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f est intégrable sur E et on a :

$$\int_E f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

Remarque 5.3. Selon la géométrie du domaine, on peut choisir l'ordre d'intégration

Exercice 5.2. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < y < x < 1\}, f(x,y,z) = e^{x^3}$

5.3. **Changement de variables dans l'intégrale multiple.**

Théoreme 25. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\overline{E}$ est compacte ; $\psi : E \to \mathbb{R}^n, \psi \in C^1(E)$, et $\psi : E \to \psi(E)$ est bijective (**il suffit de vérifier** que $J_\psi(\overline{u})$ est inversible $\forall \overline{u} \in E$).*
Soit $f : \overline{D} = \overline{\psi(E)} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\boxed{\int_D f(\overline{x})d\overline{x} = \int_E f(\psi(\overline{u}))|\det J_\psi(\overline{u})|d\overline{u}}$$

5.4. **Application : changement de variables polaires.** Soient

$$\psi(r,\phi) = \begin{cases} x = r\cos(\phi) \\ y = r\sin\phi \end{cases} \quad , \phi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \underset{bij}{\longrightarrow} \mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}.$$

Alors

$$\mathcal{J}_\psi(r,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} \implies \det \mathcal{J}_{\psi(r,\phi)} = r(\cos^2\phi + \sin 2\phi) = r.$$

Par exemple on peut calculer l'aire d'une fonction constante sur un secteur circulaire $S_{\alpha,R}$:

$$A = \int\int_{S_{\alpha,R}} dxdy = \int\int_{E_{\alpha,R}} |\det \mathcal{J}_\phi| dr d\phi = \frac{1}{2}R\alpha^2.$$

En particulier, si $\alpha = 2\pi$ on obtient l'aire du disque de rayon $R : \pi R^2$

Application : coordonnées sphériques (et cylindriques). Avec $G(r,\theta,\phi) :]0,\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3 \setminus \{\overline{0}\}$, définie comme $G(r,\theta,\phi) = \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$, on peut calculer le jacobien qui est le déterminant de $\mathcal{J}_G = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$. Après avoir calculé on trouve $|\mathcal{J}_G| = r^2\sin\theta$

Exercice 5.3. Volume d'une ellipsoïde $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, a, b, c > 0\}$: On commence par poser $H : \begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases} \implies J_H = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ ce qui nous permet d'observer l'ellipsoïde comme une sphère.

Ensuite on peut passer en coordonnées sphériques en voyant $G_1 = \begin{cases} u = r\sin\theta\sin\phi \\ v = r\sin\theta\cos\phi \\ w = r\cos\theta \end{cases}$ ce qui nous permet d'avoir au final $G = H(G_1) \implies |\mathcal{J}_G| = r^2 sin^2\theta abc$, de telle sorte qu'on puisse intégrer sur le domain $\{(r,\theta,\phi), r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ et on a que le volume est $abc\frac{4}{3}\pi$

Coordonnées cylindriques. On définit également le changement de coordonnées cylindriques $G : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 = \begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases} \implies \mathcal{J}_G = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies |\mathcal{J}_G| = r$

Exercice 5.4. Trouver le volume du domaine ayant pour frontières : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2za, a > 0 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$, contenant le point $(0,0,a)$

En passant aux coordonnées cylindriques, on a $\begin{cases} r^2 + z^2 - 2za + a^2 = a^2 \\ r^2 = z^2 \end{cases} \implies \begin{cases} r^2 + (z-a)^2 = a^2 \\ r = z \quad \text{pour contenir } (0,0,a) \end{cases}$, l'une décrivant une sphère de rayon a et de centre $(r = 0, z = a)$, le deuxième un cône. On trouve l'intersection non triviale des deux surfaces au cercle $z = a = r$. Pour calculer le volume on a alors à additionner le volume d'une moitié de la sphère de rayon a avec le volume du cône pour $0 \leq z \leq a$. La première : $\frac{2}{3}\pi a^3$. La deuxième : on intègre sur $E = \{0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq a, 0 \leq r \leq z\}$:

$$\int_D = 2\pi \int_0^a \int_0^z rdrdz = \pi \int_0^a z^2 dz = \frac{\pi}{3}a^3$$

Le volume total est donc $\frac{\pi a^3}{3} + \frac{2\pi a^3}{3} = \pi a^3$

Remarque 5.4. Dans le changement de variables sphériques et cylindriques, une coordonnée (z) est spéciale. Selon la géométrie du domaine et la fonction donnée, on peut choisir un changement de variable cylindrique ou sphérique qui s'oriente autour de l'axe z, mais aussi à x ou y (à noter que la valeur absolue du jacobien ne changera pas)

Par exemple on peut orienter notre changement de variable selon y :

$$G_{sph} = \begin{cases} x = r\sin\theta\sin\phi \\ y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta\cos\phi \end{cases}, G_{cyl} = \begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = y \\ z = r\sin\phi \end{cases}$$

Exercice 5.5 (Intégrales sans calcul)**.**

(1) $\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} \sin y \cos x dx dy = \int_{-1}^{1} \sin(y)(\sin(1) - \sin(y^2))dy$. Or $\sin(-y)(\sin(1) - \sin((-y)^2)$ $= -(\sin(y)(\sin(1) - \sin(y^2))$ et donc l'intégrande est impaire et l'intégrale est nulle. À noter qu'on aurait aussi pu changer l'ordre de l'intégration pour calculer facilement, en remarquant que le domaine $D = \{-\sqrt{x} < y < \sqrt{x}, 0 < x < 1\}$, et l'intégrande s'annule.

(2)

Annexe A. Méthodes de démonstration

A.0.1. *Introduction.*

Définition A.1. Une proposition est un énoncé qui peut être vrai ou faux.

Définition A.2. Une démonstration est une suite d'implications logiques, qui sert à dériver une proposition à partir d'axiomes.

Methode A.1 (Disjonction de cas)**.** Soient $r, s \in \mathbb{R}$. Alors $t \stackrel{def}{=} \max(r,s) + min(r,s) = r + s$.

Démonstration.

(1) Soient $r \stackrel{def}{=} s = \min(r,s) = \max(r,s)$. Alors $r + s = 2r = (r,s) + min(r,s)$, et notre proposition est bien vérifiée.
(2) Soit $r < s \implies \underbrace{\max(r,s)}_{s} + \underbrace{\min(r,s)}_{r} = r + s$ et notre proposition est également vérifiée.
(3) Soit $s < r \implies \underbrace{\max(r,s)}_{r} + \underbrace{\min(r,s)}_{s} = r + s$ et notre proposition est également vérifiée.

□

Methode A.2. Comment démontrer les propositions de la forme $P \iff Q$? Deux possibilités :

(1) Dans les deux sens : on démontre l'implication, puis la réciproque
(2) suite d'équivalence.

Methode A.3 (Preuves par l'absurde)**.** *Existence d'une infinité des nombres premiers.*
Supposons qu'il existe n nombres premiers $p_1, \cdots, p_n$. Considérons $k = \prod(p_i) + 1$. Alors $k > p_i$ pour tout $1 \leq i \leq n \implies k \neq p_i \forall i$. Or, comme k est plus grand que tous les nombres premiers, il n'est pas un nombre premier. Mais d'autre part, il n'est divisible par aucun nombre premier. Il doit donc être premier ... ? Absurde ! □

Irrationalité de $\sqrt{3}$. Rappelons tout d'abord le principe de bon ordre de $\mathbb{N}$: tout sous-ensemble non-vide de ce dernier possède un plus petit élément. Supposons maintenant que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}, q \neq 0$ soit le plus petit possible (ceci est possible selon le principe de bon ordre). Alors on a $3 = \frac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 3q^2 \implies 3|p^2 \implies 3|p(0^2 \equiv 0, 1^2 \equiv 1, 2^2 \equiv 1 \mod 4)$. Alors $p = 3m, m \in \mathbb{N}$. Donc $3q^2 = 9m^2 \implies q^2 = 3m^2 \implies 3|q$ par le même argument. Ceci est bien sûr absurde, car le PGCD de q et p serait alors 3 et non 1. □

Methode A.4 (Principe des tiroirs)**.**

(1) Soit a_1, a_2, a_3, a_4 des entiers distincts. Alors il y a deux d'entre eux dont la différence est divisible par trois.

   Démonstration. On s'intéresse aux mods de ces nombres. Puisqu'il y a 4 nombres et 3 mods possibles modulo 3, au moins deux ont le même mod. □

(2) Dans un groupe de $n \geq 2$ personnes, il existe au moins 2 personnes avec le même nombre de connaissances dans le groupe.

   Démonstration. Par disjonction de cas : si chacun connaît au moins quelqu'un, alors le nombre de connaissances possibles est entre 1 et $n-1$. Donc il y a $n-1$ nombres de nombres de connaissances possibles par personne. Ainsi au moins $\lceil \frac{n}{n-1} \rceil = 2$ personnes ont le même nombre de connaissances. Autre possibilité : il existe au moins deux personnes qui ne connaissent personne. Dans ce cas c'est bon déjà. Troisième possibilité : il existe une unique personne qui ne connaît personne. Dans ce cas il y a $0 \leq k \leq n-2$ connaissances possibles pour chaque personne, soit $\lceil \frac{n}{n-1} \rceil = 2$ personnes qui ont le même nombre de connaissances. □

Methode A.5 (Récurrence sur deux variables.)**.** On étudiera deux manières de démontrer une proposition $\mathcal{P}(n, m)$ dépendant de deux variables :

(1) Méthode carré : après avoir initialisé, on démontre $\mathcal{P}(n, m) \implies \mathcal{P}(n+1, m), \mathcal{P}(n, m) \implies \mathcal{P}(n, m+1)$

(2) Méthode diagonale : après avoir initialisé, on démontre $\mathcal{P}(n, m) \implies \mathcal{P}(n+1, m)$, puis on montre $\forall m, n, \mathcal{P}(n+1, m) \implies \mathcal{P}(n, m+1)$ (flèche diagonale arrière)

A.0.2. *Méthodes de démonstration pour démontrer $P \implies Q$.*

A.0.3. *Directe.* on passe par des implications intermédiaires plus faciles.

A.0.4. *Par contraposée.* : on montre $\neg Q \implies \neg P$.

A.0.5. *Disjonction de cas.* : on sépare l'hypothèse (P) en plusieurs cas possibles, et on montre que l'implication est vraie dans **tous les cas**.

A.0.6. *Par l'absurde.* : On montre que la négation de ce qu'on essaie de montrer implique quelque chose d'absurde.

A.0.7. *Principe des tiroirs.* Si on a $n+1$ objets dans n tiroirs, alors il y a au moins un tiroir avec 2 objets. En général, si n objets sont placés dans k tiroirs, au moins un tiroir dans contenir $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ objets.

A.0.8. *(Récurrence).*

Proposition A.1 (Le principe fondamental de récurrence)**.** *Soit $S \subset \mathbb{N}, 0 \in S \wedge \forall n \in S, (n+1) \in S$. Alors, $S = \mathbb{N}$.*

Proposition A.2. *Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition qui dépend de $n, n \geq n_0$. Supposons que*

(1) $\mathcal{P}(n_0)$

(2) $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.

On peut généraliser ce principe : soit $\mathcal{P}(n), n \geq n_0$. Supposons que

(1) $\mathcal{P}$ est vraie de n_0 à $n_0 + k$, pour $k \in \mathbb{N}$

(2) $\{\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), \cdots \mathcal{P}(n+k)\} \implies \mathcal{P}(n+k+1)$

Définition A.3 (Récurrence forte)**.** Soit $n_0 \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ une proposition supposons

(1) $\mathcal{P}(n_0)$

(2) $\{\mathcal{P}(n_0), \cdots \mathcal{P}(n)\} \implies \mathcal{P}(n+1)$.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$