看看程式語言學在幹嘛

柯向上 Josh Ko

中央研究院資訊科學研究所

FLOLAC 識別設計溝通會議，2020 年 3 月 10 日

程式語言學

以符號（語言）精準簡練地表達計算規則（程式）

厲害：嚴格證明各種「好」性質

易用：作為好工具，協助人思考與解決問題

內涵：常與數學、邏輯學有密切對應

厲害

規則、符號、好性質

拍賣網站購物

「先詢問有無存貨，賣家回覆有貨才可下標。下標後將收件資訊告知賣家，完成匯款後賣家出貨。」

買家動作：　　![請問還有沒有貨]

```
▹{ 缺貨 : stop
   有貨 : if 老婆說可以買
          then ◃ 下標
                 ![收件資訊]
                 ![錢]
                 ?(貨)
                 stop
          else ◃ 算了
                 stop  }
```

!	送
?	收
▹	對方選擇
◃	自己選擇

拍賣網站購物

「先詢問有無存貨，賣家回覆有貨才可下標。下標後將收件資訊告知賣家，完成匯款後賣家出貨。」

賣家動作：　　?(請問還有沒有貨)

```
if 查了一下有貨
then ◁ 有貨
       ▷{ 算了 : stop
          下標 : ?(收件資訊)
                 ?(錢)
                 ![貨]
                 stop  }
else ◁ 缺貨
       stop
```

!	送
?	收
▷	對方選擇
◁	自己選擇

程式的合法長相（語言）

P	::=	$\texttt{request}\ a(k)\ \texttt{in}\ P$	session request
	$\mid$	$\texttt{accept}\ a(k)\ \texttt{in}\ P$	session acceptance
	$\mid$	$k![\tilde{e}]; P$	data sending
	$\mid$	$k?(\tilde{x})\ \texttt{in}\ P$	data reception
	$\mid$	$k \lhd l; P$	label selection
	$\mid$	$k \rhd \{l_1 : P_1 [\!] \cdots [\!] l_n : P_n\}$	label branching
	$\mid$	$\texttt{throw}\ k[k']; P$	channel sending
	$\mid$	$\texttt{catch}\ k(k')\ \texttt{in}\ P$	channel reception
	$\mid$	$\texttt{if}\ e\ \texttt{then}\ P\ \texttt{else}\ Q$	conditional branch
	$\mid$	$P \mid Q$	parallel composition
	$\mid$	$\texttt{inact}$	inaction
	$\mid$	$(\nu u)P$	name/channel hiding
	$\mid$	$\texttt{def}\ D\ \texttt{in}\ P$	recursion
	$\mid$	$X[\tilde{e}\tilde{k}]$	process variables
D	::=	$X_1(\tilde{x}_1\tilde{k}_1) = P_1\ \texttt{and} \cdots \texttt{and}\ X_n(\tilde{x}_n\tilde{k}_n) = P_n$	declaration for recursion

Kohei Honda, Vasco T. Vasconcelos, and Makoto Kubo [1998]. Language primitives and type discipline for structured communication-based programming. In *European Symposium on Programming*, volume 1381 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 122–138. Springer. https://doi.org/10.1007/BFb0053567.

實際進行購物

```
![請問還有沒有貨]
▹{ 缺貨 : stop
   有貨 : if 老婆說可以買
          then ◃ 下標
               ![收件資訊]
               ![錢]
               ?(貨)
               stop
          else ◃ 算了
               stop  }
```

買家

```
?(請問還有沒有貨)
if 查了一下有貨
then ◃ 有貨
       ▹{ 算了 : stop
          下標 : ?(收件資訊)
                 ?(錢)
                 ![貨]
                 stop  }
else ◃ 缺貨
     stop
```

賣家

實際進行購物

```
![請問還有沒有貨]
▹{ 缺貨 : stop
   有貨 : if 老婆說可以買
          then ◃ 下標
               ![收件資訊]
               ![錢]
               ?(貨)
               stop
          else ◃ 算了
               stop  }
```

買家

```
?(請問還有沒有貨)
if 查了一下有貨
then ◃ 有貨
       ▹{ 算了 : stop
          下標 : ?(收件資訊)
                 ?(錢)
                 ![貨]
                 stop  }
else ◃ 缺貨
     stop
```

賣家

實際進行購物

```
![請問還有沒有貨]
▹{ 缺貨 : stop
   有貨 : if 老婆說可以買
             then ◃ 下標
                  ![收件資訊]
                  ![錢]
                  ?(貨)
                  stop
          else ◃ 算了
                  stop  }
```

買家

```
?(請問還有沒有貨)
if 查了一下有貨
then ◃ 有貨
          ▹{ 算了 : stop
             下標 : ?(收件資訊)
                    ?(錢)
                    ![貨]
                    stop  }
else ◃ 缺貨
     stop
```

賣家

實際進行購物

```
![請問還有沒有貨]
▹{ 缺貨 : stop
   有貨 : if 老婆說可以買
          then ◃ 下標
               ![收件資訊]
               ![錢]
               ?(貨)
               stop
  else ◃ 算了
       stop  }
```

買家

```
?(請問還有沒有貨)
if 查了一下有貨
then ◃ 有貨
     ▹{ 算了 : stop
        下標 : ?(收件資訊)
               ?(錢)
               ![貨]
               stop  }
else ◃ 缺貨
     stop
```

賣家

實際進行購物

```
![請問還有沒有貨]
▹{ 缺貨 : stop
   有貨 : if 老婆說可以買
          then ◃ 下標
               ![收件資訊]
               ![錢]
               ?(貨)
               stop
          else ◃ 算了
               stop  }
```

買家

```
?(請問還有沒有貨)
if 查了一下有貨
then ◃ 有貨
     ▹{ 算了 : stop
        下標 : ?(收件資訊)
               ?(錢)
               ![貨]
               stop  }
else ◃ 缺貨
     stop
```

賣家

實際進行購物

```
![請問還有沒有貨]
▹{ 缺貨 : stop
   有貨 : if 老婆說可以買
          then ◃ 下標
                ![收件資訊]
                ![錢]
                ?(貨)
                stop
   else ◃ 算了
          stop  }
```

買家

```
?(請問還有沒有貨)
if 查了一下有貨
then ◃ 有貨
        ▹{ 算了 : stop
           下標 : ?(收件資訊)
                  ?(錢)
                  ![貨]
                  stop  }
else ◃ 缺貨
       stop
```

賣家

實際進行購物

```
![請問還有沒有貨]
▹{ 缺貨 : stop
   有貨 : if 老婆說可以買
          then ◃ 下標
               ![收件資訊]
               ![錢]
               ?(貨)
               stop
   else ◃ 算了
        stop  }
```

買家

```
?(請問還有沒有貨)
if 查了一下有貨
then ◃ 有貨
     ▹{ 算了 : stop
        下標 : ?(收件資訊)
               ?(錢)
               ![貨]
               stop  }
else ◃ 缺貨
     stop
```

賣家

實際進行購物

```
![請問還有沒有貨]
▹{ 缺貨 : stop
   有貨 : if 老婆說可以買
          then ◃ 下標
               ![收件資訊]
               ![錢]
               ?(貨)
               stop
   else ◃ 算了
        stop  }
```

買家

```
?(請問還有沒有貨)
if 查了一下有貨
then ◃ 有貨
     ▹{ 算了 : stop
        下標 : ?(收件資訊)
               ?(錢)
               ![貨]
               stop  }
else ◃ 缺貨
     stop
```

賣家

實際進行購物

```
![請問還有沒有貨]
▹{ 缺貨 : stop
   有貨 : if 老婆說可以買
          then ◃ 下標
               ![收件資訊]
               ![錢]
               ?(貨)
               stop
        else ◃ 算了
               stop  }
```

買家

```
?(請問還有沒有貨)
if 查了一下有貨
then ◃ 有貨
       ▹{ 算了 : stop
          下標 : ?(收件資訊)
                 ?(錢)
                 ![貨]
                 stop  }
else ◃ 缺貨
       stop
```

賣家

實際進行購物

```
![請問還有沒有貨]
▹{ 缺貨 : stop
   有貨 : if 老婆說可以買
          then ◃ 下標
               ![收件資訊]
               ![錢]
               ?(貨)
               stop
        else ◃ 算了
               stop  }
```

買家

```
?(請問還有沒有貨)
if 查了一下有貨
then ◃ 有貨
       ▹{ 算了 : stop
          下標 : ?(收件資訊)
                 ?(錢)
                 ![貨]
                stop  }
else ◃ 缺貨
       stop
```

賣家

定義程式如何執行

$$[\textsc{Link}] \quad (\texttt{accept}\ a(k)\ \texttt{in}\ P_1) \mid (\texttt{request}\ a(k)\ \texttt{in}\ P_2) \ \rightarrow\ (\nu k)(P_1 \mid P_2)$$

$$[\textsc{Com}] \quad (k![\tilde{e}]; P_1) \mid\ (k?(\tilde{x})\ \texttt{in}\ P_2) \ \rightarrow\ P_1 \mid P_2[\tilde{c}/\tilde{x}] \qquad (\tilde{e} \downarrow \tilde{c})$$

$$[\textsc{Label}] \quad (k \lhd l_i; P) \mid (k \rhd \{l_1 : P_1 [\!] \cdots [\!] l_n : P_n\}) \ \rightarrow\ P \mid\ P_i \ \ (1 \leq i \leq n)$$

$$[\textsc{Pass}] \quad (\texttt{throw}\ k[k']; P_1) \mid\ (\texttt{catch}\ k(k')\ \texttt{in}\ P_2) \ \rightarrow\ P_1 \mid\ P_2$$

$$[\textsc{If1}] \quad \texttt{if}\ e\ \texttt{then}\ P_1\ \texttt{else}\ P_2 \ \rightarrow\ P_1 \qquad (e \downarrow \texttt{true})$$

$$[\textsc{If2}] \quad \texttt{if}\ e\ \texttt{then}\ P_1\ \texttt{else}\ P_2 \ \rightarrow\ P_2 \qquad (e \downarrow \texttt{false})$$

$$[\textsc{Def}] \quad \texttt{def}\ D\ \texttt{in}\ (X[\tilde{e}\tilde{k}] \mid Q) \ \rightarrow\ \texttt{def}\ D\ \texttt{in}\ (P[\tilde{c}/\tilde{x}] \mid Q)\ (\tilde{e} \downarrow \tilde{c}, X(\tilde{x}\tilde{k}) = P \in D)$$

$$[\textsc{Scop}] \quad P \rightarrow P' \ \ \Rightarrow\ \ (\nu u)P \rightarrow (\nu u)P'$$

$$[\textsc{Par}] \quad P \rightarrow P' \ \ \Rightarrow\ \ P \mid Q \ \rightarrow\ P' \mid Q$$

$$[\textsc{Str}] \quad P \equiv P' \text{ and } P' \rightarrow Q' \text{ and } Q' \equiv Q \ \ \Rightarrow\ P \rightarrow Q$$

Kohei Honda, Vasco T. Vasconcelos, and Makoto Kubo [1998]. Language primitives and type discipline for structured communication-based programming. In *European Symposium on Programming*, volume 1381 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 122–138. Springer. https://doi.org/10.1007/BFb0053567.

配對錯誤

```
![請問還有沒有貨]
▹{ 缺貨 : stop
   有貨 : if 老婆說可以買
          then ◃ 下標
                ![收件資訊]
                ?(貨)
                ![錢]
                stop
        else ◃ 算了
                stop  }
```

以為可以貨到付款的買家

```
?(請問還有沒有貨)
if 查了一下有貨
then ◃ 有貨
        ▹{ 算了 : stop
           下標 : ?(收件資訊)
                  ?(錢)
                  ![貨]
                  stop  }
else ◃ 缺貨
        stop
```

賣家

通訊協議／訊程型別

「先詢問有無存貨，賣家回覆有貨才可下標。下標後將收件資訊告知賣家，完成匯款後賣家出貨。」

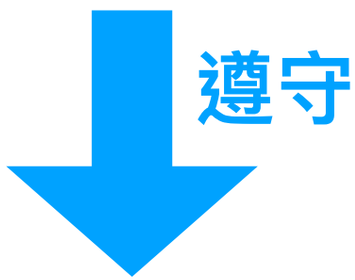
買家通訊規則：

```
!詢問存貨
&{ 缺貨 : end
   有貨 : +{ 下標 : !收件資訊 !錢 ?貨 end
             算了 : end } }
```

!	送
?	收
&	對方所有選項
+	自己所有選項

保證沒有配對錯誤

```
![請問還有沒有貨]                                    買家動作
▹{ 缺貨 : stop
   有貨 : if 老婆說可以買
            then ◃ 下標; ![收件資訊] ![錢] ?(貨) stop
            else ◃ 算了; stop  }
```




```
!詢問存貨                                            買家通訊規則
&{ 缺貨 : end
   有貨 : +{ 下標 : !收件資訊 !錢 ?貨 end
             算了 : end } }
```

保證沒有配對錯誤

買家通訊規則

```
!詢問存貨
&{  缺貨 :  end
    有貨 :  +{  下標 :  !收件資訊  !錢  ?貨  end
                算了 :  end  }  }
```

賣家通訊規則

```
?詢問存貨
+{  缺貨 :  end
    有貨 :  &{  下標 :  ?收件資訊  ?錢  !貨  end
                算了 :  end  }  }
```

保證沒有配對錯誤

賣家通訊規則

```
?詢問存貨
+{ 缺貨 : end
   有貨 : &{ 下標 : ?收件資訊 ?錢 !貨 end
             算了 : end } }
```

遵守

賣家動作

```
?(請問還有沒有貨)
if 查了一下有貨
then ◃ 有貨; ▹{ 算了 : stop
                 下標 : ?(收件資訊) ?(錢) ![貨] stop }
else ◃ 缺貨; stop
```

型別安全定理

若兩個通訊程式遵守對偶的訊程型別，
則它們一起執行時不可能發生配對錯誤。

$$
\begin{array}{rcl}
S & ::= & \mathbf{nat} \mid \mathbf{bool} \mid \langle \alpha, \overline{\alpha} \rangle \mid s \mid \mu s.S \\
\alpha & ::= & \downarrow[\tilde{S}]; \alpha \mid \downarrow[\alpha]; \beta \mid \&\{l_1 \colon \alpha_1, \ldots, l_n \colon \alpha_n\} \mid \mathbf{1} \mid \bot \\
& & \mid \uparrow[\tilde{S}]; \alpha \mid \uparrow[\alpha]; \beta \mid \oplus\{l_1 \colon \alpha_1, \ldots, l_n \colon \alpha_n\} \mid t \mid \mu t.\alpha
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\overline{\uparrow[\tilde{S}]; \alpha} = \downarrow[\tilde{S}]; \overline{\alpha} & \overline{\oplus\{l_i \colon \alpha_i\}} = \&\{l_i : \overline{\alpha_i}\} & \overline{\uparrow[\alpha]; \beta} = \downarrow[\alpha]; \overline{\beta} & \overline{\mathbf{1}} = \mathbf{1} \\
\overline{\downarrow[\tilde{S}]; \alpha} = \uparrow[\tilde{S}]; \overline{\alpha} & \overline{\&\{l_i \colon \alpha_i\}} = \oplus\{l_i : \overline{\alpha_i}\} & \overline{\downarrow[\alpha]; \beta} = \uparrow[\alpha]; \overline{\beta} & \overline{t} = t \quad \overline{\mu t.\alpha} = \mu t.\overline{\alpha}
\end{array}
$$

We need the following notion: a *k-process* is a prefixed process with subject k (such as $k![\tilde{e}]; P$ and $\texttt{catch}\ k(k')\ \texttt{in}\ P$). Next, a *k-redex* is a pair of dual k-processes composed by $|$, i.e. either of forms $(k![\tilde{e}]; P \mid k?(x)\ \texttt{in}\ Q)$, $(k \lhd l; P \mid k \rhd \{l_1 : Q_1 \| \cdots \| l_n : Q_n\})$, or $(\texttt{throw}\ k[k']; P \mid \texttt{catch}\ k(k'')\ \texttt{in}\ Q)$. Then P is an *error* if $P \equiv \texttt{def}\ D\ \texttt{in}\ (\nu\tilde{u})(P'|R)$ where P' is, for some k, the $|$-composition of *either* two k-processes that do not form a k-redex, *or* three or more k-processes.

$$
[\textsc{Acc}]\ \frac{\Theta; \Gamma \vdash P \triangleright \Delta \cdot k : \alpha}{\Theta; \Gamma, a : \langle \alpha, \overline{\alpha} \rangle \vdash \texttt{accept}\ a(k)\ \texttt{in}\ P \triangleright \Delta} \quad
[\textsc{Req}]\ \frac{\Theta; \Gamma \vdash P \triangleright \Delta \cdot k : \overline{\alpha}}{\Theta; \Gamma, a : \langle \alpha, \overline{\alpha} \rangle \vdash \texttt{request}\ a(k)\ \texttt{in}\ P \triangleright \Delta}
$$

$$
[\textsc{Send}]\ \frac{\Gamma \vdash \tilde{e} \triangleright \tilde{S} \quad \Theta; \Gamma \vdash P \triangleright \Delta \cdot k : \alpha}{\Theta; \Gamma \vdash k![\tilde{e}]; P \triangleright \Delta \cdot k : \uparrow[\tilde{S}]; \alpha} \quad
[\textsc{Rcv}]\ \frac{\Theta; \Gamma \cdot \tilde{x} : \tilde{S} \vdash P \triangleright \Delta \cdot k : \alpha}{\Theta; \Gamma \vdash k?(\tilde{x})\ \texttt{in}\ P \triangleright \Delta \cdot k : \downarrow[\tilde{S}]; \alpha}
$$

$$
[\textsc{Br}]\ \frac{\Theta; \Gamma \vdash P_1 \triangleright \Delta \cdot k : \alpha_1 \quad \cdots \quad \Theta; \Gamma \vdash P_n \triangleright \Delta \cdot k : \alpha_n}{\Theta; \Gamma \vdash \ k \rhd \{l_1 : P_1 \| \cdots \| l_n : P_n\} \triangleright \Delta \cdot k : \&\{l_1 \colon \alpha_1, \ldots, l_n \colon \alpha_n\}}
$$

$$
[\textsc{Sel}]\ \frac{\Theta; \Gamma \vdash P \triangleright \Delta \cdot k : \alpha_j}{\Theta; \Gamma \vdash k \lhd l_j; P \triangleright \Delta \cdot k : \ \oplus\{l_1 \colon \alpha_1, \ldots, l_n \colon \alpha_n\}} \quad (1 \le j \le n)
$$

$$
[\textsc{Thr}]\ \frac{\Theta; \Gamma \vdash P \triangleright \Delta \cdot k : \beta}{\Theta; \Gamma \vdash \texttt{throw}\ k[k']; P \triangleright \Delta \cdot k : \uparrow[\alpha]; \beta \cdot k' : \alpha} \quad
[\textsc{Cat}]\ \frac{\Theta; \Gamma \vdash P \triangleright \Delta \cdot k : \beta \cdot k' : \alpha}{\Theta; \Gamma \vdash \texttt{catch}\ k(k')\ \texttt{in}\ P \triangleright \Delta \cdot k : \downarrow[\alpha]; \beta}
$$

$$
[\textsc{Conc}]\ \frac{\Theta; \Gamma \vdash P \triangleright \Delta \quad \Theta; \Gamma \vdash Q \triangleright \Delta'}{\Theta; \Gamma \vdash P \mid Q \triangleright \Delta \circ \Delta'} (\Delta \asymp \Delta') \quad
[\textsc{If}]\ \frac{\Gamma \vdash e \triangleright \mathbf{bool} \quad \Theta; \Gamma \vdash P \triangleright \Delta \quad \Theta; \Gamma \vdash Q \triangleright \Delta}{\Theta; \Gamma \vdash \texttt{if}\ e\ \texttt{then}\ P\ \texttt{else}\ Q \triangleright \Delta}
$$

$$
[\textsc{NRes}]\ \frac{\Theta; \Gamma \cdot a : S \vdash P \triangleright \Delta}{\Theta; \Gamma \vdash (\nu a)P \triangleright \Delta} \quad
[\textsc{CRes}]\ \frac{\Theta; \Gamma \vdash P \triangleright \Delta \cdot k : \bot}{\Theta; \Gamma \vdash \ (\nu k)P \triangleright \Delta} \quad
[\textsc{Inact}]\ \Theta; \Gamma \vdash \texttt{inact} \triangleright \Delta
$$

$$
[\textsc{Var}]\ \frac{\Gamma \vdash \tilde{e} \triangleright \tilde{S}}{\Theta, X : \tilde{S}\tilde{\alpha}; \Gamma \vdash X[\tilde{e}\tilde{k}] \triangleright \Delta \cdot \tilde{k} : \tilde{\alpha}} \quad
[\textsc{Def}]\ \frac{\Theta; \Gamma \cdot \tilde{x} : \tilde{S} \vdash P \triangleright \tilde{k} : \tilde{\alpha} \quad \Theta; \Gamma \vdash Q \triangleright \Delta}{\Theta \backslash X; \Gamma \vdash \texttt{def}\ X(\tilde{x}\tilde{k}) = P\ \texttt{in}\ Q \triangleright \Delta} (\Theta(X) = \tilde{S}\tilde{\alpha})
$$

Kohei Honda, Vasco T. Vasconcelos, and Makoto Kubo [1998]. Language primitives and type discipline for structured communication-based programming. In *European Symposium on Programming*, volume 1381 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 122–138. Springer. https://doi.org/10.1007/BFb0053567.

易用

解決問題的好工具

解出一個數

問：小明買了 24 枝 9 元的鉛筆和 12 個 15 元的橡皮擦，請問小明總共要付多少錢？

答：$9 \times 24 + 15 \times 12 = 216 + 180 = 396$

$$
\begin{aligned}
& 15 \times 12 \\
= {} & (10 + 5) \times (10 + 2) \\
= {} & 100 + 20 + 50 + 10 \\
= {} & 180
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r}
15 \\
\times\ 12 \\
\hline
10 \\
2 \\
5 \\
1 \\
\hline
180
\end{array}
$$

解出一個程式

寫下要做的事情

$$
\begin{aligned}
& \mathit{ordered} \cdot \mathit{perm} \\
\supseteq \quad & \{\text{since } \mathit{flatten} \text{ is a function}\} \\
& \mathit{ordered} \cdot \mathit{flatten} \cdot \mathit{flatten}^{\circ} \cdot \mathit{perm} \\
= \quad & \{\text{claim: } \mathit{ordered} \cdot \mathit{flatten} = \mathit{flatten} \cdot \mathit{inordered} \text{ (see below)}\} \\
& \mathit{flatten} \cdot \mathit{inordered} \cdot \mathit{flatten}^{\circ} \cdot \mathit{perm} \\
= \quad & \{\text{converses}\} \\
& \mathit{flatten} \cdot (\mathit{perm} \cdot \mathit{flatten} \cdot \mathit{inordered})^{\circ} \\
\supseteq \quad & \{\text{fusion, for an appropriate definition of } \mathit{split}\} \\
& \mathit{flatten} \cdot (\![\mathit{nil}, \mathit{split}^{\circ}]\!)^{\circ}.
\end{aligned}
$$

解出程式

符號計算

內涵

數學、邏輯學

函數

函數定義

$$f(x) = x^2 + 1$$

函數代入

$$f(5) = 5^2 + 1 = 26$$

無名函數

函數定義

$$\lambda x.\ x^2 + 1$$

函數代入

$$(\lambda x.\ x^2 + 1)\ 5\ =\ 5^2 + 1\ =\ 26$$

λ 算則

$$\Lambda ::= x \mid \lambda x.\ \Lambda \mid \Lambda\ \Lambda$$

$$(\lambda x.\ t)\ u \ = \ t[u/x]$$

2 + 3 = 5

+ 2 3

$(\lambda m.\ \lambda n.\ \lambda f.\ \lambda x.\ m\ f\ (n\ f\ x))\ (\lambda f.\ \lambda x.\ f\ (f\ x))\ (\lambda f.\ \lambda x.\ f\ (f\ (f\ x)))$

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda n.\ \lambda f.\ \lambda x.\ (\lambda f.\ \lambda x.\ f\ (f\ x))\ f\ (n\ f\ x))\ (\lambda f.\ \lambda x.\ f\ (f\ (f\ x))) \\
&= \lambda f.\ \lambda x.\ (\lambda f.\ \lambda x.\ f\ (f\ x))\ f\ ((\lambda f.\ \lambda x.\ f\ (f\ (f\ x)))\ f\ x) \\
&= \lambda f.\ \lambda x.\ (\lambda f.\ \lambda x.\ f\ (f\ x))\ f\ ((\lambda x.\ f\ (f\ (f\ x)))\ x) \\
&= \lambda f.\ \lambda x.\ (\lambda f.\ \lambda x.\ f\ (f\ x))\ f\ (f\ (f\ (f\ x))) \\
&= \lambda f.\ \lambda x.\ (\lambda x.\ f\ (f\ x))\ (f\ (f\ (f\ x))) \\
&= \lambda f.\ \lambda x.\ f\ (f\ (f\ (f\ (f\ x))))
\end{aligned}
$$

5

型別

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{f : \iota \to \iota, x : \iota \vdash f : \iota \to \iota} \quad \dfrac{f : \iota \to \iota, x : \iota \vdash f : \iota \to \iota \qquad f : \iota \to \iota, x : \iota \vdash x : \iota}{f : \iota \to \iota, x : \iota \vdash f\ x : \iota}}{f : \iota \to \iota, x : \iota \vdash f\ (f\ x) : \iota}}{f : \iota \to \iota \vdash \lambda x.\ f\ (f\ x) : \iota \to \iota}}{\vdash \lambda f.\ \lambda x.\ f\ (f\ x) : (\iota \to \iota) \to \iota \to \iota}$$

型別對應於邏輯

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B \qquad \Gamma \vdash x : A}{\Gamma \vdash f\ x : B}$$

程式語言學

以符號（語言）精準簡練地表達計算規則（程式）

厲害：嚴格證明各種「好」性質

易用：作為好工具，協助人思考與解決問題

內涵：常與數學、邏輯學有密切對應