Kapitel 2: Polynome
Übungen

Aufgabe 1: Führen Sie eine Polynomdivision durch.

a) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) =$
b) $(4x^3 - 20x^2 - x + 110) : (x + 2) =$
c) $(x^3 + 5x^2 - 22x - 56) : (x - 4) =$
d) $(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36) : (x - 3) =$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 28x$
b) $f(x) = (x^2 + 2x - 8)(x^2 - 9)$
c) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$
d) $f(x) = (x + 2)^3 - (x + 2)^2 - 6(x + 2)$

Aufgabe 3: Der angegebene Wert x_1 ist eine Nullstelle der Funktion.
Bestimmen Sie weitere Nullstellen.

a) $f(x) = 4x^3 - 3x - 1;\ x_1 = 1$
b) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 60x;\ x_1 = -3$
c) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 31x - 70;\ x_1 = 5$
d) $f(x) = 2x^4 + 18x^3 + 12x^2 - 112x;\ x_1 = -7$

Kapitel 3: Reelle Funktionen
Fortführung/Erweiterung des Beispiels im Buch, Seite 33

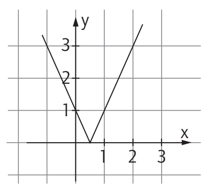
Erweiterung bzw. Fortführung des Beispiel 5

Wir definieren für $x \in \mathbb{R}$ die Funktion g durch $g(x) = |2x - 1|$.
Will man die Betragsstriche entfernen, kommt es auf das Vorzeichen des Terms $T(x) = 2x - 1$ an.
Es ist $T(x) < 0$ für $x < \frac{1}{2}$ und entsprechend $T(x) \geq 0$ für $x \geq \frac{1}{2}$.
Daher gilt $g(x) = -T(x)$ für $x < \frac{1}{2}$ und $g(x) = T(x)$ für $x \geq \frac{1}{2}$.

Man schreibt das übersichtlicherweise in einem sogenannten **Struktogramm** auf:

nein $x < \frac{1}{2}$ — $2x - 1 \geq 0?$	ja $x \geq \frac{1}{2}$
$g(x) = -(2x - 1) = -2x + 1$	$g(x) = 2x - 1$

Zusammen gilt daher: $g(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{für } x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{für } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$



Die Figur zeigt den Graphen von g. Er hat einen Knick bei $x = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 1: Lösen Sie analog zum obigen Beispiel: $h(x) = \big|2x - |x - 3|\big| - x \ (x \in \mathbb{R})$.
Erstellen Sie auch ein Struktogramm.

Kapitel 3: Reelle Funktionen
Beispiel für eine mündliche Prüfung

Teil A – Aufgabe

Bild 1

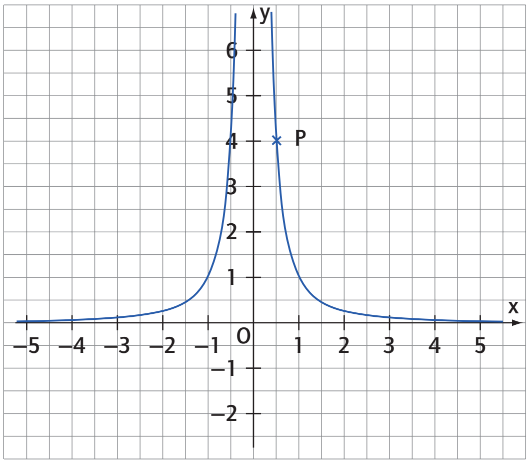


Bild 2

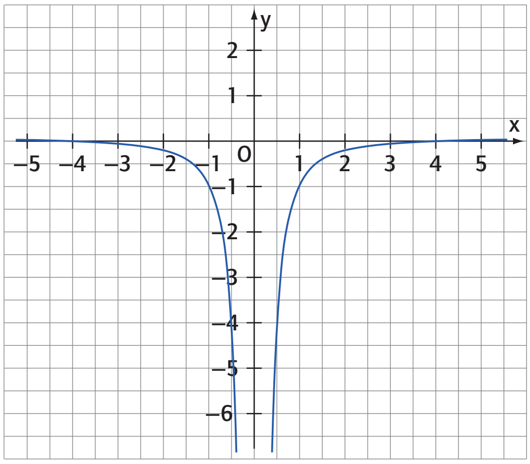


Bild 3

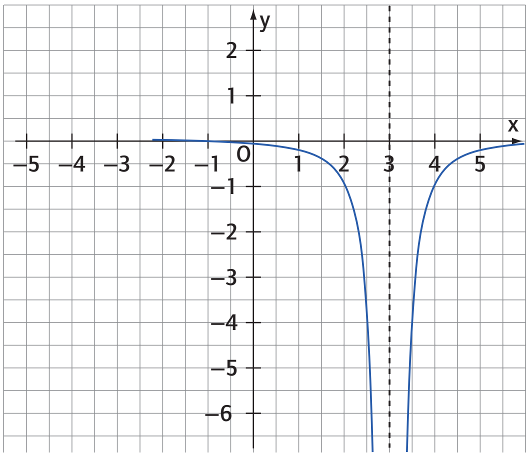


Bild 4

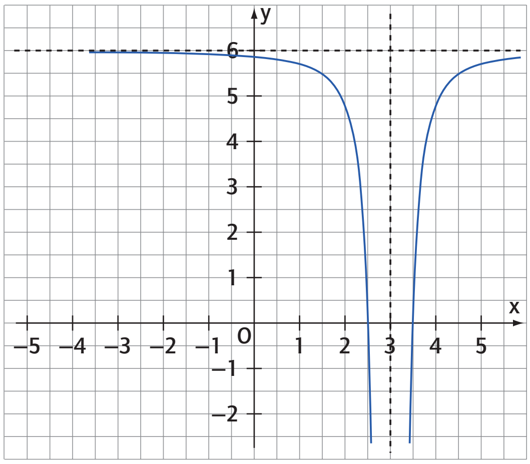


Bild 1 zeigt den Graphen einer Potenzfunktion $f_1(x) = x^n$ mit ganzzahligem Exponenten.

a) Beschreiben Sie die typischen Eigenschaften des Graphen von f_1 und berechnen Sie n.

b) Die Graphen von Bild 2, 3 und 4 sind durch Verschiebung und/oder Spiegelung des Graphen von f_1 entstanden. Wie lautet jeweils die Funktionsvorschrift bei jedem Bild?

c) Erläutern Sie, wie man mit dem Vorgehen aus b) den Graphen der Funktion h mit $h(x) = (x - 2)^3 + 1$ skizzieren kann. Von welcher „Grundfunktion" müsste man ausgehen?

d) Welche Funktionen aus b) besitzen dieselbe Ableitung? Begründen Sie Ihre Antwort zuerst anhand der Schaubilder. Bestätigen Sie Ihre Antwort dann rechnerisch mit den ersten Ableitungen aller vier Funktionen.

Teil B – Prüfungsgespräch

Im Lösungsteil finden Sie ein fiktives Prüfungsgespräch mit Fragen und Antworten.

Kapitel 4: Stetigkeit und Grenzwerte
Musterklausur

Aufgabe 1: Bestimmen Sie jeweils die senkrechten und waagrechten Asymptoten der Funktion und skizzieren Sie das Schaubild.
(Hinweis: Das Schaubild in c) ist punktsymmetrisch zum Ursprung.)
a) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ b) $f(x) = \frac{-2}{2x+5} - 1$ c) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

Aufgabe 2:
a) Geben Sie die Definitionsmenge von $f(x) = \frac{6 \cdot (x+3)}{x^2-9}$ an und untersuchen Sie das Verhalten des Schaubilds von f an den Definitionslücken.
b) In welchen Intervallen ist das Schaubild von f stetig?

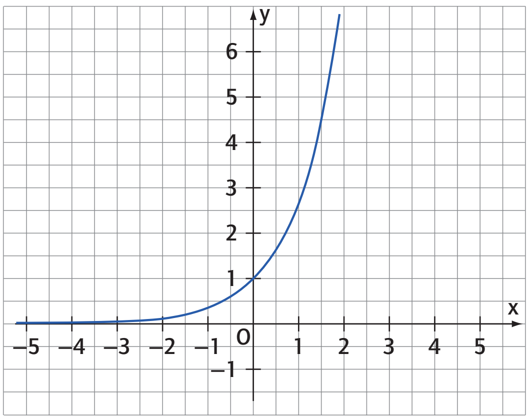
Aufgabe 3: Für welche ganzen Zahlen n (mit $n \geq 0$) hat die Funktion $f(x) = \frac{x^2+4}{x^n+2}$
– eine waagrechte Asymptote,
– eine schiefe Asymptote,
– keine Asymptote?
Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an.

Aufgabe 4:
a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat die Funktion $f(x) = \frac{3}{x^2+a}$ senkrechte Asymptoten?
b) Geben Sie die Gleichungen der senkrechten Asymptoten für $a = -4$ an.
Handelt es sich dabei um Polstellen mit bzw. ohne Vorzeichenwechsel?
c) Warum hat die Funktion unabhängig von a immer die x-Achse als waagrechte Asymptote?

Kapitel 5: Transzendente Funktionen
Beispiel für eine mündliche Prüfung

Teil A – Aufgabe

a) Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit $f_1(x) = e^x$; $f_2(x) = e^{-x}$; $f_3(x) = e^{x-2}$
Zu welcher Funktion gehört das abgebildete Schaubild? Skizzieren Sie die Schaubilder der anderen Funktionen und erläutern Sie Ihr Vorgehen.



b) Zeigen Sie, dass das Schaubild der Parabel p mit $p(x) = -x^2 + x + 1$ das Schaubild von f_1 im Punkt $P(0 \mid 1)$ berührt.
c) Untersuchen Sie das Schaubild von f_4 mit $f_4(x) = e^{-x^2}$ auf Symmetrie. Benutzen Sie dann die Eigenschaften des Schaubilds von f_2, um das Schaubild von f_4 zu skizzieren.
d) Nennen Sie eine Anwendung, bei der eine Exponentialfunktion eine Rolle spielt.

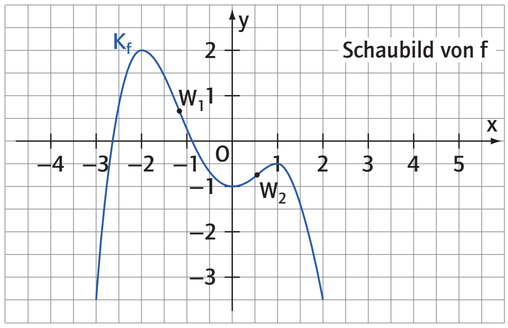
Teil B – Prüfungsgespräch

Im Lösungsteil finden Sie ein fiktives Prüfungsgespräch mit Fragen und Antworten.

Kapitel 6: Differenzialrechnung
Beispiel für eine mündliche Prüfung

Teil A – Aufgabe

Aufgabe 1: Das Schaubild zeigt den Graphen einer Funktion f. Skizzieren Sie den Graphen der ersten Ableitungsfunktion f′ und begründen Sie Ihr Vorgehen.



Aufgabe 2: F sei eine Stammfunktion von f. Bewerten Sie folgende Aussagen über den Graphen von F mit richtig, falsch oder unentscheidbar.

(1) Das Schaubild von F hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.

(2) Das Schaubild von F hat im Intervall $-3 < x < 2$ zwei Extrempunkte.

(3) Das Schaubild von F ist für $x > 0$ monoton fallend.

(4) Es gilt $F(0) > F(1)$

(5) Das Schaubild von F geht durch $P(0 \mid -1)$.

Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

Teil B – Prüfungsgespräch

Im Lösungsteil finden Sie ein fiktives Prüfungsgespräch mit Fragen und Antworten.

Kapitel 7: Integralrechnung
Übungen

Aufgabe 1: Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = 3x^4 + \frac{4}{x^2}$ b) $f(x) = 1 - 4e^{2x}$ c) $g(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^2$ d) $h(x) = \sin(3x) - \frac{2}{3x}$

Aufgabe 2: Berechnen Sie den Wert des Integrals.

a) $\int_0^4 6x^2\,dx$ b) $\int_0^{+1} 4e^{2x+1}\,dx$ c) $\int_1^4 \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\,dx$ d) $\int_0^{\pi} 2x - \cos(0{,}5x)\,dx$

Aufgabe 3: Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals, falls möglich.

a) $\lim\limits_{z\to\infty} \int_1^z \frac{3}{x^2}\,dx$ b) $\lim\limits_{a\to 0} \int_a^4 \frac{2}{x} + 1\,dx$ c) $\lim\limits_{z\to 0} \int_8^z (\ln x) - 3\,dx$ d) $\lim\limits_{z\to -\infty} \int_z^0 2e^{0{,}5x+2}\,dx$

Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f mit $f(x) = (0{,}5x + 1)^3$ und der x-Achse über dem Intervall [2; 6].
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von f mit $f(x) = \frac{2}{x+4} + \frac{4}{\sqrt{x}}$ und den Geraden $x = 1$ und $x = 9$ begrenzt wird.
c) Wie groß ist die Fläche, die von den Graphen von f mit $f(x) = -\frac{4}{x^2}$ und g mit $g(x) = 3x - 7$ im ersten Quadranten begrenzt wird?

Kapitel 8: Kurvendiskussion
Musterklausur

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 + 7x - 8}{4(x-2)}$. Ihr Schaubild sei K.

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge von f.
b) Untersuchen Sie K auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, auf Hoch- und Tiefpunkte sowie auf Asymptoten.
c) Wie lautet die Funktionsgleichung der Näherungsgeraden für sehr große $|x|$?
d) Zeigen Sie, dass K für alle $x \in \mathbb{D}$ keinen Wendepunkt haben kann.
e) Zeichnen Sie K, alle Asymptoten und die Näherungsgerade in ein Schaubild $(-9 < x < 7)$.