1. tétel (A határérték egyértelműsége). *Ha az $(a_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens, akkor a konvergencia definíciójában szereplő A szám egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatra $(*)$ az A_1 és az A_2 számokkal is teljesül. Indirekt módon tegyük fel azt is, hogy $A_1 \neq A_2$. Ekkor $\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1\colon |a_n - A_1| < \varepsilon, \quad \text{és}$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_2\colon |a_n - A_2| < \varepsilon.$$

Válasszuk itt speciálisan az

$$\varepsilon := \frac{|A_1 - A_2|}{2}$$

(pozitív) számot. Az ennek megfelelő n_1, n_2 indexeket figyelembe véve legyen

$$n_0 := \max\{n_1, n_2\}.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > n_0$, akkor nyilván $n > n_1$ és $n > n_2$ is fennáll, következésképpen

$$|A_1 - A_2| = \Big|(A_1 - a_n) + (a_n - A_2)\Big| \leq |a_n - A_1| + |a_n - A_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |A_1 - A_2|,$$

amiből (a nyilván nem igaz) $\Big|A_1 - A_2\Big| < \Big|A_1 - A_2\Big|$ következne. Ezért csak $A_1 = A_2$ lehet.

3. tétel. *Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens és $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$. Válasszuk a konvergencia definíciója szerinti jelöléssel ε-t 1-nek. Ehhez a hibakorláthoz

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0\colon |a_n - A| < 1.$$

Így

$$|a_n| = \Big|(a_n - A) + A\Big| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A| \qquad (n > n_0).$$

Ha $n \leq n_0$, akkor

$$|a_n| \leq \max\Big\{|a_0|,\, |a_1|,\, \dots,\, |a_{n_0}|\Big\}.$$

Legyen

$$K := \max\Big\{|a_0|,\, |a_1|,\, \dots,\, |a_{n_0}|,\, 1 + |A|\Big\}.$$

Ekkor $|a_n| \leq K$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, és ez azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat korlátos.

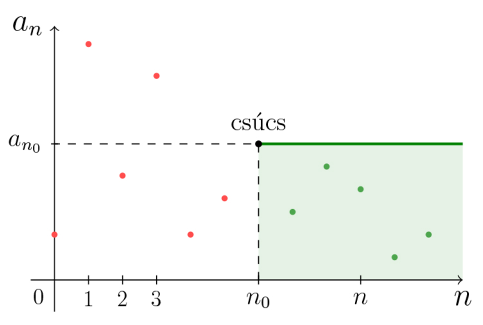
6. tétel. *Minden $a = (a_n)$ valós sorozatnak létezik* ***monoton részsorozata****, azaz létezik olyan $\nu = (\nu_n)$ indexsorozat, amellyel $a \circ \nu$ monoton növekedő vagy monoton csökkenő.*

Bizonyítás.

Az állítás igazolásához bevezetjük egy sorozat csúcsának a fogalmát: Azt mondjuk, hogy a_{n_0} az (a_n) sorozat **csúcsa** (vagy csúcseleme), ha

$$\forall\, n \geq n_0 \ \text{ indexre } \ a_n \leq a_{n_0}.$$

Két eset lehetséges.



<u>1. eset.</u> A sorozatnak **végtelen** sok csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\colon a_{\nu_0} \text{ csúcselem, azaz } \ \forall\, n \geq \nu_0\colon a_n \leq a_{\nu_0};$$

$$\exists\, \nu_1 > \nu_0\colon a_{\nu_1} \text{ csúcselem, azaz } \ \forall\, n \geq \nu_1\colon a_n \leq a_{\nu_1} \ (\leq a_{\nu_0});$$

$$\vdots$$

Ezek a lépések folytathatók, mert végtelen sok csúcselem van. Így olyan $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_{\nu_0} \geq a_{\nu_1} \geq a_{\nu_2} \geq \cdots\,,$$

ezért a csúcsok (a_{ν_n}) sorozata (a_n)-nek egy monoton csökkenő részsorozata.

<u>2. eset.</u> A sorozatnak legfeljebb **véges** sok csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \ \text{ esetén } \ a_n \ \text{ már nem csúcs.}$$

Mivel a_N nem csúcselem, ezért

$$\exists\, \nu_0 > N\colon a_{\nu_0} > a_N.$$

Azonban az a_{ν_0} sem csúcselem, ezért

$$\exists\, \nu_1 > \nu_0\colon a_{\nu_1} > a_{\nu_0} \ (> a_N).$$

Az eljárást folytatva most olyan $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_{\nu_0} < a_{\nu_1} < a_{\nu_2} < \cdots\,.$$

Ebben az esetben tehát az (a_{ν_n}) sorozat (a_n)-nek egy (szigorúan) monoton növekedő részsorozata.

7. tétel (A közrefogási elv). *Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) és (c_n) sorozatokra teljesülnek a következők:*

- $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n > N\colon a_n \leq b_n \leq c_n,$
- *az (a_n) és a (c_n) sorozatnak van határértéke, továbbá*

$$\lim{(a_n)} = \lim{(c_n)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim(b_n) = A$.

Bizonyítás. Három eset lehetséges.

<u>1. eset.</u> $\boxed{A \in \mathbb{R}}$ Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. $\lim(a_n) = \lim(c_n) = A$ azt jelenti, hogy (a_n) és (c_n) azonos A határértékkel rendelkező konvergens sorozatok. A konvergencia definíciója szerint tehát

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1\colon A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_2\colon A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|b_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha } \ n > n_0,$$

azaz a (b_n) sorozat konvergens, tehát van határértéke, és $\lim(b_n) = A$.

<u>2. eset.</u> $\boxed{A = +\infty}$ Tegyük fel, hogy $P > 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim{(a_n)} = +\infty$ értelmezése szerint

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1\colon a_n > P.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1\}$. Ekkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$P < a_n \leq b_n,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim{(b_n)} = +\infty$.

<u>3. eset.</u> $\boxed{A = -\infty}$ Tegyük fel, hogy $P < 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim{(c_n)} = -\infty$ értelmezése szerint

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1\colon c_n < P.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1\}$, akkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$P > c_n \geq b_n.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\lim{(b_n)} = -\infty$.

8. tétel. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatnak van határértéke és*

$$\lim{(a_n)} = A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim{(b_n)} = B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor:

1^o $A < B \quad \Longrightarrow \quad \exists\, N \in \mathbb{N},$ *hogy* $\forall\, n > N\colon a_n < b_n.$

2^o $\exists\, N \in \mathbb{N},$ *hogy* $\forall\, n > N\colon a_n \leq b_n \quad \Longrightarrow \quad A \leq B.$

Bizonyítás.

1^o Azt már tudjuk, hogy bármely két $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem szétválasztható diszjunkt környezetekkel, azaz

$$\forall\, A, B \in \overline{\mathbb{R}},\ A \neq B\text{-hez } \exists\, r_1, r_2 > 0\colon K_{r_1}(A) \cap K_{r_2}(B) = \emptyset.$$

Világos, hogy ha $A < B$, akkor $\forall\, x \in K_{r_1}(A), \forall\, y \in K_{r_2}(B)\colon x < y$.

Mivel $\lim{(a_n)} = A$ és $\lim{(b_n)} = B$, ezért a határérték definíciója szerint

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1\colon a_n \in K_{r_1}(A),$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_2\colon b_n \in K_{r_2}(B).$$

Legyen $N := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall\, n > N$ esetén

$$a_n \in K_{r_1}(A) \quad \text{és} \quad b_n \in K_{r_2}(B) \qquad \Longrightarrow \qquad a_n < b_n.$$

2^o Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $A > B$. Ekkor a már igazolt **1^o** állítás szerint $\exists\, N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ indexre $b_n < a_n$, ami ellentmond a feltételnek.