

1. tétel (A teljes indukció elve). Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott egy $A(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy

- (i) $A(0)$ igaz,
- (ii) ha $A(n)$ igaz, akkor $A(n + 1)$ is igaz.

Ekkor az $A(n)$ állítás minden n természetes számra igaz.

Bizonyítás. Legyen

$$S := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ igaz}\}.$$

Ekkor $S \subset \mathbb{N}$ és S induktív halmaz, hiszen $0 \in S$, és ha $n \in S$, azaz $A(n)$ igaz, akkor $A(n + 1)$ is igaz, ezért $n + 1 \in S$ teljesül, következésképpen S induktív halmaz. Mivel \mathbb{N} a legszűkebb induktív halmaz, ezért az $\mathbb{N} \subset S$ tartalmazás is fennáll, tehát $S = \mathbb{N}$. Ez pedig jelenti, hogy az állítás minden n természetes számra igaz.

2. tétel (A szuprémum elv). Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy

- (i) $H \neq \emptyset$ és
- (ii) H felülről korlátos.

Ekkor

$$\exists \min \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$A := H \quad \text{és} \quad B := \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

A feltételek miatt $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, továbbá

$$\forall a \in A \quad \text{és} \quad \forall K \in B \quad \text{esetén} \quad a \leq K.$$

A teljességi axiómából következik, hogy

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : a \leq \xi \leq K \quad (\forall a \in A, \forall K \in B).$$

Erre a ξ -re az teljesül, hogy

- ξ felső korlátja H -nak, hiszen $a \leq \xi$ minden $a \in A$ esetén,
- ξ a legkisebb felső korlát, ui. ha K egy felső korlát (azaz $K \in B$), akkor $K \geq \xi$.

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy ξ a H halmaz legkisebb felső korlátja.

7. tétel (Az arkhimédészi tulajdonság). minden $a > 0$ és minden b valós számhoz létezik olyan n természetes szám, hogy $b < n \cdot a$, azaz

$$\forall a > 0 \quad \text{és} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \text{esetén} \quad \exists n \in \mathbb{N}, \text{ hogy } b < n \cdot a.$$

Bizonyítás. Indirekt módon. Tegyük fel, hogy

$$\exists a > 0 \quad \text{és} \quad \exists b \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall n \in \mathbb{N} : b \geq n \cdot a.$$

Legyen

$$H := \{n \cdot a \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ekkor $H \neq \emptyset$ és H felülről korlátos, hiszen $n \cdot a \leq b$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re. A szuprémum elv szerint

$$\exists \sup H =: \xi.$$

Ekkor ξ a legkisebb felső korlátja H -nak, tehát $\xi - a$ nem felső korlát. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \cdot a > \xi - a \quad \iff \quad (n_0 + 1) \cdot a > \xi.$$

Azonban $(n_0 + 1) \cdot a \in H$, tehát $(n_0 + 1) \cdot a \leq \xi$, hiszen ξ felső korlátja a H halmaznak. Így ellentmondáshoz jutottunk.

8. tétel (A Cantor-tulajdonság). Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. A teljességi axiómát fogjuk alkalmazni. Legyen

$$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{és} \quad B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Először belátjuk, hogy

$$(*) \quad a_n \leq b_m \quad \text{tetszőleges } n, m \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Valóban,

i) ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m \leq b_m$,

ii) ha $m < n$, akkor $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Mivel $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, ezért $(*)$ miatt a teljességi axióma feltételei teljesülnek, így

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : a_n \leq \xi \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ indexre.}$$

Ha $n = m$, akkor azt kapjuk, hogy

$$a_n \leq \xi \leq b_n \quad \iff \quad \xi \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

és ez azt jelenti, hogy

$$\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$