2. tétel (Az e szám értelmezése). *Az*

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat szigorúan monoton növekedő és felülről korlátos, tehát konvergens. Legyen

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Bizonyítás. Az állítást a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség **ötletes** felhasználá**saival** bizonyítjuk.

- **A monotonitás** igazolásához az egyenlőtlenséget az $(n+1)$ darab

$$1, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{n}$$

számra alkalmazzuk. Mivel ezek nem mind egyenlők, ezért

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emelve azt kapjuk, hogy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

amivel beláttuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő.

- **A korlátosság** bizonyításához most az $(n+2)$ darab

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad \dots, \quad 1+\frac{1}{n}$$

számra alkalmazzuk ismét a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{2\cdot\frac{1}{2}+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} = 1.$$

Ebből következik, hogy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

ezért a sorozat felülről korlátos.

A monoton sorozatok határértékére vonatkozó tételből következik, hogy a sorozat konvergens.

4. tétel (Newton-féle iterációs eljárás m-edik gyökök keresésére). *Legyen $A > 0$ valós szám és $m \ge 2$ természetes szám. Ekkor:*

1° *Pontosan egy olyan α pozitív valós szám létezik, amelyre $\alpha^m = A$*

*(α-t az A szám m-**edik gyökének nevezzük**, és az $\sqrt[m]{A}$ szimbólummal jelöljük).*

2° *Ez az α szám az*

$$\begin{cases} a_0 > 0 \text{ tetszőleges valós,} \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

rekurzióval értelmezett (a_n) (ún. iterációs) sorozat határértéke, azaz

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha = \sqrt[m]{A}.$$

Bizonyítás. Az állítást több lépésben igazoljuk.

1. lépés. Az egyértelműség. Mivel $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \Longrightarrow \alpha_1^m < \alpha_2^m$, ezért legfeljebb egy olyan pozitív α szám létezik, amelyre $\alpha^m = A$.

2. lépés. Teljes indukcióval igazolható, hogy az (a_n) sorozat „jól definiált" és $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

3. lépés. Igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens. A monoton sorozatok konvergenciájára vonatkozó tételt fogjuk alkalmazni.

A sorozat alulról korlátos, és 0 egy triviális alsó korlát. Most megmutatjuk azt, hogy az (a_n) sorozat a második tagtól kezdve **monoton csökkenő**, azaz

$$(*) \qquad a_{n+1} \le a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1, \quad \text{ha } n = 1, 2, \dots.$$

A rekurzív képlet szerint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{m}\cdot\frac{A}{a_n^m} + 1 - \frac{1}{m},$$

ezért a monotonitást jelentő $(*)$ összefüggés azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{A}{a_n^m} + 1 - \frac{1}{m} \le 1 \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

azaz átrendezés után azzal, hogy

$$(**) \qquad A \le a_n^m \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Ennek igazolására a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget a következő alakban fogjuk alkalmazni: ha $x_1, x_2, \dots, x_m$ tetszés szerinti nemnegatív valós számok, akkor

$$(\triangle) \qquad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right)^m,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$. Fontos hangsúlyozni, hogy lényegében ezt az alakot igazoltuk gyakorlaton; és csak az m-edik gyök egyértelmű létezése miatt (amit éppen most igazolunk) írhatjuk fel az egyenlőtlenséget a megszokott alakban.

A $(**)$ becslés igazolásához **vegyük észre** azt, hogy a rekurzív képlet jobb oldalán álló összeg az m darab

$$x_1 := \frac{A}{a_n^{m-1}}, \quad x_2 := a_n, \quad x_3 := a_n, \quad \dots, \quad x_m := a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

pozitív szám számtani közepe. Ezért $(\triangle)$ miatt minden $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$A = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right)^m = \left[\frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right)\right]^m = a_{n+1}^m.$$

Bebizonyítottuk tehát azt, hogy $a_n^m \ge A$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ indexre, és ez azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat a második tagtól kezdve monoton csökkenő.

Mivel az (a_n) sorozat monoton csökkenő a második tagtól kezdve és alulról korlátos, ezért a monoton sorozatok határértékére vonatkozó tétel alapján (a_n) **konvergens**.

4. lépés. Kiszámítjuk a sorozat határértékét. Legyen

$$\alpha := \lim(a_n).$$

Az eddigiekből az következik, hogy $\alpha \ge 0$. Fontos **észrevétel** azonban az, hogy az

$$\alpha > 0$$

egyenlőtlenség is igaz. Ez az állítás a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételből, valamint a határérték és a rendezés kapcsolatára vonatkozó tételből következik, hiszen

$$a_n \to \alpha, \quad a_n^m \ge A \quad \Longrightarrow \quad a_n^m \to \alpha^m \ge A > 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha > 0.$$

Az (a_n) sorozatot megadó rekurzív összefüggésben az $n \to +\infty$ határátmenetet véve az α határértékre egy egyenletet kapunk. Valóban, ha alkalmazzuk a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket (itt használjuk az $\alpha > 0$ egyenlőtlenséget), akkor az adódik, hogy

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \\ \downarrow & n \to +\infty & \downarrow \qquad (\alpha > 0\,!) \\ \alpha & & \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\,\alpha\right), \end{array}$$

ezért a határérték egyértelműsége miatt

$$\alpha = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\,\alpha\right).$$

Innen már egyszerű átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$m\,\alpha^m = A + (m-1)\alpha^m \quad \Longrightarrow \quad \alpha^m = A.$$

Így a tétel minden állítását bebizonyítottuk.

6. tétel (A Cauchy-féle konvergenciakritérium). *Legyen (a_n) egy valós sorozat. Ekkor*

$$(a_n) \text{ konvergens} \iff (a_n) \text{ Cauchy-sorozat.}$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens, és $A := \lim(a_n)$ a határértéke. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. A konvergencia definíciója szerint

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0\colon |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így $\forall\, m, n > n_0$ index esetén

$$|a_n - a_m| = \big|(a_n - A) + (A - a_m)\big| \le |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy (a_n) Cauchy-sorozat.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy (a_n) Cauchy-sorozat. Több lépésen keresztül látjuk be, hogy (a_n) konvergens.

1. lépés. Igazoljuk, hogy (a_n) korlátos sorozat. Valóban: A Cauchy-sorozat definíciójában $\varepsilon = 1$-hez van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$\forall\, m, n > n_1: \quad |a_n - a_m| < 1.$$

Legyen $m = n_1 + 1$. Ekkor minden $n > n_1$ esetén

$$|a_n| = \Big|\big(a_n - a_{n_1+1} + a_{n_1+1}\big)\Big| \le \big|a_n - a_{n_1+1}\big| + \big|a_{n_1+1}\big| < 1 + \big|a_{n_1+1}\big|.$$

Következésképpen az

$$|a_n| \le \max\Big\{\big|a_0\big|, \big|a_1\big|, \dots \big|a_{n_1}\big|, 1 + \big|a_{n_1+1}\big|\Big\}$$

egyenlőtlenség már minden $n \in \mathbb{N}$ számra igaz, azaz a sorozat valóban korlátos.

2. lépés. A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy (a_n)-nek létezik egy (a_{ν_n}) konvergens részsorozata. Legyen

$$A := \lim(a_{\nu_n}) \in \mathbb{R}.$$

3. lépés. Belátjuk, hogy $\lim(a_n) = A$ is igaz.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor A definíciójából következik, hogy

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}, \quad n > n_2: \quad \big|a_{\nu_n} - A\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az (a_n) Cauchy-sorozat, ezért $\varepsilon/2$-höz

$$\exists\, n_3 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n, m > n_3: \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $(\nu_n): \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat (vagyis (ν_n) szigorúan monoton növekedő), ezért $\nu_n \ge n$ $(n \in \mathbb{N})$, amit teljes indukcióval lehet igazolni.

Ha $n > n_0 := \max\{n_2, n_3\}$, akkor $\nu_n > n_0$, ezért n és $m := \nu_n$ is nagyobb, mint n_2 és n_3, tehát alkalmazhatók a fenti egyenlőtlenségek. Ekkor

$$|a_n - A| = |(a_n - a_{\nu_n}) + (a_{\nu_n} - A)| \le |a_n - a_m| + |a_{\nu_n} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat valóban konvergens, és $\lim(a_n) = A$.