2. tétel (Műveletek nullasorozatokkal). *Tegyük fel, hogy* $\lim(a_n) = 0$ *és* $\lim(b_n) = 0$. *Ekkor*

1^o $(a_n + b_n)$ *is nullasorozat,*

2^o *ha* (c_n) *korlátos sorozat, akkor* $(c_n \cdot a_n)$ *nullasorozat,*

3^o $(a_n \cdot b_n)$ *nullasorozat.*

Bizonyítás.

1^o Mivel $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$, ezért $\forall \varepsilon > 0$-hoz

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \text{hogy}\ \forall\, n > n_1 :\ |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ \text{ és}$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \text{hogy}\ \forall\, n > n_2 :\ |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim(a_n + b_n) = 0$, azaz $(a_n + b_n)$ valóban nullasorozat.

2^o A (c_n) sorozat korlátos, ezért

$$\exists\, K > 0 :\ |c_n| < K \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel (a_n) nullasorozat, ezért

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \text{hogy}\ \forall\, n > n_0 :\ |a_n| < \frac{\varepsilon}{K},$$

következésképpen minden $n > n_0$ indexre

$$|c_n \cdot a_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

azaz $\lim(c_n \cdot a_n) = 0$.

3^o Mivel minden konvergens sorozat korlátos, ezért a $\lim(b_n) = 0$ feltételből következik, hogy (b_n) korlátos sorozat. Az állítás tehát **2^o** közvetlen következménye.

3. tétel (Műveletek konvergens sorozatokkal). *Tegyük fel, hogy az* (a_n) *és a* (b_n) *sorozat konvergens. Legyen*

$$\lim(a_n) = A \in \mathbb{R} \quad \textit{és} \quad \lim(b_n) = B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

1^o $(a_n + b_n)$ *is konvergens és* $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = A + B$,

2^o $(a_n \cdot b_n)$ *is konvergens és* $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = A \cdot B$,

3^o *ha* $b_n \ne 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és* $\lim(b_n) \ne 0$, *akkor*

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \ \textit{ is konvergens és } \ \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{A}{B}.$$

Bizonyítás. Gyakran fogjuk alkalmazni a nullasorozatok **2^o** alaptulajdonságát, ami azt állítja, hogy

$$(*) \qquad (x_n)\ \text{konvergens és}\ \alpha \in \mathbb{R}\ \text{a határértéke} \quad \Longleftrightarrow \quad (x_n - \alpha)\ \text{nullasorozat.}$$

1^o A $(*)$ állítás miatt elég azt megmutatni, hogy

$$\Big((a_n + b_n) - (A + B)\Big) \qquad \text{nullasorozat.}$$

Ez nyilván igaz, mert

$$\Big((a_n + b_n) - (A + B)\Big) = (a_n - A) + (b_n - B),$$

és két nullasorozat összege is nullasorozat.

2^o A $(*)$ állítás miatt elég azt megmutatni, hogy $\Big(a_n b_n - AB\Big)$ nullasorozat. Ez a következő átalakítással igazolható:

$$a_n b_n - AB = a_n b_n - A b_n + A b_n - AB =$$
$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{b_n}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(a_n - A)}_{\text{0-sorozat}}}_{\text{0-sorozat}} + \underbrace{\underbrace{A}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(b_n - B)}_{\text{0-sorozat}}}_{\text{0-sorozat}}}_{\text{0-sorozat}}.$$

A fenti gondolatmenetben a (b_n) sorozat azért korlátos, mert konvergens. Így $\Big(a_n b_n - AB\Big)$ valóban nullasorozat, ezért az $\Big(a_n \cdot b_n\Big)$ szorzat-sorozat konvergens, és $A \cdot B$ a határértéke, azaz

$$\lim\Big(a_n \cdot b_n\Big) = A \cdot B = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n).$$

3^o A bizonyításhoz először egy önmagában is érdekes állítást igazolunk.

Segédtétel. *Ha* $b_n \ne 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és* (b_n) *konvergens, továbbá* $B := \lim(b_n) \ne 0$, *akkor az*

$$\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

reciprok-sorozat korlátos.

Ennek bizonyításához legyen $\varepsilon := |B|/2$. Ekkor egy alkalmas $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex mellett

$$|b_n - B| < \varepsilon = \frac{|B|}{2} \qquad \forall n > n_0\ \text{indexre.}$$

Így minden $n > n_0$ esetén

$$|b_n| = |B + b_n - B| \ge |B| - |b_n - B| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}.$$

Tehát

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| < \frac{2}{|B|}, \quad \text{ha } n > n_0,$$

következésképpen az

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \le \max\left\{\frac{1}{|b_0|}, \frac{1}{|b_1|}, \ldots, \frac{1}{|b_{n_0}|}, \frac{2}{|B|}\right\}$$

egyenlőtlenség már minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül, ezért az $\Big(1/b_n\Big)$ sorozat valóban korlátos. A segédtételt tehát bebizonyítottuk. $\square$

Most azt látjuk be, hogy a (b_n) sorozatra tett feltétel mellett

$$\left(\frac{1}{b_n}\right) \quad \text{sorozat konvergens} \quad \text{és} \quad \lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{B}.$$

Ez $(*)$-ból következik az alábbi átalakítással:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} = \frac{B - b_n}{B \cdot b_n} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{B \cdot b_n}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(B - b_n)}_{\text{0-sorzat}}}_{\text{0-sorzat}}.$$

A **3^o** állítás bizonyításának a befejezéséhez már csak azt kell figyelembe venni, hogy

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

más szóval az (a_n/b_n) „hányados-sorozat” két konvergens sorozat szorzata. Így a **2^o** állítás és a reciprok sorozatról az előbb mondottak miatt

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{is konvergens és} \quad \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B} = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)}.$$

5. tétel. *Minden* (a_n) *monoton sorozatnak van határértéke.*

1^o **(a)** *Ha* $(a_n) \nearrow$ *és felülről korlátos, akkor* (a_n) *konvergens és*

$$\lim(a_n) = \sup\Big\{a_n \ \Big|\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

(b) *Ha* $(a_n) \searrow$ *és alulról korlátos, akkor* (a_n) *konvergens és*

$$\lim(a_n) = \inf\Big\{a_n \ \Big|\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

2^o **(a)** *Ha* $(a_n) \nearrow$ *és felülről nem korlátos, akkor*

$$\lim(a_n) = +\infty.$$

(b) *Ha* $(a_n) \searrow$ *és alulról nem korlátos, akkor*

$$\lim(a_n) = -\infty.$$

Bizonyítás. Az állítást csak monoton növekedő sorozatokra fogjuk igazolni. Értelemszerű módosításokkal bizonyíthatjuk be az állítást a monoton csökkenő sorozatokra.

1^o (a) Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat monoton növekedő és felülről korlátos. Legyen

$$A := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Ez azt jelenti, hogy A a szóban forgó halmaznak a legkisebb felső korlátja, azaz

- $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le A$ és
- $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ A - \varepsilon < a_{n_0} \le A$.

Mivel a feltételezésünk szerint az (a_n) sorozat monoton növekedő, ezért az

$$A - \varepsilon < a_n \le A$$

becslés is igaz minden $n > n_0$ indexre.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \text{hogy}\ \forall\, n > n_0 :\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat konvergens és $\lim(a_n) = A$.

2^o (a) Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat monoton növekedő és felülről nem korlátos. Ekkor

$$\forall\, P > 0\text{-hoz}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ a_{n_0} > P.$$

A monotonitás miatt ezért egyúttal az is igaz, hogy

$$\forall\, n > n_0 :\ a_n > P,$$

és ez pontosan azt jelenti, hogy $\lim(a_n) = +\infty$.